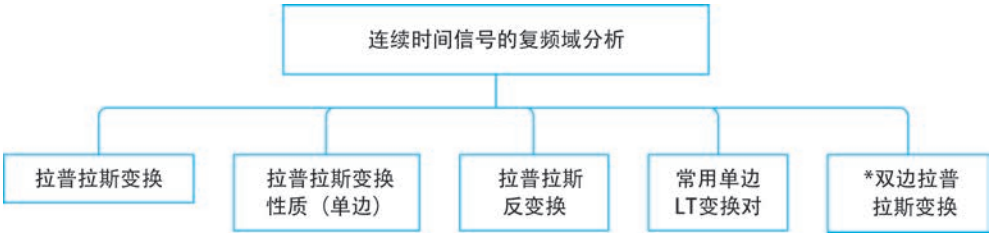
第5章 连续时间信号与系统复频域分析

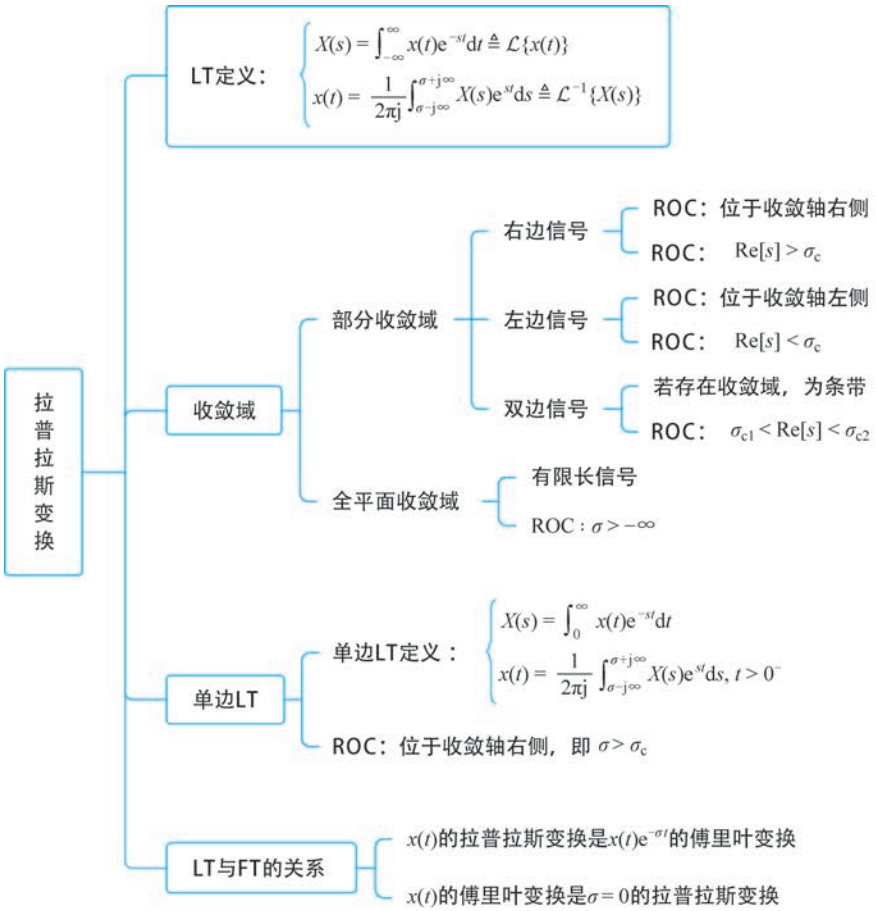
5.1 本章知识图谱

5.1.1 连续时间信号复频域分析知识图谱

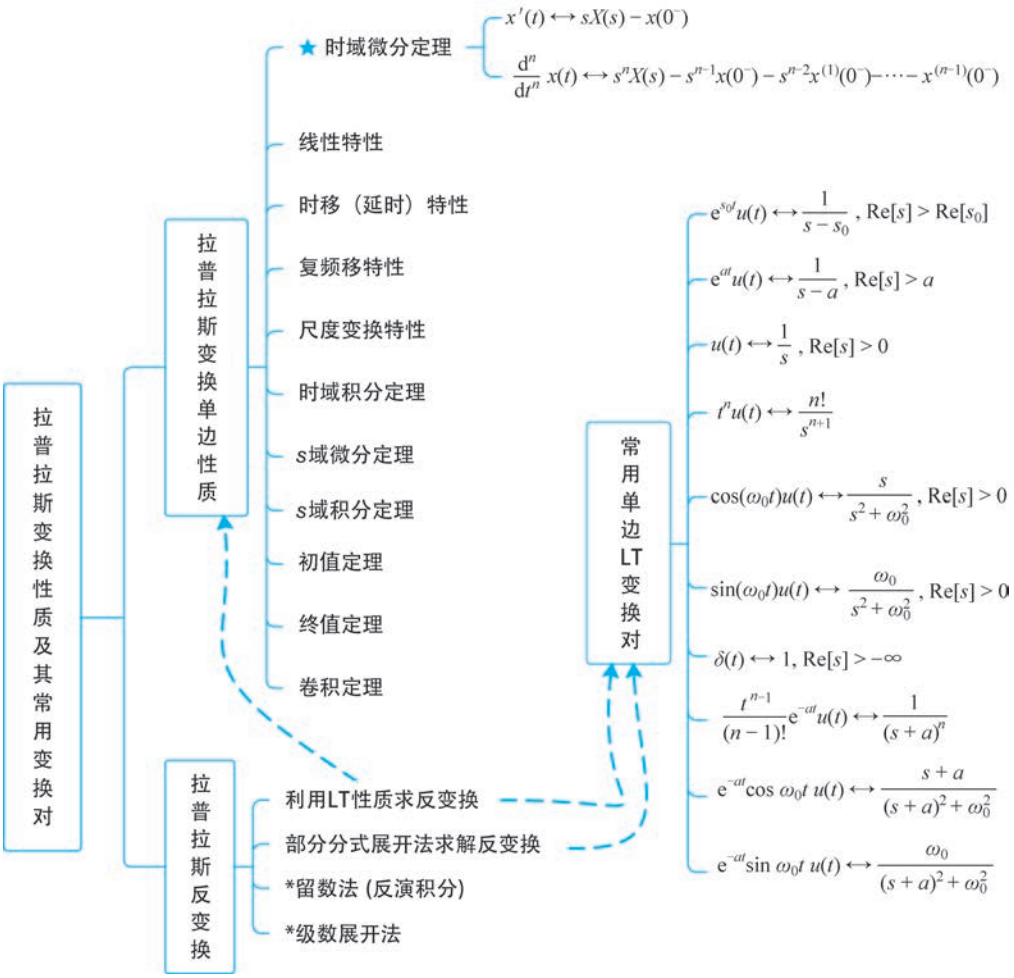


图谱 1　连续时间信号复频域分析知识图谱结构图

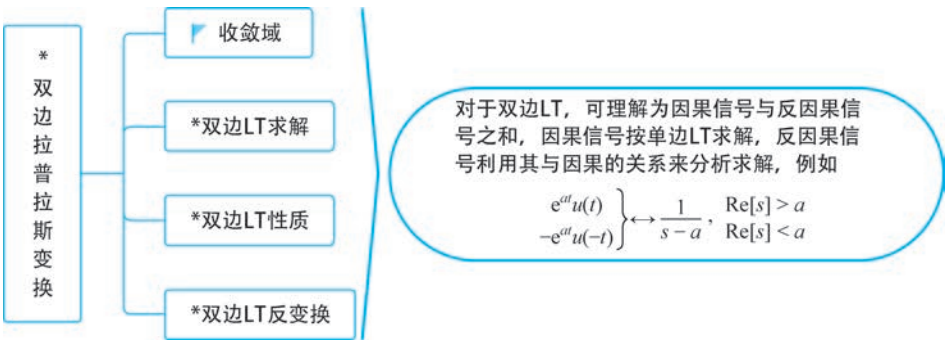
知识图谱



图谱 2　拉普拉斯变换

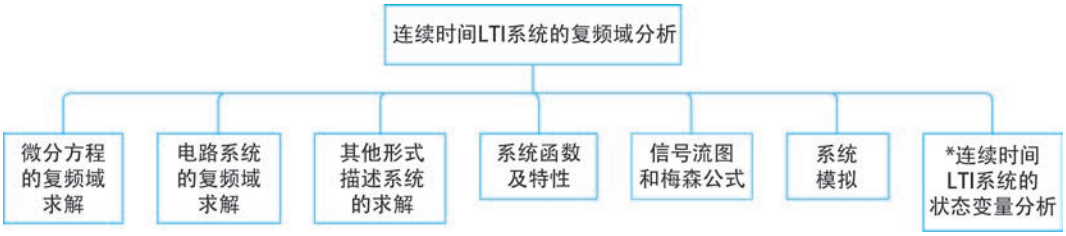


图谱 3　拉普拉斯变换性质及其常用变换对

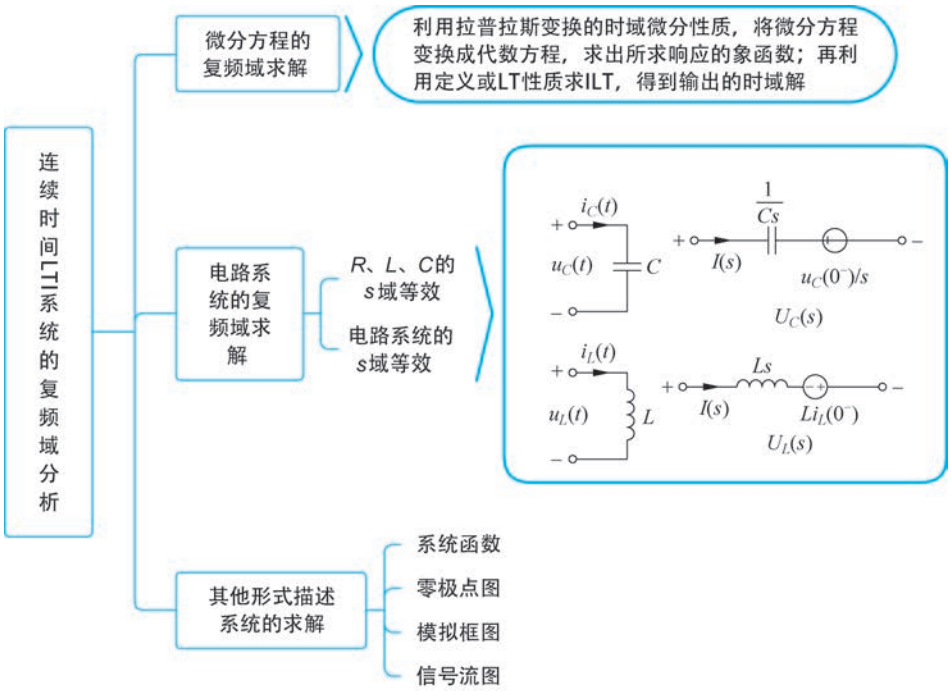


图谱 4　双边拉普拉斯变换

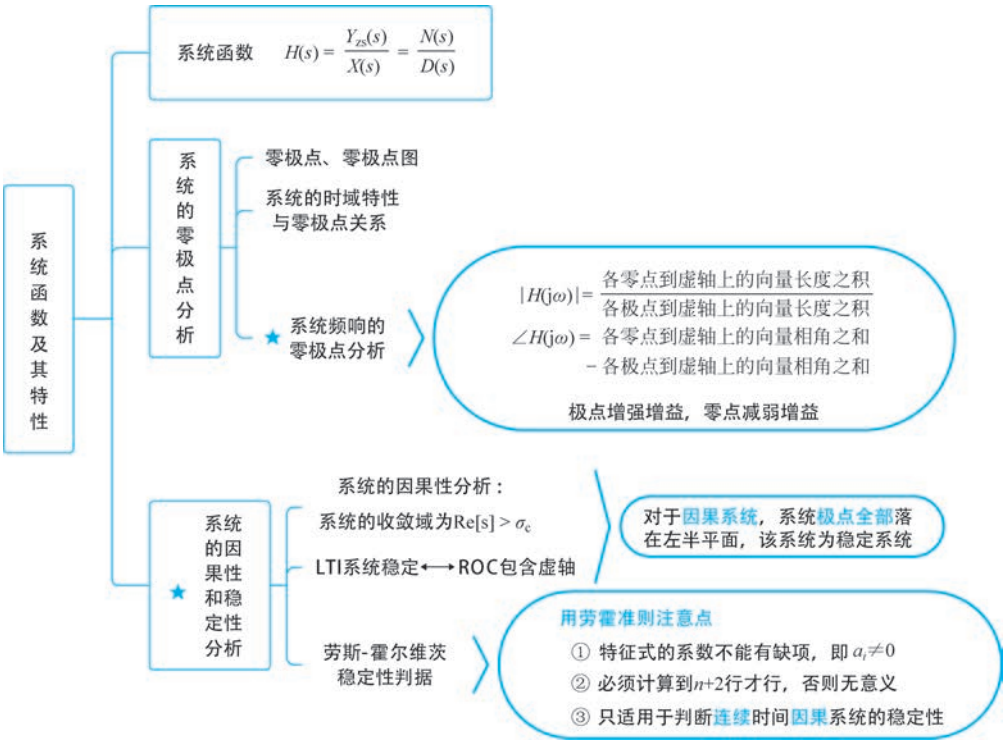
5.1.2 连续时间线性时不变系统复频域分析知识图谱



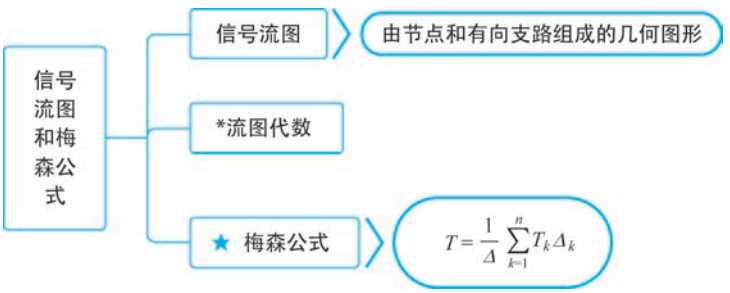
图谱 5　连续时间线性时不变系统复频域分析知识图谱结构图



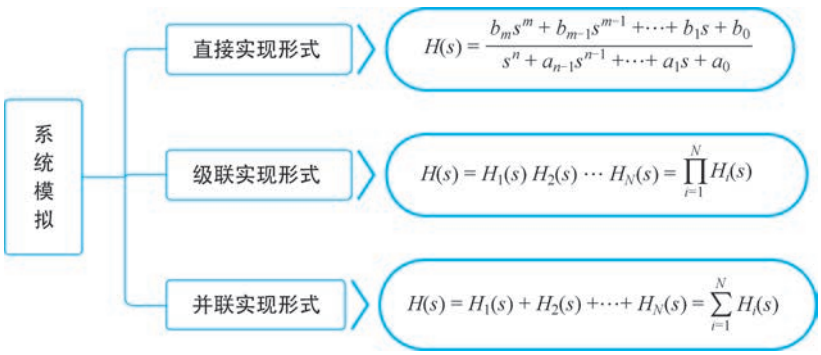
图谱 6　连续时间线性时不变系统的复频域分析



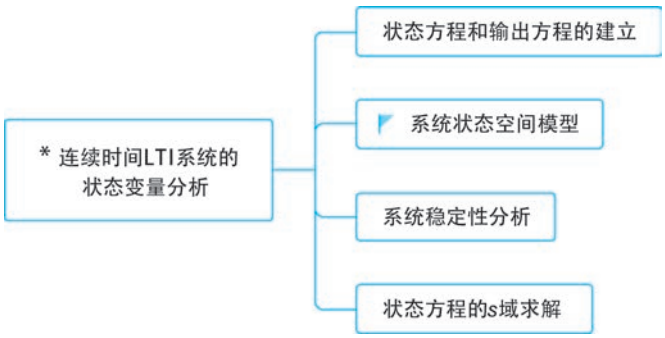
图谱 7　系统函数及其特性



图谱 8　信号流图和梅森公式



图谱 9　系统模拟



图谱 10　连续时间线性时不变系统的状态变量分析

5.2 习题解答

5.2.1 基本题

5.1 指出下列信号双边拉普拉斯变换的收敛域：

(1) $u(t)$；　(2) $\sin(2t)u(t)$；　(3) $tu(t)$；　(4) $e^{3t}u(t)$；

(5) $u(t)-u(t-4)$；(6) $e^{-|t|}$；　(7) $e^{|t|}$。

【知识点】 本题知识点对应教材 5.1.2 节和 5.4.2 节。

【解题思路】

收敛域要保证 $\lim\limits_{t\to\pm\infty}x(t)e^{-\sigma t}=0$

【解题过程】

(1) $u(t)$为右边信号，$\lim\limits_{t\to-\infty}u(t)e^{-\sigma t}=\lim\limits_{t\to-\infty}0e^{-\sigma t}=0$

只需考虑 $t\to\infty$。$\lim\limits_{t\to\infty}u(t)e^{-\sigma t}=\lim\limits_{t\to\infty}1e^{-\sigma t}=0,\sigma>0$

因此，收敛域为 $\sigma>0$ 或 $\mathrm{Re}[s]>0$。

(2) $\sin(2t)u(t)$为右边信号，只需考虑 $t\to\infty$。

$$\lim_{t\to\infty}\sin(2t)u(t)e^{-\sigma t}=\lim_{t\to\infty}\sin(2t)e^{-\sigma t}=0,\quad \sigma>0$$

因此，收敛域为 $\mathrm{Re}[s]>0$。

(3) $tu(t)$为右边信号，只需考虑 $t\to\infty$。

$$\lim_{t\to\infty}tu(t)e^{-\sigma t}=\lim_{t\to\infty}te^{-\sigma t}=0,\quad \sigma>0$$

因此，收敛域为 $\mathrm{Re}[s]>0$。

(4) $e^{3t}u(t)$为右边信号，只需考虑 $t\to\infty$。

$$\lim_{t\to\infty}e^{3t}u(t)e^{-\sigma t}=\lim_{t\to\infty}e^{3t}e^{-\sigma t}=0,\quad \sigma>3$$

因此，收敛域为 $\mathrm{Re}[s]>3$。

(5) $u(t)-u(t-4)$为有限长信号，

$$\lim_{t\to\infty}[u(t)-u(t-4)]e^{-\sigma t}=\lim_{t\to\infty}0e^{-\sigma t}=0,\quad \sigma>-\infty$$

$$\lim_{t\to-\infty}[u(t)-u(t-4)]e^{-\sigma t}=\lim_{t\to-\infty}0e^{-\sigma t}=0,\quad \sigma<\infty$$

因此，收敛域为全平面，即 $\mathrm{Re}[s]>-\infty$。

(6) 方法一

$$\lim_{t\to\infty}e^{-|t|}\,e^{-\sigma t}=\lim_{t\to\infty}e^{-t}e^{-\sigma t}=0,\quad \sigma>-1$$

$$\lim_{t\to-\infty}e^{-|t|}\,e^{-\sigma t}=\lim_{t\to-\infty}e^{t}e^{-\sigma t}=0,\quad \sigma<1$$

因此，收敛域为 $-1<\mathrm{Re}[s]<1$。

方法二

$$e^{-|t|}=e^{-t}u(t)+e^{t}u(-t)$$

和信号收敛域为两个信号收敛域的交集，因此收敛域为$-1<\mathrm{Re}[s]<1$。

(7)

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{|t|}\ \mathrm{e}^{-\sigma t}=\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{t}\mathrm{e}^{-\sigma t}=0,\quad \sigma>1$$

$$\lim_{t\to-\infty} \mathrm{e}^{|t|}\ \mathrm{e}^{-\sigma t}=\lim_{t\to-\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-\sigma t}=0,\quad \sigma<-1$$

由于$\sigma>1$与$\sigma<-1$无交集，因此其收敛域不存在。

5.2 求下列信号的双边拉普拉斯变换，并指明其收敛域：

(1) $\delta(t)$；　　(2) $u(t)$；

(3) $-u(-t)$；　　(4) $x(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{2t}, & t>0\\ \mathrm{e}^{-3t}, & t<0\end{cases}$；

(5) $x(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-4t}, & t>0\\ \mathrm{e}^{3t}, & t<0\end{cases}$。

【知识点】 本题知识点对应教材5.4节。

【解题思路】

可根据拉普拉斯变换的定义$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$计算，使得该积分存在的$s$的实部范围确定为其收敛域。也可直接根据常用变换对$\delta(t)\leftrightarrow 1$，全平面收敛、$\mathrm{e}^{at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s-a}$，$\mathrm{Re}[s]>a$、$\mathrm{e}^{at}u(-t)\leftrightarrow-\frac{1}{s-a}$，$\mathrm{Re}[s]<a$得到。

【解题过程】

(1) 方法一：$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$，其收敛域为$\mathrm{Re}[s]>-\infty$。

方法二：直接根据常用变换对$\delta(t)\leftrightarrow 1$，全平面收敛。

(2) 方法一：$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=-\frac{1}{s}\cdot\mathrm{e}^{-st}\big|_{0}^{\infty}=-\frac{1}{s}(0-1)=\frac{1}{s}$，其收敛域为使得该积分收敛的$s$的实部，即$\mathrm{Re}[s]>0$。

方法二：令$a=0$，根据常用变换对可得$u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s}$，$\mathrm{Re}[s]>0$。

(3) 方法一：$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}-u(-t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=-\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=-\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}t=\frac{1}{s}$，其收敛域为$\mathrm{Re}[s]<0$。

方法二：令$a=0$，根据常用变换对可得$-u(-t)\leftrightarrow\frac{1}{s}$，$\mathrm{Re}[s]<0$。

(4) 方法一：$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{2t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$，由于使得该式中的两个积分存在的收敛域分别为$\mathrm{Re}[s]<-3$和$\mathrm{Re}[s]>2$，它们没有交集，因此该拉普拉斯变换不存在。

方法二：根据常用变换对，两信号收敛域分别为s的实部大于2和小于-3，没交集，故拉普拉斯变换不存在。

（5）方法一：$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{3t}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-4t}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{s+4}-\frac{1}{s-3}$，收敛域为 $\mathrm{Re}[s]>-4$ 和 $\mathrm{Re}[s]<3$ 的交集，即 $-4<\mathrm{Re}[s]<3$。

方法二：根据常用变换对，$\begin{cases}\mathrm{e}^{-4t}, & t>0\\ \mathrm{e}^{3t}, & t<0\end{cases}\leftrightarrow\frac{1}{s+4}-\frac{1}{s-3}$，$-4<\mathrm{Re}[s]<3$。

5.3 判断下列信号的傅里叶变换是否存在，单边拉普拉斯变换是否存在？如果存在，请写出，并画出其收敛域。

（1）$x(t)=u(t)$；　　（2）$x(t)=tu(t)$；

（3）$x(t)=\delta(t)$；　　（4）$x(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$；

（5）$x(t)=\mathrm{e}^{2t}u(t)$。

【知识点】 本题知识点对应教材 5.1.3 节和 5.1.4 节。

【解题思路】

根据常用变换对和性质得出信号的傅里叶变换和拉普拉斯变换。观察收敛域可知，若单边拉普拉斯变换的收敛域包含虚轴，$X(\mathrm{j}\omega)=X(s)|_{s=\mathrm{j}\omega}$；若收敛域以虚轴为界，傅里叶变换存在，但不能互换；若收敛域不包含虚轴且不以虚轴为界，傅里叶变换不存在。

【解题过程】

（1）根据第 3 章可知，$x(t)=u(t)$ 的傅里叶变换存在，其傅里叶变换为

$$X(\mathrm{j}\omega)=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$$

其单边拉普拉斯变换同样存在，$X(s)=\int_{0}^{\infty}u(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{s}$，$\mathrm{Re}[s]>0$。

（2）根据常用傅里叶变换对和性质可知，$x(t)=tu(t)$ 的傅里叶变换存在，其傅里叶变换为

$$X(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{j}\pi\delta'(\omega)-\frac{1}{\omega^2}$$

其单边拉普拉斯变换存在，由于 $u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s}$，$\mathrm{Re}[s]>0$，因此 $tu(t)\leftrightarrow-\frac{\mathrm{d}\frac{1}{s}}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{s^2}$，$\mathrm{Re}[s]>0$。

（3）$x(t)=\delta(t)$ 的傅里叶变换存在，其傅里叶变换为 $X(\mathrm{j}\omega)=1$。

$x(t)=\delta(t)$ 的拉普拉斯变换存在，$X(s)=1$，$\mathrm{Re}[s]>-\infty$。

（4）$x(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$ 的傅里叶变换存在，其傅里叶变换为 $X(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega+2}$。

$x(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$ 的拉普拉斯变换存在，$X(s)=\frac{1}{s+2}$，$\mathrm{Re}[s]>-2$。

（5）由于 $x(t)=\mathrm{e}^{2t}u(t)$ 不满足狄利赫里条件，其傅里叶变换不存在。

$x(t)=\mathrm{e}^{2t}u(t)$ 的拉普拉斯变换存在，$X(s)=\frac{1}{s-2}$，$\mathrm{Re}[s]>2$。

收敛域图如图 5.1 所示。

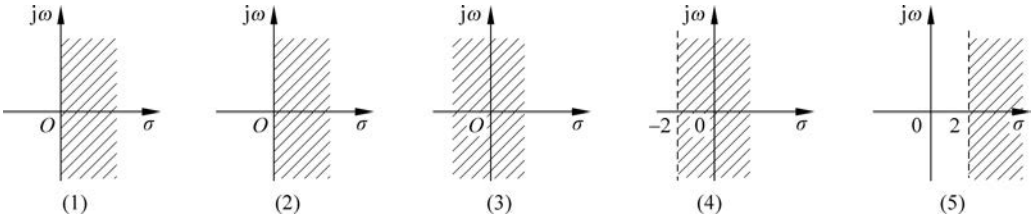


图 5.1

5.4 求下列信号的单边拉普拉斯变换。

(1) $\frac{1}{a}(1-e^{-at})u(t)$；

(2) $e^{-t}u(t-2)$；

(3) $e^{-t}[u(t)-u(t-2)]$；

(4) $u(t)-2u(t-1)+u(t-2)$；

(5) $2\delta(t)-3e^{-7t}u(t)$；

(6) $(\sin t+2\cos t)u(t)$；

(7) $e^{-t}\sin 2tu(t)$；

(8) $e^{-(t+a)}\cos(\omega_0 t)u(t)$；

(9) $(1-\cos\alpha t)e^{-\beta t}u(t)$；

(10) $e^{-at}\sin(\beta t+\theta)u(t)$；

(11) $(1+2t)e^{-t}u(t)$；

(12) $t\delta'(t)$；

(13) $t^2u(t-1)$；

(14) $(t-1)[u(t-1)-u(t-2)]$；

(15) $(t-\tau)\sin[\omega_0(t-\tau)]u(t-\tau),\tau>0$；

(16) $(t^3+t^2+t+1)u(t)$；

(17) $te^{-at}\sin 2tu(t)$；

(18) $\frac{1}{t}(e^{-3t}-e^{-4t})u(t)$；

(19) $e^{-2(t+1)}u(t+1)$。

【知识点】 本题知识点对应教材 5.1.3 节、5.2 节。

【解题思路】

可根据单边拉普拉斯变换的定义 $X(s)=\int_{0^-}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt$ 计算各信号的单边拉普拉斯变换，推荐采用常用变换对 + 性质的方法计算，常用变换对有 $e^{at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s-a}$、$\delta(t)\leftrightarrow 1$、$e^{at}\sin(\omega_0 t)u(t)\leftrightarrow\frac{\omega_0}{(s-a)^2+\omega_0^2}$、$e^{at}\cos(\omega_0 t)u(t)\leftrightarrow\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega_0^2}$ 等，性质有 $x(t-t_0)u(t-t_0),t_0>0\leftrightarrow X(s)e^{-st_0}$、$tx(t)\leftrightarrow-\frac{d}{ds}X(s)$。

【解题过程】

(1) 方法一：按照定义式

$$X(s)=\int_{0^-}^{\infty}\frac{1}{a}(1-e^{-at})u(t)e^{-st}dt=\frac{1}{a}\int_0^{\infty}(1-e^{-at})e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}\right)=\frac{1}{s(s+a)}$$

方法二：利用常用拉普拉斯变换对：$e^{at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s-a},\sigma>a$

可得 $\frac{1}{a}(1-\mathrm{e}^{-at})u(t)\leftrightarrow\frac{1}{a}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}\right)=\frac{1}{s(s+a)}$

（2）方法一：按照定义式

$$X(s)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}u(t-2)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\int_2^{\infty}\mathrm{e}^{-(s+1)t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{s+1}\mathrm{e}^{-2(s+1)}$$

方法二：利用变换对和时移性质

$$\mathrm{e}^{-t}u(t-2)=\mathrm{e}^{-2}[\mathrm{e}^{-(t-2)}u(t-2)]$$

$$=\mathrm{e}^{-2}[\mathrm{e}^{-t}u(t)]*\delta(t-2)\leftrightarrow\mathrm{e}^{-2}\,\frac{1}{s+1}\mathrm{e}^{-2s}=\frac{1}{s+1}\mathrm{e}^{-2(s+1)}$$

（3）方法一：按照定义式

$$X(s)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}[u(t)-u(t-2)]\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2}\mathrm{e}^{-(s+1)t}\,\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{s+1}[\mathrm{e}^{-2(s+1)}-1]=\frac{1}{s+1}[1-\mathrm{e}^{-2(s+1)}]$$

方法二：利用变换对和时移性质

$$\mathrm{e}^{-t}[u(t)-u(t-2)]=\mathrm{e}^{-t}u(t)-\mathrm{e}^{-2}[\mathrm{e}^{-t}u(t)]*\delta(t-2)$$

$$\leftrightarrow\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+1}\mathrm{e}^{-2s}\mathrm{e}^{-2}=\frac{1}{s+1}[1-\mathrm{e}^{-2(s+1)}]$$

（4）方法一：按照定义式计算

$$X(s)=\int_0^{\infty}[u(t)-2u(t-1)+u(t-2)]\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\int_0^{1}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t-\int_1^{2}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{s}(\mathrm{e}^{-s}-1)+\frac{1}{s}(\mathrm{e}^{-2s}-\mathrm{e}^{-s})=\frac{1}{s}(1-2\mathrm{e}^{-s}+\mathrm{e}^{-2s})$$

方法二：利用变换对和时移性质

$$u(t)-2u(t-1)+u(t-2)\leftrightarrow\frac{1}{s}-2\,\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-s}+\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-2s}=\frac{1-2\mathrm{e}^{-s}+\mathrm{e}^{-2s}}{s}$$

（5）方法一：按照定义式计算

$$X(s)=\int_{0^-}^{\infty}[2\delta(t)-3\mathrm{e}^{-7t}u(t)]\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=2\int_{0^-}^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t-3\int_{0^-}^{\infty}\mathrm{e}^{-7t}u(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$=2-3\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(s+7)t}\,\mathrm{d}t=2-\frac{3}{s+7}=\frac{2s+11}{s+7}$$

方法二：利用变换对

$$2\delta(t)-3\mathrm{e}^{-7t}u(t)\leftrightarrow2-\frac{3}{s+7}=\frac{2s+11}{s+7}$$

（6）利用变换对可得

$$(\sin t+2\cos t)u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s^2+1}+\frac{2s}{s^2+1}=\frac{1+2s}{s^2+1}$$

（7）利用变换对可得

$$\mathrm{e}^{-t}\sin(2t)u(t)\leftrightarrow\frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

(8) 利用变换对可得

$$e^{-(t+\alpha)}\cos(\omega_0 t)u(t)=e^{-\alpha}e^{-t}\cos(\omega_0 t)u(t)\leftrightarrow e^{-\alpha}\frac{s+1}{(s+1)^2+{\omega_0}^2}$$

(9) 利用变换对可得

$$(1-\cos\alpha t)e^{-\beta t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+\beta}-\frac{s+\beta}{(s+\beta)^2+\alpha^2}=\frac{\alpha^2}{(s+\beta)^3+\alpha^2(s+\beta)}$$

(10) 利用变换对可得

$$e^{-at}\sin(\beta t+\theta)u(t)=e^{-at}\sin\beta t\cos\theta u(t)+e^{-at}\cos\beta t\sin\theta u(t)\leftrightarrow\frac{\beta\cos\theta+(s+a)\sin\theta}{(s+a)^2+\beta^2}$$

(11) 因为 $e^{-t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+1}$ 故 $te^{-t}u(t)\leftrightarrow-\frac{d\frac{1}{s+1}}{ds}=\frac{1}{(s+1)^2}$

因此$(1+2t)e^{-t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+1}+2\frac{1}{(s+1)^2}=\frac{s+3}{(s+1)^2}$

(12) $\delta(t)\leftrightarrow1$ 利用时域微分性质 $\delta'(t)\leftrightarrow s$

再利用复频域微分性质 $t\delta'(t)\leftrightarrow-(s)'=-1$

(13) 方法一：

$u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s}$ 利用复频域微分性质 $tu(t)\leftrightarrow-\frac{d\frac{1}{s}}{ds}=\frac{1}{s^2}$，$t^2u(t)\leftrightarrow-\frac{d\frac{1}{s^2}}{ds}=\frac{2}{s^3}$

再利用时移性质

$$t^2u(t-1)=(t-1)^2u(t-1)+2(t-1)u(t-1)+u(t-1)$$
$$\leftrightarrow\frac{2}{s^3}e^{-s}+\frac{2}{s^2}e^{-s}+\frac{1}{s}e^{-s}=\left(\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}\right)e^{-s}$$

方法二：

$$u(t-1)\leftrightarrow\frac{1}{s}e^{-s}$$

$$tu(t-1)\leftrightarrow-\frac{d\frac{1}{s}e^{-s}}{ds}=\frac{1}{s^2}e^{-s}+\frac{1}{s}e^{-s}$$

$$t^2u(t-1)\leftrightarrow-\frac{d\left(\frac{1}{s^2}e^{-s}+\frac{1}{s}e^{-s}\right)}{ds}=\frac{2}{s^3}e^{-s}+\frac{1}{s^2}e^{-s}+\frac{1}{s^2}e^{-s}+\frac{1}{s}e^{-s}$$
$$=\left(\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}\right)e^{-s}$$

(14) $(t-1)[u(t-1)-u(t-2)]=(t-1)u(t-1)-(t-1)u(t-2)$
$=(t-1)u(t-1)-[(t-2)u(t-2)+u(t-2)]$
$=[tu(t)]*\delta(t-1)-[tu(t)]*\delta(t-2)-u(t-2)$

$$\leftrightarrow \frac{1}{s^2}e^{-s}-\frac{1}{s^2}e^{-2s}-\frac{1}{s}e^{-2s}=\frac{e^{-s}-e^{-2s}-se^{-2s}}{s^2}$$

(15) $(t-\tau)\sin[\omega_0(t-\tau)]u(t-\tau)=[t\sin(\omega_0 t)u(t)]*\delta(t-\tau)$

利用常用变换对，$\sin(\omega_0 t)u(t)\leftrightarrow\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$

借助复频域微分性质 $t\sin(\omega_0 t)u(t)\leftrightarrow-\frac{\mathrm{d}\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}}{\mathrm{d}s}=\frac{2\omega_0 s}{(s^2+\omega_0^2)^2}$

再利用时移性质 $(t-\tau)\sin\omega_0(t-\tau)u(t-\tau)\leftrightarrow\frac{2\omega_0 s}{(s^2+\omega_0^2)^2}e^{-s\tau}$

(16) 因为 $u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s}$，$tu(t)\leftrightarrow-\frac{\mathrm{d}\frac{1}{s}}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{s^2}$，$t^2u(t)\leftrightarrow-\frac{\mathrm{d}\frac{1}{s^2}}{\mathrm{d}s}=\frac{2}{s^3}$，$t^3u(t)\leftrightarrow-\frac{\mathrm{d}\frac{2}{s^3}}{\mathrm{d}s}=\frac{6}{s^4}$

所以 $(t^3+t^2+t+1)u(t)\leftrightarrow\frac{s^3+s^2+2s+6}{s^4}$

(17) 根据变换对 $e^{-at}\sin 2tu(t)\leftrightarrow\frac{2}{(s+a)^2+4}$

再利用复频域微分性质 $te^{-at}\sin 2tu(t)\leftrightarrow-\frac{\mathrm{d}\frac{2}{(s+a)^2+4}}{\mathrm{d}s}=\frac{4(s+a)}{[(s+a)^2+4]^2}$

(18) 利用 $e^{-3t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+3}$

借助 s 域积分定理 $\frac{1}{t}e^{-3t}u(t)\leftrightarrow\int_s^\infty\frac{1}{s+3}\mathrm{d}s=\ln(s+3)\Big|_s^\infty=-\ln(s+3)$

类似地，$\frac{1}{t}e^{-4t}u(t)\leftrightarrow\int_s^\infty\frac{1}{s+4}\mathrm{d}s=\ln(s+4)\Big|_s^\infty=-\ln(s+4)$

整理得 $\frac{1}{t}(e^{-3t}-e^{-4t})u(t)\leftrightarrow-\ln(s+3)-[-\ln(s+4)]=\ln\frac{s+4}{s+3}$

(19) 方法一：按照定义式计算

$$\begin{aligned}X(s)&=\int_0^\infty e^{-2(t+1)}u(t+1)e^{-st}\mathrm{d}t\\&=\int_{-1}^\infty e^{-2(t+1)}e^{-st}\mathrm{d}t\\&=\frac{e^{-2}}{s+2}\end{aligned}$$

方法二：

由于单边拉普拉斯变换的积分下限从零开始，

因此 $e^{-2(t+1)}u(t+1)$ 的单边拉普拉斯变换，等价于求 $e^{-2(t+1)}u(t)$ 的单边拉普拉斯变换。

$$e^{-2(t+1)}u(t)=e^{-2}[e^{-2t}u(t)]\leftrightarrow\frac{e^{-2}}{s+2}$$

5.5 若已知$\mathcal{L}[x(t)]=X(s)$，求$e^{-at}x\left(\frac{t}{a}\right)$的拉普拉斯变换($a>0$，且$a$为实数)。

【知识点】 本题知识点对应教材5.2.3节和5.2.4节。

【解题思路】

利用拉普拉斯变换的复频移特性$x(t)e^{s_0t}\leftrightarrow X(s-s_0)$和尺度变换特性$x(at)$，$a>0\leftrightarrow\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$解题。

【解题过程】

由于$\mathcal{L}[x(t)]=X(s)$，根据拉普拉斯变换的尺度变换特性，有

$$\mathcal{L}\left[x\left(\frac{t}{a}\right)\right]=aX(as),\quad a>0$$

根据复频移特性，有

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}x\left(\frac{t}{a}\right)\right]=aX(a(s+a))=aX(as+a^2),\quad a>0$$

5.6 求图5.2中信号$x_1(t)$的拉普拉斯变换，并将其他信号的拉普拉斯变换表示成$X_1(s)$的形式。

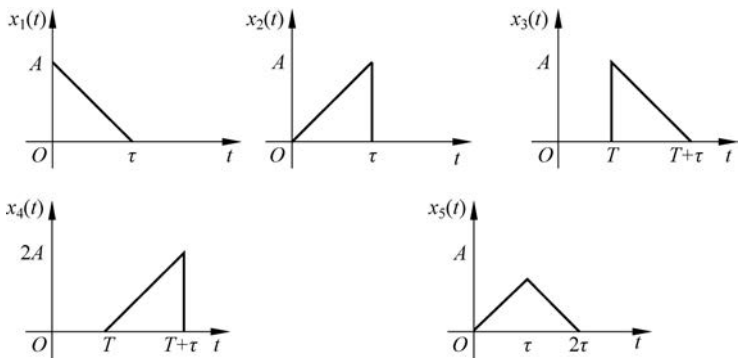


图 5.2

【知识点】 本题考查拉普拉斯变换的计算及其性质，对应教材5.1节、5.2节。

【解题思路】

首先利用拉普拉斯变换的定义计算信号$x_1(t)$的拉普拉斯变换，再根据其他信号与$x_1(t)$的关系以及拉普拉斯变换的性质计算相应的拉普拉斯变换。

【解题过程】

根据定义式

$$X_1(s)=\int_{0-}^{\infty}x(t)e^{-st}dt=\int_0^{\tau}\left(A-\frac{A}{\tau}t\right)e^{-st}dt=\frac{A}{-s}e^{-st}\Big|_0^{\tau}-\frac{A}{\tau}\int_0^{\tau}te^{-st}dt$$

$$=A\frac{1-\mathrm{e}^{-s\tau}}{s}+\frac{A}{\tau s}\int_0^{\tau}t\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-st}$$

又由于$\int_0^{\tau}t\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-st}=t\mathrm{e}^{-st}\,|_0^{\tau}-\int_0^{\tau}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\tau\mathrm{e}^{-s\tau}+\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s}\Big|_0^{\tau}=\tau\mathrm{e}^{-s\tau}+\frac{\mathrm{e}^{-s\tau}-1}{s}$

因此

$$X_1(s)=A\frac{1-\mathrm{e}^{-s\tau}}{s}+\frac{A}{\tau s}\left(\tau\mathrm{e}^{-s\tau}+\frac{\mathrm{e}^{-s\tau}-1}{s}\right)=\frac{A\tau s-A\tau s\mathrm{e}^{-s\tau}+As\tau\mathrm{e}^{-s\tau}+A\mathrm{e}^{-s\tau}-A}{\tau s^2}$$

$$=\frac{A(\tau s+\mathrm{e}^{-s\tau}-1)}{\tau s^2}$$

根据图 5.2 可得

$$\begin{cases}x_2(t)=x_1(-t+\tau)\\x_3(t)=x_1(t-T)\\x_4(t)=2x_1(-t+\tau+T)\\x_5(t)=x_1(t-\tau)+x_1(-t+\tau)\end{cases}$$

因此

$$\begin{cases}X_2(s)=X_1(-s)\mathrm{e}^{-s\tau}\\X_3(s)=X_1(s)\mathrm{e}^{-sT}\\X_4(s)=2X_1(-s)\mathrm{e}^{-s(\tau+T)}\\X_5(s)=[X_1(s)+X_1(-s)]\mathrm{e}^{-s\tau}\end{cases}$$

5.7 求图 5.3 中信号的拉普拉斯变换。

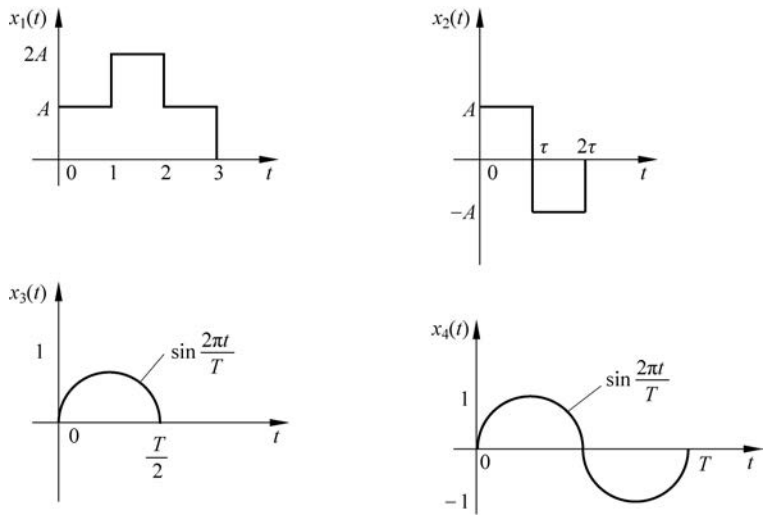


图 5.3

【知识点】 本题考查拉普拉斯变换的定义及其性质，对应教材 5.1 节和 5.2 节。

【解题思路】

若可以将信号表示成常用信号的形式，可利用变换对＋性质计算信号的拉普拉斯变

换。否则，只能利用定义计算。

【解题过程】

(1) 信号 $x_1(t)$ 可以表示为 $x_1(t)=Au(t)+Au(t-1)-Au(t-2)-Au(t-3)$

由于 $u(t)$ 的拉普拉斯变换为 $\frac{1}{s}$，利用拉普拉斯变换的时移特性可得 $x_1(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$X_1(s)=\frac{A}{s}(1+\mathrm{e}^{-s}-\mathrm{e}^{-2s}-\mathrm{e}^{-3s})$$

(2) 信号 $x_2(t)$ 可以表示为 $x_2(t)=Au(t)-2Au(t-\tau)+Au(t-2\tau)$

由于 $u(t)$ 的拉普拉斯变换为 $\frac{1}{s}$，利用拉普拉斯变换的时移特性可得 $x_2(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$X_2(s)=\frac{A}{s}(1-2\mathrm{e}^{-s\tau}+\mathrm{e}^{-2s\tau})$$

(3) 利用拉普拉斯变换的定义

$$X_3(s)=\int_0^{\frac{T}{2}}\sin\frac{2\pi t}{T}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{-s}\int_0^{\frac{T}{2}}\sin\frac{2\pi t}{T}\mathrm{d}\mathrm{e}^{-st}$$

$$=\frac{1}{-s}\sin\frac{2\pi t}{T}\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{\frac{T}{2}}+\frac{2\pi}{Ts}\int_0^{\frac{T}{2}}\mathrm{e}^{-st}\cos\frac{2\pi t}{T}\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{Ts}\int_0^{\frac{T}{2}}\mathrm{e}^{-st}\cos\frac{2\pi t}{T}\mathrm{d}t$$

由于

$$\int_0^{\frac{T}{2}}\mathrm{e}^{-st}\cos\frac{2\pi t}{T}\mathrm{d}t=\frac{1}{-s}\int_0^{\frac{T}{2}}\cos\frac{2\pi t}{T}\mathrm{d}\mathrm{e}^{-st}=\frac{1}{-s}\left(\cos\frac{2\pi t}{T}\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{\frac{T}{2}}-\int_0^{\frac{T}{2}}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\cos\frac{2\pi t}{T}\right)$$

$$=\frac{1}{-s}\left(\cos\pi\mathrm{e}^{-\frac{sT}{2}}-1+\frac{2\pi}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\mathrm{e}^{-st}\sin\frac{2\pi t}{T}\mathrm{d}t\right)$$

$$=\frac{1}{s}\left(\mathrm{e}^{-\frac{sT}{2}}+1-\frac{2\pi}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\mathrm{e}^{-st}\sin\frac{2\pi t}{T}\mathrm{d}t\right)$$

$$=\frac{1}{s}\left(\mathrm{e}^{-\frac{sT}{2}}+1+\frac{2\pi}{sT}\int_0^{\frac{T}{2}}\sin\frac{2\pi t}{T}\mathrm{d}\mathrm{e}^{-st}\right)$$

$$=\frac{1}{s}(\mathrm{e}^{-\frac{sT}{2}}+1)+\frac{2\pi}{s^2T}\left[\sin\frac{2\pi t}{T}\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{\frac{T}{2}}-\frac{2\pi}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\mathrm{e}^{-st}\cos\frac{2\pi t}{T}\mathrm{d}t\right]$$

经整理

$$\left(1+\frac{4\pi^2}{s^2T^2}\right)\int_0^{\frac{T}{2}}\mathrm{e}^{-st}\cos\frac{2\pi t}{T}\mathrm{d}t=\frac{1}{s}(\mathrm{e}^{-\frac{sT}{2}}+1)$$

因此 $X_3(s)=\frac{2\pi}{Ts}\int_0^{\frac{T}{2}}\mathrm{e}^{-st}\cos\frac{2\pi t}{T}\mathrm{d}t=\frac{\frac{2\pi}{Ts}}{1+\frac{4\pi^2}{s^2T^2}}\frac{1}{s}(\mathrm{e}^{-\frac{sT}{2}}+1)=\frac{2\pi T}{s^2T^2+4\pi^2}(\mathrm{e}^{-\frac{sT}{2}}+1)$

（4）信号 $x_4(t)$ 可写为 $x_4(t)=x_3(t)-x_3\left(t-\frac{T}{2}\right)$

根据拉普拉斯变换的时移特性可知

$$X_4(s)=X_3(s)-X_3(s)\mathrm{e}^{-\frac{sT}{2}}X_3(s)=\frac{2\pi T}{s^2T^2+4\pi^2}(\mathrm{e}^{-\frac{sT}{2}}+1)(1-\mathrm{e}^{-\frac{sT}{2}})$$

$$=\frac{2\pi T}{s^2T^2+4\pi^2}(1-\mathrm{e}^{-sT})$$

5.8 已知因果信号 $x(t)$ 的单边拉普拉斯变换为 $X(s)=\frac{1}{s^2+2s+5}$，求下列信号的单边拉普拉斯变换：

（1）$\int_0^t x(\tau)\mathrm{d}\tau$；　　（2）$x(t)\cdot\cos\omega_0 t$；

（3）$x(2t-4)$；　　（4）$\frac{1}{t}x(t)$；

（5）$t\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}$。

【知识点】 本题考查拉普拉斯变换的性质，对应教材 5.2 节。

【解题思路】

已知信号 $x(t)$ 的拉普拉斯变换，根据各信号与 $x(t)$ 的关系，借助拉普拉斯变换性质，即可求解各信号的拉普拉斯变换。

【解题过程】

（1）$x_1(t)=\int_0^t x(\tau)\mathrm{d}\tau=x(t)*u(t)$，因此

$$X_1(s)=X(s)\frac{1}{s}=\frac{1}{s(s^2+2s+5)}$$

（2）$x_2(t)=x(t)\cos\omega_0 t=x(t)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}}{2}$，因此

$$X_2(s)=\frac{1}{2}[X(s+\mathrm{j}\omega_0)+X(s-\mathrm{j}\omega_0)]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(s+\mathrm{j}\omega_0)^2+2(s+\mathrm{j}\omega_0)+5}+\frac{1}{(s-\mathrm{j}\omega_0)^2+2(s-\mathrm{j}\omega_0)+5}\right]$$

（3）$x_3(t)=x(2t-4)$，根据拉普拉斯变换的尺度变换特性，可得

$$X_3(s)=\frac{1}{2}X\left(\frac{s}{2}\right)\mathrm{e}^{-2s}=\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{s}{2}\right)^2+2\left(\frac{s}{2}\right)+5}\mathrm{e}^{-2s}=\frac{2\mathrm{e}^{-2s}}{s^2+4s+20}$$

（4）$x_4(t)=\frac{1}{t}x(t)$，利用拉普拉斯变换的 s 域积分特性可得

$$X_4(s)=\int_s^\infty X(s)\mathrm{d}s=\int_s^\infty\frac{1}{s^2+2s+5}\mathrm{d}s=\int_s^\infty\frac{1}{(s+1)^2+2^2}\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{2}\arctan\frac{s+1}{2}\Big|_{s}^{\infty}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arctan\frac{s+1}{2}$$

(5) $x_5(t)=t\dfrac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}$，利用拉普拉斯变换的时域微分特性可得

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}\leftrightarrow\frac{s^2}{s^2+2s+5}$$

再利用复频域微分性质

$$t\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}\leftrightarrow-\frac{\mathrm{d}\dfrac{s^2}{s^2+2s+5}}{\mathrm{d}s}$$

$$=-\frac{2s(s^2+2s+5)-s^2(2s+2)}{(s^2+2s+5)^2}=-\frac{2s^2+10s}{(s^2+2s+5)^2}$$

5.9 已知因果信号的拉普拉斯变换如下，求 $x(0^+)$ 和 $x(\infty)$。

(1) $\dfrac{s-6}{(s+2)(s+5)}$；

(2) $\dfrac{10(s+2)}{s(s+5)}$；

(3) $\dfrac{1}{(s+3)^3}$；

(4) $\dfrac{s+3}{(s+1)^2(s+2)}$。

【知识点】 本题考查拉普拉斯变换的初值定理和终值定理，对应教材 5.2 节。

【解题思路】

求因果信号的初值和终值，可利用初值定理和终值定理。

初值定理：若 $X(s)$ 为真分式，则 $\lim\limits_{t\to0^+}x(t)=\lim\limits_{s\to\infty}sX(s)$。

终值定理：若 $sX(s)$ 收敛域包含虚轴，则 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=\lim\limits_{s\to0}sX(s)$。

【解题过程】

(1)

$$x(0)=\lim_{s\to\infty}sX(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{s(s-6)}{(s+2)(s+5)}=1$$

$$x(\infty)=\lim_{s\to0}sX(s)=\lim_{s\to0}\frac{s(s-6)}{(s+2)(s+5)}=0$$

(2)

$$x(0)=\lim_{s\to\infty}sX(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{10s(s+2)}{s(s+5)}=10$$

$$x(\infty)=\lim_{s\to0}sX(s)=\lim_{s\to0}\frac{10s(s+2)}{s(s+5)}=4$$

(3)

$$x(0)=\lim_{s\to\infty}sX(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{s}{(s+3)^3}=0$$

$$x(\infty)=\lim_{s\to0}sX(s)=\lim_{s\to0}\frac{s}{(s+3)^3}=0$$

(4)

$$x(0^+)=\lim_{s\to\infty}sX(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{s(s+3)}{(s+1)^2(s+2)}=0$$

$$x(\infty)=\lim_{s\to 0}sX(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s(s+3)}{(s+1)^2(s+2)}=0$$

5.10 求图 5.4 所示单边周期信号($t=0$ 时接入)的拉普拉斯变换。

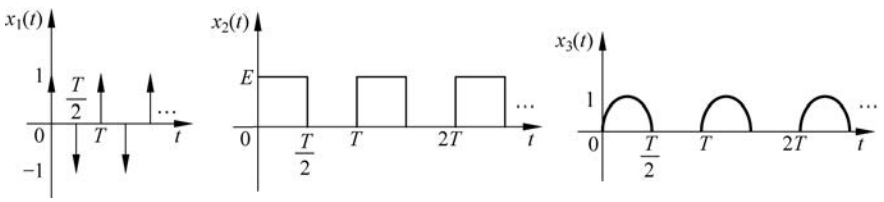


图 5.4

【知识点】 本题考查常用变换对及拉普拉斯变换的时移性质，对应教材 5.1 节、5.2 节。

【解题思路】

利用常用单边拉普拉斯变换对以及拉普拉斯变换的时移性质，求解信号拉普拉斯变换。

【解题过程】

(1)

$$x_1(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\delta\left(t-\frac{kT}{2}\right)\leftrightarrow\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\mathrm{e}^{-s\frac{kT}{2}}=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{sT}{2}}}$$

(2)

$$x_2(t)=E\sum_{k=0}^{\infty}\left[u(t-kT)-u\left(t-\frac{T}{2}-kT\right)\right]\leftrightarrow E\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-\frac{sT}{2}}\right)\mathrm{e}^{-skT}$$

$$=E\,\frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{sT}{2}}}{s}\,\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}=\frac{E}{s(1+\mathrm{e}^{-\frac{sT}{2}})}$$

(3)

$$x_3(t)=\left\{\sin\frac{2\pi}{T}t\left[u(t)-u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]\right\}*\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)$$

根据常用变换对 $\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)u(t)\leftrightarrow\frac{\frac{2\pi}{T}}{s^2+\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}$，$\delta(t)\leftrightarrow 1$

利用时移性质

$$\sin\frac{2\pi t}{T}\left[u(t)-u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]$$

$$=\sin\frac{2\pi t}{T}u(t)-\sin\frac{2\pi\left(t-\frac{T}{2}\right)}{T}u\left(t-\frac{T}{2}\right)\leftrightarrow\frac{\frac{2\pi}{T}}{s^2+\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}(1-\mathrm{e}^{-\frac{sT}{2}})$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)\leftrightarrow\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-kTs}=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-Ts}}$$

利用卷积性质 $x_3(t)\leftrightarrow\frac{\frac{2\pi}{T}}{\left[s^2+\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right](1-\mathrm{e}^{-sT})}(1-\mathrm{e}^{-\frac{sT}{2}})=\frac{\frac{2\pi}{T}}{\left[s^2+\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right](1+\mathrm{e}^{-\frac{sT}{2}})}$

5.11 用部分分式展开法求下列象函数的单边拉普拉斯反变换：

(1) $\frac{4}{s(2s+3)}$；(2) $\frac{3s}{(s+2)(s+4)}$；(3) $\frac{1}{s^2-3s+2}$；

(4) $\frac{1}{s(RCs+1)}$；(5) $\frac{4s+5}{s^2+5s+6}$；(6) $\frac{4s^2+11s+10}{2s^2+5s+3}$；

(7) $\frac{2s+4}{s^2+2s+5}$；(8) $\frac{2s+30}{s^2+10s+50}$；(9) $\frac{1}{s(s^2+5)}$；

(10) $\frac{1}{s(s^2+s+1)}$；(11) $\frac{\mathrm{e}^{-s}}{4s(s^2+1)}$；(12) $\frac{s-a}{(s+a)^2}$；

(13) $\frac{4s^2+17s+16}{(s+2)^2(s+3)}$；(14) $\frac{s+3}{(s+1)^3(s+2)}$；(15) $\frac{1}{(s+2)(s+3)^4}$；

(16) $\frac{1}{(s^2+3)^2}$。

【知识点】 本题考查拉普拉斯反变换，对应教材 5.3.2 节。

【解题思路】

将有理真分式写成多个分式相加的形式，再利用常用变换对 $\mathrm{e}^{at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s-a}$，$\mathrm{e}^{at}\cos(\omega_0 t)u(t)\leftrightarrow\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega_0^2}$，$\mathrm{e}^{at}\sin(\omega_0 t)u(t)\leftrightarrow\frac{\omega_0}{(s-a)^2+\omega_0^2}$，$t\mathrm{e}^{at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{(s-a)^2}$，$\frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{(s-a)^3}$求解信号的反变换。

【解题过程】

(1) $\frac{4}{s(2s+3)}=\frac{4}{s(2s+3)}=\frac{2}{s(s+1.5)}=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1.5}\right)$

因此 $x(t)=\frac{4}{3}u(t)-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-1.5t}u(t)$

(2) $\frac{3s}{(s+2)(s+4)}=\frac{6}{s+4}-\frac{3}{s+2}$

因此 $x(t)=6\mathrm{e}^{-4t}u(t)-3\mathrm{e}^{-2t}u(t)$

(3) $\dfrac{1}{s^2-3s+2}=\dfrac{1}{(s-1)(s-2)}=\dfrac{1}{s-2}-\dfrac{1}{s-1}$

因此 $x(t)=\mathrm{e}^{2t}u(t)-\mathrm{e}^{t}u(t)$

(4) $\dfrac{1}{s(RCs+1)}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{RC}{RCs+1}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+\dfrac{1}{RC}}$

因此 $x(t)=u(t)-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}u(t)$

(5) $\dfrac{4s+5}{s^2+5s+6}=\dfrac{4s+5}{(s+2)(s+3)}=\dfrac{7}{s+3}-\dfrac{3}{s+2}$

$x(t)=7\mathrm{e}^{-3t}u(t)-3\mathrm{e}^{-2t}u(t)$

(6) $\dfrac{4s^2+11s+10}{2s^2+5s+3}=2+\dfrac{s+4}{(2s+3)(s+1)}=2+\dfrac{-5}{2s+3}+\dfrac{3}{s+1}$

$x(t)=2\delta(t)-\dfrac{5}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}u(t)+3\mathrm{e}^{-t}u(t)$

(7) $\dfrac{2s+4}{s^2+2s+5}=\dfrac{2(s+1)+2}{(s+1)^2+2^2}=\dfrac{2(s+1)}{(s+1)^2+2^2}+\dfrac{2}{(s+1)^2+2^2}$

利用常用变换对

$$x(t)=2\mathrm{e}^{-t}\cos(2t)u(t)+\mathrm{e}^{-t}\sin(2t)u(t)$$

(8) $\dfrac{2s+30}{s^2+10s+50}=\dfrac{2(s+5)+20}{(s+5)^2+5^2}=2\dfrac{(s+5)}{(s+5)^2+5^2}+4\dfrac{5}{(s+5)^2+5^2}$

利用常用变换对 $x(t)=2\mathrm{e}^{-5t}\cos(5t)u(t)+4\mathrm{e}^{-5t}\sin(5t)u(t)$

(9) $\dfrac{1}{s(s^2+5)}=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{s}-\dfrac{s}{s^2+5}\right)=\dfrac{1}{5}\left[\dfrac{1}{s}-\dfrac{s}{s^2+(\sqrt{5})^2}\right]$

因此 $x(t)=\dfrac{1}{5}(1-\cos\sqrt{5}t)u(t)$

(10) 凑出

$$\frac{1}{s(s^2+s+1)}=\frac{1}{s}-\frac{s+1}{s^2+s+1}$$

$$\frac{s+1}{s^2+s+1}=\frac{s+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

利用常用变换对 $x(t)=u(t)-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)$

(11) $\dfrac{\mathrm{e}^{-s}}{4s(s^2+1)}=\dfrac{\mathrm{e}^{-s}}{4}\left(\dfrac{1}{s}-\dfrac{s}{s^2+1}\right)$

利用常用变换对和时移性质

$$x(t)=\frac{1}{4}u(t-1)-\frac{1}{4}\cos(t-1)u(t-1)$$

(12) $\dfrac{s-a}{(s+a)^2}=\dfrac{1}{s+a}-\dfrac{2a}{(s+a)^2}$

利用常用变换对 $x(t)=\mathrm{e}^{-at}u(t)-2at\mathrm{e}^{-at}u(t)$

(13) $\dfrac{4s^2+17s+16}{(s+2)^2(s+3)}=\dfrac{A}{s+3}+\dfrac{B}{(s+2)^2}+\dfrac{C}{s+2}$

$$A=\left.\frac{4s^2+17s+16}{(s+2)^2}\right|_{s=-3}=1$$

$$B=\left.\frac{4s^2+17s+16}{(s+3)}\right|_{s=-2}=-2$$

求 C 时，可以令$\left(\dfrac{4s^2+17s+16}{s+3}\right)'$中的 $s=-2$，

也可以令 s 为特殊值比如-1，得出 $1.5=0.5-2+C$，可得 $C=3$

从而$\dfrac{4s^2+17s+16}{(s+2)^2(s+3)}=\dfrac{1}{s+3}+\dfrac{-2}{(s+2)^2}+\dfrac{3}{s+2}$

利用常用变换对 $x(t)=\mathrm{e}^{-3t}u(t)-2t\mathrm{e}^{-2t}u(t)+3\mathrm{e}^{-2t}u(t)$

(14) $\dfrac{s+3}{(s+1)^3(s+2)}=\dfrac{A}{(s+1)^3}+\dfrac{B}{(s+1)^2}+\dfrac{C}{s+1}+\dfrac{D}{s+2}$

$$A=\left.\frac{s+3}{(s+1)^3(s+2)}(s+1)^3\right|_{s=-1}=2$$

$$D=\left.\frac{s+3}{(s+1)^3(s+2)}(s+2)\right|_{s=-2}=-1$$

为求 B，对$\dfrac{s+3}{s+2}=A+B(s+1)+C(s+1)^2+\dfrac{D}{s+2}(s+1)^3$ 求一阶导

$$\frac{s+2-(s+3)}{(s+2)^2}=\frac{-1}{(s+2)^2}=B+2C(s+1)+D\,\frac{3(s+1)^2-(s+1)^3}{(s+2)^2}$$

再令 $s=-1$，$B=\left.\dfrac{-1}{(s+2)^2}\right|_{s=-1}=-1$

为求 C，对一阶导的结果再求一阶导，并令 $s=-1$

$$C=\left.\frac{1}{(s+2)^3}\right|_{s=-1}=1$$

因此$\dfrac{s+3}{(s+1)^3(s+2)}=\dfrac{2}{(s+1)^3}+\dfrac{-1}{(s+1)^2}+\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{-1}{(s+2)}$

利用常用变换对 $x(t)=(t^2\mathrm{e}^{-t}-t\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})u(t)$

(15) $\dfrac{1}{(s+2)(s+3)^4}=\dfrac{A}{s+2}+\dfrac{B}{(s+3)^4}+\dfrac{C}{(s+3)^3}+\dfrac{D}{(s+3)^2}+\dfrac{E}{s+3}$

$$A=\left.\frac{1}{(s+3)^4}\right|_{s=-2}=1$$

$$B=\frac{1}{(s+2)}\bigg|_{s=-3}=-1$$

$$C=\left(\frac{1}{s+2}\right)'\bigg|_{s=-3}=-1$$

$$D=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+2}\right)''\bigg|_{s=-3}=-1$$

$$E=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{s+2}\right)'''\bigg|_{s=-3}=-1$$

因此 $\dfrac{1}{(s+2)(s+3)^4}=\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{1}{(s+3)^4}-\dfrac{1}{(s+3)^3}-\dfrac{1}{(s+3)^2}-\dfrac{1}{s+3}$

利用常用变换对 $x(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)-\dfrac{t^3}{6}\mathrm{e}^{-3t}u(t)-\dfrac{t^2}{2}\mathrm{e}^{-3t}u(t)-t\mathrm{e}^{-3t}u(t)-\mathrm{e}^{-3t}u(t)$

(16) $$\frac{1}{(s^2+3)^2}=\left[\frac{1}{(s+\sqrt{3}\mathrm{j})(s-\sqrt{3}\mathrm{j})}\right]^2=\left[\frac{\dfrac{1}{s-\sqrt{3}\mathrm{j}}-\dfrac{1}{s+\sqrt{3}\mathrm{j}}}{2\sqrt{3}\mathrm{j}}\right]^2$$

$$=\frac{\left(\dfrac{1}{s-\sqrt{3}\mathrm{j}}\right)^2-\dfrac{2}{s^2+3}+\left(\dfrac{1}{s+\sqrt{3}\mathrm{j}}\right)^2}{-12}$$

由于 $\mathrm{e}^{\sqrt{3}\mathrm{j}t}u(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{s-\sqrt{3}\mathrm{j}}$，$\mathrm{e}^{-\sqrt{3}\mathrm{j}t}u(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{s+\sqrt{3}\mathrm{j}}$

利用复频域微分性质 $t\mathrm{e}^{\sqrt{3}\mathrm{j}t}u(t)\leftrightarrow\left(\dfrac{1}{s-\sqrt{3}\mathrm{j}}\right)^2$，$t\mathrm{e}^{-\sqrt{3}\mathrm{j}t}u(t)\leftrightarrow\left(\dfrac{1}{s+\sqrt{3}\mathrm{j}}\right)^2$

因此 $$x(t)=\frac{t\mathrm{e}^{\sqrt{3}\mathrm{j}t}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t)+t\mathrm{e}^{-\sqrt{3}\mathrm{j}t}}{-12}u(t)=\frac{1}{6\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t)u(t)-\frac{t}{6}\cos(\sqrt{3}t)u(t)$$

5.12 求下列象函数的单边拉普拉斯反变换，并粗略画出其时域波形。

(1) $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-sT}}{s+1}$；　(2) $\dfrac{s(1-\mathrm{e}^{-s})}{s^2+\pi^2}$；　(3) $\left(\dfrac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s}\right)^2$。

【知识点】 本题知识点对应教材 5.2 节。

【解题思路】

借助常用拉普拉斯变换对＋性质求反变换。

【解题过程】

(1) $\mathrm{e}^{-t}u(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{s+1}$，利用时移性质 $\mathrm{e}^{-(t-T)}u(t-T)\leftrightarrow\dfrac{1}{s+1}\mathrm{e}^{-sT}$

因此 $\mathrm{e}^{-t}u(t)-\mathrm{e}^{-(t-T)}u(t-T)\leftrightarrow\dfrac{1-\mathrm{e}^{-sT}}{s+1}$

波形如图 5.5 所示。

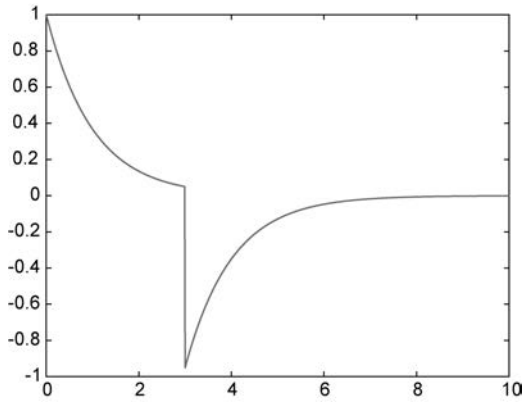


图 5.5

(2) 根据常用变换对 $\cos(\pi t)u(t)\leftrightarrow\frac{s}{s^2+\pi^2}$

再利用时移性质 $\cos[\pi(t-1)]u(t-1)\leftrightarrow\frac{s}{s^2+\pi^2}\mathrm{e}^{-s}$

因此 $\cos(\pi t)u(t)-\cos[\pi(t-1)]u(t-1)\leftrightarrow\frac{s(1-\mathrm{e}^{-s})}{s^2+\pi^2}$

波形如图 5.6 所示。

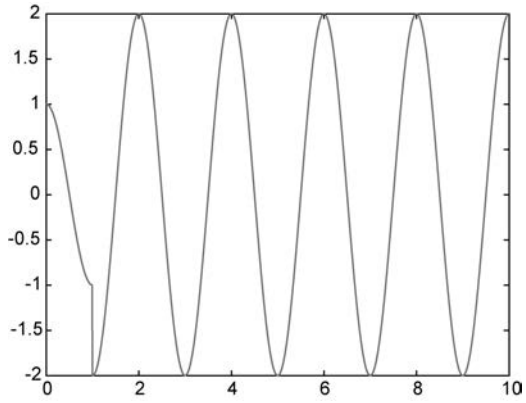


图 5.6

(3) 方法一：先求$\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s}$的反变换

$$u(t)-u(t-1)\leftrightarrow\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s}$$

利用卷积性质 $[u(t)-u(t-1)]*[u(t)-u(t-1)]\leftrightarrow\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s}\right)^2$

利用常用信号和卷积对 $x(t)=G_1(t-0.5)*G_1(t-0.5)=\Lambda_2(t-1)$

方法二：

$$X(s)=\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s}\right)^2=\frac{1-2\mathrm{e}^{-s}+\mathrm{e}^{-2s}}{s^2}$$

由于 $tu(t)\leftrightarrow\frac{1}{s^2}$

利用时移性质 $x(t)=tu(t)-2(t-1)u(t-1)+(t-2)u(t-2)$

波形如图 5.7 所示。

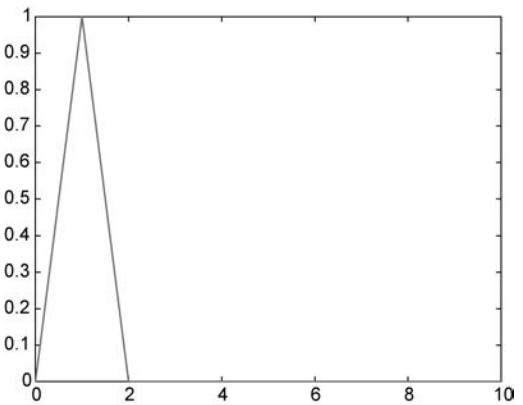


图　5.7

5.13　求下列象函数的双边拉普拉斯反变换：

(1) $\frac{-2}{(s-1)(s-3)}$，$1<\sigma<3$；　　(2) $\frac{2}{(s+1)(s+3)}$，$-3<\sigma<-1$；

(3) $\frac{4}{s^2+4}$，$\sigma<0$。

【知识点】　本题知识点对应教材 5.4 节。

【解题思路】

根据双边拉普拉斯变换对 $\mathrm{e}^{at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s-a}$，$\mathrm{Re}[s]>a$，$\mathrm{e}^{at}u(-t)\leftrightarrow-\frac{1}{s-a}$，$\mathrm{Re}[s]<a$ 及部分分式展开法求反变换。

【解题过程】

(1) $\frac{-2}{(s-1)(s-3)}=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s-3}$，$1<\sigma<3$

根据常用变换对 $x(t)=\mathrm{e}^{t}u(t)+\mathrm{e}^{3t}u(-t)$

(2) $\frac{2}{(s+1)(s+3)}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+3}$，$-3<\sigma<-1$

根据常用变换对 $x(t)=-\mathrm{e}^{-t}u(-t)-\mathrm{e}^{-3t}u(t)$

(3) 利用常用变换对

$$2\sin(2t)u(t)\leftrightarrow\frac{4}{s^2+4},\quad \sigma>0$$

和性质 $x(-t)\leftrightarrow X(-s)$

可得 $2\sin(-2t)u(-t)\leftrightarrow\dfrac{4}{(-s)^2+4}=\dfrac{4}{s^2+4},\sigma<0$

$x(t)=2\sin(-2t)u(-t)=-2\sin(2t)u(-t)$

5.14 试用拉普拉斯变换求解下列方程所描述的因果系统的全响应：

(1) $y'(t)+2y(t)=u(t),y(0^-)=1$；

(2) $y'(t)+2y(t)=0,y(0^-)=2$。

【知识点】 本题知识点对应教材 5.5.1 节。

【解题思路】

求解连续时间因果系统的全响应，两边取单边拉普拉斯变换，整理得到 $Y(s)$，再求单边拉普拉斯反变换得到 $y(t)$。

【解题过程】

(1) 对等式两边取单边拉普拉斯变换

$$sY(s)-y(0^-)+2Y(s)=\frac{1}{s}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s(s+2)}+\frac{y(0^-)}{s+2}=\frac{1}{s+2}\frac{1}{s}+\frac{1}{s+2}=\frac{s+1}{s(s+2)}=\frac{0.5}{s}+\frac{0.5}{s+2}$$

$$y(t)=0.5(1+\mathrm{e}^{-2t})u(t)$$

(2) 对等式两边取单边拉普拉斯变换

$$sY(s)-y(0^-)+2Y(s)=0$$

$$Y(s)=\frac{y(0^-)}{s+2}=\frac{2}{s+2}$$

$$y(t)=2\mathrm{e}^{-2t}u(t)$$

5.15 用拉普拉斯变换求解因果系统 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=3x(t)$ 的零输入响应和零状态响应。

(1) $x(t)=u(t),y(0^-)=1,y'(0^-)=-1$；

(2) $x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t),y(0^-)=0,y'(0^-)=1$

【知识点】 本题考查利用拉普拉斯变换求解微分方程相关知识，对应教材 5.5.1 节。

【解题思路】

求解连续时间因果系统的全响应，两边取单边拉普拉斯变换，整理得到 $Y(s)$，再求单边拉普拉斯反变换得到 $y(t)$。

【解题过程】

对微分方程两边取单边拉普拉斯变换，可得

$$[s^2Y(s)-sy(0^-)-y'(0^-)]+5[sY(s)-y(0^-)]+6Y(s)=3X(s)$$

从而可以得到

$$Y(s)=\frac{3X(s)}{s^2+5s+6}+\frac{sy(0^-)+5y(0^-)+y'(0^-)}{s^2+5s+6}$$

因此

$$Y_{zs}(s)=\frac{3X(s)}{s^2+5s+6}$$

$$Y_{zi}(s)=\frac{sy(0^-)+5y(0^-)+y'(0^-)}{s^2+5s+6}$$

(1) $x(t)=u(t)$，$y(0^-)=1$，$y'(0^-)=-1$。

$X(s)=\frac{1}{s}$，从而得到

$$Y_{zs}(s)=\frac{3X(s)}{s^2+5s+6}=\frac{3}{s(s+2)(s+3)}=\frac{\frac{1}{2}}{s}+\frac{-\frac{3}{2}}{s+2}+\frac{1}{s+3}$$

求单边拉普拉斯反变换，可得到零状态响应为

$$y_{zs}(t)=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}e^{-2t}+e^{-3t}\right)u(t)$$

零输入响应的象函数为

$$Y_{zi}(s)=\frac{sy(0^-)+5y(0^-)+y'(0^-)}{s^2+5s+6}=\frac{s+4}{(s+2)(s+3)}=\frac{2}{s+2}+\frac{-1}{s+3}$$

因此零输入响应为

$$y_{zi}(t)=(2e^{-2t}-e^{-3t})u(t)$$

(2) $x(t)=e^{-t}u(t)$，$y(0^-)=0$，$y'(0^-)=1$。

$X(s)=\frac{1}{s+1}$，从而得到

$$Y_{zs}(s)=\frac{3X(s)}{s^2+5s+6}=\frac{3}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{\frac{3}{2}}{s+1}+\frac{-3}{s+2}+\frac{\frac{3}{2}}{s+3}$$

因此，零状态响应为

$$y_{zs}(t)=\left(\frac{3}{2}e^{-t}-3e^{-2t}+\frac{3}{2}e^{-3t}\right)u(t)$$

零输入响应的象函数为

$$Y_{zi}(s)=\frac{1}{(s+2)(s+3)}=\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+3}$$

因此，零输入响应为

$$y_{zi}(t)=(e^{-2t}-e^{-3t})u(t)$$

5.16 已知描述因果系统的微分方程为 $y'(t)+2y(t)=x(t)+x'(t)$，试求下列输入时的零状态响应。

(1) $x(t)=u(t)$；　(2) $x(t)=e^{-t}u(t)$；　(3) $x(t)=e^{-2t}u(t)$。

【知识点】 本题知识点对应教材 5.5.1 节。

【解题思路】

首先对微分方程求拉普拉斯变换，整理得到零状态响应的象函数；最后对零状态响应的象函数进行拉普拉斯反变换，得到零状态响应的时域表示。

【解题过程】

对微分方程两边取拉普拉斯变换，可得

$$sY(s)-y(0^-)+2Y(s)=X(s)+sX(s)$$

整理上式可得到零状态响应的象函数为

$$Y_{zs}(s)=\frac{s+1}{s+2}X(s)$$

(1) $x(t)=u(t)$。

$X(s)=\frac{1}{s}$，因此 $Y_{zs}(s)=\frac{s+1}{s+2}X(s)=\frac{s+1}{s(s+2)}=\frac{\frac{1}{2}}{s}+\frac{\frac{1}{2}}{s+2}$

因此，零状态响应为

$$y_{zs}(t)=\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)+\frac{1}{2}u(t)$$

(2) $x(t)=e^{-t}u(t)$。

$X(s)=\frac{1}{s+1}$，因此 $Y_{zs}(s)=\frac{s+1}{s+2}X(s)=\frac{s+1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s+2}$

因此，零状态响应为

$$y_{zs}(t)=e^{-2t}u(t)$$

(3) $x(t)=e^{-2t}u(t)$。

$X(s)=\frac{1}{s+2}$，

因此 $Y_{zs}(s)=\frac{s+1}{s+2}X(s)=\frac{s+1}{(s+2)^2}=\frac{1}{(s+2)^2}+\frac{s}{(s+2)^2}$

由于

$$te^{-2t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{(s+2)^2},\quad[te^{-2t}u(t)]'=e^{-2t}u(t)-2te^{-2t}u(t)\leftrightarrow\frac{s}{(s+2)^2}$$

因此，零状态响应为

$$y_{zs}(t)=te^{-2t}u(t)+e^{-2t}u(t)-2te^{-2t}u(t)=e^{-2t}u(t)-te^{-2t}u(t)$$

5.17 已知因果系统函数和初始状态如下，求系统零输入响应。

(1) $H(s)=\frac{s}{s^2+4}$，$y(0^-)=0$，$y'(0^-)=1$；

(2) $H(s)=\frac{s+4}{s(s^2+3s+2)}$，$y(0^-)=y'(0^-)=y''(0^-)=1$。

【知识点】 本题知识点对应教材 5.5.1 节。

【解题思路】

根据系统函数得出系统的微分方程，对微分方程两边进行单边拉普拉斯变换，整理得到零输入响应的象函数，再对该象函数求拉普拉斯反变换得到零输入响应。

【解题过程】

(1) $H(s)=\dfrac{s}{s^2+4}$

微分方程为 $y''(t)+4y(t)=x'(t)$

对该微分方程两边取单边拉普拉斯变换，得到

$$s^2Y(s)-sy(0^-)-y'(0^-)+4Y(s)=sX(s)$$

整理上式可得到

$$Y(s)=\frac{s}{s^2+4}X(s)+\frac{sy(0^-)+y'(0^-)}{s^2+4}$$

因此，零输入响应的象函数为

$$Y_{zi}(s)=\frac{sy(0^-)+y'(0^-)}{s^2+4}=\frac{1}{s^2+4}$$

求上式的拉普拉斯反变换，得到零输入响应为

$$y_{zi}(t)=0.5\sin(2t)u(t)$$

(2) $H(s)=\dfrac{s+4}{s(s^2+3s+2)}=\dfrac{s+4}{s^3+3s^2+2s}$，

微分方程为 $y'''(t)+3y''(t)+2y'(t)=x'(t)+4x(t)$

对该微分方程两边取单边拉普拉斯变换，得到

$$s^3Y(s)-s^2y(0^-)-sy'(0^-)-y''(0^-)+3s^2Y(s)-3sy(0^-)-3y'(0^-)+2sY(s)-2y(0^-)=(s+4)X(s)$$

整理上式可得到

$$Y(s)=\frac{s+4}{s(s^2+3s+2)}X(s)+\frac{(s^2+3s+2)y(0^-)+(s+3)y'(0^-)+y''(0^-)}{s(s^2+3s+2)}$$

因此，零输入响应的象函数为

$$\begin{aligned}Y_{zi}(s)&=\frac{(s^2+3s+2)y(0^-)+(s+3)y'(0^-)+y''(0^-)}{s(s^2+3s+2)}\\&=\frac{s^2+4s+6}{s(s+1)(s+2)}\\&=\frac{3}{s}+\frac{-3}{s+1}+\frac{1}{s+2}\end{aligned}$$

求上式的拉普拉斯反变换，得到零输入响应为

$$y_{zi}(t)=(3-3e^{-t}+e^{-2t})u(t)$$

5.18 某线性时不变系统，输入 $x(t)=e^{-t}u(t)$ 时输出为 $y_{zs}(t)=\left(\dfrac{1}{2}e^{-t}-e^{-2t}+e^{-3t}\right)u(t)$，求该系统的冲激响应 $h(t)$。

【知识点】 本题知识点对应教材 5.6.1 节。

【解题思路】

根据系统输入和零状态响应的拉普拉斯变换，求系统函数，并将系统函数进行拉普拉斯反变换得到系统的冲激响应。

【解题过程】

$x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$，则 $X(s)=\dfrac{1}{s+1}$

$y_{zs}(t)=\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-3t}\right)u(t)$，则 $Y_{zs}(s)=\dfrac{1/2}{s+1}+\dfrac{-1}{s+2}+\dfrac{1}{s+3}$

因此

$$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{X(s)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{s+2}-\frac{2}{s+3}$$

求上式的拉普拉斯反变换，得到系统的冲激响应为

$$h(t)=\frac{1}{2}\delta(t)+\mathrm{e}^{-2t}u(t)-2\mathrm{e}^{-3t}u(t)$$

5.19 若系统的单位阶跃响应为 $s(t)=(1-\mathrm{e}^{-2t})u(t)$，为使输出零状态响应为 $y_{zs}(t)=(1-\mathrm{e}^{-2t}+t\mathrm{e}^{-2t})u(t)$，求输入信号 $x(t)$。

【知识点】 本题知识点对应教材 5.6.1 节。

【解题思路】

根据系统单位阶跃响应求得系统函数，由系统函数和零状态响应象函数得到输入信号的拉普拉斯变换，求解拉普拉斯反变换，得到输入信号。

【解题过程】

由系统单位阶跃响应可知 $u(t)*h(t)=(1-\mathrm{e}^{-2t})u(t)$

对等式两边作拉普拉斯变换，并进行整理

$$\frac{1}{s}H(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}\rightarrow H(s)=\frac{2}{s+2}$$

零状态响应的拉普拉斯变换为

$$Y_{zs}(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{(s+2)^2}$$

因此

$$X(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{H(s)}=\frac{\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+2}+\dfrac{1}{(s+2)^2}}{\dfrac{2}{s+2}}=\frac{1}{s}+\frac{1/2}{s+2}$$

求解上式的拉普拉斯反变换，得到输入信号为

$$x(t)=\left(1+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right)u(t)$$

5.20 电路如图 5.8 所示。输入电流源 $i(t)=u(t)$，求下列情况下的零状态响应 $u_C(t)$。

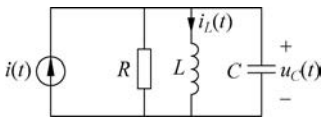


图 5.8

(1) $L=0.1\text{H}, C=0.1\text{F}, R=0.4\Omega$

(2) $L=0.1\text{H}, C=0.1\text{F}, R=0.5\Omega$

(3) $L=0.1\text{H}, C=0.1\text{F}, R=\dfrac{1}{1.2}\Omega$

【知识点】 本题考查电路系统的复频域求解相关知识，对应教材 5.5.2 节。

【解题思路】

将电路元件用其 s 域模型代替，激励用其象函数代替，根据基尔霍夫定律列写电路的 s 域方程，求解方程得到零状态响应的象函数，求解拉普拉斯反变换得到相应的零状态响应表达式。

【解题过程】

根据图 5.8 所示电路的等效阻抗为

$$\frac{1}{\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{Ls}+Cs}=\frac{RLs}{Ls+R+RLCs^2}$$

因此

$$\begin{aligned}U_C(s)&=\frac{RLs}{Ls+R+RLCs^2}I(s)\\&=\frac{s/C}{s^2+s/RC+1/LC}\cdot\frac{1}{s}\\&=\frac{1/C}{s^2+s/RC+1/LC}\end{aligned}$$

(1) $L=0.1\text{H}, C=0.1\text{F}, R=0.4\Omega$。

$$U_C(s)=\frac{10}{s^2+25s+100}=\frac{10}{(s+5)(s+20)}=\frac{\frac{2}{3}}{s+5}-\frac{\frac{2}{3}}{s+20}$$

$$u_C(t)=\frac{2}{3}(\text{e}^{-5t}-\text{e}^{-20t})u(t)$$

(2) $L=0.1\text{H}, C=0.1\text{F}, R=0.5\Omega$。

$$U_C(s)=\frac{0.05}{0.1s+0.005s^2+0.5}=\frac{10}{s^2+20s+100}=\frac{10}{(s+10)^2}$$

$$u_C(t)=10t\text{e}^{-10t}u(t)$$

(3) $L=0.1\text{H}, C=0.1\text{F}, R=\dfrac{1}{1.2}\Omega$。

$$U_C(s)=\frac{\frac{1}{12}}{0.1s+\frac{1}{120}s^2+\frac{1}{1.2}}=\frac{10}{s^2+12s+100}=\frac{10}{(s+6)^2+8^2}=\frac{5}{4}\frac{8}{(s+6)^2+8^2}$$

$$u_C(t)=\frac{5}{4}e^{-6t}\sin(8t)u(t)$$

5.21 若题 5.20 中 $i_L(0^-)=-1\text{A}$，$u_C(0^-)=1\text{V}$，求题 5.20 三种情况下的零输入响应。

【知识点】 本题考查电路系统的复频域求解相关知识，对应教材 5.5.2 节。

【解题思路】

与上题类似。所不同的是通过电路 s 域模型需要考虑初始状态。

【解题过程】

电路系统的 s 域等效模型如图 5.9 所示。

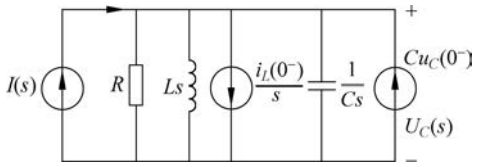


图 5.9

根据电路知识可知电压等于等效电阻乘以电流：

$$U_C(s)=\frac{I(s)-\dfrac{i_L(0_-)}{s}+Cu_C(0_-)}{\dfrac{1}{R}+Cs+\dfrac{1}{Ls}}$$

$$U_{Czi}(s)=\frac{-\dfrac{i_L(0_-)}{s}+Cu_C(0_-)}{\dfrac{1}{R}+Cs+\dfrac{1}{Ls}}=\frac{\dfrac{1}{s}+C}{\dfrac{1}{R}+Cs+\dfrac{1}{Ls}}$$

(1) $L=0.1\text{H}$，$C=0.1\text{F}$，$R=0.4\Omega$。

$$U_{Czi}(s)=\frac{\dfrac{1}{s}+0.1}{2.5+0.1s+\dfrac{10}{s}}=\frac{s+10}{s^2+25s+100}=\frac{1}{3}\frac{1}{s+5}+\frac{2}{3}\frac{1}{s+20}$$

$$u_{Czi}(t)=\frac{1}{3}e^{-5t}u(t)+\frac{2}{3}e^{-20t}u(t)$$

(2) $L=0.1\text{H}$，$C=0.1\text{F}$，$R=0.5\Omega$。

$$U_{Czi}(s)=\frac{\dfrac{1}{s}+0.1}{2+0.1s+\dfrac{10}{s}}=\frac{s+10}{s^2+20s+100}=\frac{10+s}{(s+10)^2}=\frac{1}{s+10}$$

$$u_{Czi}(t)=e^{-10t}u(t)$$

(3) $L=0.1\text{H}$，$C=0.1\text{F}$，$R=\dfrac{1}{1.2}\Omega$。

$$U_{Czi}(s)=\frac{\frac{1}{s}+0.1}{1.2+0.1s+\frac{10}{s}}=\frac{s+10}{s^2+12s+100}$$

$$=\frac{10+s}{(s+6)^2+8^2}=\frac{s+6}{(s+6)^2+8^2}+\frac{1}{2}\frac{8}{(s+6)^2+8^2}$$

$$u_{Czi}(t)=e^{-6t}\cos(8t)u(t)+0.5e^{-6t}\sin(8t)u(t)$$

5.22 电路如图 5.10 所示，在 $t=0$ 前已处于稳定状态。开关 K 在 $t=0$ 时由“1”扳到“2”，分别求 $u_L(t)$ 和 $u_C(t)$。

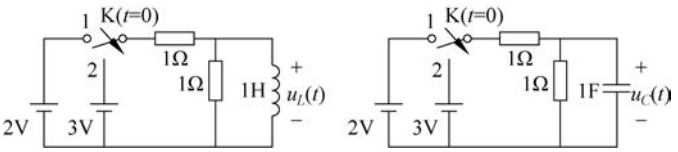


图 5.10

【知识点】 本题考查电路系统的复频域求解相关知识，对应教材 5.5.2 节。

【解题思路】

直接在复频域列出方程，再利用拉普拉斯反变换求解。

【解题过程】

（1）系统稳定时，电感短路，两端电压为 0。开关 K 从“1”到“2”，相当于多输入了电压 $u(t)$，由于电路等效电阻为

$$\frac{Ls}{Ls+1}+1$$

因此

$$U_L(s)=\frac{\frac{1}{s}}{\frac{Ls}{Ls+1}+1}\frac{Ls}{Ls+1}=\frac{1}{2s+1},\quad L=1$$

所以 $u_L(t)=\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}u(t)$

（2）系统稳定时，电容开路，电流从 1Ω 电阻经过，电容两端电压为 1V。开关 K 从“1”到“2”，相当于多输入了电压 $u(t)$，由于电路等效电阻为

$$\frac{\frac{1}{Cs}}{\frac{1}{Cs}+1}+1=\frac{s+2}{s+1},\quad C=1$$

因此增加的

$$U_C(s)=\frac{\frac{1}{s}}{\frac{s+2}{s+1}}\frac{1}{s+1}=\frac{1}{s(s+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}\right)$$

增加的

$$u_C(t)=\frac{1}{2}u(t)-\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$$

因此

$$u_C(t)=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t},\quad t\geqslant 0$$

5.23 电路如图 5.11 所示，已知电容 C_1 上的初始电压为 3V，$t=0$ 时开关闭合，求全响应 $i(t)$。

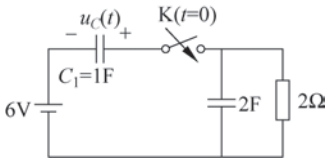


图 5.11

【知识点】 本题考查电路系统的复频域求解相关知识，对应教材 5.5.2 节。

【解题思路】

直接在复频域列出方程，再利用拉普拉斯反变换求解。

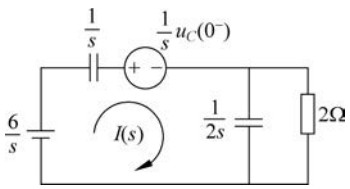


图 5.12

【解题过程】

6V 电源在 $t=0$ 时刻以后接入电路，等效为输入电压为 $6u(t)$。

电路系统的复频域等效模型如图 5.12 所示，需注意的是电容两端电压的方向与电流方向相反，因此对应的 $u_C(0^-)=-3$

根据复频域等效模型可列方程

$$\frac{I(s)}{s}+\frac{u_C(0^-)}{s}+I(s)\frac{2\times\frac{1}{2s}}{2+\frac{1}{2s}}=\frac{6}{s}$$

整理上式可得

$$I(s)\left(\frac{1}{s}+\frac{\frac{1}{s}}{2+\frac{1}{2s}}\right)=\frac{9}{s}$$

$$I(s)=\frac{9}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2s}}}=\frac{9}{1+\frac{2s}{4s+1}}=\frac{9(4s+1)}{6s+1}=6+\frac{1}{2}\times\frac{1}{s+\frac{1}{6}}$$

因此，全响应为

$$i(t)=6\delta(t)+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{6}t}u(t)$$

5.24 求如图 5.13 所示四种 RC 网络的传递函数 $\dfrac{U_2(s)}{U_1(s)}$（$R=1\Omega$，$C=1$F）。

【知识点】 本题考查电路系统的复频域求解相关知识，对应教材 5.5.2 节。

【解题思路】

直接在复频域列出方程，再利用拉普拉斯反变换求解。

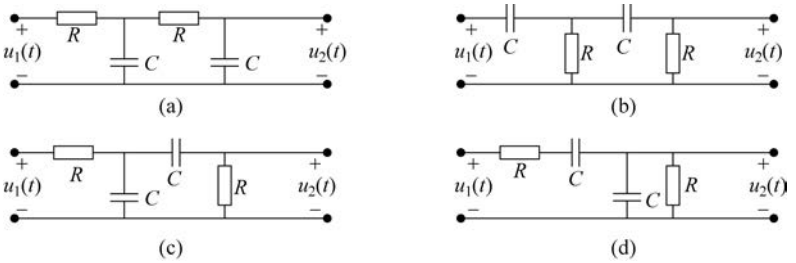


图　5.13

【解题过程】

（a）并联电阻为

$$\frac{\frac{1}{Cs}\left(R+\frac{1}{Cs}\right)}{\frac{1}{Cs}+R+\frac{1}{Cs}}=\frac{\frac{1}{s}\left(1+\frac{1}{s}\right)}{1+\frac{2}{s}}=\frac{s+1}{s^2+2s}$$

其两端电压为

$$\frac{\frac{s+1}{s^2+2s}}{\frac{s+1}{s^2+2s}+1}=\frac{s+1}{s^2+3s+1}U_1(s)$$

因此

$$U_2(s)=\frac{s+1}{s^2+3s+1}U_1(s)\,\frac{\frac{1}{Cs}}{R+\frac{1}{Cs}}=\frac{1}{s^2+3s+1}U_1(s)$$

$$H(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{1}{s^2+3s+1}$$

（b）并联电阻为

$$\frac{R\left(R+\frac{1}{Cs}\right)}{R+R+\frac{1}{Cs}}=\frac{1+\frac{1}{s}}{2+\frac{1}{s}}=\frac{s+1}{2s+1}$$

其两端电压为

$$\frac{\frac{s+1}{2s+1}}{\frac{s+1}{2s+1}+\frac{1}{s}}=\frac{s(s+1)}{s^2+3s+1}U_1(s)$$

因此

$$U_2(s)=\frac{s(s+1)}{s^2+3s+1}U_1(s)\,\frac{R}{R+\frac{1}{Cs}}=\frac{s^2}{s^2+3s+1}U_1(s)$$

$$H(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{s^2}{s^2+3s+1}$$

(c) 并联电阻为

$$\frac{\frac{1}{Cs}\left(R+\frac{1}{Cs}\right)}{\frac{1}{Cs}+R+\frac{1}{Cs}}=\frac{\frac{1}{s}\left(1+\frac{1}{s}\right)}{1+\frac{2}{s}}=\frac{s+1}{s^2+2s}$$

其两端电压为

$$\frac{\frac{s+1}{s^2+2s}}{\frac{s+1}{s^2+2s}+1}=\frac{s+1}{s^2+3s+1}U_1(s)$$

因此

$$U_2(s)=\frac{s+1}{s^2+3s+1}U_1(s)\quad\frac{R}{R+\frac{1}{Cs}}=\frac{s}{s^2+3s+1}U_1(s)$$

$$H(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{s}{s^2+3s+1}$$

(d) 并联电阻为

$$\frac{\frac{1}{Cs}R}{\frac{1}{Cs}+R}=\frac{1}{s+1}$$

其两端电压为

$$\frac{\frac{s+1}{s^2+2s}}{\frac{s+1}{s^2+2s}+1}=\frac{s+1}{s^2+3s+1}U_1(s)$$

因此

$$U_2(s)=\frac{\frac{1}{s+1}}{\frac{1}{s+1}+R+\frac{1}{Cs}}U_1(s)=\frac{s}{s^2+3s+1}U_1(s)$$

$$H(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{s}{s^2+3s+1}$$

5.25 分别求出图 5.14 所示电路的系统函数，并画出零极点图。

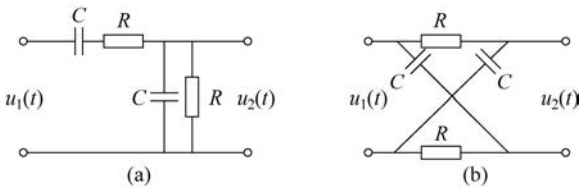


图 5.14

【知识点】 本题考查连续时间系统的复频域分析，对应教材 5.5 节。

【解题思路】

直接在复频域列出方程，再得出系统函数。

【解题过程】

（1）并联等效电阻为

$$\frac{R\dfrac{1}{Cs}}{R+\dfrac{1}{Cs}}=\frac{R}{RCs+1}$$

分压比例为

$$\frac{\dfrac{R}{RCs+1}}{\dfrac{R}{RCs+1}+R+\dfrac{1}{Cs}}=\frac{RCs}{RCs+RCs(RCs+1)+RCs+1}=\frac{1}{RC}\frac{s}{s^2+\dfrac{3}{RC}s+\dfrac{1}{R^2C^2}}$$

零极点图如图 5.15 所示。

（2）
$$U_2(s)=\left(\frac{\dfrac{1}{Cs}}{R+\dfrac{1}{Cs}}-\frac{R}{R+\dfrac{1}{Cs}}\right)U_1(s)=\frac{1-RCs}{1+RCs}U_1(s)$$

$$H(s)=\frac{1-RCs}{1+RCs}$$

零极点图如图 5.16 所示。

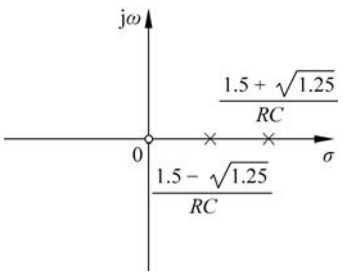


图 5.15

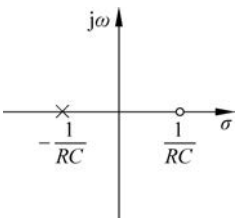


图 5.16

5.26 利用平面几何求值法，粗略画出以下系统函数所描述的线性时不变系统的幅频和相频响应曲线（默认收敛域均包含虚轴）。

（1）$H(s)=\dfrac{s^2-2s+50}{s^2+2s+50}$；　（2）$H(s)=\dfrac{s-1}{s+2}$；　（3）$H(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+3)}$；

（4）$H(s)=\dfrac{s}{s^2+s+1}$；　（5）$H(s)=\dfrac{s^2}{s^2+2s+1}$。

【知识点】 本题通过系统的零极点分析来粗略画出频率响应，对应教材 5.6.2 节。

【解题思路】

首先通过系统函数求出极点和零点向量，$|H(j\omega)|$等于 K 乘以所有零点向量的模除以所有极点向量的模。$\angle H(j\omega)$称为相频特性，等于所有零点向量的相位和减去所有极点向量的相位和。对于实系统来说，幅度谱是偶函数，相位谱是奇函数，因此只需分析右半边。

【解题过程】

(1)

$$H(s)=\frac{s^2-2s+50}{s^2+2s+50}=\frac{(s-1+7j)(s-1-7j)}{(s+1+7j)(s+1-7j)}$$

极点为$-1-7j$、$-1+7j$，零点为 $1-7j$、$1+7j$。将 $s=j\omega$ 代入则有

$$H(j\omega)=\frac{(j\omega-1+7j)(j\omega-1-7j)}{(j\omega+1+7j)(j\omega+1-7j)}$$

其中，

$$|H(j\omega)|=\frac{|j\omega-1+7j||j\omega-1-7j|}{|j\omega+1+7j||j\omega+1-7j|}$$

$$\angle H(j\omega)=\varphi_1+\varphi_2-\theta_1-\theta_2$$

零极点向量图如图 5.17 所示。

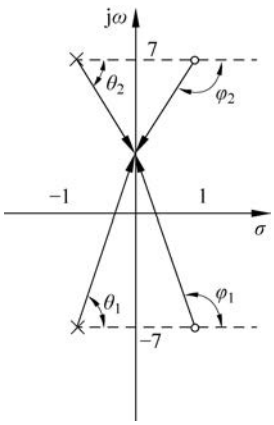


图 5.17

从零极点向量图可知，无论角频率为何值，$|H(j\omega)|=1$。下面考查相频特性。

$$\angle H(j0)=\pi-\arctan 7-(\pi-\arctan 7)-\arctan 7-(-\arctan 7)=0$$

$$\angle H(j\infty)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

系统的幅频响应和相频响应曲线如图 5.18 所示。

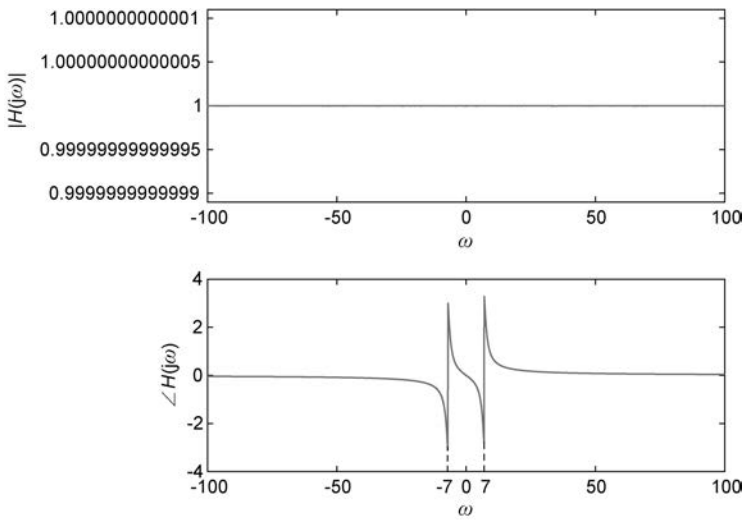


图 5.18

（2）$H(s)=\dfrac{s-1}{s+2}$，将 $s=\mathrm{j}\omega$ 代入则有

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\mathrm{j}\omega-1}{\mathrm{j}\omega+2}=|H(\mathrm{j}\omega)|\,\mathrm{e}^{\angle H(\mathrm{j}\omega)}$$

零极点图如图 5.19 所示。

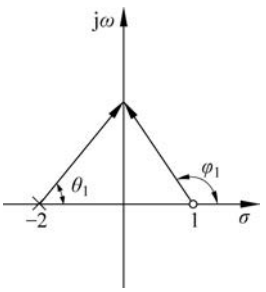


图 5.19

$$|H(\mathrm{j}0)|=\frac{1}{2}=0.5 \quad |H(\mathrm{j}\infty)|=1$$

$$\angle H(\mathrm{j}0)=\pi-0=\pi, \quad \angle H(\mathrm{j}\infty)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$$

具体来说，系统的幅频响应和相频响应曲线如图 5.20 所示。

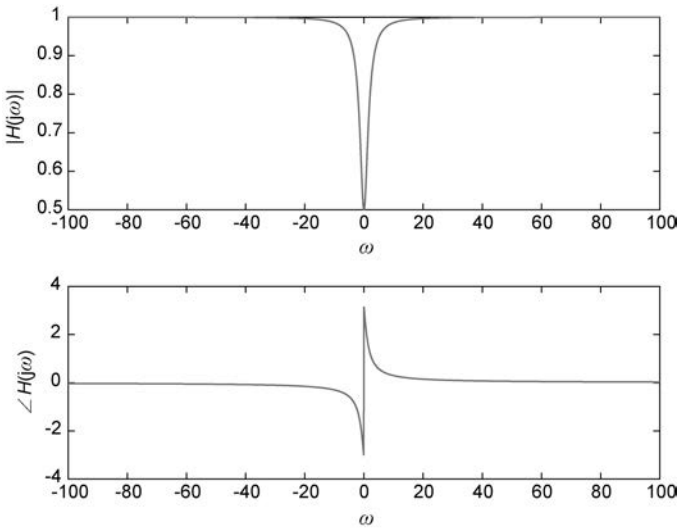


图 5.20

（3）$H(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+3)}$，将 $s=\mathrm{j}\omega$ 代入则有

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{(\mathrm{j}\omega+1)(\mathrm{j}\omega+3)}=|H(\mathrm{j}\omega)|\,\mathrm{e}^{\angle H(\mathrm{j}\omega)}$$

零极点图如图 5.21 所示。

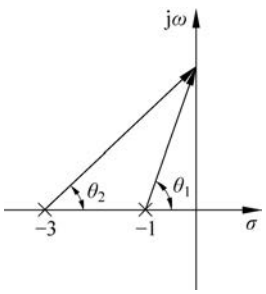


图 5.21

当角频率为 0 时，有

$$|H(\mathrm{j}0)|=\frac{1}{3}, \quad \angle H(\mathrm{j}0)=0-0=0$$

当角频率趋于无穷时，有

$$|H(\mathrm{j}\infty)|=\frac{1}{\infty\infty}=0, \quad \angle H(\mathrm{j}\infty)=0-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=-\pi$$

具体来说，系统的幅频响应和相频响应曲线如图 5.22 所示。

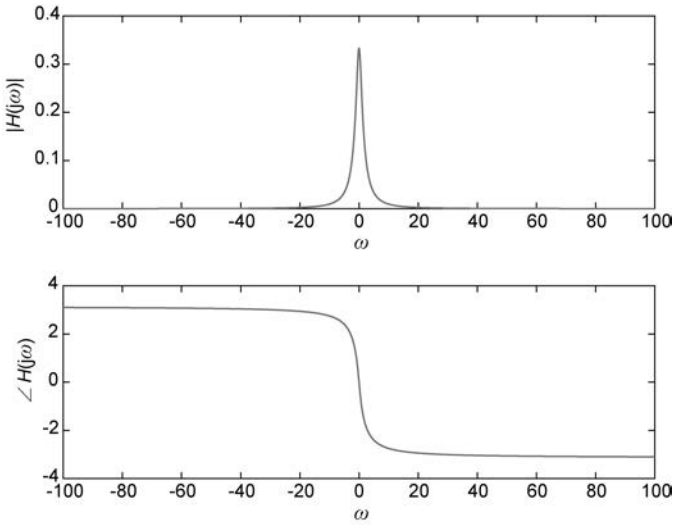


图 5.22

(4) $H(s)=\dfrac{s}{s^2+s+1}=\dfrac{s}{\left(s+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}\right)\left(s+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}\right)}$，将 $s=\mathrm{j}\omega$ 代入则有

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\mathrm{j}\omega}{\left(\mathrm{j}\omega+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}\right)\left(\mathrm{j}\omega+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}\right)}=|H(\mathrm{j}\omega)|\,\mathrm{e}^{\angle H(\mathrm{j}\omega)}$$

零极点图如图 5.23 所示。

当角频率为 0 时，有

$$|H(\mathrm{j}0)|=0,\quad \angle H(\mathrm{j}0^+)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{2}$$

当角频率趋于无穷时，有

$$|H(\mathrm{j}\infty)|=\frac{\infty}{\infty\infty}=0,\quad \angle H(\mathrm{j}\infty)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$$

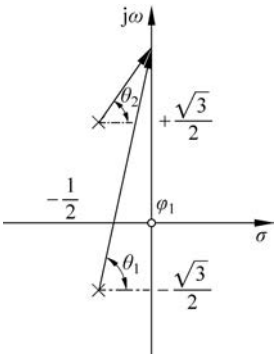


图 5.23

具体来说，系统的幅频响应和相频响应曲线如图 5.24 所示。

(5) $H(s)=\dfrac{s^2}{s^2+2s+1}=\dfrac{s^2}{(s+1)^2}$，将 $s=\mathrm{j}\omega$ 代入则有

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{(\mathrm{j}\omega)^2}{(\mathrm{j}\omega+1)^2}=|H(\mathrm{j}\omega)|\,\mathrm{e}^{\angle H(\mathrm{j}\omega)}$$

零极点图如图 5.25 所示。

当角频率为 0 时，有

$$|H(\mathrm{j}0)|=0,\quad \angle H(\mathrm{j}0^+)=2\,\frac{\pi}{2}-2\cdot 0=\pi$$

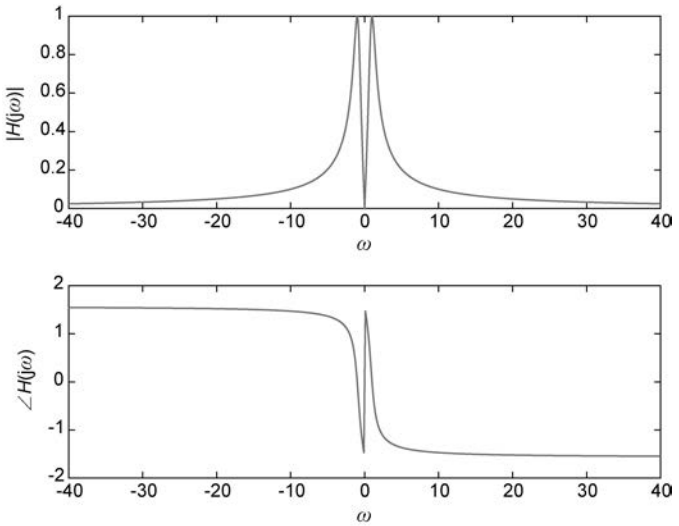


图　5.24

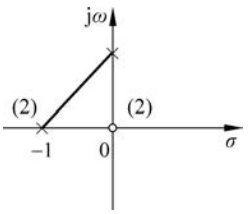


图　5.25

当频率趋于无穷时，有

$$|H(\mathrm{j}\infty)|=1,\quad \angle H(\mathrm{j}\infty)=2\frac{\pi}{2}-2\frac{\pi}{2}=0$$

具体来说，系统的幅频响应和相频响应曲线如图 5.26 所示。

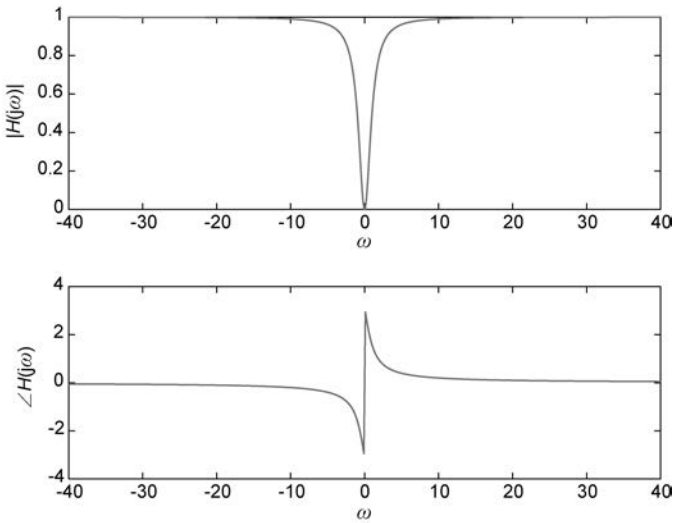


图　5.26

5.27 某线性时不变系统的零极点图如图 5.27 所示。

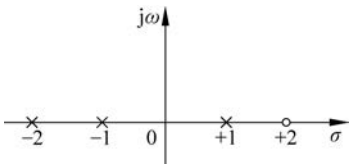


图 5.27

(1) 指出该系统所有可能的收敛域；

(2) 对(1)中所有可能的收敛域，判断系统是否稳定或因果。

【知识点】 本题考查根据系统零极点图判断系统的因果性和稳定性，对应教材 5.6.4 节。

【解题思路】

根据零极点图判断几种可能的收敛域情况，根据收敛域判断系统因果性和稳定性。系统稳定的充要条件是收敛域包含虚轴；系统因果的必要条件是收敛域右边收敛。

【解题过程】

(1) 根据图 5.27，系统可能的收敛域为

$$\mathrm{Re}[s]<-2,\quad -2<\mathrm{Re}[s]<-1,\quad -1<\mathrm{Re}[s]<1,\quad \mathrm{Re}[s]>1$$

(2) 先判断稳定性

当 $\mathrm{Re}[s]<-2$，$-2<\mathrm{Re}[s]<-1$，$\mathrm{Re}[s]>1$ 时，收敛域不包含虚轴，系统不稳定。

当 $-1<\mathrm{Re}[s]<1$ 时，收敛域包含虚轴，系统稳定。

再判断因果性

当 $\mathrm{Re}[s]<-2$，$-2<\mathrm{Re}[s]<-1$，$-1<\mathrm{Re}[s]<1$ 时，收敛域不是右边收敛，系统非因果。

当 $\mathrm{Re}[s]>1$ 时，虽然右边收敛，但不能确定一定是因果系统。例如 $h(t)=u(t+1)$，虽然右边收敛，但对应的系统非因果。

5.28 某连续系统的微分方程为 $\dfrac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}-\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}-2y(t)=x(t)$，$H(s)$ 表示该系统的系统函数。

(1) 把 $H(s)$ 表示成 s 的多项式之比，并画出 $H(s)$ 的零极点图。

(2) 对下列三种情况中的每一种，确定 $h(t)$：

(a) 系统是稳定的；

(b) 系统是因果的；

(c) 系统既不是稳定的，也不是因果的。

【知识点】 本题考查连续时间系统的系统函数及系统特性，对应教材 5.6 节。

【解题思路】

首先根据系统微分方程得到系统函数，由系统函数得到零极点图，根据极点确定可能的收敛域，根据收敛域判断稳定因果性。

【解题过程】

(1) 由系统的微分方程可得到系统函数为

$$H(s)=\frac{1}{s^2-s-2}=\frac{1}{(s-2)(s+1)}$$

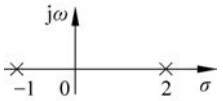


图 5.28

其零极点图如图 5.28 所示。

(2) $H(s)=\dfrac{1}{(s-2)(s+1)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{s-2}-\dfrac{1}{s+1}\right)$

(a) 系统是稳定的，收敛域包含虚轴，即收敛域为$-1<\mathrm{Re}[s]<2$。因此，系统函数的拉普拉斯反变换为

$$h(t)=-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t}u(-t)-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}u(t)$$

(b) 系统是因果的，收敛域为右半平面，即收敛域为 $\mathrm{Re}[s]>2$。因此，系统函数的拉普拉斯反变换为

$$h(t)=\frac{\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{-t}}{3}u(t)$$

(c) 系统既不是稳定的，也不是因果的，收敛域为 $\mathrm{Re}[s]<-1$。因此，系统函数的拉普拉斯反变换为

$$h(t)=\frac{1}{3}(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{2t})u(-t)$$

5.29 某控制系统结构如图 5.29 所示，其中 $G(s)=\dfrac{K(0.5s+1)}{(s+1)(0.5s^2+s+1)}$，试确定该系统稳定时的 K 值范围。

图 5.29

【知识点】 本题考查系统稳定性分析相关知识，对应教材 5.6.4 节。

【解题思路】

由系统函数和劳斯判据得出系统稳定时的参数取值范围。

【解题过程】

由图 5.29 可得系统函数为

$$H(s)=\frac{G(s)}{1-G(s)}=\frac{\dfrac{K(0.5s+1)}{(s+1)(0.5s^2+s+1)}}{1-\dfrac{K(0.5s+1)}{(s+1)(0.5s^2+s+1)}}$$

$$=\frac{K(0.5s+1)}{0.5s^3+1.5s^2+s(2-0.5K)+1-k}$$

利用劳斯判据

$$\begin{array}{cc} 0.5 & 2-0.5K \\ 1.5 & 1-K \\ \dfrac{1.5(2-0.5K)-0.5(1-K)}{1.5} & 0 \\ 1-K & 0 \end{array}$$

若稳定，需要满足

$$2.5-0.25K>0,\quad 1-K>0,$$

因此需要满足

$$K<1$$

5.30 设系统有下列特征方程，用劳斯判据判别各系统的稳定性或求系统稳定时的 K 值范围，若系统不稳定，则指出系统特征方程具有的右半平面的根的数目。

(1) $s^4+5s^2+2s+10=0$；

(2) $4s^5+6s^4+9s^3+2s^2+5s+4=0$；

(3) $s^4+9s^3+10s^2+Ks+K=0$；

(4) $s^3+4s^2+4s+K=0$；

(5) $s^5+2s^4+2s^3+4s^2+11s+10=0$。

【知识点】 本题考查系统稳定性分析相关知识，对应教材 5.6.4 节。

【解题思路】

由系统特征方程和劳斯判据得出系统稳定时的参数取值范围。

【解题过程】

(1) $s^4+5s^2+2s+10=0$

1	5	10	0
0	2	0	0

中第一列出现 0，因此将系数颠倒

10	5	1	0
2	0	0	0
5	1	0	0
$\frac{-2}{5}$	0	0	0
1	0	0	0

首列符号变了 2 次，不稳定，有 2 个正根。

(2) $4s^5+6s^4+9s^3+2s^2+5s+4=0$

4	9	5	0
6	2	4	0
$\frac{23}{3}$	$\frac{7}{3}$	0	0
$\frac{4}{23}$	4	0	0
$-\frac{522}{3}$	0	0	0
4	0	0	0

首列符号变了 2 次，不稳定，有 2 个右半平面的根。

(3) $s^4+9s^3+10s^2+Ks+K=0$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 10 & K & 0 \\ 9 & K & 0 & 0 \\ \dfrac{90-K}{9} & K & 0 & 0 \\ \dfrac{9K-K^2}{90-K} & 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

要使系统稳定，有

$$\begin{cases} \dfrac{90-K}{9}>0 \\ \dfrac{9K-K^2}{90-K}>0 \\ K>0 \end{cases} \Rightarrow 0<K<9$$

(4) $s^3+4s^2+4s+K=0$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 0 \\ 4 & K & 0 \\ \dfrac{16-K}{4} & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \end{array}$$

要使系统稳定，有

$$\begin{cases} 16-K>0 \\ K>0 \end{cases} \Rightarrow 0<K<16$$

(5) $s^5+2s^4+2s^3+4s^2+11s+10=0$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 11 & 0 \\ 2 & 4 & 10 & 0 \\ \varepsilon & 6 & 0 & 0 \\ 4-\dfrac{12}{\varepsilon} & 10 & 0 & 0 \\ 6-\dfrac{10\varepsilon^2}{4\varepsilon-12} & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

当 $\varepsilon\to 0^+$ 时，$4-\dfrac{12}{\varepsilon}<0$，$6-\dfrac{10\varepsilon^2}{4\varepsilon-12}>0$

系统不稳定，有 2 个右半平面的根。

5.31 系统的信号流图如图 5.30 所示，求系统函数。

【知识点】 本题考查信号流图和梅森公式相关知识，对应教材 5.7 节。

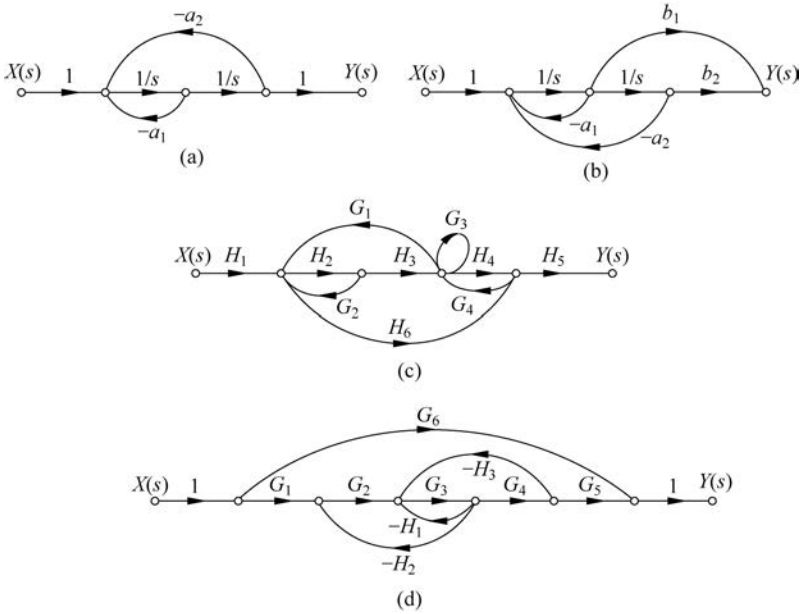


图 5.30

【解题思路】

根据图 5.30 的信号流图和梅森公式，得到系统函数。

【解题过程】

(a)

$$L_1=-\frac{a_1}{s},\quad L_2=-\frac{a_2}{s^2}$$

$$\Delta=1+\frac{a_1}{s}+\frac{a_2}{s^2}$$

$$T_1=\frac{1}{s^2},\quad \Delta_1=1$$

$$H(s)=\frac{\frac{1}{s^2}}{1+\frac{a_1}{s}+\frac{a_2}{s^2}}=\frac{1}{s^2+a_1s+a_2}$$

(b)

$$L_1=-\frac{a_1}{s},\quad L_2=-\frac{a_2}{s^2}$$

$$\Delta=1+\frac{a_1}{s}+\frac{a_2}{s^2}$$

$$T_1=\frac{b_1}{s},\quad \Delta_1=1$$

$$T_2=\frac{b_2}{s^2},\quad \Delta_2=1$$

$$H(s)=\frac{\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{s^2}}{1+\frac{a_1}{s}+\frac{a_2}{s^2}}=\frac{b_1s+b_2}{s^2+a_1s+a_2}$$

(c)

$L_1=H_2G_2, L_2=H_4G_4, L_3=H_2H_3G_1$

$L_4=G_3,\quad L_5=H_6G_4G_1,\quad L_1L_4=H_2G_2G_3,\quad L_1L_2=H_2H_4G_2G_4$

所以 $\Delta=1-H_2G_2-H_4G_4-H_2H_3G_1-G_6-H_6G_4G_1+H_2G_2G_3+H_2H_4G_2G_4$

$T_1=H_1H_2H_3H_4H_5,\quad \Delta_1=1$

$T_2=H_1H_6H_5,\quad \Delta_2=1-G_3$

$$H(s)=\frac{H_1H_2H_3H_4H_5+H_1H_6H_5(1-G_3)}{1-H_2G_2-H_4G_4-H_2H_3G_1-G_6-H_6G_4G_1+H_2G_2G_3+H_2H_4G_2G_4}$$

(d)

$L_1=-G_3H_1, L_2=-G_2G_3H_2, L_3=-G_3G_4H_3$

所以 $\Delta=1-L_1-L_2-L_3$

$T_1=G_1G_2G_3G_4G_5,\quad \Delta_1=1$

$T_2=G_6,\quad \Delta_2=1-L_1-L_2-L_3$

所以 $H(s)=\dfrac{G_1G_2G_3G_4G_5+G_6(1+G_3H_1+G_2G_3H_2+G_3G_4H_3)}{1+G_3H_1+G_2G_3H_2+G_3G_4H_3}$

5.32 设某连续系统的系统函数如下，求它们的直接实现形式、级联实现形式和并联实现形式。

(1) $H(s)=\dfrac{5s+7}{s^3+5s^2+5s+4}$；(2) $H(s)=\dfrac{s+3}{(s+2)^2(s+1)}$。

【知识点】 本题考查系统模拟相关知识，对应教材 5.8 节。

【解题思路】

根据所给出的系统函数，得到它们信号流图的直接实现形式、级联实现形式和并联实现形式。

【解题过程】

(1) 直接实现（见图 5.31）

$$H(s)=\frac{5s^{-2}+7s^{-3}}{1+5s^{-1}+5s^{-2}+4s^{-3}}$$

级联实现（见图 5.32）

$$H(s)=\frac{s^{-1}}{1+4s^{-1}}\cdot\frac{5s^{-1}+7s^{-2}}{1+s^{-1}+s^{-2}}$$

并联实现（见图 5.33）

$$H(s)=\frac{-s^{-1}}{1+4s^{-1}}+\frac{s^{-1}+2s^{-2}}{1+s^{-1}+s^{-2}}$$

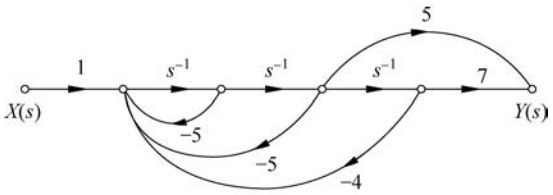


图 5.31

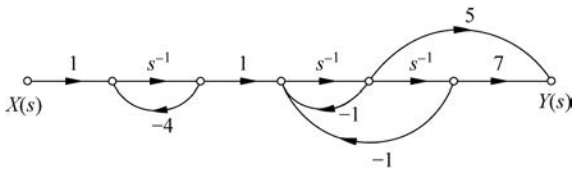


图 5.32

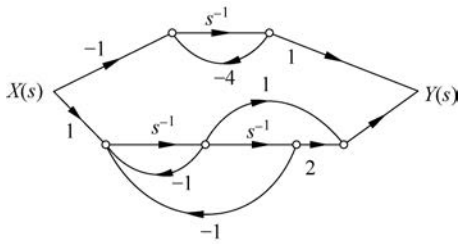


图 5.33

(2) 直接实现(见图 5.34)

$$H(s)=\frac{s+3}{(s^2+4s+4)(s+1)}=\frac{s+3}{s^3+5s^2+8s+4}=\frac{s^{-2}+3s^{-3}}{1+5s^{-1}+8s^{-2}+4s^{-3}}$$

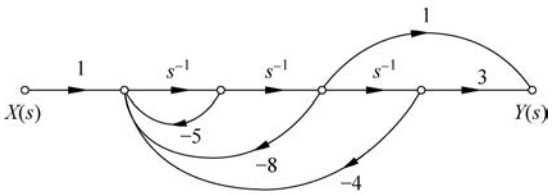


图 5.34

级联实现(见图 5.35)

$$H(s)=\frac{s+3}{s^2+4s+4}\,\frac{1}{s+1}=\frac{s^{-1}+3s^{-2}}{1+4s^{-1}+4s^{-2}}\,\frac{s^{-1}}{1+s^{-1}}$$

并联实现(见图 5.36)

$$H(s)=\frac{s+3}{s^2+4s+4}\,\frac{1}{s+1}=\frac{2}{s+1}-\frac{2s+5}{s^2+4s+4}=\frac{2s^{-1}}{1+s^{-1}}-\frac{2s^{-1}+5s^{-2}}{1+4s^{-1}+4s^{-2}}$$

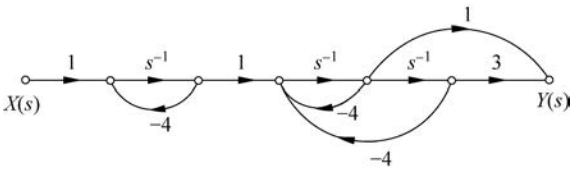


图　5.35

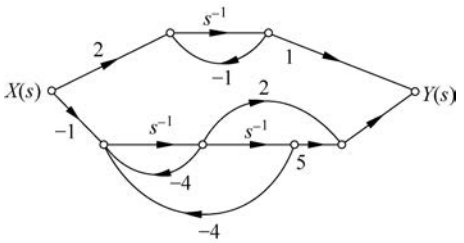


图　5.36

5.33　建立图 5.37 所示电路的状态方程。

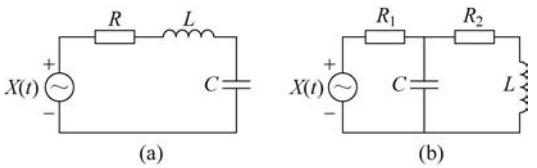


图　5.37

【知识点】　本题考查连续时间系统的状态变量分析相关知识，对应教材 5.9 节。

【解题思路】

根据电路图建立系统微分方程，由微分方程得到系统的状态方程。

【解题过程】

(a) 系统有 2 个记忆元件，分别是 L、C，状态变量取为 $i_L(t)$、$u_C(t)$

根据回路电压方程有

$$Ri_L(t)+L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}+u_C(t)=x(t)$$

以及 $C\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}=i_L(t)$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{L}\\[2ex]\dfrac{1}{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_L(t)\\u_C(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{L}\\0\end{bmatrix}x(t)$$

(b) 系统有 2 个记忆元件，分别是 L、C，状态变量取为 $i_L(t)$、$u_C(t)$

电容的电流为 $C\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$，因此根据回路电压方程有

$$R_1\left[i_L(t)+C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right]+u_C(t)=x(t)$$

$$R_2 i_L(t)+L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}=u_C(t)$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{R_2}{L} & \dfrac{1}{L}\\[2ex]-\dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{R_1C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_L(t)\\u_C(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\[2ex]\dfrac{1}{R_1C}\end{bmatrix}x(t)$$

5.34 建立图 5.38 所示电路的状态方程和输出方程。

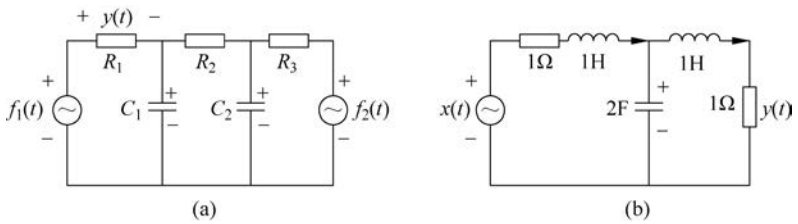


图 5.38

【知识点】 本题考查连续时间系统的状态变量分析相关知识，对应教材 5.9 节。

【解题思路】

根据电路图建立系统微分方程，由微分方程得到系统的状态方程和输出方程。

【解题过程】

(a) 系统有 2 个记忆元件，分别是 C_1、C_2，状态变量取为 $u_{C1}(t)$、$u_{C2}(t)$

根据节点电流方程有

$$\frac{f_1(t)-u_{C1}(t)}{R_1}=C_1\frac{\mathrm{d}u_{C1}(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{u_{C1}(t)-u_{C2}(t)}{R_2}$$

$$\frac{u_{C1}(t)-u_{C2}(t)}{R_2}=\frac{u_{C2}(t)-f_2(t)}{R_3}+C_2\frac{\mathrm{d}u_{C2}(t)}{\mathrm{d}t}$$

以及 $y(t)=f_1(t)-u_{C1}(t)$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}u_{C1}(t)}{\mathrm{d}t}\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}u_{C2}(t)}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{(R_1+R_2)C_1} & \dfrac{1}{R_2C_1}\\[2ex]\dfrac{1}{R_2C_2} & -\dfrac{1}{(R_2+R_3)C_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{C1}(t)\\u_{C2}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{R_1C_1} & 0\\[2ex]0 & \dfrac{1}{R_3C_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1(t)\\f_2(t)\end{bmatrix}$$

$$y(t)=[-1 \quad 0]\begin{bmatrix}u_{C1}(t)\\u_{C2}(t)\end{bmatrix}+[1 \quad 0]\begin{bmatrix}f_1(t)\\f_2(t)\end{bmatrix}$$

(b) 系统有 3 个记忆元件，分别是 L_1、L_2、C，状态变量取为 $i_{L1}(t)$、$i_{L2}(t)$、$u_C(t)$，如图 5.39 所示。

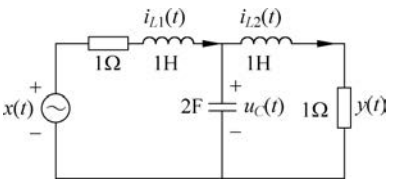


图 5.39

根据回路电压方程有

$$i_{L1}(t)+\frac{\mathrm{d}i_{L1}(t)}{\mathrm{d}t}+u_C(t)=x(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}i_{L2}(t)}{\mathrm{d}t}+i_{L2}(t)=u_C(t)$$

根据节点电流方程有

$$i_{L1}(t)=i_{L2}(t)+2\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

以及 $y(t)=i_{L2}(t)$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}i_{L1}(t)}{\mathrm{d}t}\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}i_{L2}(t)}{\mathrm{d}t}\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\0 & -1 & 1\\1/2 & -1/2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_{L1}(t)\\i_{L2}(t)\\u_C(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}x(t)$$

$$y(t)=[0 \quad 1 \quad 0]\begin{bmatrix}i_{L1}(t)\\i_{L2}(t)\\u_C(t)\end{bmatrix}$$

5.35 将下列微分方程化为状态方程和输出方程：

(1) $y'''(t)+5y''(t)+7y'(t)+3y(t)=x(t)$；

(2) $y''(t)+4y'(t)=x(t)$；

(3) $y''(t)+4y'(t)+3y(t)=x'(t)+x(t)$。

【知识点】 本题考查连续时间系统的状态变量分析相关知识，对应教材 5.9 节。

【解题思路】

由微分方程得到系统的状态方程和输出方程。

【解题过程】

(1) 套用标准形式

$$\begin{bmatrix}\dot{v}_1\\\dot{v}_2\\\dot{v}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-3 & -7 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}x,\quad y=[1 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}$$

(2) 套用标准形式

$$\begin{bmatrix}\dot{v}_1\\ \dot{v}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}x,\quad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}$$

(3) 套用标准形式

$$\begin{bmatrix}\dot{v}_1\\ \dot{v}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}x,\quad y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}$$

该系统为单输入单输出系统,系统函数是标量,因而有

$$H(s)=H(s)^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$$

因此,该系统函数亦可用下列状态空间模型实现

$$\dot{\boldsymbol{v}}(t)=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}x(t)$$

$$y(t)=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}x(t)$$

即

$$\begin{bmatrix}\dot{v}_{1a}\\ \dot{v}_{2a}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -3\\ 1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{1a}\\ v_{2a}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}x,\quad y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{1a}\\ v_{2a}\end{bmatrix}$$

令 $v_{1b}=v_{2a}$,$v_{2b}=v_{1a}-4v_{2a}$,得到另一形式的状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{v}_{1b}\\ \dot{v}_{2b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{1b}\\ v_{2b}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ -3\end{bmatrix}x,\quad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{1b}\\ v_{2b}\end{bmatrix}$$

验证:将以上模型分别代入 $H(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$,得到系统函数均为

$$H(s)=\frac{s+1}{s^2+4s+3}$$

5.36 将下列微分方程组化为状态方程和输出方程:

(1) $y_1'(t)+y_2(t)=x_1(t)$

$y_2''(t)+y_1'(t)+y_2'(t)+y_1(t)=x_2(t)$

(2) $y_1'(t)+y_2(t)=x(t)$

$y_2''(t)+y_1(t)=x(t)$

【知识点】

本题考查连续时间系统的状态变量分析相关知识,对应教材 5.9 节。

【解题思路】

由微分方程得到系统的状态方程和输出方程。

【解题过程】

(1) 该系统由一个一阶微分方程和一个二阶微分方程构成,因而需要 3 个状态变量,不妨取 $v_1=y_1(t)$,$v_2=y_2(t)$,$v_3=\dot{y}_2(t)$,写成如下形式:

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix},\quad v_3=\dot{v}_2$$

两个微分方程转换为

$$\dot{v}_1 = x_1 - v_2$$

$$\dot{v}_3 = x_2 - v_1 - v_3 - \dot{v}_1 = x_2 - v_1 - v_3 - (x_1 - v_2)$$

将以上关于3个状态变量的方程写成矩阵形式，有

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

（2）此题两个微分方程，共4阶，同样最少需要4个状态变量。

取 $v_1 = y_1(t)$，$v_2 = y_2(t)$，$v_3 = \dot{y}_1(t)$，$v_4 = \dot{y}_2(t)$，写成如下形式：

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$，以及 $v_3 = \dot{v}_1$，$v_4 = \dot{v}_2$

两个微分方程转换为

$$\dot{v}_3 = x - v_2$$

$$\dot{v}_4 = x - v_1$$

将以上关于4个状态变量的方程写成矩阵形式，有

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \\ \dot{v}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

5.2.2 提高题

5.1 已知因果信号的象函数如下，求 $x(0^+)$ 和 $x(\infty)$：

（1）$\dfrac{s}{s^2-2}$　　（2）$\dfrac{s}{s+2}$　　（3）$\dfrac{1}{s^2+1}$

【知识点】 本题知识点对应教材5.1.3节、5.2.9节和5.2.10节。

$$\delta(t) \leftrightarrow 1, \quad \sigma > -\infty$$

$$e^{at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-\alpha}, \quad \sigma > \alpha$$

$$\sin(\omega_0 t)u(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}, \quad \sigma > 0$$

初值定理：若 $x(t) \leftrightarrow X(s)$，$\sigma > \sigma_c$ 且不含冲激或冲激和各阶导数，则

$$x(0^+)=\lim_{t\to 0^+}x(t)=\lim_{s\to\infty}sX(s)$$

终值定理：若 $x(t)\leftrightarrow X(s)$，$\sigma>\sigma_c$，则

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=x(\infty)=\lim_{s\to 0}sX(s)$$

【解题思路】 本题是已知因果信号的象函数，求解其 $x(0^+)$ 和 $x(\infty)$。两种思路：一是先求出原函数，再求 $x(0^+)$ 和 $x(\infty)$；二是利用初值与终值定理并结合收敛域求解 $x(0^+)$ 和 $x(\infty)$。

【解题过程】

(1) 方法一：

$$\frac{s}{s^2-2}=\frac{s}{(s-\sqrt{2})(s+\sqrt{2})}=\frac{K_1}{s-\sqrt{2}}+\frac{K_2}{s+\sqrt{2}}$$

$$K_1=(s-\sqrt{2})\left.\frac{s}{(s-\sqrt{2})(s+\sqrt{2})}\right|_{s=\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

$$K_2=(s+\sqrt{2})\left.\frac{s}{(s-\sqrt{2})(s+\sqrt{2})}\right|_{s=-\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{s}{s^2-2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\sqrt{2}}+\frac{1}{s+\sqrt{2}}\right)\leftrightarrow\frac{1}{2}(e^{\sqrt{2}t}+e^{-\sqrt{2}t})u(t)$$

$$x(0^+)=\lim_{t\to 0^+}x(t)=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{2}(e^{\sqrt{2}t}+e^{-\sqrt{2}t})u(t)=1$$

$$x(\infty)=\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}(e^{\sqrt{2}t}+e^{-\sqrt{2}t})u(t)\to\text{不存在}$$

方法二：

$$x(0^+)=\lim_{s\to\infty}sX(s)=\lim_{s\to\infty}s\frac{s}{s^2-2}=\lim_{s\to\infty}\frac{s^2}{s^2-2}=\lim_{s\to\infty}\left(1+\frac{2}{s^2-2}\right)=1+0=1$$

$$x(\infty)=\lim_{s\to 0}sX(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{s}{s^2-2}=\lim_{s\to 0}\frac{s^2}{s^2-2}\to\text{不存在}$$

这是因为原函数是因果的，收敛域为 $\sigma>\sqrt{2}$，乘以 s 并未改变其收敛域，不在其收敛域，故不满足终止定理的约束条件。

故 $x(0^+)$ 存在，而 $x(\infty)$ 不存在。

(2) 方法一：

$$\frac{s}{s+2}=1-\frac{2}{s+2}\leftrightarrow\delta(t)-2e^{-2t}u(t)$$

$$x(0^+)=\lim_{t\to 0^+}x(t)=\lim_{t\to 0^+}(\delta(t)-2e^{-2t}u(t))=-2$$

$$x(\infty)=\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{t\to\infty}(\delta(t)-2e^{-2t}u(t))=0$$

方法二：

象函数乘后，分子阶数大于分母阶数，是非因果的，不符合初值定理约束。

$$x(\infty)=\lim_{s\to 0}sX(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{s}{s+2}=\lim_{s\to 0}\frac{s^2}{s+2}=0$$

由于原函数是因果的，所以其收敛域为 $\sigma>-2$，故 $x(\infty)$存在。

(3) 方法一：

$$\frac{1}{s^2+1}\leftrightarrow\sin(t)u(t)$$

$$x(0^+)=\lim_{t\to 0^+}x(t)=\lim_{t\to 0^+}(\sin(t)u(t))=0$$

$$x(\infty)=\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{t\to\infty}(\sin(t)u(t))\to\text{不存在}$$

方法二：

$$x(0^+)=\lim_{s\to\infty}sX(s)=\lim_{s\to\infty}s\frac{1}{s^2+1}=\lim_{s\to\infty}\frac{s}{s^2+1}=\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s+\frac{1}{s}}=0$$

$$x(\infty)=\lim_{s\to 0}sX(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{s^2+1}=\lim_{s\to 0}\frac{s}{s^2+1}\to\text{不存在}$$

原因同(1)，故 $x(0^+)$存在，而 $x(\infty)$不存在。

5.2 已知 $X(s)=\mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\}$，利用拉普拉斯变换的性质直接求下列象函数的反变换：

(1) $X\left(\frac{s}{3}\right)$；　(2) $X\left(\frac{s}{3}\right)e^{-2s}$；　(3) $X'(s)$；

(4) $sX'(s)$；　(5) $X'\left(\frac{s}{3}\right)$；　(6) $\frac{X(s)}{s}$；

(7) $\frac{X'\left(\frac{s}{3}\right)}{s}$；　(8) $sX\left(\frac{s}{3}\right)$；　(9) $sX\left(\frac{s}{3}\right)e^{-2s}$。

【知识点】 本题知识点对应教材 5.2.2 节、5.2.4 节、5.2.5 节、5.2.6 节、5.2.7 节。

时移特性：若 $x(t)\leftrightarrow X(s)$，$\sigma>\sigma_c$，则

$x(t-t_0)u(t-t_0)\leftrightarrow X(s)e^{-st_0}$，$\sigma>\sigma_c$，式中 $t_0>0$。

尺度变换特性：若 $x(t)\leftrightarrow X(s)$，$\sigma>\sigma_c$，则

$$x(\alpha t)\leftrightarrow\frac{1}{\alpha}X\left(\frac{s}{\alpha}\right),\quad\sigma>\alpha\sigma_c,\quad\alpha>0$$

时域微分定理：若 $x(t)\leftrightarrow X(s)$，$\sigma>\sigma_c$，且$\frac{dx(t)}{dt}$存在，则

$$\frac{dx(t)}{dt}\leftrightarrow sX(s)-x(0^-)$$

时域积分定理：若 $x(t)\leftrightarrow X(s)$，$\sigma>\sigma_c$，则

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\right]=\frac{X(s)}{s}+\frac{1}{s}x^{(-1)}(0^-)$$

s 域微分定理：若 $x(t)\leftrightarrow X(s)$，$\sigma>\sigma_c$，则

$$-tx(t)\leftrightarrow\frac{\mathrm{d}X(s)}{\mathrm{d}s}$$

$$(-t)^n x(t)\leftrightarrow\frac{\mathrm{d}^n X(s)}{\mathrm{d}s^n}$$

【解题思路】 本题是已知原函数和象函数，通过灵活运用拉普拉斯变换特性求解不同象函数的反变换。

【解题过程】

(1) 依据尺度变换特性，可知

$$x(3t)\leftrightarrow\frac{1}{3}X\left(\frac{s}{3}\right),\quad \sigma>3\sigma_c$$

$$3x(3t)\leftrightarrow X\left(\frac{s}{3}\right)$$

$$3\mathrm{e}^{-6t}u(t)\leftrightarrow X\left(\frac{s}{3}\right)$$

(2) 在题(1)的基础上，依据时移特性，可知

$$3\mathrm{e}^{-6(t-2)}u(t-2)\leftrightarrow X\left(\frac{s}{3}\right)\mathrm{e}^{-2s}$$

(3) 依据 s 域微分定理，可知

$$-tx(t)\leftrightarrow X'(s)$$

$$-t\mathrm{e}^{-2t}u(t)\leftrightarrow X'(s)$$

(4) 在题(3)的基础上，依据时域微分定理，可知

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\leftrightarrow sX(s)-x(0^-)$$

$$x(0^-)=-t\mathrm{e}^{-2t}u(t)\big|_{0^-}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}(-t\mathrm{e}^{-2t}u(t))}{\mathrm{d}t}\leftrightarrow sX'(s)-0$$

$$-\mathrm{e}^{-2t}u(t)+2t\mathrm{e}^{-2t}u(t)\leftrightarrow sX'(s)$$

(5) 在题(3)的基础上，依据尺度变换特性，可知

$$-t\mathrm{e}^{-2t}u(t)\leftrightarrow X'(s)$$

$$-3t\mathrm{e}^{-6t}u(t)\leftrightarrow X'\left(\frac{s}{3}\right)$$

(6) 依据时域积分定理，可知

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\frac{X(s)}{s}+\frac{1}{s}x^{(-1)}(0^-)$$

$$\frac{1}{s}x^{(-1)}(0^-)=\int_{-\infty}^{0^-}x(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{0^-}\mathrm{e}^{-2\tau}u(\tau)\mathrm{d}\tau=0$$

$$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-2\tau}u(\tau)\mathrm{d}\tau=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\tau}\Big|_0^t=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{1-\mathrm{e}^{-2t}}{2}u(t)\leftrightarrow\frac{X(s)}{s}$$

（7）在题(5)的基础上，依据时域积分定理，可知

$$-9t\mathrm{e}^{-6t}u(t)\leftrightarrow X'\left(\frac{s}{3}\right)$$

$$\frac{1}{s}x^{(-1)}(0^-)=\int_{-\infty}^{0^-}x(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{0^-}-9\tau\mathrm{e}^{-6\tau}u(\tau)\mathrm{d}\tau=0$$

$$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}-3\tau\mathrm{e}^{-6\tau}u(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{0}^{t}-3\tau\mathrm{e}^{-6\tau}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\int_{0}^{t}\tau\mathrm{d}\mathrm{e}^{-6\tau}$$

$$=\frac{1}{2}\tau\mathrm{e}^{-6\tau}\Big|_0^t-\frac{1}{2}\int_0^t\mathrm{e}^{-6\tau}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-6t}-\frac{1}{2}\frac{1}{-6}\mathrm{e}^{-6\tau}\Big|_0^t=\frac{6t\mathrm{e}^{-6t}+\mathrm{e}^{-6t}-1}{12}$$

$$\frac{6t\mathrm{e}^{-6t}+\mathrm{e}^{-6t}-1}{12}u(t)\leftrightarrow\frac{X'\left(\frac{s}{3}\right)}{s}$$

（8）在题(1)的基础上，依据时域微分定理，可知

$$3\mathrm{e}^{-6t}u(t)\leftrightarrow X\left(\frac{s}{3}\right)$$

$$x(0^-)=3\mathrm{e}^{-6t}u(t)\Big|_{0^-}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}3\mathrm{e}^{-6t}u(t)}{\mathrm{d}t}=-18\mathrm{e}^{-6t}u(t)+3\delta(t)$$

$$-18\mathrm{e}^{-6t}u(t)+3\delta(t)\leftrightarrow sX\left(\frac{s}{3}\right)$$

（9）在题(8)的基础上，依据时移特性，可知

$$-18\mathrm{e}^{-6t+12}u(t-2)+3\delta(t-2)\leftrightarrow sX\left(\frac{s}{3}\right)\mathrm{e}^{-2s}$$

5.3 求下列象函数的单边拉普拉斯反变换，并粗略画出时域波形。

（1）$\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-s}}$；　　（2）$\dfrac{1}{s(1+\mathrm{e}^{-s})}$。

【知识点】 本题知识点对应教材 5.2.2 节、5.2.6 节。

时移特性：若 $x(t)\leftrightarrow X(s)$，$\sigma>\sigma_c$，则

$x(t-t_0)u(t-t_0)\leftrightarrow X(s)\mathrm{e}^{-st_0}$，$\sigma>\sigma_c$，式中 $t_0>0$。

时域积分定理：若 $x(t)\leftrightarrow X(s)$，$\sigma>\sigma_c$，则

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\frac{X(s)}{s}+\frac{1}{s}x^{(-1)}(0^-)$$

$$\sum_{k=m}^{n}r^k=\frac{r^{n+1}-r^m}{r-1},\quad r\neq 1$$

【解题思路】 本题是已知象函数，通过灵活运用拉普拉斯变换特性求解原函数。

【解题过程】

(1) 依据等比公式有

$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-s}}=\frac{(-\mathrm{e}^{-s})^{\infty}-(-\mathrm{e}^{-s})^{0}}{(-\mathrm{e}^{-s})-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-\mathrm{e}^{-s})^{n}$$

$$-\delta(t-1)\leftrightarrow-\mathrm{e}^{-s}$$

$$\delta(t-2)\leftrightarrow\mathrm{e}^{-2s}$$

$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-s}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-\mathrm{e}^{-s})^{n}\leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}(-\delta(t-1))^{n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n}\delta(t-n)$$

信号时域波形如图 5.40 所示。

(2) 在题(1)基础上,利用时域积分定理可进行求解:

$$x^{(-1)}(0^{-})=\int_{-\infty}^{0^{-}}x(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{0^{-}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n}\delta(t-n)\mathrm{d}\tau=0$$

$$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n}\delta(t-n)\mathrm{d}\tau=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n}u(t-n)$$

依据时域积分定理可得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n}u(t-n)\leftrightarrow\frac{1}{s(1+\mathrm{e}^{-s})}$$

信号时域波形如图 5.41 所示。

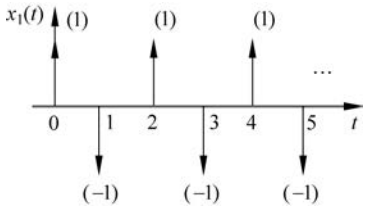


图 5.40

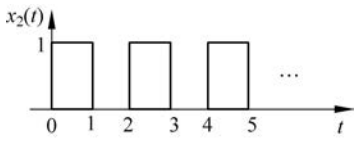


图 5.41

5.4 求$\dfrac{-s+1}{(s^2+4)(s+1)}$,$-1<\sigma<0$ 的双边拉普拉斯反变换。

【知识点】 本题知识点对应教材 5.4.3 节。

【解题思路】 本题是已知象函数与收敛域,可使用部分分式展开法和留数计算法求解原函数。

【解题过程】 部分分式展开法:

首先将$\dfrac{-s+1}{(s^2+4)(s+1)}$展开为部分分式:

$$X_{\mathrm{B}}(s)=\frac{-s+1}{(s^2+4)(s+1)}=\frac{K_1}{(s+2\mathrm{j})}+\frac{K_2}{(s-2\mathrm{j})}+\frac{K_3}{(s+1)}$$

$$K_1=(s+2\mathrm{j})\left.\frac{-s+1}{(s^2+4)(s+1)}\right|_{s=-2\mathrm{j}}=-\frac{4+3\mathrm{j}}{20}$$

$$K_2=(s-2\mathrm{j})\left.\frac{-s+1}{(s^2+4)(s+1)}\right|_{s=2\mathrm{j}}=\frac{4-3\mathrm{j}}{20}$$

$$K_3=(s+1)\left.\frac{-s+1}{(s^2+4)(s+1)}\right|_{s=-1}=\frac{2}{5}$$

对于$-1<\sigma<0$，这时

$$X_{\mathrm{B}}(s)=\frac{-s+1}{(s^2+4)(s+1)}=-\frac{4+3\mathrm{j}}{20}\frac{1}{(s+2\mathrm{j})}+\frac{4-3\mathrm{j}}{20}\frac{1}{(s-2\mathrm{j})}+\frac{2}{5}\frac{1}{(s+1)}$$

其中，极点$s=\pm 2\mathrm{j}$在收敛域的右边界，因此上式中前两项应在$\sigma<0$时收敛，其原函数在$t>0$时等于零；极点$s=-1$在收敛域的左边界，因此上式中第三项应在$\sigma>-1$时收敛，其原函数在$t<0$时等于零。

故得

$$X_1(-s)=-\frac{4+3\mathrm{j}}{20}\frac{1}{s+2\mathrm{j}}+\frac{4-3\mathrm{j}}{20}\frac{1}{s-2\mathrm{j}},\quad X_2(s)=\frac{2}{5}\frac{1}{s+1}$$

$$x_1(-t)=-\frac{4+3\mathrm{j}}{20}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}t}u(t)+\frac{4-3\mathrm{j}}{20}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}t}u(t)$$

$$x_1(t)=-\frac{4+3\mathrm{j}}{20}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}t}u(-t)+\frac{4-3\mathrm{j}}{20}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}t}u(-t)$$

$$x_2(t)=\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-t}u(t)$$

最后得原函数为

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)=-\frac{4+3\mathrm{j}}{20}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}t}u(-t)+\frac{4-3\mathrm{j}}{20}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}t}u(-t)+\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-t}u(t)$$

$$=\frac{2}{5}\cos(2t)u(-t)+\frac{3}{10}\sin(2t)u(-t)+\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-t}u(t)$$

留数计算法：

根据函数的收敛域$-1<\sigma<0$，可知极点$s=\pm 2\mathrm{j}$在σ的右边，极点$s=-1$在σ的左边，根据教材式(5.4.13)，有

$$x(t)=\begin{cases}-\operatorname*{Res}_{s=\pm 2\mathrm{j}}[X_{\mathrm{B}}(s)\mathrm{e}^{st}], & t<0\\ \operatorname*{Res}_{s=-1}[X_{\mathrm{B}}(s)\mathrm{e}^{st}], & t>0\end{cases}$$

其中，$-\operatorname*{Res}_{s=-2\mathrm{j}}[X_{\mathrm{B}}(s)\mathrm{e}^{st}]=-(s+2\mathrm{j})X_{\mathrm{B}}(s)\mathrm{e}^{st}\big|_{s=-2\mathrm{j}}=\frac{4+3\mathrm{j}}{20}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}t}$

$$-\operatorname*{Res}_{s=2\mathrm{j}}[X_{\mathrm{B}}(s)\mathrm{e}^{st}]=-(s-2\mathrm{j})X_{\mathrm{B}}(s)\mathrm{e}^{st}\big|_{s=2\mathrm{j}}=-\frac{4-3\mathrm{j}}{20}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}t}$$

$$\operatorname*{Res}_{s=-1}[X_{\mathrm{B}}(s)\mathrm{e}^{st}]=(s+1)X_{\mathrm{B}}(s)\mathrm{e}^{st}\big|_{s=-1}=\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-t}$$

$$x(t)=\begin{cases}\frac{2}{5}\cos(2t)+\frac{3}{10}\sin(2t), & t<0\\ \frac{2}{5}\mathrm{e}^{-t}, & t>0\end{cases}$$

方法一与方法二求解结果相同。

5.5 信号 $x(t)$ 满足有以下特点：(1)因果信号；(2)有多个零点。其象函数 $X(s)$ 的极点个数有可能为 1 吗？

【知识点】 本题知识点对应教材 5.6.1 节。

对于因果系统，$H(s)$ 在左半平面的极点所对应的特征模式衰减(或振荡衰减)，当 $t\to\infty$ 时，这部分响应趋于零；在虚轴上的一阶极点对应的特征模式不随时间变化(或等幅振荡)；在右半平面的极点对应的特征模式增长(或振荡增长)。

【解题思路】 依据系统的时域特性与极点位置的关系，来推断上述假设是否成立。

【解题过程】 信号的象函数有多个零点，说明其分子阶数大于 1；若其象函数极点个数为 1，说明其分母阶数为 1，则其分子阶数大于分母阶数，这样象函数对应的原函数不是因果的，与原函数为因果矛盾，故象函数不可能只有 1 个极点。

5.6 某信号 $x(t)$ 具有以下特点：(1)$x(t)$ 为实偶信号；(2)$X(s)$ 有 4 个极点，没有零点；(3)$X(s)$ 有一个极点在 $0.5\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}$；(4) $\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\mathrm{d}t=4$。试确定 $x(t)$ 及其拉普拉斯变换收敛域。

【知识点】 本题知识点对应教材 5.1.1 节、5.1.2 节、5.4.3 节以及 5.6.2 节。

【解题思路】 第一步，利用实信号频谱的零极点信息，写出 $X(s)$ 的基本形式；第二步，基于已知的一个极点位置，利用极点的共轭成对特性，得到另一个极点；第三步，基于“实偶信号频谱是实偶函数”，利用平面几何法中相位等于极点向量相位之和为 0，确定其余极点位置；第四步，利用拉普拉斯变换的定义，确定基本形式中的系数；第五步，根据偶函数及极点位置，确定拉普拉斯变换的收敛域；第六步，利用部分分式展开法求反变换，得 $x(t)$。

【解题过程】

根据(2)$X(s)$ 有 4 个极点而没有零点，

所以 $X(s)$ 可以写成 $X(s)=\dfrac{A}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)}$ 的形式。

根据(3)$X(s)$ 有一个极点在 $s_1=0.5\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}$，由于实信号的零极点要么是共轭成对，要么在实轴上，那么 $X(s)$ 有另一个极点在 $s_2=s_1^*=0.5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}$。零极点图如图 5.42 所示。

再根据(1)实偶信号的频谱也是实偶的，即频谱的虚部为 0，其相位应为 0 或 π，利用平面几何法画出如图 5.42 所示零极点图，因此另外两个极点必须与 s_1、s_2 对应的极点关于虚轴对称，这样才能使相位恒为 0 或 π(取决于 A 的取值)。故有 $s_3=-0.5\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}$，$s_4=s_3^*=-0.5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}$。

最后根据(4)$X(s)|_{s=0}=4$，即可确定 $A=0.25$，故有

$$X(s)=\frac{0.25}{(s-0.5\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}})(s-0.5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}})(s+0.5\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}})(s+0.5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}})}$$

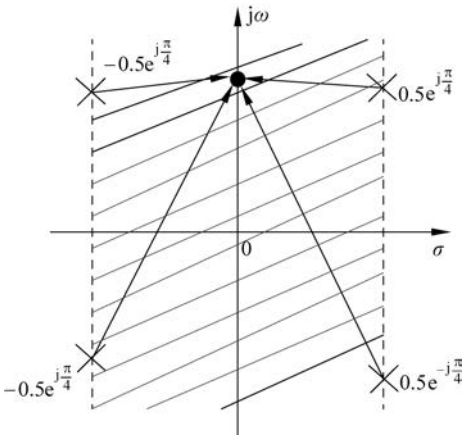


图　5.42

$$=\frac{0.25}{\left[s-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right]\left[s-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right]\left[s+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right]\left[s+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right]}$$

由于 $x(t)$ 是非零偶信号，故必为双边信号，可确定其收敛域为

$$-\frac{\sqrt{2}}{4}<\mathrm{Re}[s]<\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$X(s)=\frac{0.25}{\left[\left(s-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2\right]\left[\left(s+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2\right]}$$

$$=\frac{0.25}{\sqrt{2}s}\left\{\frac{1}{\left[\left(s-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2\right]}-\frac{1}{\left[\left(s+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2\right]}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{s}-\frac{s-\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}}{\left[\left(s-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2\right]}\right\}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{s}-\frac{s+\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}}{\left[\left(s+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2\right]}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\left(s+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}}{\left[\left(s+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2\right]}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\left(s-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}}{\left[\left(s-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2\right]},\quad -\frac{\sqrt{2}}{4}<\mathrm{Re}[s]<\frac{\sqrt{2}}{4}$$

利用常用变换对可得

$$x(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\sqrt{2}}{4}t}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}t\right)u(t)+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\sqrt{2}}{4}t}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}t\right)u(t)+$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\sqrt{2}}{4}t}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}t\right)u(-t)-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\sqrt{2}}{4}t}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}t\right)u(-t)$$

5.7 电路如图 5.43 所示，$u_o(t)$为输出信号。求：

(1) 系统函数；

(2) 输入为 $x_1(t)$时的零状态响应；

(3) 输入为 $x_2(t)$时的零状态响应。

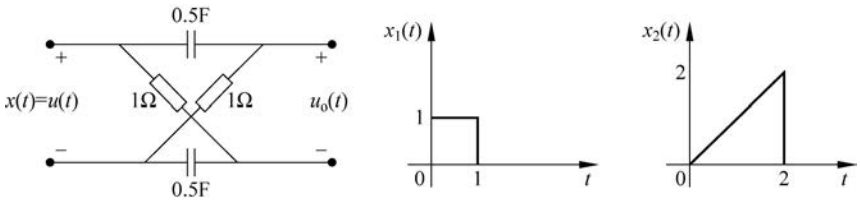


图 5.43

【知识点】 本题知识点对应教材 5.3.2 节、5.5.1 节以及 5.5.2 节。

系统函数：系统零状态响应的象函数 $Y_{zs}(s)$与激励的象函数 $X(s)$之比，即

$$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{X(s)}$$

【解题思路】 利用时域卷积或复频域相乘、单边拉普拉斯反变换求连续时间 LTI 系统的零状态响应。

【解题过程】

(1) 首先将电路图简化并转化为 s 域模型图(见图 5.44)。

$$u_o(t)=u_2(t)-u_1(t),\quad U_o(s)=U_2(s)-U_1(s)$$

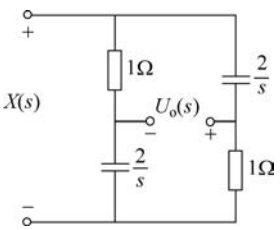


图 5.44

$$\text{所以 } U_o(s)=X(s)\left(\frac{1}{\frac{2}{s}+1}-\frac{\frac{2}{s}}{\frac{2}{s}+1}\right)=\frac{s-2}{s+2}X(s)$$

$$H(s)=\frac{s-2}{s+2}=1-\frac{4}{s+2}$$

(2) 方法一、时域求解零状态响应：

由于为因果系统，故 $h(t)=\delta(t)-4e^{-2t}u(t)$，$x(t)=u(t)-u(t-1)$

故 $u_1(t)=x(t)*h(t)=[\delta(t)-4e^{-2t}u(t)]*[u(t)-u(t-1)]$

$$=u(t)-u(t-1)-4e^{-2t}u(t)*u(t)+4e^{-2t}u(t)*u(t)*\delta(t-1)$$

$$=u(t)-u(t-1)-4\frac{e^{-2t}-1}{-2}u(t)+4\frac{e^{-2(t-1)}-1}{-2}u(t-1)$$

$$=-u(t)+u(t-1)+2e^{-2t}u(t)-2e^{-2(t-1)}u(t-1)$$

方法二、复频域求解因果系统的零状态响应：

$$X(s)=\frac{1-e^{-s}}{s}$$

$$\text{故 } U_1(s)=\frac{1-e^{-s}}{s}\frac{s-2}{s+2}=\frac{s-2}{s(s+2)}-e^{-s}\frac{s-2}{s(s+2)}$$

$$=\frac{2}{s+2}-\frac{1}{s}-e^{-s}\left(\frac{2}{s+2}-\frac{1}{s}\right),\ \mathrm{Re}[s]>0$$

利用常用变换对及时移特性可得

$$u_1(t)=2e^{-2t}u(t)-u(t)-2e^{-2(t-1)}u(t-1)+u(t-1)$$

（3）方法一、时域求解零状态响应：

$$x(t)=tu(t)-(t-2)u(t-2)-2u(t-2)$$

故 $u_2(t)=x(t)*h(t)=[\delta(t)-4e^{-2t}u(t)]*[tu(t)-tu(t-2)]$

$=tu(t)-tu(t-2)-4e^{-2t}u(t)*u(t)*u(t)+4e^{-2t}u(t)*[(t-2)u(t-2)]+8e^{-2t}u(t)*u(t-2)$

$=tu(t)-tu(t-2)+2(e^{-2t}-1)u(t)*u(t)+4e^{-2t}u(t)*u(t)*u(t)*\delta(t-2)+8e^{-2t}u(t)*u(t)*\delta(t-2)$

$=tu(t)-(t-2)u(t-2)-2u(t-2)-(e^{-2t}-1+2t)u(t)+(e^{-2(t-2)}-1+2(t-2))u(t-2)-4(e^{-2(t-2)}-1)u(t-2)$

$=u(t)-tu(t)-e^{-2t}u(t)+u(t-2)+(t-2)u(t-2)-3e^{-2(t-2)}u(t-2)$

方法二、复频域求解零状态响应：

$$X(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-2s}}{s^2}-\frac{2e^{-2s}}{s}$$

故 $U_2(s)=\frac{s-2}{s+2}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-2s}}{s^2}-\frac{2e^{-2s}}{s}\right)=(1-e^{-2s})\left(\frac{1}{s}+\frac{-1}{s^2}+\frac{-1}{s+2}\right)-2e^{-2s}\left(\frac{2}{s+2}-\frac{1}{s}\right)$

$U_2(t)=u(t)-tu(t)-e^{-2t}u(t)-u(t-2)+(t-2)u(t-2)+e^{-2(t-2)}u(t-2)-4e^{-2(t-2)}u(t-2)+2u(t-2)$

$=u(t)-tu(t)-e^{-2t}u(t)+u(t-2)+(t-2)u(t-2)-3e^{-2(t-2)}u(t-2)$

5.8 求图 5.45 所示电路的系统函数，其中 $u_1(t)$ 为输入信号，$u_2(t)$ 为输出信号。

【知识点】 本题知识点对应教材 5.5.1 节和 5.5.2 节。

【解题思路】 将电路转化为 s 域模型图，利用基尔霍夫定律（KVL）列写方程，求出系统函数。

【解题过程】

首先将电路图简化并转化为 s 域模型图（图 5.46）。

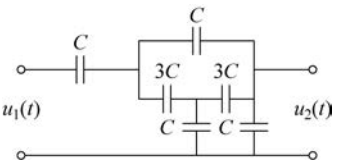


图 5.45

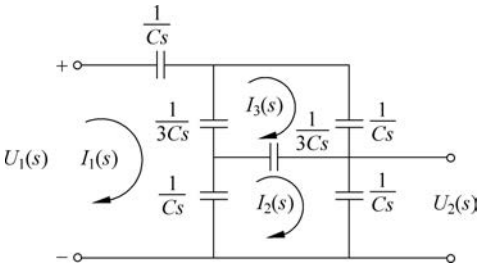


图 5.46

根据 KVL，列出方程：

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{Cs}+\frac{1}{3Cs}+\frac{1}{Cs}\right)I_1(s)-\frac{1}{Cs}I_2(s)-\frac{1}{3Cs}I_3(s)=U_1(s)\\ -\frac{1}{Cs}I_1(s)+\left(\frac{1}{Cs}+\frac{1}{3Cs}+\frac{1}{Cs}\right)I_2(s)-\frac{1}{3Cs}I_3(s)=0\\ -\frac{1}{3Cs}I_1(s)-\frac{1}{3Cs}I_2(s)+\left(\frac{1}{3Cs}+\frac{1}{3Cs}+\frac{1}{Cs}\right)I_3(s)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{7}{3}I_1(s)-I_2(s)-\frac{1}{3}I_3(s)=U_1(s)Cs\\ -I_1(s)+\frac{7}{3}I_2(s)-\frac{1}{3}I_3(s)=0\\ -\frac{1}{3}I_1(s)-\frac{1}{3}I_2(s)+\frac{5}{3}I_3(s)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}7I_1(s)-3I_2(s)-I_3(s)=3U_1(s)Cs\\ -3I_1(s)+7I_2(s)-I_3(s)=0\\ -I_1(s)-I_2(s)+5I_3(s)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow I_2(s)=\begin{vmatrix}7 & 3CsU_1(s) & -1\\ -3 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 5\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}7 & -3 & -1\\ -3 & 7 & -1\\ -1 & -1 & 5\end{vmatrix}=\frac{48Cs}{180}U_1(s)=\frac{4Cs}{15}U_1(s)$$

因此 $U_2(s)=\dfrac{I_2(s)}{Cs}=\dfrac{4}{15}U_1(s)\Rightarrow H(s)=\dfrac{U_2(s)}{U_1(s)}=\dfrac{4}{15}$

5.9 电路如图 5.47 所示，$i_1(t)$为输出电流，$u_C(0^-)=8\text{V}$，$i_L(0^-)=4\text{A}$，$t=0$ 时开关闭合。

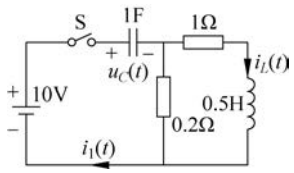


图 5.47

（1）画出该系统的 s 域等效电路图；

（2）计算全响应电流 $i_1(t)$；

（3）指出 $i_1(t)$的自然响应、强迫响应、瞬态响应和稳态响应分量。

【知识点】 本题知识点对应教材 5.3.2 节、5.5.1 节以及 5.5.2 节。

时域电容元件 C 的 s 域模型（其中 $u_C(0^-)$为初始电压）如图 5.48 所示。

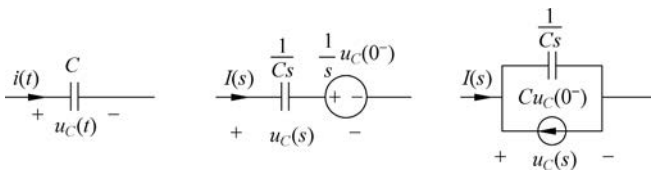


图 5.48

时域电感元件 L 的 s 域模型（其中 $i_L(0^-)$为电感的初始电流）如图 5.49 所示。

【解题思路】 将电路转化为 s 域模型图，利用 KVL 列写方程，化简得全响应象函数，再求 LTI 得输出响应。

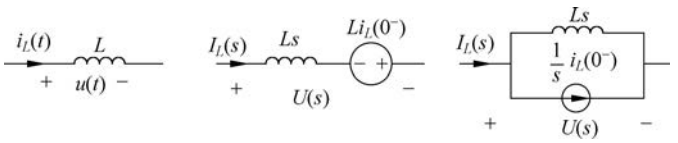


图 5.49

【解题过程】

(1) 首先将电路图转化为 s 域模型图(图 5.50)。

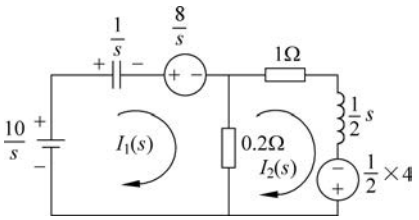


图 5.50

(2) 根据回路电流法，列出方程：

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{s}+0.2\right)I_1(s)-0.2I_2(s)=\frac{10}{s}-\frac{8}{s}=\frac{2}{s}\\ -0.2I_1(s)+(1.2+0.5s)I_2(s)=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow I_1(s)=\begin{vmatrix}\frac{2}{s} & -0.2\\ 2 & 1.2+0.5s\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}\frac{1}{s}+0.2 & -0.2\\ -0.2 & 1.2+0.5s\end{vmatrix}$$

$$=\frac{24+14s}{(s+3)(s+4)}=\frac{-18}{s+3}+\frac{32}{s+4}$$

$$i_1(t)=(32e^{-4t}-18e^{-3t})u(t)$$

(3) 自然响应$(32e^{-4t}-18e^{-3t})u(t)$，强迫响应 0；

瞬态响应$(32e^{-4t}-18e^{-3t})u(t)$，稳态响应 0。

5.10 某连续时间系统的单位冲激响应为 $h(t)=e^{-2|t|}$，试写出描述该系统的微分方程，并计算 e^{-t} 通过该系统后的输出。

【知识点】 本题知识点对应教材 5.1.1 节和 5.1.2 节。

【解题思路】 利用常用拉普拉斯变换对 $e^{at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s-\alpha}$，$\mathrm{Re}[s]>\alpha$ 以及 $-e^{at}u(-t)\leftrightarrow\frac{1}{s-\alpha}$，$\mathrm{Re}[s]<\alpha$，求拉普拉斯变换，即系统函数；基于系统函数，求系统的微分方程；利用“复指数信号 e^{s_0t} 通过系统 $H(s)$ 的输出为 $e^{s_0t}\cdot H(s)|_{s=s_0}$”求本题中系统输出。

【解题过程】

$$h(t)=e^{-2|t|}=e^{-2t}u(t)+e^{2t}u(-t)$$

$$H(s)=\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s-2}=\frac{-4}{s^2-4},\quad -2<\mathrm{Re}[s]<2$$

可得微分方程：$y''(t)-4y(t)=-4x(t)$

由于 e^{-t} 的特征根 -1 在系统的收敛域中，因此

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau=\mathrm{e}^{-t}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\mathrm{e}^{\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$=\mathrm{e}^{-t}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\mathrm{d}\tau\,|_{s=-1}=\mathrm{e}^{-t}\cdot H(s)\,|_{s=-1}=\mathrm{e}^{-t}\,\frac{-4}{(-1)^2-4}=\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-t}$$

5.11 某连续系统零极点图如图 5.51 所示。当输入 $x(t)=\begin{cases}1, & \cos t>\dfrac{1}{\pi}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 时，若分别用 X_k，Y_k 表示输入、输出信号的傅里叶级数系数，$\dfrac{Y_0}{X_0}=1$，试计算 $\dfrac{Y_1}{X_1}$。

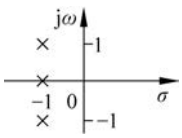


图 5.51

【知识点】 本题知识点对应教材 3.2.3 节以及 5.6.2 节。

【解题思路】 根据零极点图写出系统函数，并确定其是否稳定。再利用周期信号通过系统后的输出得出 $\dfrac{Y_1}{X_1}$。

【解题过程】

由系统零极点可知 $H(s)=\dfrac{k}{(s+1)[s-(-1+\mathrm{j})][s-(-1-\mathrm{j})]}=\dfrac{k}{(s+1)(s^2+2s+2)}$

物理可实现的系统为因果系统，又由于其极点位于左半平面，所以系统稳定，故周期信号 $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t}$ 通过系统后的输出为 $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_kH(\mathrm{j}k\omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t}$，$\dfrac{Y_0}{X_0}=H(0)=1$

而 $H(0)=\left.\dfrac{k}{(s+1)(s^2+2s+2)}\right|_{s=0}=\dfrac{k}{2}$，因此 $k=2$，$H(s)=\dfrac{2}{(s+1)(s^2+2s+2)}$

由 $x(t)=\begin{cases}1, & \cos t>\dfrac{1}{\pi}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 可知信号周期与 $\cos t$ 周期相同，为 2π，其基频 $\omega_0=1$

因此 $\dfrac{Y_1}{X_1}=H(\mathrm{j}\omega_0)=H(\mathrm{j}1)=\left.\dfrac{2}{(s+1)(s^2+2s+2)}\right|_{s=\mathrm{j}1}=\dfrac{2}{(\mathrm{j}+1)(\mathrm{j}^2+2\mathrm{j}+2)}=\dfrac{2}{3\mathrm{j}-1}$

5.12 周期信号 $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\delta(t-3k)+\delta(t-1-3k)-\delta(t-2-3k)]$ 通过系统函数为 $H(s)=\mathrm{e}^{s/4}-\mathrm{e}^{-s/4}$ 的系统。用 Y_k 表示输出 $y(t)$ 的傅里叶级数系数，试计算 Y_3。

【知识点】 本题知识点对应教材 3.2.3 节以及 5.1.1 节。

【解题思路】 利用常用拉普拉斯变换对 $\delta(t+t_0)\leftrightarrow\mathrm{e}^{st_0}$，求拉普拉斯反变换。利用周期信号指数形式的傅里叶级数定义，计算 Y_3。

【解题过程】

$x(t)$是一个周期为3的由冲激串构成的信号，如图5.52所示。

由 $H(s)=e^{s/4}-e^{-s/4}$ 可得 $h(t)=\delta(t+0.25)-\delta(t-0.25)$

由于 $h(t)$绝对可积，因此系统稳定。

故 $y(t)=x(t)*h(t)=x(t+0.25)-x(t-0.25)$，其周期也为3，如图5.53所示。

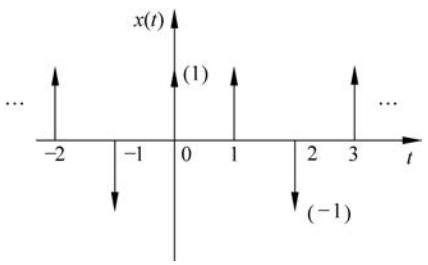


图 5.52

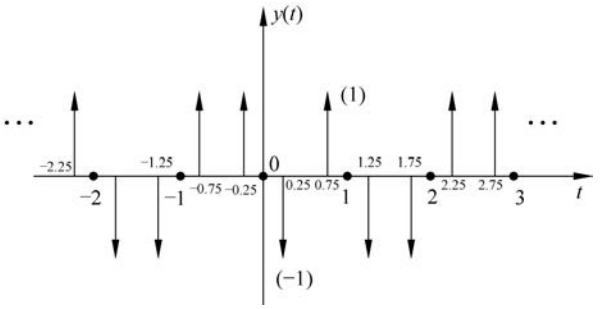


图 5.53

周期信号的指数傅里叶级数系数：$Y_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}y(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt$，　$T=3$

故 $Y_3=\frac{1}{3}\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}\left[-\delta\left(t-\frac{1}{4}\right)+\delta\left(t+\frac{1}{4}\right)+\delta\left(t-\frac{3}{4}\right)+\delta\left(t+\frac{3}{4}\right)-\delta\left(t-\frac{5}{4}\right)-\delta\left(t+\frac{5}{4}\right)\right]e^{-j2\pi t}dt=\frac{1}{3}(-e^{-j\frac{\pi}{2}}+e^{j\frac{\pi}{2}}+e^{-j\frac{3\pi}{2}}+e^{j\frac{3\pi}{2}}-e^{-j\frac{5\pi}{2}}-e^{j\frac{5\pi}{2}})=\frac{2j}{3}$

5.13　某系统单位冲激响应 $h(t)=(1-2t)e^{-2t}u(t)$，试画出该系统的频率响应，并判断该系统为何种类型的滤波器。

【知识点】　本题知识点对应教材5.1节、5.6.2节。

拉普拉斯变换的基本定义：

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt$$

系统的零极点分析：系统的幅频响应等于所有零点向量的模除以所有极点向量的模。

【解题思路】　首先根据拉普拉斯变换的定义计算出该单位冲激响应对应的频率响应函数，然后通过分析该系统的零极点特性以判断该滤波器的类型。

【解题过程】　系统的频率响应是单位冲激响应的傅里叶变换，根据常用傅里叶变换对可知

$$H(s)=\frac{1}{s+2}-\frac{2}{(s+2)^2}=\frac{s}{(s+2)^2}$$

显然，该系统具有一个零点 $s=0$，以及一个二阶极点 $s=-2$，零极点分布如图5.54所示。

系统的幅度响应可以表示为各零点向量长度积与各极点向量长度积的比值，既有

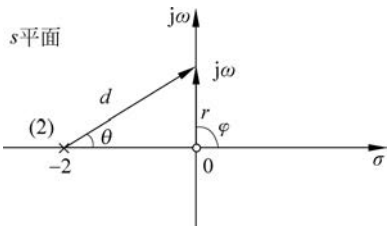


图 5.54

$$|H(j\omega)|=\frac{r}{d^2}=\frac{r}{r^2+4}$$

当 ω 取值为 0 时，零点向量长度为零，$|H(j\omega)|=0$；在 $\omega\to\pm\infty$ 时，$r\to+\infty$，有 $|H(j\omega)|\to 0$。因此，该系统为一带通滤波器。系统的幅度响应曲线如图 5.55 所示，进一步验证了该结论。

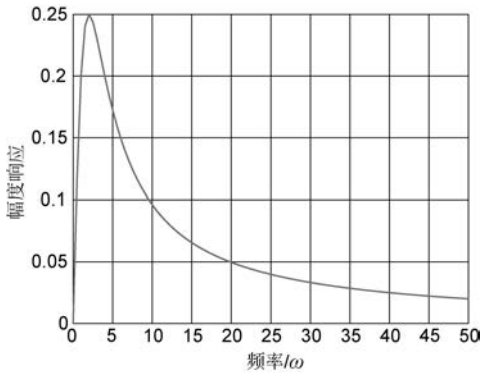


图 5.55

5.14 设计某二阶带通滤波器，其中心频率在 $\omega_0=10$，增益在 $\omega=0$ 和 $\omega=\infty$ 应该为零，将极点选在 $-a\pm j10$，试分析 a 对频率响应的影响。

【知识点】 本题知识点对应教材 5.6.2 节。

系统的频率响应可以表示为

$$H(j\omega)=|H(j\omega)|\,e^{j\angle H(j\omega)}$$

其中，

$$|H(j\omega)|=K\frac{|B_1||B_2|\cdots|B_m|}{|A_1||A_2|\cdots|A_n|}=K\frac{\prod_{j=1}^{m}|B_j|}{\prod_{j=1}^{n}|A_j|}$$

$$\angle H(j\omega)=(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_m)-(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)=\sum_{j=1}^{m}\varphi_j-\sum_{j=1}^{n}\theta_j$$

【解题思路】 首先根据系统函数确定系统的零极点信息，然后根据零点向量与极点

向量的模与相角的变化过程，得出 a 对频率响应的影响。

【解题过程】 由题目中的中心频率以及零极点信息可知，该滤波器的频率响应可以表示为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\mathrm{j}\omega}{(\mathrm{j}\omega+a)^2+100},\quad a>0$$

该系统的零极点分布如图 5.56 所示。

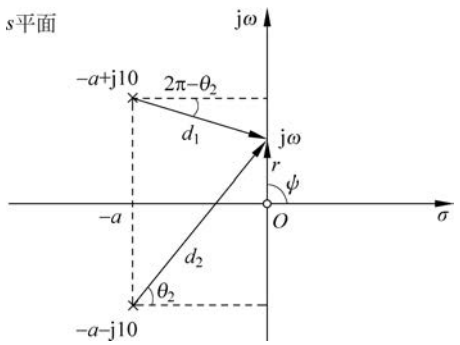


图 5.56

该系统的幅度响应可以表示为

$$|H(\mathrm{j}\omega)|=\frac{|r|}{|d_1||d_2|}=\frac{\omega}{\sqrt{a^2+(\omega+10)^2}\sqrt{a^2+(\omega-10)^2}}$$

由此可知，随着参数 a 的逐渐增大，系统在相同频率值处的响应值逐渐减低。

此外，该系统的相频响应可以表示为

$$\begin{aligned}\angle H(\mathrm{j}\omega)&=\psi-\theta_1-\theta_2\\&=\frac{\pi}{2}+\arctan\left(\frac{10-\omega}{a}\right)-\arctan\left(\frac{10+\omega}{a}\right)\end{aligned}$$

系统的相频响应值随 a 的变化如图 5.57 所示。由图可知，在低频位置，随着 a 的逐渐增大，相频响应值逐渐减小；在高频位置，随着 a 的逐渐增大，系统相频响应值逐渐增大。

彩图

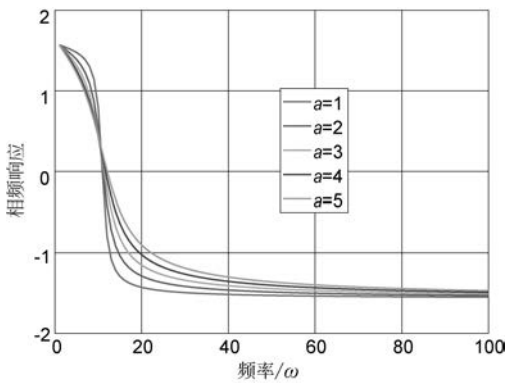


图 5.57

5.15 想设计一因果稳定的连续时间线性时不变系统。在低频段该系统的幅频特性近似为 5ω，在高频段该系统幅频特性近似为 $80/\omega$，且当 $\omega=4$ 时，该系统的幅频响应为 40。可以设计出满足上述条件的系统吗？若可以，请写出该系统的系统函数。

【知识点】 本题知识点对应教材 5.6.1 节、5.6.4 节。

系统函数：定义系统零状态响应的象函数 $Y_{zs}(s)$ 与激励的象函数 $X(s)$ 之比为系统函数，用 $H(s)$ 表示，即

$$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{X(s)}$$

$H(s)$ 的一般形式是两个 s 的多项式之比，即

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$$

因果稳定性分析：

因果系统的收敛域为 $\mathrm{Re}[s]>\sigma_c$，σ_c 是最右边极点的模值；线性时不变系统稳定性与系统函数 $H(s)$ 的收敛域包含虚轴是等价的。

此外，对于连续时间系统而言，其低频位置处于 0 处，高频位置处于∞处。

【解题思路】 首先结合已知条件，利用待定系数法确定系函数形式，然后根据该系统函数确定的零极点信息分析该系统是否满足因果稳定的条件。

【解题过程】 假设存在该二阶系统，则其系统函数可以表示为

$$H(s)=\frac{as}{s^2+bs+c}$$

对其求一阶导可得

$$H'(s)=\frac{-as^2+ac}{(s^2+bs+c)^2}$$

结合题目条件可得 $H'(s)$ 在 0 附近近似等于 5，由此可得 $\frac{a}{c}=5$。

此外，当 $s\to\infty$ 时，$H(s)$ 可近似写成

$$H(s)\approx\frac{as}{s^2}=\frac{a}{s}$$

因此可得 $a=80$，$c=16$。最后根据“当 $\omega=4$ 时，该系统的幅频响应为 40”这一条件可得

$$\begin{cases}c=16\\ a=80\\ \dfrac{4a}{-16+4b+c}=40\end{cases}$$

联立解得

$$\begin{cases} a=80 \\ b=2 \\ c=16 \end{cases}$$

因此该系统的系统函数可以表示为

$$H(s)=\frac{80s}{s^2+2s+16}$$

由于系统极点处于 s 左半平面内，收敛域包括虚轴，并且分母的阶次高于分子，因此系统因果稳定，符合设计要求。

5.16 某因果线性时不变系统，在初始状态不变的条件下，当输入 $x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$ 时，全响应为 $y(t)=1.5\mathrm{e}^{-t}u(t)-2\mathrm{e}^{-2t}u(t)+0.5\mathrm{e}^{-3t}u(t)$；当输入 $x(t)=\mathrm{e}^{-4t}u(t)$ 时，全响应为 $y(t)=2.5\mathrm{e}^{-2t}u(t)-4\mathrm{e}^{-3t}u(t)+1.5\mathrm{e}^{-4t}u(t)$。

（1）计算该系统的系统函数 $H(s)$；

（2）画出该系统的零极点图，并指出 $H(s)$ 的收敛域；

（3）判断该系统的稳定性并说明原因；

（4）求该系统的单位冲激响应 $h(t)$。

【知识点】 本题知识点对应教材 5.6.1 节、5.6.2 节和 5.6.4 节。

零状态响应的象函数可表示为

$$Y_{zs}(s)=H(s)X(s)$$

其中，$H(s)$ 是系统单位冲激响应的象函数，即系统函数，$X(s)$ 是输入信号的象函数。对于 n 阶常系数微分方程描述的系统，系统函数可以表示为

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=K\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

其中，$p_j(j=1,2,\cdots,n)$ 称为极点，$z_j(j=1,2,\cdots,m)$ 称为零点。

对于因果系统，系统函数右边收敛，即

$$\mathrm{Re}[s]>\sigma_c,\quad \sigma_c \text{ 为最右边极点的实部}$$

线性时不变系统稳定性与系统函数 $H(s)$ 的收敛域包含虚轴是等价的。

【解题思路】 初始状态不变，零输入响应不变。不同输入时全响应之差等于零状态响应之差，根据零状态响应象函数与系统函数、输入信号象函数的关系，建立系统函数的方程。利用零极点的定义、系统稳定性与系统函数的关系确定零极点以及判定稳定性的依据。

【解题过程】

（1）不同输入时全响应之差即为零状态响应之差，零状态响应象函数为系统函数与输入信号象函数的乘积。

$$\mathrm{e}^{at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s-a},\quad \mathrm{Re}[s]>a$$

$$e^{-t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+1},\quad \mathrm{Re}[s]>-1$$

$$1.5e^{-t}u(t)-2e^{-2t}u(t)+0.5e^{-3t}u(t)\leftrightarrow\frac{1.5}{s+1}-\frac{2}{s+2}+\frac{0.5}{s+3},\quad \mathrm{Re}[s]>-1$$

$$e^{-4t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+4},\quad \mathrm{Re}[s]>-4$$

$$2.5e^{-2t}u(t)-4e^{-3t}u(t)+1.5e^{-4t}u(t)\leftrightarrow\frac{2.5}{s+2}-\frac{4}{s+3}+\frac{1.5}{s+4},\mathrm{Re}[s]>-2$$

$$\left(\frac{1}{s+4}-\frac{1}{s+1}\right)H(s)=\frac{2.5}{s+2}-\frac{4}{s+3}+\frac{1.5}{s+4}-\left(\frac{1.5}{s+1}-\frac{2}{s+2}+\frac{0.5}{s+3}\right)$$

化简后可得

$$H(s)=\frac{3}{(s+2)(s+3)},\quad \mathrm{Re}[s]>-2$$

(2) 根据零极点的定义可知，系统包含两个极点，在有限 s 平面没有零点。

极点为 $p_1=-2,\quad p_2=-3$

根据因果 LTI 系统的系统函数的收敛性质，收敛域为

$$\mathrm{Re}[s]>-2$$

零极点图如图 5.58 所示。

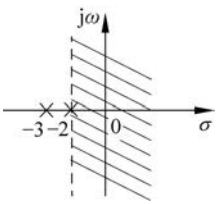


图 5.58

(3) 由(2)可知，系统函数的收敛域包含虚轴，根据系统稳定的充要条件，该系统是稳定的。

(4) 根据系统单位冲激响应与系统函数的关系

$$H(s)=\frac{3}{(s+2)(s+3)}=\frac{3}{s+2}-\frac{3}{s+3},\quad \mathrm{Re}[s]>-2$$

因此

$$h(t)=3e^{-2t}u(t)-3e^{-3t}u(t)$$

5.17 下列关于 $x(t)$ 的说法分别对 $X(s)$ 收敛域有何要求？

(1) $x(t)e^{2t}$ 绝对可积；　　(2) $x(t)*[e^{-2t}u(t)]$ 绝对可积；

(3) $x(t)=0,t<1$；　　(4) $x(t)=0,t>1$。

【知识点】 本题知识点对应教材 5.1.2 节、5.1.4 节、5.2.3 节、5.2.11 节和 5.6.4 节。

绝对可积的充要条件是收敛域包含虚轴。右边序列右边收敛、左边序列左边收敛。

复频移性质：$x(t)e^{s_0t}\leftrightarrow X(s-s_0)$

时域卷积性质：$x_1(t)*x_2(t)\leftrightarrow X_1(s)\cdot X_2(s)$

【解题思路】 根据拉普拉斯变换的性质，确定 $x(t)$ 经过时域处理后所得信号 $x_1(t)$ 的拉普拉斯变换 $X_1(s)$，得到 $X(s)$ 和 $X_1(s)$ 的关系，进而通过 $X_1(s)$ 的收敛域确定 $X(s)$ 的收敛域要求。

【解题过程】

(1) $x(t)e^{2t}\leftrightarrow X(s-2)$，$x(t)e^{2t}$ 绝对可积的充要条件是 $X(s-2)$ 的收敛域包含虚

轴，相当于 $X(s)$ 的收敛域包含 $\mathrm{Re}[s]=-2$；

(2) $x(t)*[\mathrm{e}^{-2t}u(t)]\leftrightarrow X(s)\dfrac{1}{s+2}$，$x(t)*[\mathrm{e}^{-2t}u(t)]$ 绝对可积的充要条件是 $X(s)\dfrac{1}{s+2}$ 的收敛域包含虚轴，由于 $[\mathrm{e}^{-2t}u(t)]$ 的收敛域包含虚轴，只要 $X(s)$ 的收敛域包含虚轴即可。

(3) $x(t)$ 为右边序列，右边序列右边收敛。

(4) $x(t)$ 为左边序列，左边序列右边收敛。

5.18 某实信号 $x(t)$ 满足下列 5 个条件，试确定 $X(s)$ 并给出其收敛域。

(1) $X(s)$ 只有两个极点；

(2) $X(s)$ 在有限 s 平面没有零点；

(3) $X(s)$ 有一个极点在 $s=-1+\mathrm{j}$；

(4) $\mathrm{e}^{2t}x(t)$ 不是绝对可积的；

(5) $X(0)=8$。

【知识点】 同题 5.16 和题 5.17。

【解题思路】 设定 $X(s)$ 的形式，根据 5 个条件逐步确定多项式的阶数和系数。

【解题过程】

(1) 根据条件(1)，$X(s)$ 的分母为二阶多项式，可表示为

$$X(s)=\frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

(2) 根据条件(2)，$X(s)$ 的分子为 0 阶多项式(常数)，进一步表示为

$$X(s)=\frac{k}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

(3) 根据条件(3)，$p_1=-1+\mathrm{j}$，而实信号对应 $X(s)$ 的分子分母都是实系数多项式，于是极点是共轭对称的，$p_2=-1-\mathrm{j}$，进而

$$X(s)=\frac{k}{s^2+2s+2}$$

(4) $\mathrm{e}^{2t}x(t)$ 不是绝对可积的，意味着其拉普拉斯变换 $X(s-2)$ 的收敛域不包含虚轴，即 $X(s)$ 的收敛域不包含 $\mathrm{Re}[s]=-2$。根据收敛域和极点的关系，$X(s)$ 的收敛域为 $\mathrm{Re}[s]>-1$。

(5) 由 $X(0)=\dfrac{k}{2}=8$ 可得 $k=16$，因此最终可得

$$X(s)=\frac{16}{s^2+2s+2},\quad \mathrm{Re}[s]>-1$$

5.19 某因果稳定线性时不变系统的单位冲激响应记作 $h(t)$，系统函数 $H(s)$ 有理且满足以下条件，试确定 $H(s)$ 并给出其收敛域。

(1) $H(1)=0.2$；

(2) 当输入为 $u(t)$ 时，输出绝对可积；

(3) 当输入为 $tu(t)$时,输出不绝对可积;

(4) 信号 $h''(t)+2h'(t)+2h(t)$是有限长的;

(5) $H(s)$在无限远点只有一个零点。

【知识点】 同题 5.16 和题 5.17。

【解题思路】 与题 5.18 类似,从给出的各条件分别解读出关于 $H(s)$的信息,最终确定 $H(s)$分子分母多项式的阶数和系数。

【解题过程】

(1) 根据已知条件可假设 $H(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}=K\dfrac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$。由于系统因果稳定,所有极点都在左半平面,收敛域为以最右边极点为边界的右边平面。

(2) 根据题目中的条件(1)可得 $H(1)=\dfrac{N(1)}{D(1)}=0.2$。

(3) 根据题目中的条件(2)和条件(3)可知,$H(s)\dfrac{1}{s}$的收敛域包含虚轴,$H(s)\dfrac{1}{s^2}$的收敛域不包含虚轴。$H(s)\dfrac{1}{s}$收敛域包含虚轴,说明 $H(s)$在 0 处有一个一阶以上(含)的零点,用于抵消 $u(t)$引入的极点,而 $H(s)\dfrac{1}{s^2}$收敛域不包含虚轴($H(s)$的极点都在左半平面),说明 $H(s)$在 0 处不会是二阶及以上的零点。因此,$H(s)$在 0 处有一个一阶的零点,可得

$$H(s)=K\frac{s\prod_{j=1}^{m-1}(s-z_j)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

(4) $h''(t)+2h'(t)+2h(t)$为有限长,说明其拉普拉斯变换$(s^2+2s+2)H(s)$在 s 平面没有极点,又知 $H(s)$的极点是共轭成对出现的,于是

$$H(s)=K\frac{s\prod_{j=1}^{m-1}(s-z_j)}{s^2+2s+2}$$

(5) $H(s)$在无限远点只有一个零点,说明 $H(s)$的分母比分子高一阶,可得

$$H(s)=\frac{Ks}{s^2+2s+2}$$

根据 $H(1)=\dfrac{N(1)}{D(1)}=0.2$,求得 $K=1$。

因此,该因果稳定线性时不变系统的系统函数为

$$H(s)=\frac{s}{s^2+2s+2},\quad \mathrm{Re}[s]>-1$$

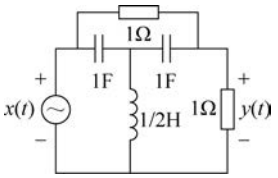


图 5.59

5.20 建立图 5.59 所示电路的状态方程和输出方程。

【知识点】 本题知识点对应教材 5.9.1 节，根据物理系统的工作原理，建立相应物理系统的状态方程和输出方程。

【解题思路】

（1）根据该电路问题确定其输入量和输出量；

（2）根据该电路的记忆元件个数，分析确定系统的阶数，并合理选择状态变量；

（3）根据该电路的工作原理，列出回路电压方程及节点电路方程，并转换为状态方程和输出方程的规范形式。

【解题过程】

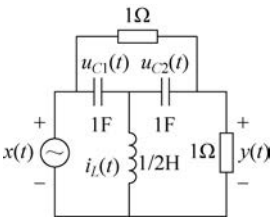


图 5.60

（1）该电路问题确定其输入量和输出量在图 5.60 中已经给出。

（2）系统有 3 个记忆元件，状态变量取为 $i_L(t)$，$u_{C1}(t)$，$u_{C2}(t)$，如图 5.60 所示。

记电路的元件分别为 $L=\frac{1}{2}\mathrm{H}$，$C_1=1\mathrm{F}$，$C_2=1\mathrm{F}$，$R=1\Omega$，$R_L=1\Omega$（$y(t)$对应的电阻）

根据回路电压方程有

$$L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}+u_{C1}(t)=x(t)$$

$$L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}=u_{C2}(t)+y(t)$$

$$\left(\frac{y(t)}{R_L}-C_2\frac{\mathrm{d}u_{C2}(t)}{\mathrm{d}t}\right)Ru_{C1}(t)+u_{C2}(t)$$

以及节点电流方程

$$C_1\frac{u_{C1}(t)}{\mathrm{d}t}=C_2\frac{u_{C2}(t)}{\mathrm{d}t}+i_L(t)$$

即 $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+u_{C1}(t)=x(t)$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}(t)}=u_{C2}(t)+y(t)$$

$$y(t)-da_{C2}(t)=u_{C1(t)}+u_{C2}(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}u_{C1}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}u_{C2}(t)}{\mathrm{d}t}+i_L(t)$$

(3) 将上述方程分别变换如下：

$$\dot{i}_L = 2x(t) - 2u_{C1}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\dot{i}_L^{(t)} - u_{C2}^{(t)} = x^{(t)} - u_{C1}^{(t)} - u_{C2}^{(t)}$$

$$\dot{u}_{C2}^{(t)} = y(t) - u_{C1}^{(t)} - u_{C2}^{(t)} = x(t) - 2u_{C1}^{(t)} - 2u_{C2}^{(t)}$$

$$\dot{u}_{C1}^{(t)} = \dot{u}_{C2}^{(t)} + i_L^{(t)} = x(t) - 2u_{C1}^{(t)} - 2u_{C2}^{(t)} + i_L^{(t)}$$

表示成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L(t) \\ \dot{u}_{C1}(t) \\ \dot{u}_{C2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_{C1}(t) \\ u_{C2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_{C1}(t) \\ u_{C2}(t) \end{bmatrix} + x(t)$$

5.2.3 计算机作业

计算机作业

1. 计算下列信号的单边拉普拉斯变换。

(1) $\frac{1}{a}(1-e^{-at})u(t)$；　(2) $e^{-t}u(t-2)$；　(3) $e^{-t}[u(t)-u(t-2)]$；

(4) $(t^3+t^2+t+1)u(t)$；　(5) $te^{-at}\sin 2tu(t)$。

【知识点】 利用符号函数求解信号的单边拉普拉斯变换。

【程序脚本】

```
syms t a;
X1 = simplify(laplace((1 - exp( - a * t)) * heaviside(t)/a))
X2 = simplify(laplace(exp( - t) * heaviside(t - 2)))
X3 = simplify(laplace(exp( - t) * (heaviside(t) - heaviside(t - 2))))
X4 = simplify(laplace((t^3 + t^2 + t + 1) * heaviside(t)))
X5 = simplify(laplace(t * exp( - a * t) * sin(2 * t) * heaviside(t)))
```

【结果及分析】

命令行运行结果为

```
X1 =
1/(s*(a + s))
X2 =
exp( - 2*s - 2)/(s + 1)
```

```
X3 =
 1/(s + 1) - exp(- 2*s - 2)/(s + 1)
X4 =
 (s^3 + s^2 + 2*s + 6)/s^4
X5 =
(2*(2*a + 2*s))/((a + s)^2 + 4)^2
```

整理以后与理论结果一致，因此可以用符号函数求解信号的单边拉普拉斯变换。

2. 计算下列象函数的单边拉普拉斯反变换。

(1) $\dfrac{s-a}{(s+a)^2}$；　(2) $\dfrac{e^{-s}}{4s(s^2+1)}$；　(3) $\dfrac{1}{s(s^2+5)}$。

【知识点】 利用符号函数求解信号的单边拉普拉斯反变换。

【程序脚本】

```
syms s a;
x1 = simplify(ilaplace((s-a)/(s+a)^2))
x2 = simplify(ilaplace(exp(-s)/(4*s*(s^2+1))))
x3 = simplify(ilaplace(1/(s*(s^2+5))))
```

【结果及分析】

命令行运行结果为

```
x1 =
-exp(-a*t)*(2*a*t - 1)
x2 =
    -(heaviside(t - 1)*(cos(t - 1) - 1))/4
x3 =
    1/5 - cos(5^(1/2)*t)/5
```

由计算仿真结果可知，利用符号函数得到信号的单边拉普拉斯反变换后，还需要乘以 $u(t)$。

3. 对下列象函数进行部分分式展开。

(1) $\dfrac{3}{s(2s+3)}$；　(2) $\dfrac{1}{s^2-3s+2}$；　(3) $\dfrac{4s^2+11s+10}{2s^2+5s+3}$。

【知识点】 利用 MATLAB 实现部分分式展开。

【程序脚本】

```
%分式 1
b = 3;
a = conv([1 0],[2 3]);
[r1 p1 k1] = residue(b,a)
%分式 2
b = 1;
a = [1 -3 2];
```

```
[r2 p2 k2] = residue(b,a)
% 分式 3
b = [4 11 10];
a = [2 5 3];
[r3 p3 k3] = residue(b,a)
```

【结果及分析】

命令行运行结果为

```
r1 =
   -1
    1
p1 =
                    -1.5
                       0
k1 =
    []
r2 =
    1
   -1
p2 =
    2
    1
k2 =
    []
r3 =
                    -2.5
                       3
p3 =

                    -1.5
                      -1
k3 =
    2
```

对结果进行整理得

$$\frac{3}{s(2s+3)}=\frac{-1}{s+1.5}+\frac{1}{s},\frac{1}{s^2-3s+2}=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-1},\frac{4s^2+11s+10}{2s^2+5s+3}=\frac{-2.5}{s+1.5}+\frac{3}{s+1}+2$$

4. 画出以下系统函数所描述的连续时间线性时不变系统的零极点图，以及频率响应曲线(默认收敛域均包含虚轴)。

(1) $H(s)=\dfrac{s^2-2s+50}{s^2+2s+50}$；　　(2) $H(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+3)}$；

(3) $H(s)=\dfrac{s}{s^2+s+1}$。

【知识点】 利用 MATLAB 画出系统的零极点图和频率响应。

【程序脚本】

```
close all
 % 系统 1
b = [1 -2 50];
a = [1 2 50];
pzmap(b,a);title('系统 1 的零极点图')
figure;freqs(b,a);
 % 系统 2
b = [1];
a = conv([1 1],[1,3]);
figure;pzmap(b,a);title('系统 2 的零极点图')
figure;freqs(b,a);
 % 系统 3
b = [1 0];
a = [1 1 1];
figure;pzmap(b,a);title('系统 3 的零极点图')
figure;freqs(b,a);
```

【结果及分析】

仿真结果如图 5.61 所示。

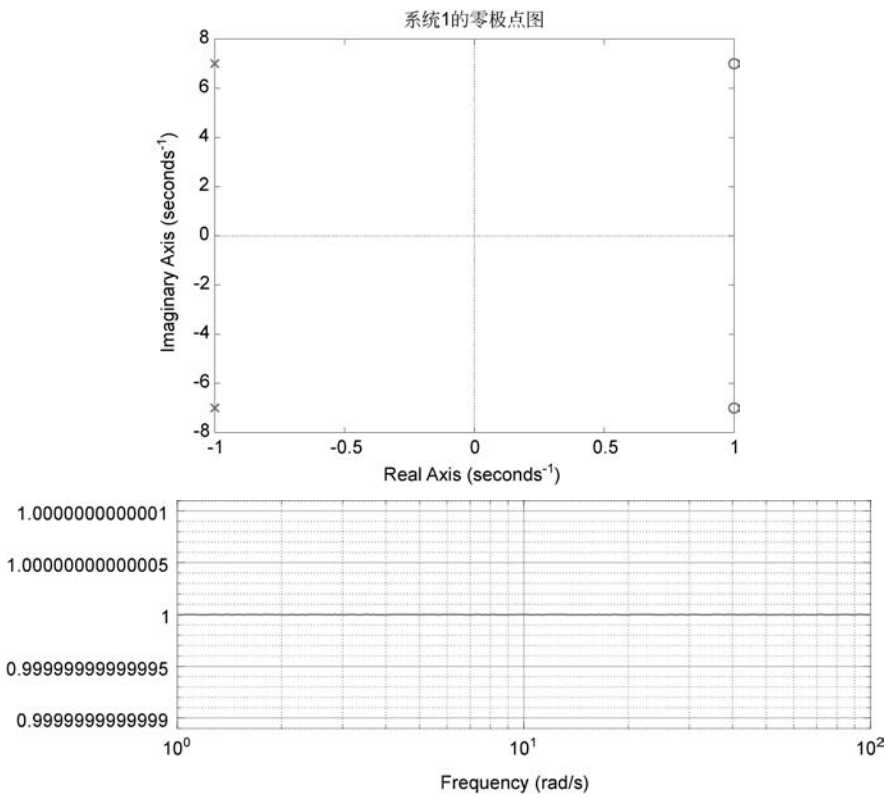


图 5.61

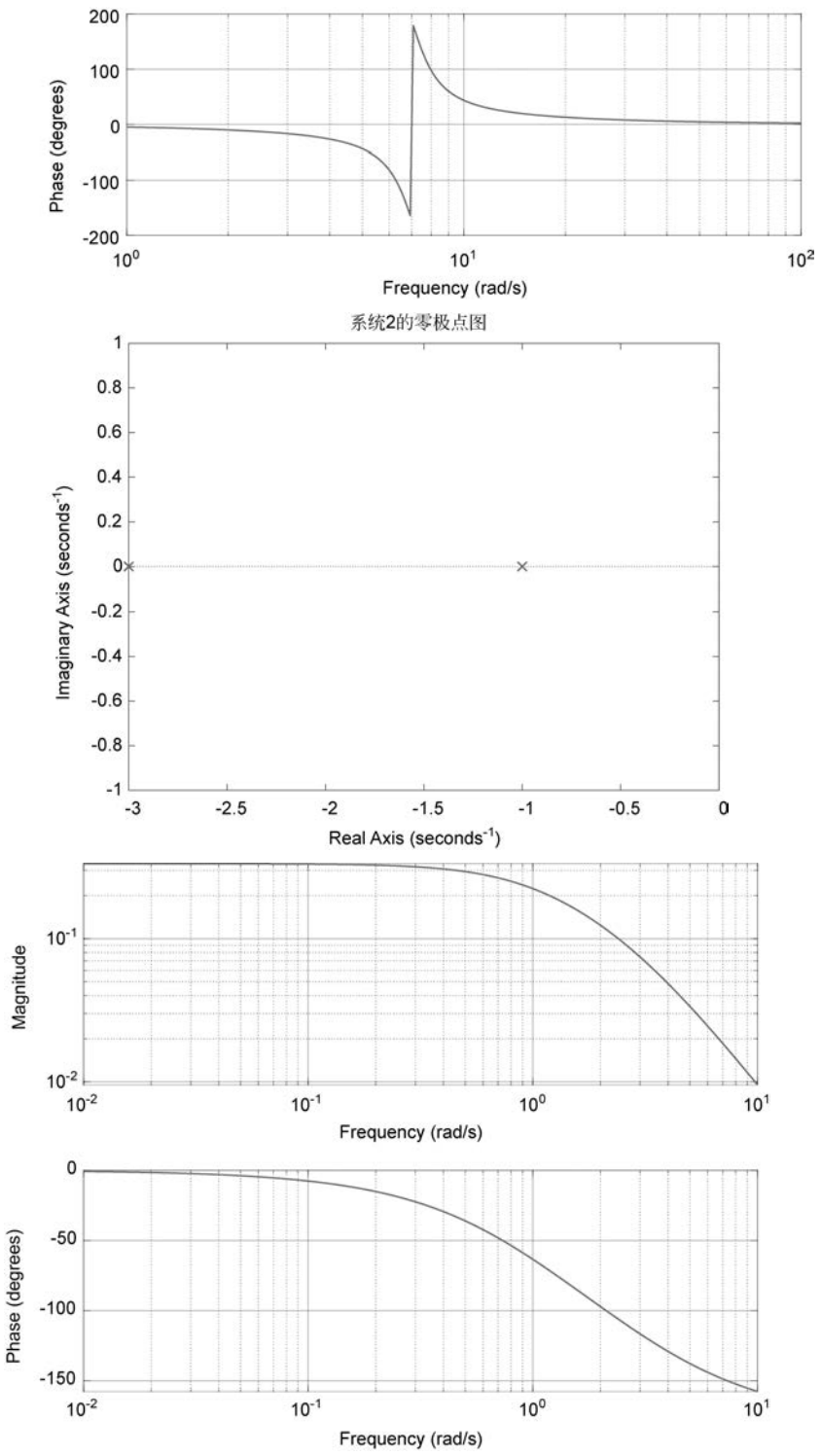

Phase (degrees)
200
100
0
-100
-200
10^0
10^1
10^2
Frequency (rad/s)
系统2的零极点图
Imaginary Axis (seconds^{-1})
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
Real Axis (seconds^{-1})
Magnitude
10^{-1}
10^{-2}
10^{-2}
10^{-1}
10^0
10^1
Frequency (rad/s)
Phase (degrees)
0
-50
-100
-150
10^{-2}
10^{-1}
10^0
10^1
Frequency (rad/s)

图 5.61 （续）

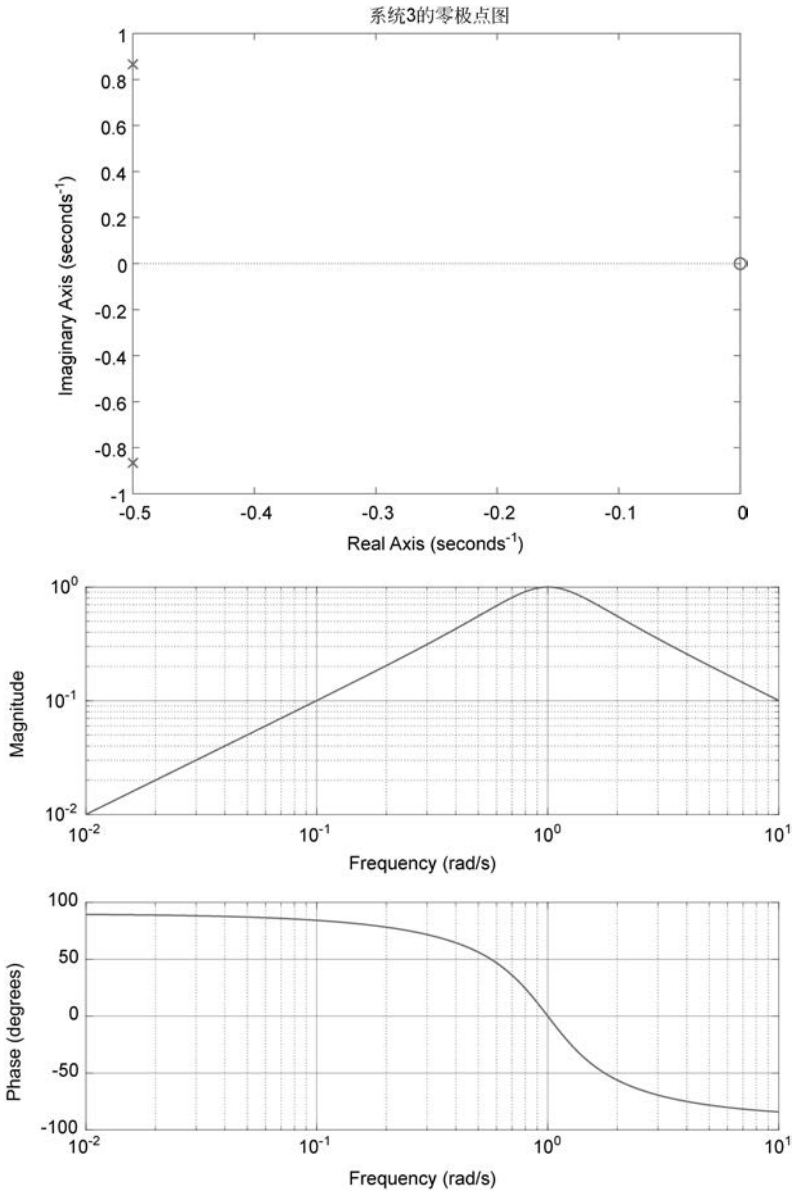


图 5.61 （续）

由计算仿真结果可知，对于实系统，零极点要么全在横轴上，要么有一对共轭的零点或极点。

5. 编程得出例 5.9.4* 的状态空间模型。

【知识点】 利用 MATLAB 根据传递函数得到连续时间系统的状态空间模型。

* 对应教材例 5.9.4。

【程序脚本】

```
%系统函数的表示
b = [0.5 0 5];
a = [1 2 3 4];
%由系统函数得到状态方程
[A,B,C,D] = tf2ss(b,a)
```

【结果及分析】

命令行运行结果为

```
A =
    -2    -3    -4
     1     0     0
     0     1     0
B =
    1
    0
    0
C =
                0.5         0         5
D =
    0
```

根据仿真结果可以看出，输入向量选取不同，状态方程和输出方程会有一定的区别。