

第5章

窄带随机过程

学习指导

本章学习目标

本章学习窄带随机过程的理论及应用,学习目标如下:

- 掌握希尔伯特变换的理论,掌握希尔伯特变换的定义、性质及应用。
- 掌握随机信号复信号表示的方法及相应的性质。
- 理解窄带随机过程表示形式,掌握并能够分析同相分量、正交分量随机过程的统计特性。
- 理解窄带正态随机过程准正弦表示形式,掌握并能够分析包络随机过程、相位随机过程的统计特性。
- 加深窄带随机过程理论的应用,掌握典型通信系统中不同检波方法的抗噪性能分析。
- 了解窄带随机过程的仿真生成方法,培养仿真分析的实践技能。

本章学习的重点和难点

本章学习重点:

- 希尔伯特变换的定义及性质。
- 莱斯表示形式的同相正交分量统计特性。
- 准正弦表示形式的包络相位过程统计特性。
- 窄带随机过程的工程应用及统计特性分析。

本章学习难点:

- 不同检波方法的输入输出信噪比分析,主要包括同步检波器、包络检波器、平方律检波器计算。
- 窄带随机过程的工程应用,理解电子系统双通道接收的原理及应用,能够应用所学知识解决实际应用问题。

思维导图

第 5 章的思维导图如图 5.1 所示。

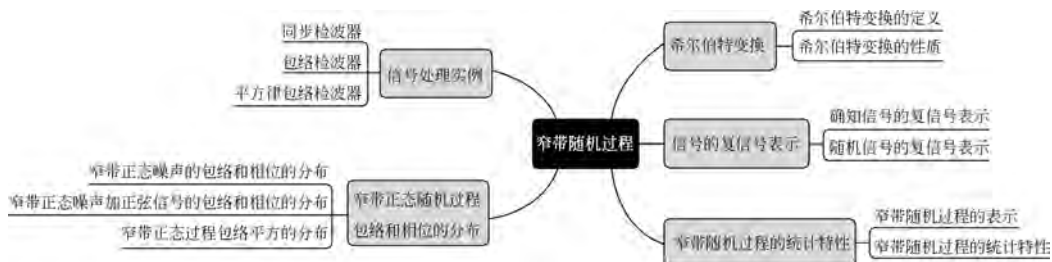


图 5.1 第 5 章的思维导图

内 容 概 要

若一个随机过程的功率谱集中在某一中心频率附近的一个很窄的频带内,且该频带又远小于其中心频率,则这样的随机过程称为窄带随机过程。

5.1 希尔伯特变换

希尔伯特变换是信号处理中常用的一种变换,是分析窄带信号的一种很好的数学工具。

5.1.1 希尔伯特变换的定义

实函数 $x(t)$ 的希尔伯特变换定义为

$$\mathcal{H}[x(t)] = \hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (5.1.1)$$

反变换为

$$\mathcal{H}^{-1}[\hat{x}(t)] = x(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (5.1.2)$$

由定义可知, $x(t)$ 的希尔伯特变换为 $x(t)$ 与 $1/\pi t$ 的卷积,即

$$\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t} \quad (5.1.3)$$

因此, $x(t)$ 的希尔伯特变换可以看作 $x(t)$ 通过一个冲激响应为 $1/\pi t$ 的线性滤波器。希尔伯特变换器传递函数为

$$H(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} -j & \omega > 0 \\ j & \omega < 0 \end{cases} \quad (5.1.4)$$

其中, $\operatorname{sgn}(\cdot)$ 为符号函数。从希尔伯特变换器的传递函数可以看出,它的幅频特性为

$$|H(\omega)| = 1 \quad (5.1.5)$$

它的相频特性为

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\pi/2 & \omega > 0 \\ \pi/2 & \omega < 0 \end{cases} \quad (5.1.6)$$

可见,希尔伯特变换器在整个频域上具有恒为 1 的幅频特性,为全通网络,在相位上对正频和负频分别引入 $-\pi/2$ 和 $\pi/2$ 的相移,因此,希尔伯特变换器可以看作一个 $\pi/2$ 的理想移相器(或正交滤波器)。

5.1.2 希尔伯特变换的性质

$$(1) \quad \mathcal{H}[\hat{x}(t)] = -x(t) \quad (5.1.7)$$

连续两次希尔伯特变换相当于做两次 $\pi/2$ 的移相,即 π 的移相,也就是使信号反相。

(2) 设 ω_0 为信号载波频率, φ 为常数, 则

$$\mathcal{H}[\cos(\omega_0 t + \varphi)] = \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (5.1.8)$$

$$\mathcal{H}[\sin(\omega_0 t + \varphi)] = -\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (5.1.9)$$

(3) 设 $a(t)$ 为低频信号, 其傅里叶变换为 $A(\omega)$, 且

$$A(\omega) = 0 \quad |\omega| > \Delta\omega/2$$

则当 $\omega_0 > \Delta\omega/2$ 时, 有

$$\mathcal{H}[a(t)\cos\omega_0 t] = a(t)\sin\omega_0 t \quad (5.1.10)$$

$$\mathcal{H}[a(t)\sin\omega_0 t] = -a(t)\cos\omega_0 t \quad (5.1.11)$$

(4) 设 $A(t)$ 和 $\varphi(t)$ 为低频信号, 则

$$\mathcal{H}\{A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]\} = A(t)\sin[\omega_0 t + \varphi(t)] \quad (5.1.12)$$

$$\mathcal{H}\{A(t)\sin[\omega_0 t + \varphi(t)]\} = -A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)] \quad (5.1.13)$$

(5) 设 $y(t) = v(t) * x(t)$, 则

$$\hat{y}(t) = \hat{v}(t) * x(t) = v(t) * \hat{x}(t) \quad (5.1.14)$$

(6) 设平稳随机过程 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau)$, 则

$$R_{\hat{X}}(\tau) = R_X(\tau) \quad (5.1.15)$$

即 $X(t)$ 经过希尔伯特变换后, 其自相关函数不变, 当然功率谱密度也是不变的。这是因为希尔伯特变换只影响相频特性, 不影响幅频特性, 而功率谱不含相位信息, 经过希尔伯特变换以后, 其功率谱密度和自相关函数都是不变的。由式(5.1.15), 得

$$R_{\hat{X}}(0) = R_X(0) \quad (5.1.16)$$

即经过希尔伯特变换以后, 其平均功率是不变的。

(7) $X(t)$ 与其希尔伯特变换的互相关函数满足如下关系:

$$R_{X\hat{X}}(\tau) = -\hat{R}_X(\tau) \quad R_{\hat{X}X}(-\tau) = \hat{R}_X(\tau) \quad (5.1.17)$$

(8) $X(t)$ 与其希尔伯特变换的互相关函数是奇函数, 即

$$R_{X\hat{X}}(-\tau) = -R_{X\hat{X}}(\tau) \quad (5.1.18)$$

$$R_{X\hat{X}}(0) = -R_{X\hat{X}}(0) = 0 \quad (5.1.19)$$

式(5.1.19)也表明, $X(t)$ 与 $\hat{X}(t)$ 在同一时刻是正交的。

(9) 偶函数的希尔伯特变换是奇函数, 奇函数的希尔伯特变换是偶函数。

5.2 信号的复信号表示

5.2.1 确知信号的复信号表示

设 $x(t)$ 为实的确知信号, 信号的复信号形式定义为

$$\tilde{x}(t) = x(t) + j\hat{x}(t) \quad (5.2.1)$$

$\tilde{x}(t)$ 也称为解析信号。

假定 $A(t)$ 和 $\varphi(t)$ 都是低频分量,那么

$$x(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

是窄带确知信号,它的解析信号为

$$\tilde{x}(t) = A(t) e^{j[\omega_0 t + \varphi(t)]} = \tilde{A}(t) e^{j\omega_0 t} \quad (5.2.2)$$

其中

$$\tilde{A}(t) = A(t) e^{j\varphi(t)} \quad (5.2.3)$$

$\tilde{A}(t)$ 称为复包络。解析信号频谱为

$$\tilde{X}(\omega) = 2X(\omega)U(\omega) = \begin{cases} 2X(\omega) & \omega > 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases} \quad (5.2.4)$$

即,解析信号的频谱在负频率部分为零,而正频率部分是实信号的两倍。对于窄带确知信号,

$$\tilde{X}(\omega) = \tilde{A}(\omega - \omega_0) \quad (5.2.5)$$

或者

$$\tilde{A}(\omega) = \tilde{X}(\omega + \omega_0) \quad (5.2.6)$$

即,将解析信号的频谱向左平移 ω_0 就可以得到复包络的频谱。

5.2.2 随机信号的复信号表示

平稳随机信号 $X(t)$ 的复信号定义为

$$\tilde{X}(t) = X(t) + j\hat{X}(t) \quad (5.2.7)$$

它的自相关函数为

$$R_{\tilde{X}}(\tau) = E[\tilde{X}(t+\tau)\tilde{X}^*(t)] = 2[R_X(\tau) + j\hat{R}_X(\tau)] \quad (5.2.8)$$

它的功率谱密度为

$$G_{\tilde{X}}(\omega) = \begin{cases} 4G_X(\omega) & \omega > 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases} \quad (5.2.9)$$

上式表明,对于随机信号的复信号,其功率谱密度在负频率为零,而在正频率为随机信号功率谱的 4 倍。

5.3 窄带随机过程的统计特性

5.3.1 窄带随机过程的准正弦振荡表示

在一般无线电接收系统中,窄带系统通常是指系统带宽 Δf 远小于中心频率 f_0 ,即满足

$$\frac{\Delta f}{f_0} \ll 1 \quad (5.3.1)$$

白噪声或宽带噪声通过窄带系统时,由于系统的带通特性,输出的功率谱集中在以 ω_0 为中心的一个很窄的频带内,其输出噪声的波形可以用准正弦振荡形式表示,即

$$Y(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \Phi(t)] \quad (5.3.2)$$

其中, ω_0 为中心频率, $A(t)$ 和 $\Phi(t)$ 是慢变化的随机过程,或者也可以写出

$$Y(t) = A_c(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t \quad (5.3.3)$$

其中

$$A_c(t) = A(t) \cos \Phi(t) \quad A_s(t) = A(t) \sin \Phi(t) \quad (5.3.4)$$

$A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 都是低频慢变化的随机过程,称为窄带随机过程的正交分量和同相分量。窄带随机过程的幅度和相位可以用正交分量和同相分量表示为

$$A(t) = \sqrt{A_c^2(t) + A_s^2(t)} \quad \Phi(t) = \arctan\left(\frac{A_s(t)}{A_c(t)}\right) \quad (5.3.5)$$

5.3.2 窄带随机过程的统计特性

1. 窄带随机信号的自相关函数

窄带随机信号的自相关函数可表示为

$$R_Y(\tau) = R_a(\tau) \cos \omega_0 \tau - R_b(\tau) \sin \omega_0 \tau \quad (5.3.6)$$

其中

$$R_a(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_0}^{+\infty} G_Y(\Omega + \omega_0) \cos \Omega \tau d\Omega \quad (5.3.7)$$

$$R_b(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_0}^{+\infty} G_Y(\Omega + \omega_0) \sin \Omega \tau d\Omega \quad (5.3.8)$$

$R_a(\tau)$ 和 $R_b(\tau)$ 都是低频慢变化的。如果 $G_Y(\omega)$ 具有对称形式的功率谱(频带内的功率谱关于中心频率对称),则 $R_b(\tau) = 0$, $R_a(\tau)$ 是偶函数,自相关函数变为

$$R_Y(\tau) = R_a(\tau) \cos \omega_0 \tau \quad (5.3.9)$$

2. $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 的统计特性

正交分量和同相分量可表示为

$$A_c(t) = Y(t) \cos \omega_0 t + \hat{Y}(t) \sin \omega_0 t \quad (5.3.10)$$

$$A_s(t) = -Y(t) \sin \omega_0 t + \hat{Y}(t) \cos \omega_0 t \quad (5.3.11)$$

它们的相关函数为

$$R_c(\tau) = R_s(\tau) = R_Y(\tau) \cos \omega_0 \tau + \hat{R}_Y(\tau) \sin \omega_0 \tau \quad (5.3.12)$$

可见, $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 的自相关函数是相同的,且 $\sigma_c^2 = \sigma_s^2 = \sigma_Y^2$ 。

$A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 的互相关函数可表示为

$$R_{cs}(\tau) = R_Y(\tau) \sin \omega_0 \tau - \hat{R}_Y(\tau) \cos \omega_0 \tau \quad (5.3.13)$$

可以证明, $R_{cs}(-\tau) = -R_{cs}(\tau)$, 即 $R_{cs}(\tau)$ 是奇函数, 奇函数在原点的值为零, 即 $R_{cs}(0) = 0$, 所以, $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 在同一时刻是相互正交的。

如果 $Y(t)$ 具有对称形式(正频部分关于中心频率 ω_0 对称), 则

$$R_Y(\tau) = R_a(\tau) \cos \omega_0 \tau, \quad R_c(\tau) = R_a(\tau), \quad R_{cs}(\tau) = 0$$

5.4 窄带正态随机过程包络和相位的分布

在本节中, 除特别声明外, 都假定窄带正态过程的均值为零, 功率谱密度相对于中心频率 ω_0 是对称的。

5.4.1 窄带正态噪声的包络和相位的分布

1. 一维分布

在 t 时刻, 包络和相位的联合分布为

$$f_{A\Phi}(A_t, \varphi_t) = \begin{cases} \frac{A_t}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{A_t^2}{2\sigma^2}\right) & A_t \geq 0, 0 \leq \varphi_t \leq 2\pi \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (5.4.1)$$

包络 $A(t)$ 的一维概率密度为

$$f_A(A_t) = \begin{cases} \frac{A_t}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A_t^2}{2\sigma^2}\right) & A_t \geq 0 \\ 0 & A_t < 0 \end{cases} \quad (5.4.2)$$

相位 $\Phi(t)$ 的一维概率密度为

$$f_\Phi(\varphi_t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0 \leq \varphi_t \leq 2\pi \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (5.4.3)$$

即窄带正态过程的包络服从瑞利分布, 而其相位服从均匀分布, 且在同一时刻 t , $A(t)$ 和 $\Phi(t)$ 是相互独立的。但要注意 $A(t)$ 与 $\Phi(t)$ 并不是相互独立的两个随机过程。

2. 二维分布

假定 t 和 $t-\tau$ 两个时刻对应的幅度和相位为 $A(t)$ 、 $A(t-\tau)$ 、 $\Phi(t)$ 、 $\Phi(t-\tau)$, 它们的联合概率密度为

$$f_{A\Phi}(A_1, \phi_1, A_2, \phi_2)$$

$$= \begin{cases} \frac{A_1 A_2}{4\pi^2 D^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2D^{\frac{1}{2}}}[\sigma^2(A_1^2 + A_2^2) - 2a(\tau)A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]\right] & A_1, A_2 \geq 0, 0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 2\pi \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (5.4.4)$$

式中, $D = [\sigma^4 - a^2(\tau)]^2$, $a(\tau) = R_a(\tau) = R_c(\tau) = R_s(\tau)$ 。包络 $A(t)$ 的二维概率密度为

$$f_A(A_1, A_2) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_A(A_1, \varphi_1, A_2, \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2$$

$$= \begin{cases} \frac{A_1 A_2}{D^{\frac{1}{2}}} I_0\left(\frac{A_1 A_2 a(\tau)}{D^{\frac{1}{2}}}\right) \exp\left[-\frac{\sigma^2(A_1^2 + A_2^2)}{2D^{\frac{1}{2}}}\right] & A_1, A_2 \geq 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (5.4.5)$$

式中, $I_0(x)$ 为第一类零阶修正贝塞尔函数, 并有

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(x \cos \varphi) d\varphi$$

相位 $\Phi(t)$ 的二维概率密度为

$$f_\Phi(\phi_1, \phi_2) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_{A\Phi}(A_1, \phi_1, A_2, \phi_2) dA_1 dA_2$$

$$= \begin{cases} \frac{D^{\frac{1}{2}}}{4\pi^2 \sigma^4} \left[\frac{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} + \beta(\pi - \arccos \beta)}{(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}} \right] & 0 \leq \phi_1, \phi_2 \leq 2\pi \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (5.4.6)$$

式中, $\beta = a(\tau) \cos(\varphi_2 - \varphi_1) / \sigma^2$ 。由式(5.4.4)~式(5.4.6)可知

$$f_{A\Phi}(A_1, \phi_1, A_2, \phi_2) \neq f_A(A_1, A_2) f_\Phi(\phi_1, \phi_2) \quad (5.4.7)$$

式(5.4.7)表明, 窄带正态过程的包络与相位不是统计独立的随机过程。

5.4.2 窄带正态噪声加正弦信号的包络和相位的分布

接收信号中除了噪声外通常还包含信号, 分析信号加噪声包络和相位的分布对于有效地检测信号十分重要。

1. 基本关系式

设信号为 $s(t) = a \cos(\omega_0 t + \theta)$, 噪声是窄带正态过程, 可表示为

$$w(t) = A_w(t) \cos(\omega_0 t + \Phi_w(t)) = w_c(t) \cos \omega_0 t - w_s(t) \sin \omega_0 t$$

那么, 信号加噪声可表示为

$$\begin{aligned} X(t) &= s(t) + w(t) \\ &= A_c(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t \\ &= A(t) \cos[\omega_0 t + \Phi(t)] \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

其中包络为

$$A(t) = [A_c^2(t) + A_s^2(t)]^{1/2} = \{[a \cos \theta + w_c(t)]^2 + [a \sin \theta + w_s(t)]^2\}^{1/2} \quad (5.4.9)$$

相位为

$$\Phi(t) = \arctan[A_s(t)/A_c(t)]$$

而

$$\begin{cases} A_c(t) = a \cos \theta + w_c(t) \\ A_s(t) = a \sin \theta + w_s(t) \end{cases} \quad (5.4.10)$$

$X(t)$ 的包络与相位的联合概率密度为

$$\begin{aligned} & f_{A\Phi}(A_t, \varphi_t | \theta) \\ &= \begin{cases} \frac{A_t}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[A_t^2 + a^2 - 2aA_t \cos(\theta - \varphi_t)]\right\} & A_t \geq 0, 0 \leq \theta, \varphi_t \leq 2\pi \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

2. 包络的概率密度

由式(5.4.11)对 φ_t 积分, 得出包络的条件概率密度为

$$f_A(A_t | \theta) = \frac{A_t}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{A_t^2 + a^2}{2\sigma^2}\right] I_0\left(\frac{aA_t}{\sigma^2}\right) \quad A_t \geq 0 \quad (5.4.12)$$

由于式(5.4.12)的结果与 θ 无关, 故可写为

$$f_A(A_t) = \frac{A_t}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{A_t^2 + a^2}{2\sigma^2}\right] I_0\left(\frac{aA_t}{\sigma^2}\right) \quad A_t \geq 0 \quad (5.4.13)$$

式(5.4.13)表明, 窄带正态噪声加正弦信号的包络服从广义瑞利分布。

(1) 当信噪比很小时, 即 $a/\sigma \ll 1$, 式(5.4.13)可近似为

$$f_A(A_t) = \frac{A_t}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A_t^2 + a^2}{2\sigma^2}\right) \left(1 + \frac{a^2 A_t^2}{4\sigma^2}\right)$$

随着信噪比的减小, 广义瑞利分布趋向瑞利分布。

(2) 在大信噪比的情况下, 即 $a/\sigma \gg 1$ 时, 式(5.4.13)近似为

$$f_A(A_t) = \frac{(A_t/a)^{\frac{1}{2}}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{(A_t - a)^2}{2\sigma^2}\right]$$

当 A_t 值接近 a 时, 即 $A_t/\sigma \approx 1$ 时, 包络变为正态分布。当 A_t 偏离 a 较大时, 式中的指数项使分布密度很快衰减下来, 因而仍能保持近似正态分布。

3. 相位的概率密度

由式(5.4.11)对 A_t 积分, 得出相位的条件概率密度为

$$f_{\Phi}(\varphi_t | \theta) = \int_0^{+\infty} f_{A\Phi}(A_t, \varphi_t | \theta) dA_t$$

$$= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}\rho^2\right) \left\{ 1 + \sqrt{2\pi}\rho \cos(\theta - \varphi_t) \cdot \Phi_N[\rho \cos(\theta - \varphi_t)] \exp\left[\frac{1}{2}\rho^2 \cos^2(\theta - \varphi_t)\right] \right\} \quad (5.4.14)$$

式中, $\rho = a/\sigma$, $\Phi_N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$ 是正态概率积分函数。当 $\rho=0$ 时, 相位变成均匀分布, 这相当于窄带正态噪声的情况, 当信噪比很大, 即 $\rho \gg 1$ 时, 则相位的条件概率密度近似为

$$f_{\Phi}(\varphi_t/\theta) \approx \frac{\rho}{\sqrt{2\pi}} \cos(\theta - \varphi_t) \exp\left[-\frac{1}{2}\rho^2 \sin^2(\theta - \varphi_t)\right] \quad (5.4.15)$$

5.4.3 窄带正态过程的包络平方的分布

1. 窄带噪声包络平方的分布

已知窄带正态噪声的包络的概率密度为

$$f_A(A_t) = \frac{A_t}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A_t^2}{2\sigma^2}\right) \quad A_t \geq 0$$

设包络的平方为

$$U(t) = A^2(t)$$

则 $U(t)$ 的概率密度为

$$f_U(u) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{u}{2\sigma^2}\right) \quad u \geq 0 \quad (5.4.16)$$

式(5.4.16)表明, 窄带正态噪声的包络平方服从指数分布, 对于 $\sigma^2=1$ 这一特殊条件, 有

$$f_U(u) = \frac{1}{2} e^{-u/2} \quad (5.4.17)$$

其均值和方差分布分别为

$$E[U(t)] = 2 \quad \text{Var}[U(t)] = 4$$

2. 正弦信号加窄带正态噪声包络平方的分布

根据式(5.4.8), 信号加噪声为

$$X(t) = s(t) + w(t) = a \cos(\omega_0 t + \theta) + w(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \Phi(t)]$$

该窄带过程包络的概率密度为

$$f_A(A_t) = \frac{A_t}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A_t^2 + a^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{aA_t}{\sigma^2}\right) \quad A_t \geq 0$$

设包络平方为 $U(t) = A^2(t)$, 则 $U(t)$ 的概率密度为

$$f_U(t) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(u + a^2)\right] I_0\left(\frac{au^{1/2}}{\sigma^2}\right) \quad u \geq 0 \quad (5.4.18)$$

5.5 信号处理实例——非线性系统输出端信噪比的计算

信噪比通常定义为信号的平均功率 P_s 与噪声的平均功率之比,记为 SNR,即

$$\text{SNR} = \frac{P_s}{P_w}$$

信号通常是确定性信号,或者是满足各态历经性的随机信号,其平均功率可表示为

$$P_s = \overline{s^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s^2(t) dt$$

5.5.1 同步检波器

同步检波器如图 5.2 所示。

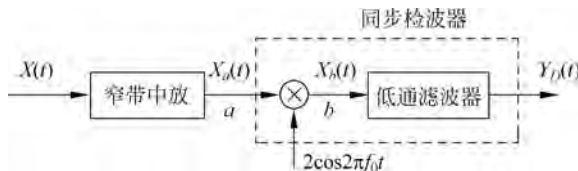


图 5.2 同步检波器

窄带中放的输入端为接收的已调载波信号与噪声之和,即

$$X(t) = s(t) + w(t) = A_0 m(t) \cos 2\pi f_0 t + w(t) \quad (5.5.1)$$

式中, $m(t)$ 为消息信号,信号带宽为 B ; $w(t)$ 为信道噪声,通常为零均值高斯白噪声,功率谱密度为 $N_0/2$ 。窄带中放的频率特性如图 5.3 所示, $X(t)$ 通过窄带中放后,输出信号为

$$X_a(t) = s_a(t) + w_a(t) = A_0 m(t) \cos 2\pi f_0 t + w_a(t) \quad (5.5.2)$$

式中, $s_a(t) = s(t)$, $w_a(t)$ 为窄带正态噪声,可表示为

$$w_a(t) = w_c(t) \cos 2\pi f_0 t - w_s(t) \sin 2\pi f_0 t \quad (5.5.3)$$

同步检波器的输出为

$$Y_D(t) = A_0 m(t) + w_c(t) \quad (5.5.4)$$

同步检波器的输入端 a 点,信号功率为

$$P_T = A_c^2 \overline{m^2(t)} / 2 \quad (5.5.5)$$

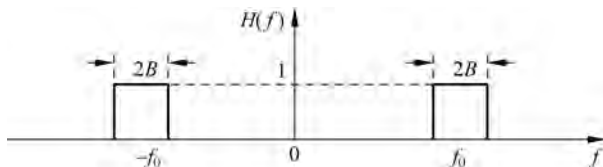


图 5.3 窄带中放频率特性

式中, $\overline{m^2(t)} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T m^2(t) dt$ 。a 点噪声的平均功率为 $2N_0B$, 因此, 同步检波器输入端的信噪比为

$$\text{SNR}_T = \frac{P_T}{E[w_a^2(t)]} = \frac{A_0^2 \overline{m^2(t)}}{4BN_0} \quad (5.5.6)$$

而同步检波器输出的信号功率为 $P_D = A_0^2 \overline{m^2(t)}$, 输出的噪声功率为 $E[w_c^2(t)] = 2N_0B$, 所以, 同步检波器输出的信噪比为

$$\text{SNR}_D = \frac{P_D}{E\{w_c^2(t)\}} = \frac{A_0^2 \overline{m^2(t)}}{2BN_0} \quad (5.5.7)$$

通常把 $\text{SNR}_D/\text{SNR}_T$ 称为检波增益, 它是衡量检波器性能的一个重要指标, 比较式(5.5.6)和式(5.5.7)可得

$$\text{SNR}_D/\text{SNR}_T = 2 \quad (5.5.8)$$

也就是说同步检波器得到了 3dB 的增益改善, 这是因为利用了同步检波器参考信号的相位与接收信号相位相干的特点。

5.5.2 包络检波器

幅度调制(AM)信号的解调通常采用包络检波, 设包络检波器的输入为 AM 信号加窄带噪声, 即

$$\begin{aligned} X(t) &= A_0[1 + am(t)]\cos 2\pi f_0 t + w_c(t)\cos 2\pi f_0 t - w_s(t)\sin 2\pi f_0 t \\ &= A(t)\cos(2\pi f_0 t + \Phi(t)) \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

其中,

$$A(t) = \sqrt{[A_0[1 + am(t)] + w_c(t)]^2 + w_s^2(t)} \quad (5.5.10)$$

$$\Phi(t) = \arctan\left(\frac{w_s(t)}{A_0[1 + am(t)] + w_c(t)}\right) \quad (5.5.11)$$

式(5.5.10)可表示为

$$A(t) = [A_0[1 + am(t)] + w_c(t)] \sqrt{1 + \left[\frac{w_s(t)}{A_0[1 + am(t)] + w_c(t)}\right]^2} \quad (5.5.12)$$

当输入为大信噪比时

$$A(t) \approx A_0[1 + am(t)] + w_c(t)$$

经隔直后, 检波器的输出为

$$Y_D(t) \approx A_0 am(t) + w_c(t) \quad (5.5.13)$$

输出的信噪比为

$$\text{SNR}_D = \frac{A_0^2 a^2 \overline{m^2(t)}}{E[w_c^2(t)]} = \frac{A_0^2 a^2 \overline{m^2(t)}}{2N_0B} \quad (5.5.14)$$

而包络检波器输入的信噪比为

$$\text{SNR}_T = \frac{\frac{A_0^2}{2} \overline{[1 + am(t)]^2}}{E[w^2(t)]} = \frac{A_0^2 [1 + a^2 \overline{m^2(t)}]}{4N_0 B} \quad (5.5.15)$$

检波增益为

$$\frac{\text{SNR}_D}{\text{SNR}_T} = \frac{2a^2 \overline{m^2(t)}}{1 + a^2 \overline{m^2(t)}} \quad (5.5.16)$$

对于全调制的情况,即当 $am(t) = \cos 2\pi f_m t$, f_m 为调制角频率,那么,

$$\frac{\text{SNR}_D}{\text{SNR}_T} = \frac{2}{3} \quad (5.5.17)$$

可见,这时输出信噪比小于输入信噪比。

当输入为小信噪比时,式(5.5.12)近似为

$$A(t) = A_w(t) + A_0[1 + am(t)]\cos\Phi_w(t) \quad (5.5.18)$$

式中, $A_w(t) = \sqrt{w_c^2(t) + w_s^2(t)}$ 代表噪声的幅度, $\Phi_w(t) = \arctan \frac{w_s(t)}{w_c(t)}$ 代表噪声的相位。所以,检波器的输出为

$$Y_D(t) = A_w(t) + A_0[1 + am(t)]\cos\Phi_w(t) \quad (5.5.19)$$

从式(5.5.19)可以看出,调制信号 $m(t)$ 无法与噪声分开,有用信号淹没在噪声中,这时,输出信噪比不是按比例地随输入信噪比下降,而是急剧恶化,这是由包络检波器的非线性特性引起的,通常把这种现象称为“门限效应”,开始出现门限效应的输入信噪比称为门限值。因此,包络检波器只适合于输入信噪比大的情况,当输入信噪比很小时,通常需要采用相干解调。

5.5.3 平方律包络检波器

平方律包络检波器对 AM 的响应是信号加噪声包络的平方,即

$$A^2(t) = [A_0[1 + am(t)] + w_c(t)]^2 + w_s^2(t)$$

假定调制信号为 $m(t) = \cos 2\pi f_m t$, 则

$$\begin{aligned} A^2(t) = & A_0^2 + 2A_0^2 a \cos 2\pi f_m t + \frac{1}{2}a^2 A_0^2 + \frac{1}{2}a^2 A_0^2 \cos 4\pi f_m t + \\ & 2w_c(t)A_0[1 + am(t)] + w_c^2(t) + w_s^2(t) \end{aligned}$$

通过隔直电路直流分量消除,则平方律包络检波器的输出为

$$Y_D(t) = 2A_0^2 a \cos 2\pi f_m t + \frac{1}{2}a^2 A_0^2 \cos 4\pi f_m t + 2w_c(t)A_0(1 + a \cos 2\pi f_m t) + w_c^2(t) + w_s^2(t) \quad (5.5.20)$$

输出的信号为

$$S_D(t) = 2A_0^2 a \cos 2\pi f_m t + \frac{1}{2}a^2 A_0^2 \cos 4\pi f_m t \quad (5.5.21)$$

其中,后一项是二次谐波,可以忽略掉,所以信号功率为

$$P_D = 2A_0^4 a^2 \quad (5.5.22)$$

输出噪声项为

$$n_D(t) = 2A_0(1 + a \cos 2\pi f_m t)w_c(t) + w_c^2(t) + w_s^2(t) \quad (5.5.23)$$

检波器输出的噪声功率为

$$P_{wD} = 2A_0^2(2 + a^2)\sigma_w^2 + 4\sigma_w^4 \quad (5.5.24)$$

式中, $\sigma_w^2 = E[w_c^2(t)] = E[w_s^2(t)] = 2N_0B$ 。检波器输出的信噪比为

$$\text{SNR}_D = \frac{2A_0^4 a^2}{2A_0^2(2 + a^2)\sigma_w^2 + 4\sigma_w^4} \quad (5.5.25)$$

采用正弦波调制时,检波器输入端信号功率为

$$P_T = \frac{1}{2}A_0^2 \left(1 + \frac{1}{2}a^2\right) \quad (5.5.26)$$

综合式(5.5.25)与式(5.5.26),可得

$$\text{SNR}_D = 2 \left(\frac{a}{2 + a^2} \right)^2 \frac{P_T/N_0B}{1 + (N_0B/P_T)} \quad (5.5.27)$$

当 P_T/N_0B 的值很大时,

$$\text{SNR}_D = 2 \left(\frac{a}{2 + a^2} \right)^2 \frac{P_T}{N_0B} \quad (5.5.28)$$

当 P_T/N_0B 的值很小时,

$$\text{SNR}_D = 2 \left(\frac{a}{2 + a^2} \right)^2 \left(\frac{P_T}{N_0B} \right)^2 \quad (5.5.29)$$

习题解答

5.1 证明:(1) 偶函数的希尔伯特变换为奇函数;

(2) 奇函数的希尔伯特变换为偶函数。

证明:

(1) 设 $x(t)$ 为偶函数,则

$$\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t}$$

$$\hat{x}(-t) = x(-t) * \frac{1}{\pi(-t)} = x(t) * \frac{1}{\pi(-t)} = -x(t) * \frac{1}{\pi t} = -\hat{x}(t)$$

所以 $\hat{x}(t)$ 为奇函数。

(2) 设 $x(t)$ 为奇函数,则

$$\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t}$$

$$\hat{x}(-t) = x(-t) * \frac{1}{\pi(-t)} = -x(t) * \frac{1}{\pi(-t)} = x(t) * \frac{1}{\pi t} = \hat{x}(t)$$

所以 $\hat{x}(t)$ 为偶函数。

证毕。

5.2 设 $A(t)$ 与 $\varphi(t)$ 为低频信号, ω_0 为高频载波角频率, 证明:

$$(1) \mathcal{H}\{A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]\} = A(t)\sin[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

$$(2) \mathcal{H}\{A(t)\sin[\omega_0 t + \varphi(t)]\} = -A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

证明:

(1)

$$\begin{aligned} & A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)] \\ &= A(t)[\cos\omega_0 t \cos\varphi(t) - \sin\omega_0 t \sin\varphi(t)] \\ &= A(t)\cos\varphi(t)\cos\omega_0 t - A(t)\sin\varphi(t)\sin\omega_0 t \end{aligned}$$

令

$$\mathcal{F}[A(t)\cos\varphi(t)] = A_c(\omega), \quad \mathcal{F}[A(t)\sin\varphi(t)] = A_s(\omega)$$

可以得到

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]\} &= \frac{1}{2}A_c(\omega)[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] - \\ &\quad \frac{j}{2}A_s(\omega)[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \end{aligned}$$

进一步有

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}\{\mathcal{H}\{A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]\}\} \\ &= \frac{1}{2}A_c(\omega)[j\delta(\omega + \omega_0) - j\delta(\omega - \omega_0)] - \frac{j}{2}A_s(\omega)[j\delta(\omega + \omega_0) + j\delta(\omega - \omega_0)] \\ &= \frac{1}{2}A_c(\omega)[j\delta(\omega + \omega_0) - j\delta(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2}A_s(\omega)[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}\{A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]\} \\ &= A(t)\cos\varphi(t)\sin\omega_0 t + A(t)\sin\varphi(t)\cos\omega_0 t \\ &= A(t)\sin[\omega_0 t + \varphi(t)] \end{aligned}$$

(2) 在(1)中已经证明

$$\mathcal{H}\{A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]\} = A(t)\sin[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

根据希尔伯特变换的性质

$$\mathcal{H}[\hat{X}(t)] = -X(t)$$

可知

$$\mathcal{H}\{A(t)\sin[\omega_0 t + \varphi(t)]\} = \mathcal{H}\{\mathcal{H}\{A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]\}\} = -A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

证毕。

5.3 证明广义平稳过程 $X(t)$ 与其希尔伯特变换 $\hat{X}(t)$ 的相关函数存在下述关系:

$$(1) R_{X\hat{X}}(\tau) = -\hat{R}_X(\tau)$$

$$(2) R_{\hat{X}X}(\tau) = \hat{R}_X(\tau)$$

$$(3) R_{\hat{X}}(\tau) = R_X(\tau)$$

(4) $R_{X\hat{X}}(\tau)$ 是奇函数。

证明: 根据第 3 章知识, 有

$$(1) R_{X\hat{X}}(\tau) = R_X(\tau) * h(-\tau) = R_X(\tau) * \frac{1}{\pi(-\tau)} = -\hat{R}_X(\tau)$$

$$(2) R_{\hat{X}X}(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) = R_X(\tau) * \frac{1}{\pi\tau} = \hat{R}_X(\tau)$$

$$(3) \text{ 因为 } G_{\hat{X}}(\omega) = G_X(\omega) |H(\omega)|^2 = G_X(\omega) \quad \text{所以 } R_{\hat{X}}(\tau) = R_X(\tau)$$

$$(4) \text{ 由 } R_{X\hat{X}}(\tau) = R_X(\tau) * h(-\tau) = R_X(\tau) * \frac{1}{-\pi\tau}$$

$$\text{有 } R_{X\hat{X}}(-\tau) = R_X(-\tau) * \frac{1}{\pi\tau} = R_X(\tau) * \frac{1}{\pi\tau} = -R_X(\tau) * h(-\tau) = -R_{X\hat{X}}(\tau)$$

即 $R_{X\hat{X}}(\tau)$ 是奇函数, 因此

$$R_{X\hat{X}}(0) = 0$$

上式表明, $X(t)$ 与 $\hat{X}(t)$ 在同一时刻是正交的。

5.4 设 $X(t)$ 的解析信号为 $\tilde{Z}(t) = X(t) + j\hat{X}(t)$,

$$(1) \text{ 证明: } E[\tilde{Z}(t)\tilde{Z}^*(t-\tau)] = 2[R_X(\tau) + j\hat{R}_X(\tau)]$$

$$(2) \text{ 证明: } E[\tilde{Z}(t)\tilde{Z}(t-\tau)] = 0$$

(3) 求 $\tilde{Z}(t)$ 的功率谱密度(假定 $X(t)$ 的功率谱密度为 $G_X(\omega)$)。

$$\begin{aligned} \text{解: } (1) R_{\tilde{Z}}(\tau) &= E[\tilde{Z}(t)\tilde{Z}^*(t-\tau)] = E\{[X(t) + j\hat{X}(t)][X(t-\tau) - j\hat{X}(t-\tau)]\} \\ &= R_X(\tau) + R_{\hat{X}}(\tau) + j[R_{\hat{X}X}(\tau) - R_{X\hat{X}}(\tau)] \end{aligned}$$

由于 $R_X(\tau) = R_{\hat{X}}(\tau)$, $R_{X\hat{X}}(\tau) = R_{\hat{X}X}(-\tau) = -\hat{R}_X(\tau)$, 所以上式可简化为

$$R_{\tilde{Z}}(\tau) = 2[R_X(\tau) + j\hat{R}_X(\tau)]$$

$$\begin{aligned} (2) E[\tilde{Z}(t)\tilde{Z}(t-\tau)] &= E\{[X(t) + j\hat{X}(t)][X(t-\tau) + j\hat{X}(t-\tau)]\} \\ &= R_X(\tau) - R_{\hat{X}}(\tau) + j[R_{\hat{X}X}(\tau) + R_{X\hat{X}}(\tau)] = 0 \end{aligned}$$

(3) 对(1)中结论两边取傅里叶变换, 得

$$\begin{aligned} G_{\tilde{Z}}(\omega) &= 2[G_X(\omega) + \text{sgn}(\omega)G_X(\omega)] \\ &= \begin{cases} 4G_X(\omega) & \omega > 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

上式表明, 随机信号的复信号形式, 其功率谱密度在负频率为零, 而在正频率为随机信号功率谱的 4 倍。

5.5 设一个线性系统输入为 $X(t)$ 时,相应的输出为 $Y(t)$ 。证明若该系统的输入为 $X(t)$ 的希尔伯特变换 $\hat{X}(t)$,则相应的输出为 $Y(t)$ 的希尔伯特变换 $\hat{Y}(t)$ 。

证明: 由于该系统为线性系统,因此可以用 $h(t)$ 表示系统的冲激响应,且满足

$$Y(t) = X(t) * h(t)$$

随机过程 $X(t)$ 的希尔伯特变换 $\hat{X}(t)$ 满足

$$\hat{X}(t) = X(t) * \frac{1}{\pi t}$$

当输出为 $\hat{X}(t)$ 时,输出为

$$Z(t) = \hat{X}(t) * h(t) = X(t) * \frac{1}{\pi t} * h(t) = X(t) * h(t) * \frac{1}{\pi t} = Y(t) * \frac{1}{\pi t} = \hat{Y}(t)$$

证毕。

5.6 在复随机过程 $Z(t) = X(t) + jY(t)$ 中,若 $Z(t)$ 的均值 $E[Z(t)] = E[X(t)] + jE[Y(t)] = m_Z$ 是复常数,且 $Z(t)$ 的自相关函数 $E[Z(t)Z^*(t-\tau)] = R_Z(\tau)$ 为仅与 τ 有关的复函数,则称 $Z(t)$ 为复平稳随机过程。设 $A_k (k=1, 2, \dots, n)$ 是 n 个实随机变量, $\omega_k (k=1, 2, \dots, n)$ 是 n 个实数,试问 $\{A_k\}$ 应该满足怎样的条件才能使

$$Z(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{j\omega_k t}$$

是一个复平稳随机过程。

解: 若 $Z(t)$ 为复平稳随机过程,则其均值为常数,相关函数可表示为 τ 的函数。首先计算其均值和自相关函数

$$m_Z(t) = E[Z(t)] = E\left[\sum_{k=1}^n A_k e^{j\omega_k t}\right] = \sum_{k=1}^n E(A_k) e^{j\omega_k t}$$

$$\begin{aligned} R_Z(t, t-\tau) &= E[Z(t)Z^*(t-\tau)] = E\left[\sum_{k=1}^n A_k e^{j\omega_k t} \sum_{s=1}^n A_s e^{-j\omega_s (t-\tau)}\right] \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n E(A_k A_s) e^{j(\omega_k - \omega_s)t} e^{j\omega_s \tau} \end{aligned}$$

要使 $m_Z(t)$ 为一常数,则应使

$$E(A_k) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n$$

要使 $R_Z(t, t-\tau)$ 仅为 τ 的函数,则应满足

$$E(A_k A_s) = \sigma_k^2 \delta(k-s)$$

综上所述,当 $\{A_k\}$ 为零均值,且相互正交的实随机变量时,

$$Z(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{j\omega_k t}$$

是一个复平稳随机过程。

5.7 设有复随机过程

$$Z(t) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \cos \omega_i t + j\beta_i \sin \omega_i t)$$

式中, α_i 与 β_k 是相互独立的随机变量, α_i 与 α_k 、 β_i 与 β_k ($i \neq k$) 是相互正交的, 数学期望和方差分别为 $E[\alpha_i] = E[\beta_i] = 0$, $\sigma_{\alpha_i}^2 = \sigma_{\beta_i}^2 = \sigma_i^2$ 。求复随机过程的相关函数。

解: 据题意

$$\begin{aligned} R_z(t_1, t_2) &= E\{Z(t_1)Z^*(t_2)\} \\ &= E\left\{\sum_{i=1}^n [\alpha_i \cos \omega_i t_1 + j\beta_i \sin \omega_i t_1] \sum_{k=1}^n [\alpha_k \cos \omega_k t_2 - j\beta_k \sin \omega_k t_2]\right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n E\{[\alpha_i \cos \omega_i t_1 + j\beta_i \sin \omega_i t_1][\alpha_k \cos \omega_k t_2 - j\beta_k \sin \omega_k t_2]\} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n E\{[\alpha_i \alpha_k \cos \omega_i t_1 \cos \omega_k t_2 + j\beta_i \alpha_k \sin \omega_i t_1 \cos \omega_k t_2 - \\ &\quad j\alpha_i \beta_k \cos \omega_i t_1 \sin \omega_k t_2 + \beta_i \beta_k \sin \omega_i t_1 \sin \omega_k t_2]\} \\ &= \sum_{i=1}^n [\sigma_i^2 \cos \omega_i t_1 \cos \omega_i t_2 + \sigma_i^2 \sin \omega_i t_1 \sin \omega_i t_2] \\ &= \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \cos \omega_i (t_1 - t_2) \end{aligned}$$

5.8 设信号 $X(t)$ 的带宽限制在 Ω 上, 证明信号预包络(即解析信号)模平方的带宽为 2Ω 。

证明: $\tilde{X}(\omega) = X(\omega) + j\hat{X}(\omega) = 2X(\omega)U(\omega)$

预包络 $\tilde{x}(t)$ 平方的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\tilde{x}^*(t)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{X}(\omega - \omega') \tilde{X}^*(\omega') d\omega' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [2X(\omega - \omega')U(\omega - \omega')][2X(\omega')U(\omega')] d\omega' \end{aligned}$$

由于有 $\omega_0 - \frac{\Omega}{2} \leq \omega \leq \omega_0 + \frac{\Omega}{2}$ 时 $X(\omega)$ 不为零, 因此有

$$\begin{cases} \omega_0 - \frac{\Omega}{2} \leq \omega' \leq \omega_0 + \frac{\Omega}{2} \\ \omega_0 - \frac{\Omega}{2} \leq \omega - \omega' \leq \omega_0 + \frac{\Omega}{2} \end{cases}$$

时亦不为零, 即 $\omega_0 - \frac{\Omega}{2} - \omega' \leq \omega \leq \omega_0 + \frac{\Omega}{2} + \omega'$, $2\omega_0 - \Omega \leq \omega \leq 2\omega_0 + \Omega$, 可见频谱宽度为 2Ω 。

5.9 对于调频信号 $X(t) = \cos[\omega_0 t + m(t)]$, 设 $dm(t)/dt \leq \omega_0$, 即为窄带信号, 求该信号的复包络和包络的表示式。

解: 预包络 $\tilde{X}(t) = X(t) + j\hat{X}(t) = e^{j[\omega_0 t + m(t)]} = \tilde{A}(t)e^{j\omega_0 t}$

复包络 $\tilde{A}(t) = e^{jm(t)}$, 包络 $A(t) = |\tilde{A}(t)| = 1$

5.10 (1) 证明窄带过程同相分量和正交分量的功率谱密度为

$$G_c(\omega) = G_s(\omega) = \frac{1}{2}[1 + \text{sgn}(\omega + \omega_0)]G_Y(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2}[1 - \text{sgn}(\omega - \omega_0)]G_Y(\omega - \omega_0)$$

(2) 证明窄带过程同相分量和正交分量的互功率谱密度为

$$G_{cs}(\omega) = \frac{j}{2}[1 + \text{sgn}(\omega + \omega_0)]G_Y(\omega + \omega_0) - \frac{j}{2}[1 - \text{sgn}(\omega - \omega_0)]G_Y(\omega - \omega_0)$$

证明: (1) 根据公式 $R_c(\tau) = R_Y(\tau)\cos\omega_0\tau + \hat{R}_Y(\tau)\sin\omega_0\tau$

对其相关函数作傅里叶变换, 得

$$R_c(\tau) = \frac{1}{2}R_Y(\tau)[e^{j\omega_0\tau} + e^{-j\omega_0\tau}] + \frac{1}{2j}\hat{R}_Y(\tau)[e^{j\omega_0\tau} - e^{-j\omega_0\tau}]$$

两边作傅里叶变换, 得

$$G_c(\omega) = \frac{1}{2}[G_Y(\omega - \omega_0) + G_Y(\omega + \omega_0)] + \frac{1}{2j}[-j\text{sgn}(\omega - \omega_0)G_Y(\omega - \omega_0) + j\text{sgn}(\omega + \omega_0)G_Y(\omega + \omega_0)]$$

即

$$G_c(\omega) = G_s(\omega) = \frac{1}{2}[1 + \text{sgn}(\omega + \omega_0)]G_Y(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2}[1 - \text{sgn}(\omega - \omega_0)]G_Y(\omega - \omega_0)$$

(2) 同理, 根据公式 $R_{cs}(\tau) = R_Y(\tau)\sin\omega_0\tau - \hat{R}_Y(\tau)\cos\omega_0\tau$

$$R_{cs}(\tau) = R_Y(\tau) \frac{1}{2j}[e^{j\omega_0\tau} - e^{-j\omega_0\tau}] - \frac{1}{2}\hat{R}_Y(\tau)[e^{j\omega_0\tau} + e^{-j\omega_0\tau}]$$

$$G_{cs}(\omega) = \frac{1}{2j}[G_Y(\omega - \omega_0) - G_Y(\omega + \omega_0)] - \frac{1}{2}[-j\text{sgn}(\omega - \omega_0)G_Y(\omega - \omega_0) + j\text{sgn}(\omega + \omega_0)G_Y(\omega + \omega_0)]$$

经整理可得同相分量与正交分量的互功率谱为

$$G_{cs}(\omega) = \frac{j}{2}[1 + \text{sgn}(\omega + \omega_0)]G_Y(\omega + \omega_0) - \frac{j}{2}[1 - \text{sgn}(\omega - \omega_0)]G_Y(\omega - \omega_0)$$

证毕。

5.11 设功率谱密度为 $N_0/2$ 的零均值白高斯噪声通过一个理想带通滤波器, 此滤波器的增益为 1, 中心频率为 f_0 , 带宽为 $2B$ 。求滤波器输出的窄带过程 $w(t)$ 及其同相及正交分量的自相关函数 $R_w(\tau)$ 、 $R_{w_c}(\tau)$ 和 $R_{w_s}(\tau)$ 。

解: 由题知, 窄带过程 $w(t)$ 是以 f_0 为中心频率的对称功率谱形式, 带宽为 $2B$ 。

令 $\omega_0 = 2\pi f_0$, $\Delta\omega = 2\pi B$

$$\begin{aligned} R_w(\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} G_w(\omega) \cos\omega\tau d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \frac{N_0}{2} \cos\omega\tau d\omega \\ &= \frac{N_0}{2\pi\tau} [\sin(\omega_0 + \Delta\omega)\tau - \sin(\omega_0 - \Delta\omega)\tau] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{N_0}{2\pi\tau} 2\sin\Delta\omega\tau \cos\omega_0\tau \\
 &= \frac{N_0 \sin\Delta\omega\tau}{\pi\tau} \cos\omega_0\tau \\
 &= R_0(\tau) \cos\omega_0\tau
 \end{aligned}$$

由于 $R_0(\tau) = \frac{N_0 \sin\Delta\omega\tau}{\pi\tau}$ 是一个低频信号, 所以 $\hat{R}_w(\tau) = R_0(\tau) \sin\omega_0\tau$

所以 $R_{w_c}(\tau) = R_{w_s}(\tau) = R_w(\tau) \cos\omega_0\tau + \hat{R}_w(\tau) \sin\omega_0\tau = R_0(\tau)$

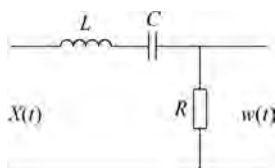


图 E5.12-1 RLC 带通滤波器

5.12 考虑图 E5.12-1 所示的 RLC 带通滤波器。设滤波器的品质因数 $Q \gg 1$, 输入是功率谱密度为 $N_0/2$ 的零均值高斯噪声 $X(t)$, 求滤波器输出端的窄带过程 $w(t)$ 及其同相及正交分量的功率谱密度 $G_w(\omega)$, $G_{w_c}(\omega)$ 和 $G_{w_s}(\omega)$, 并以图

解: 输入的功率谱密度为

$$G_X(\omega) = \frac{N_0}{2}$$

系统的传递函数为

$$H(\omega) = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}$$

因此输出的功率谱密度为

$$G_w(\omega) = \frac{N_0}{2} H(\omega) H(-\omega) = \frac{N_0 \omega^2 R^2 C^2}{2(1 - \omega^2 LC)^2 + 2\omega^2 R^2 C^2}$$

根据习题 5.10 的结论, 有

$$G_{w_c}(\omega) = G_{w_s}(\omega) = \frac{1}{2} [1 + \operatorname{sgn}(\omega + \omega_0)] G_w(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} [1 - \operatorname{sgn}(\omega - \omega_0)] G_w(\omega - \omega_0)$$

功率谱密度如图 E5.12-2 所示。

5.13 相关函数为 $R_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-a|\tau|} \cos\omega_0\tau$ 的窄带平稳随机过程可表示为 $X(t) = A_c(t) \cos\omega_0' t - A_s(t) \sin\omega_0' t$, 试在 (1) $\omega_0' \neq \omega$; (2) $\omega_0' = \omega$ 的条件下, 分别求出相关函数 $R_c(\tau)$, $R_s(\tau)$ 及互相关函数 $R_{cs}(\tau)$ 。

解: $X(t)$ 的希尔伯特变换 $\hat{X}(t) = A_c(t) \sin\omega_0' t + A_s(t) \cos\omega_0' t$

因为 $X(t) = A_c(t) \cos\omega_0' t - A_s(t) \sin\omega_0' t$

$$\begin{cases} A_c(t) = X(t) \cos\omega_0' t + \hat{X}(t) \sin\omega_0' t \\ A_s(t) = -X(t) \sin\omega_0' t + \hat{X}(t) \cos\omega_0' t \end{cases}$$

$$R_c(\tau) = E[A_c(t) A_c(t - \tau)]$$

$$= E\{[X(t) \cos\omega_0' t + \hat{X}(t) \sin\omega_0' t][X(t - \tau) \cos\omega_0' (t - \tau) + \hat{X}(t - \tau) \sin\omega_0' (t - \tau)]\}$$

$$= R_X(\tau) \cos\omega_0' \tau + \hat{R}_X(\tau) \sin\omega_0' \tau$$

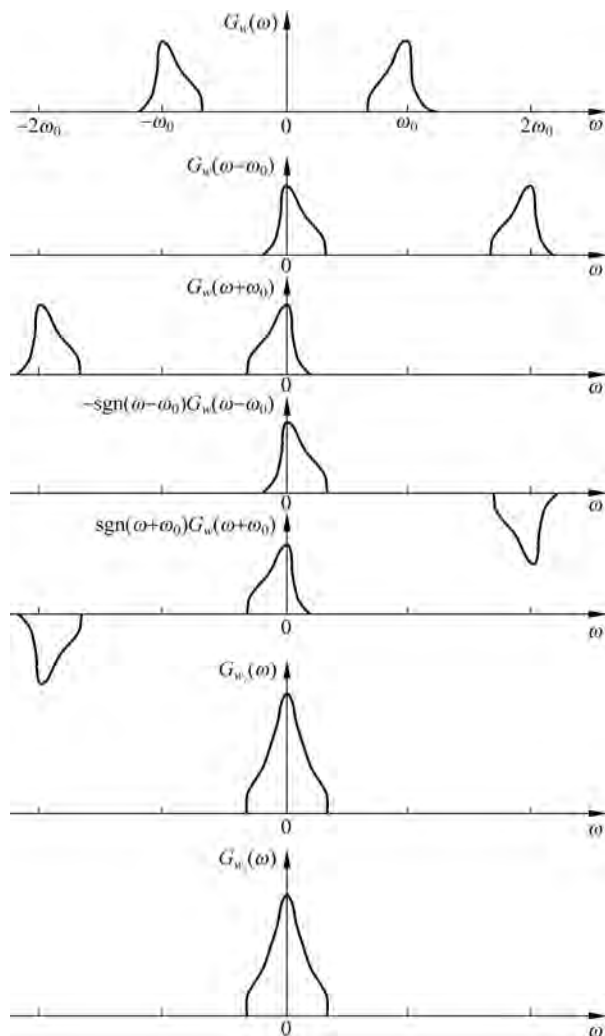


图 E5.12-2 功率谱密度示意图

(利用了 $R_X(\tau) = R_{\hat{X}}(\tau)$, $R_{X\hat{X}}(\tau) = -\hat{R}_X(\tau)$, $R_{\hat{X}X}(\tau) = \hat{R}_X(\tau)$ 等性质)
同理,

$$R_{cs}(\tau) = E[A_c(t)A_s(t-\tau)] = R_X(\tau)\sin\omega'_0\tau - \hat{R}_X(\tau)\cos\omega'_0\tau$$

因为 $R_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos\omega_0\tau$, 所以 $\hat{R}_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|} \sin\omega_0\tau$

(1) 当 $\omega'_0 \neq \omega_0$ 时

$$\begin{aligned} R_c(\tau) &= R_X(\tau)\cos\omega'_0\tau + \hat{R}_X(\tau)\sin\omega'_0\tau \\ &= \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos\omega_0\tau \cos\omega'_0\tau + \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|} \sin\omega_0\tau \sin\omega'_0\tau \\ &= \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos(\omega_0 - \omega'_0)\tau \end{aligned}$$

$$R_{cs}(\tau) = R_X(\tau)\sin\omega'_0\tau - \hat{R}_X(\tau)\cos\omega'_0\tau$$

$$\begin{aligned}
 &= \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos\omega_0\tau \sin\omega'_0\tau - \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|} \sin\omega_0\tau \cos\omega'_0\tau \\
 &= \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|} \sin(\omega'_0 - \omega_0)\tau
 \end{aligned}$$

(2) 当 $\omega'_0 = \omega_0$ 时

$$R_c(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos(\omega_0 - \omega'_0)\tau = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}$$

$$R_{cs}(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|} \sin(\omega'_0 - \omega_0)\tau = 0$$

5.14 考虑窄带高斯过程 $w(t) = X(t)\cos\omega_0 t - Y(t)\sin\omega_0 t$, 假定功率谱密度对称于载频 ω_0 , 求概率密度 $f_{XY}(x_t, x_{t-\tau}, y_t, y_{t-\tau})$ 。

解: 由于随机过程具有对称的功率谱, 所以 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是正交的高斯过程, 因此也是独立的, 所以

$$f_{XY}(x_t, x_{t-\tau}, y_t, y_{t-\tau}) = f_X(x_t, x_{t-\tau})f_Y(y_t, y_{t-\tau})$$

$$f_X(x_t, x_{t-\tau}) = \frac{1}{2\pi\det^{1/2}(\mathbf{C})} \exp\left\{-\frac{1}{2}[x_t \ x_{t-\tau}]\mathbf{C}^{-1}\begin{bmatrix} x_t \\ x_{t-\tau} \end{bmatrix}\right\}$$

$$\text{式中, } \mathbf{C} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & r(\tau) \\ r(\tau) & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2(1-r^2(\tau))} \begin{bmatrix} 1 & -r(\tau) \\ -r(\tau) & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 f_X(x_t, x_{t-\tau}) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma^2(1-r^2(\tau))}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(1-r^2(\tau))}[x_t \ x_{t-\tau}]\begin{bmatrix} 1 & -r(\tau) \\ -r(\tau) & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_t \\ x_{t-\tau} \end{bmatrix}\right\} \\
 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma^2(1-r^2(\tau))}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(1-r^2(\tau))}(x_t^2 + x_{t-\tau}^2 - 2r(\tau)x_t x_{t-\tau})\right\}
 \end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned}
 f_Y(y_t, y_{t-\tau}) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma^2(1-r^2(\tau))}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(1-r^2(\tau))}[y_t \ y_{t-\tau}]\begin{bmatrix} 1 & -r(\tau) \\ -r(\tau) & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-\tau} \end{bmatrix}\right\} \\
 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma^2(1-r^2(\tau))}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(1-r^2(\tau))}(y_t^2 + y_{t-\tau}^2 - 2r(\tau)y_t y_{t-\tau})\right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{XY}(x_t, x_{t-\tau}, y_t, y_{t-\tau}) &= \frac{1}{(2\pi)^2\sigma^4[1-r^2(\tau)]} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2[1-r^2(\tau)]}[x_t^2 + y_t^2 + \right. \\
 &\quad \left. x_{t-\tau}^2 + y_{t-\tau}^2 - 2r(\tau)(x_t x_{t-\tau} + y_t y_{t-\tau})]\right\}
 \end{aligned}$$

式中, $r(\tau) \triangleq r_X(\tau) = r_Y(\tau)$, $\sigma^2 \triangleq \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ 。

5.15 设 $A(t)$ 为平稳的窄带正态过程的包络, 试证:

$$E[A(t)] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_X, \quad \sigma_A^2 = \text{Var}[A(t)] = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma_X^2$$

式中, σ_X^2 为正态过程的方差。

证明: 根据窄带正态随机过程的特性, $A(t)$ 服从瑞利分布, 即

$$f_A(a) = \frac{a}{\sigma_X^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_X^2}\right) \quad a \geq 0$$

$$E[A(t)] = \int_0^{+\infty} a \cdot \frac{a}{\sigma_X^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_X^2}\right) da$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{u=a/\sigma_X^2}{=} \int_0^{+\infty} \sigma_X^2 u^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\ & = \sigma_X^2 \sqrt{2\pi} \int_0^{+\infty} u^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \end{aligned}$$

由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$ 是标准正态随机变量的方差, 该方差等于 1, 所以 $\int_0^{+\infty} u^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = \frac{1}{2}$, 那么

$$E[A(t)] = \sigma_X \sqrt{2\pi} \int_0^{+\infty} u^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = \sigma_X \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_X$$

$$\begin{aligned} E[A^2(t)] &= \int_0^{+\infty} a^2 \cdot \frac{a}{\sigma_X^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_X^2}\right) da \\ & \stackrel{u=a/\sigma_X}{=} \int_0^{+\infty} \sigma_X^2 u^3 \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\ & \stackrel{v=u^2}{=} \frac{\sigma_X^2}{2} \int_0^{+\infty} v \exp\left(-\frac{v}{2}\right) dv \\ & = 2\sigma_X^2 \end{aligned}$$

$$\sigma_A^2 = E[A^2(t)] - E[A(t)]^2 = 2\sigma_X^2 - \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_X\right)^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma_X^2$$

5.16 χ 变量为 χ^2 变量的平方根, 证明 n 个自由度的 χ 变量的概率密度为

$$f(\chi) = \frac{\chi^{n-1} e^{-\chi^2/2}}{2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

证明: $\chi^2(n)$ 的概率密度函数为

$$f_{\chi^2}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{n/2-1} e^{-y/2} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

已知

$$\begin{aligned} \chi &= y^{1/2} \\ |J| &= \left| \frac{dy}{d\chi} \right| = 2y^{1/2} \end{aligned}$$

因此有

$$f(\chi) = [|J| \cdot f_{\chi^2}(y)]|_{y=\chi^2} = 2\chi f_{\chi^2}(\chi^2) = \begin{cases} \frac{\chi^{n-1} e^{-\chi^2/2}}{2^{n/2-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & \chi > 0 \\ 0 & \chi \leq 0 \end{cases}$$

证毕。

5.17 证明 n 个自由度的 χ^2 变量的第 m 阶中心矩为

$$2^m \left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{n}{2} + 1\right) \cdots \left(\frac{n}{2} + m - 1\right)$$

证明: $\chi^2(n)$ 的概率密度函数为

$$f_{\chi^2}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{n/2-1} e^{-y/2} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

第 m 阶中心矩为

$$\begin{aligned} E(y^m) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{n/2+m-1} e^{-y/2} dy \\ &= \frac{2^m}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{2}\right)^{n/2+m-1} e^{-y/2} d\frac{y}{2} = \frac{2^m \Gamma\left(\frac{n}{2} + m\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \end{aligned}$$

根据 $\Gamma(x)$ 的性质

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = [-t^{x-1} e^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (x-1)t^{x-2} e^{-t} dt \\ &= (x-1) \int_0^{+\infty} t^{x-2} e^{-t} dt = (x-1) \Gamma(x-1) \end{aligned}$$

可以得到

$$E(y^m) = 2^m \left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{n}{2} + 1\right) \cdots \left(\frac{n}{2} + m - 1\right)$$

证毕。

5.18 一检波器如图 E5.18 所示,其中非线性器件部分的传输特性为 $y = bx^2$ 。设输入信号 $X(t)$ 为一窄带正态噪声,且可表示为 $X(t) = V(t) \cos[\omega_0 t + \Phi(t)]$,其概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right]$$

求 $Z(t)$ 的概率密度、均值和方差。

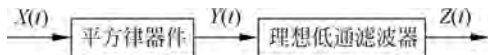


图 E5.18 检波器示意图

解: 因为

$$Y(t) = bX^2(t) = bV^2(t) \cos^2(\omega_0 t + \Phi(t)) = \frac{1}{2} bV^2(t) [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\Phi(t))]$$

经过低通滤波后

$$Z(t) = \frac{1}{2} b V^2(t)$$

$V(t)$ 是窄带正态噪声的包络,它的概率密度为

$$f_V(v) = \frac{v}{\sigma_X^2} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_X^2}\right) \quad v \geq 0$$

根据 $f_Z(z) = f_V(v) |J|_{v=\sqrt{2z/b}}$, 而 $J = \frac{dV}{dz} = \frac{1}{\sqrt{2bz}}$, 所以

$$f_Z(z) = \frac{\sqrt{2z/b}}{\sigma_X^2} \exp\left(-\frac{2z/b}{2\sigma_X^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2bz}} = \frac{1}{b\sigma_X^2} \exp\left(-\frac{z}{b\sigma_X^2}\right) \quad z \geq 0$$

$$E[Z(t)] = \int_0^{+\infty} z \frac{1}{b\sigma_X^2} \exp\left(-\frac{z}{b\sigma_X^2}\right) dz \quad (\text{E5.18-1})$$

在式(E5.18-1)中,令 $u = \frac{z}{b\sigma_X^2}$, 则

$$E[Z(t)] = b\sigma_X^2 \int_0^{+\infty} u \exp(-u) du = b\sigma_X^2$$

$$E[Z^2(t)] = \int_0^{+\infty} z^2 \frac{1}{b\sigma_X^2} \exp\left(-\frac{z}{b\sigma_X^2}\right) dz \quad (\text{E5.18-2})$$

同样,在式(E5.18-2)中,令 $u = \frac{z}{b\sigma_X^2}$, 则

$$E[Z^2(t)] = (b\sigma_X^2)^2 \int_0^{+\infty} u^2 \exp(-u) du \quad (\text{E5.18-3})$$

对式(E5.18-3)采用分部积分,得

$$E[Z^2(t)] = (b\sigma_X^2)^2 \int_0^{+\infty} 2u \exp(-u) du = 2(b\sigma_X^2)^2$$

所以, $Z(t)$ 的方差为

$$\text{Var}[Z(t)] = E[Z^2(t)] - E^2[Z(t)] = 2(b\sigma_X^2)^2 - (b\sigma_X^2)^2 = b^2 \sigma_X^4$$

5.19 在平方律包络检波器输入端加一窄带随机电压信号,其包络 $A(t)$ 服从瑞利分布

$$f_A(A_t) = \frac{A_t}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A_t^2}{2\sigma^2}\right) \quad A \geq 0$$

求在 $Y(t) = \frac{\alpha^2}{2} A^2(t)$ 时,检波器 $Y(t)$ 输出的概率密度、均值和方差。

解: 由

$$f_A(A_t) = \frac{A_t}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A_t^2}{2\sigma^2}\right) \quad A_t \geq 0$$

可得 $U(t) = A^2(t)$ 概率密度为

$$f_U(u) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{u}{2\sigma^2}\right) \quad u \geq 0$$

进一步可得

$$f_Y(y) = \frac{1}{\alpha^2 \sigma^2} \exp\left(-\frac{y}{\alpha^2 \sigma^2}\right) \quad y \geq 0$$

$$E[Y(t)] = \int_0^{+\infty} \frac{y}{\alpha^2 \sigma^2} \exp\left(-\frac{y}{\alpha^2 \sigma^2}\right) dy = \alpha^2 \sigma^2 \int_0^{+\infty} u e^{-u} du = \alpha^2 \sigma^2$$

$$E[Y^2(t)] = \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{\alpha^2 \sigma^2} \exp\left(-\frac{y}{\alpha^2 \sigma^2}\right) dy = (\alpha^2 \sigma^2)^2 \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} du = 2(\alpha^2 \sigma^2)^2$$

$$\text{Var}[Y^2(t)] = E[Y^2(t)] - E^2[Y(t)] = 2(\alpha^2 \sigma^2)^2 - (\alpha^2 \sigma^2)^2 = \alpha^4 \sigma^4$$

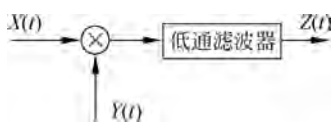


图 E5.20 同步检波器示意图

5.20 同步检波器如图 E5.20 所示, 设 $X(t)$ 为一窄带平稳噪声, 其相关函数为

$$R_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos\omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin\omega_0 |\tau| \right) \quad \alpha \ll \omega_0$$

而 $Y(t) = A \sin\omega_0 t$ 为一确定性信号, 求同步检波器输出

端的平均功率 P_Z 。

解: 窄带噪声可表示为 $X(t) = A_c(t) \cos\omega_0 t - A_s(t) \sin\omega_0 t$,

$$\begin{aligned} X(t)Y(t) &= [A_c(t) \cos\omega_0 t - A_s(t) \sin\omega_0 t] A \sin\omega_0 t \\ &= AA_c(t) \cos\omega_0 t \sin\omega_0 t - AA_s(t) \sin^2 \omega_0 t \\ &= \frac{1}{2} AA_c(t) \sin 2\omega_0 t - \frac{1}{2} AA_s(t) (1 - \cos 2\omega_0 t) \\ &= -\frac{1}{2} AA_s(t) + \frac{1}{2} AA_s(t) \cos 2\omega_0 t + \frac{1}{2} AA_c(t) \sin 2\omega_0 t \end{aligned}$$

经过低通滤波可得

$$Z(t) = -\frac{1}{2} A_s(t) A$$

$Z(t)$ 平均功率为

$$P_Z = \frac{A^2}{4} E[A_s^2(t)] = \frac{1}{4} A^2 R_s(0) = \frac{1}{4} A^2 R_X(0) = \frac{1}{4} A^2 \sigma_X^2$$

5.21 双边带抑制载波调制和单边带调制中, 若消息信号均为 3kHz 限带低频信号, 载频为 1MHz, 接收信号功率为 1mW, 加性白色高斯噪声双边带功率谱密度为 $10^{-3} \mu\text{W}/\text{Hz}$ 。接收信号经带通滤波器后, 进行相干解调。

(1) 比较解调器输入信噪比;

(2) 比较解调器输出信噪比。

解: (1) 解调器输入端噪声功率为

$$P_{n,i} = \frac{N_0}{2} \cdot 2 \cdot B = 10^{-3} \times 10^{-6} \times 2 \times 3 \times 10^3 = 6 \times 10^{-6} \text{ W}$$

解调器输入端信号功率为

$$P_{s,i} = 10^{-3} \text{ W}$$

解调器输入端信噪比为

$$\text{SNR}_i = 10 \times \lg\left(\frac{P_{s,i}}{P_{n,i}}\right) \approx 22.2 \text{ dB}$$

两种调制的输入信噪比相同。

(2) 假设消息信号为 $m(t)$, 对于双边带抑制载波调制, 接收信号为

$$s_{\text{DSB},i}(t) = a_1 m(t) \cos 2\pi f_0 t + n(t)$$

解调器输出为

$$s_{\text{DSB},o}(t) = a_1 m(t) + n_c(t)$$

输出信号功率为输入信号功率的两倍, 即

$$P_{s,o} = 2 \times P_{s,i} = 2 \times 10^{-3} \text{ W}$$

输出噪声功率为

$$P_{n,o} = E[n_c^2(t)] = N_0 B = 6 \times 10^{-6} \text{ W}$$

因此解调器输出端信噪比为

$$\text{SNR}_{\text{DSB},o} = 10 \times \lg\left(\frac{P_{s,o}}{P_{n,o}}\right) \approx 25.2 \text{ dB}$$

对于单边带调制, 接收信号为

$$s_{\text{SSB},i}(t) = \frac{1}{2} a_2 m(t) \cos 2\pi f_0 t - \frac{1}{2} a_2 \hat{m}(t) \sin 2\pi f_0 t + n(t)$$

解调器输出为

$$s_{\text{SSB},o}(t) = \frac{1}{2} a_2 m(t) + n_c(t) \cos 2\pi(f_0 - f_c)t - n_s(t) \sin 2\pi(f_0 - f_c)t$$

输入信号功率为

$$P_{s,i} = \frac{1}{4} a_2^2 \overline{m^2(t)}$$

输出信号功率为

$$P_{s,o} = \frac{1}{4} a_2^2 \overline{m^2(t)} = P_{s,i} = 10^{-3} \text{ W}$$

输出噪声功率为

$$P_{n,o} = \frac{1}{2} E[n_c^2(t)] + \frac{1}{2} E[n_s^2(t)] = N_0 B = 6 \times 10^{-6} \text{ W}$$

因此解调器输出端信噪比为

$$\text{SNR}_{\text{SSB},o} = 10 \times \lg\left(\frac{P_{s,o}}{P_{n,o}}\right) \approx 22.2 \text{ dB}$$

双边带抑制载波调制输出信噪比比单边带调制输出信噪比高 3dB。

计算机作业

5.22 以信噪比 $\rho = a/\sigma$ 作为参数, 画出广义瑞利分布式(5.4.13)的一组图形。

解: MATLAB 程序如下。

```

clearvars
close all
At = 0:0.1:10;
rho = 0:1:5;
sigma = 1;
vec_a = rho * sigma;
figure
for a = vec_a
    f1 = At/(sigma^2);
    f2 = exp(-(At).^2 + a^2)/(2 * sigma^2));
    z = a * At/sigma^2;
    f3 = besseli(0,z);
    f = f1. * f2. * f3;
    hold on
    plot(x,f)
end
axis([0 10 0 0.8])
legend('$ \rho = a/\sigma = 0$', '$ \rho = 1$', '$ \rho = 2$', '$ \rho = 3$', '$ \rho = 4$', '$ \rho = 5$', 'interpreter', 'latex')
xlabel('$ x$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$ f(x) $', 'interpreter', 'latex')
    
```

程序运行结果如图 E5.22 所示。

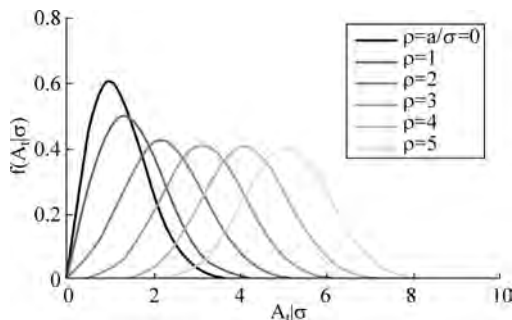


图 E5.22 广义瑞利分布图

5.23 以信噪比 $\rho = a/\sigma$ 作为参数,画出窄带正态噪声加正弦信号相位的分布式(5.4.14)的一组图形。

解: MATLAB 程序如下。

```

clearvars
close all
theta = 0;
varphi_t = linspace(-pi,pi,500);
vec_rho = 0:1:5;
sigma = 1;
vec_a = vec_rho * sigma;
figure
for rho = vec_rho
    f1 = 1/(2 * pi) * exp(-0.5 * (rho^2));
    f2 = sqrt(2 * pi) * rho * cos(theta - varphi_t). * ...
    
```

```

normcdf(rho * cos(theta - varphi_t));
f3 = exp(0.5 * rho^2 * cos(theta - varphi_t).^2);
f = f1 * (1 + f2. * f3);
hold on
plot(theta - varphi_t, f)
end
axis([-pi pi 0 2])
legend('$\rho = a/\sigma = 0$', '$\rho = 1$', '$\rho = 2$', '$\rho = 3$', ...
'$\rho = 4$', '$\rho = 5$', 'interpreter', 'latex')
xlabel('$\theta - \varphi_t$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$f(\varphi_t|\theta)$', 'interpreter', 'latex')

```

程序运行结果如图 E5.23 所示。

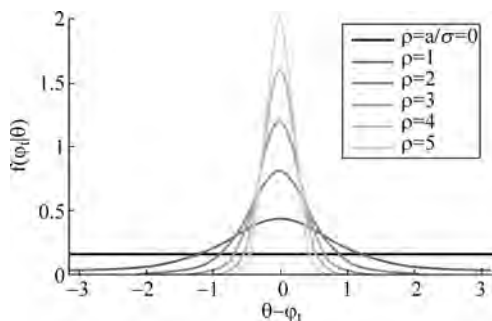


图 E5.23 窄带正态噪声加正弦信号相位的概率密度

研 讨 题

5.24 设有图 E5.24 所示的窄带信号处理系统,输入 $X(t)$ 是功率谱密度为 $N_0/2$ 的白噪声。

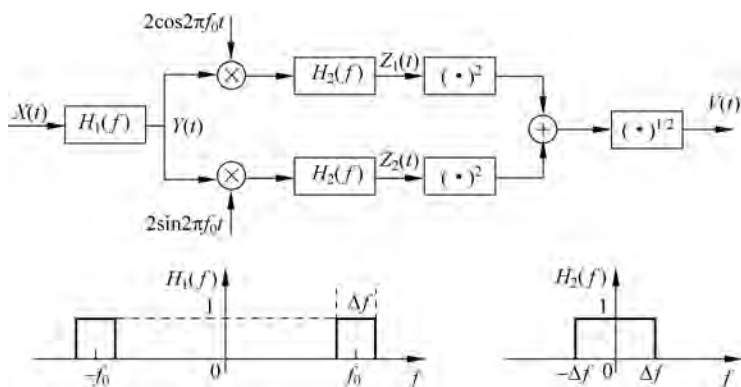


图 E5.24 窄带信号处理系统

- (1) 求 $Z_1(t)$ 和 $Z_2(t)$ 的自相关函数;
- (2) 求 $Z_1(t)$ 和 $Z_2(t)$ 的一维概率密度;

(3) 求 $Z_1(t)$ 和 $Z_2(t)$ 的联合概率密度 $f_{Z_1 Z_2}(z_1, z_2, t_1, t_2)$;

(4) 求 $V(t)$ 的一维概率密度;

(5) 如果输入为 $X(t) = a \cos(2\pi f_0 t + \theta) + w(t)$, 输出 V 与门限 γ 进行比较, 求 $P(V > \gamma | a = 0)$ 和 $P(V > \gamma | a > 0)$ 的表达式。

解: (1) 假设 $X(t)$ 经过 $H_1(f)$ 的输出为 $Y(t)$, 于是有

$$Y(t) = A_c(t) \cos 2\pi f_0 t - A_s(t) \sin 2\pi f_0 t$$

进一步有

$$Y(t) \cdot 2 \cos 2\pi f_0 t = A_c(t) + A_c(t) \cos 4\pi f_0 t - A_s(t) \sin 4\pi f_0 t$$

$$Y(t) \cdot 2 \sin 2\pi f_0 t = -A_s(t) + A_c(t) \sin 4\pi f_0 t + A_s(t) \cos 4\pi f_0 t$$

经过理想低通滤波器 $H_2(f)$ 分别得到

$$Z_1(t) = A_c(t), \quad Z_2(t) = -A_s(t)$$

因此得到

$$R_{Z_1}(\tau) = R_c(\tau), \quad R_{Z_2}(\tau) = R_s(\tau)$$

已知

$$R_c(\tau) = R_s(\tau) = R_Y(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau + \hat{R}_Y(\tau) \sin 2\pi f_0 \tau$$

因此先求 $R_Y(\tau)$

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \int_{-f_0 - \Delta f/2}^{-f_0 + \Delta f/2} \frac{N_0}{2} e^{j2\pi f\tau} df + \int_{f_0 - \Delta f/2}^{f_0 + \Delta f/2} \frac{N_0}{2} e^{j2\pi f\tau} df \\ &= \frac{N_0}{\pi\tau} \sin \pi \Delta f \tau \cos 2\pi f_0 \tau \end{aligned}$$

$Y(t)$ 的方差为 $\sigma_Y^2 = R_Y(0) = N_0 \Delta f$

注意到 $\sin \pi \Delta f \tau$ 为低频分量, 因此有

$$\hat{R}_Y(\tau) = \frac{N_0}{\pi\tau} \sin \pi \Delta f \tau \sin 2\pi f_0 \tau$$

于是有

$$R_{Z_1}(\tau) = R_{Z_2}(\tau)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{N_0}{\pi\tau} \sin \pi \Delta f \tau \cos 2\pi f_0 \tau \cos 2\pi f_0 \tau + \frac{N_0}{\pi\tau} \sin \pi \Delta f \tau \sin 2\pi f_0 \tau \sin 2\pi f_0 \tau \\ &= \frac{N_0}{\pi\tau} \sin \pi \Delta f \tau \end{aligned}$$

(2) 已知白噪声 $X(t)$ 通过窄带线性系统, 输出 $Y(t)$ 服从高斯分布, 满足

$$f_Y(y) = \frac{1}{(2\pi\sigma_Y^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_Y^2}\right)$$

又因为 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 都可以看作 $Y(t)$ 经过线性变换的结果, 因此有

$$f_{A_c}(A_{ct}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_Y^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{A_{ct}^2}{2\sigma_Y^2}\right)$$

$$f_{A_s}(A_{st}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_Y^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{A_{st}^2}{2\sigma_Y^2}\right)$$

所以 $Z_1(t)$ 和 $Z_2(t)$ 的一维概率密度为

$$f_{Z_1}(z_1) = \frac{1}{(2\pi\sigma_Y^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{z_1^2}{2\sigma_Y^2}\right)$$

$$f_{Z_2}(z_2) = \frac{1}{(2\pi\sigma_Y^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{z_2^2}{2\sigma_Y^2}\right)$$

(3) 因为 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 在同一时刻不相关, 对正态而言, 不相关即独立, 所以 $Z_1(t)$ 和 $Z_2(t)$ 的联合概率密度 $f_{Z_1 Z_2}(z_1, z_2, t_1, t_2)$ 为

$$f_{Z_1 Z_2}(z_1, z_2, t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_Y^2} \exp\left(-\frac{z_1^2 + z_2^2}{2\sigma_Y^2}\right)$$

(4) 从图 E5.24 可知

$$V(t) = \sqrt{A_c^2(t) + A_s^2(t)}$$

即为窄带正态随机过程的包络。

(5) 当 $a=0$ 时, $V(t)$ 为窄带正态噪声的包络, 它是服从瑞利分布的, 即

$$f_V(v | a=0) = \frac{v}{\sigma_Y^2} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_Y^2}\right) \quad v > 0$$

所以,

$$P(V > \gamma | a=0) = \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{v}{\sigma_Y^2} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_Y^2}\right) dv = \exp(-\gamma^2/2\sigma_Y^2)$$

如果 $a > 0$, 输出 $V(t)$ 服从广义瑞利分部, 即

$$f_V(v | a > 0) = \frac{v}{\sigma_Y^2} \exp\left(-\frac{v^2 + a^2}{2\sigma_Y^2}\right) I_0\left(\frac{av}{\sigma_Y^2}\right) \quad v > 0$$

所以,

$$\begin{aligned} P\{V > \gamma | a > 0\} &= \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{v}{\sigma_Y^2} \exp\left(-\frac{v^2 + a^2}{2\sigma_Y^2}\right) I_0\left(\frac{av}{\sigma_Y^2}\right) dv \\ &= \int_{\gamma/\sigma_Y}^{+\infty} x \exp\left(-\frac{x^2 + (a/\sigma_Y)^2}{2}\right) I_0((a/\sigma_Y)x) dx = Q(a/\sigma_Y, \gamma/\sigma_Y) \end{aligned}$$

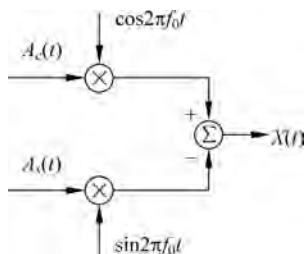
其中, $Q(a, b) = \int_b^{\infty} x I_0(ax) \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2}\right) dx$ 。

实 验

窄带高斯随机过程的产生

本实验模拟产生一段时长为 5ms 的窄带高斯随机过程 $X(t)$ 的样本函数。根据窄带随机过程的理论, $X(t)$ 可表示为

$$X(t) = A_c(t) \cos 2\pi f_0 t - A_s(t) \sin 2\pi f_0 t$$



图实 5.1-1 带通高斯随机过程的产生

式中, $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 均为低频的高斯随机过程, 因此, 要模拟产生 $X(t)$, 首先要产生两个相互独立的高斯随机过程 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$, 然后用两个正交载波 $\cos 2\pi f_0 t$ 和 $\sin 2\pi f_0 t$ 进行调制, 如图实 5.1-1 所示。

假定 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 的功率谱密度均为 $G_c(f) = G_s(f) = \frac{1}{1 + (f/\Delta f)^4}$, 其中 Δf 为功率谱密度的 3dB 带

宽。在 3.7 节中介绍了有色高斯随机过程的产生, 请按照频域法或时域滤波器法分别产生时长为 5ms 的低通过程 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$, 然后按图实 5.1-1 合成 $X(t)$, 要求分别画出模拟产生的 $A_c(t)$ 、 $A_s(t)$ 以及 $X(t)$ 的波形。

解: MATLAB 程序如下。

```
clearvars
close all
clc
set(0, 'DefaultFigureWindowStyle', 'docked')
Td = 5e-3;
dt = 5e-8;
vec_t = 0:dt:Td;
N = length(vec_t);
f0 = 1/Td;
Df = 1e3;
B = 6 * Df;
f = -B:f0:B;
f = f.';
Gx = 1./(1 + (f/Df).^4);
fun = @(x) 1./(1 + (x/Df).^4);
q = integral(fun, -B, B);
beta = q/sum(Gx);
M = length(Gx);
Xc = randn(M, 1);
Xs = randn(M, 1);
Xck = sqrt(beta * Gx) .* Xc;
Xsk = sqrt(beta * Gx) .* Xs;
vec_k = (1:M).' - floor(M/2);
Act = Xck.' * exp(1j * 2 * pi * f0 * vec_k * vec_t);
Ast = Xsk.' * exp(1j * 2 * pi * f0 * vec_k * vec_t);
Act_real = real(Act);
Ast_real = real(Ast);
figure
plot(f, Gx, 'o')
xlabel('Frequency $ f $ /Hz', 'Interpreter', 'latex')
ylabel('$ G_X(\omega) $ ', 'Interpreter', 'latex')
figure
```

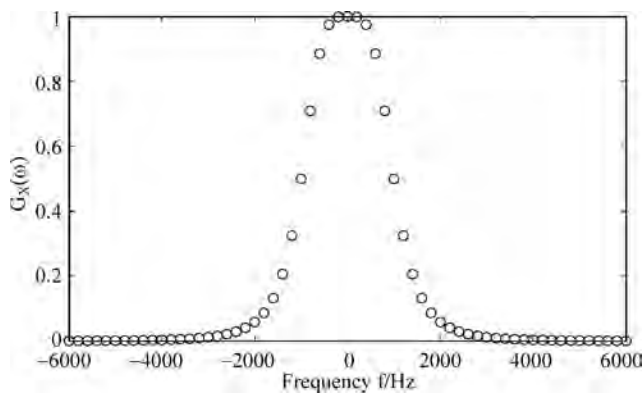


```

subplot(2,1,1)
plot(vec_t,Act_real)
ylim([-150 150])
xlabel('Time $t$/ms','Interpreter','latex')
ylabel('$A_c(t)$','Interpreter','latex')
subplot(2,1,2)
plot(vec_t,Ast_real)
ylim([-150 150])
xlabel('Time $t$/ms','Interpreter','latex')
ylabel('$A_s(t)$','Interpreter','latex')
fc = 50e3;
Xt = Act_real.*cos(2*pi*fc*vec_t) - Ast_real.*sin(2*pi*fc*vec_t);
figure
plot(vec_t,Xt)
ylim([-150 150])
xlabel('Time $t$/ms','Interpreter','latex')
ylabel('$X(t)$','Interpreter','latex')

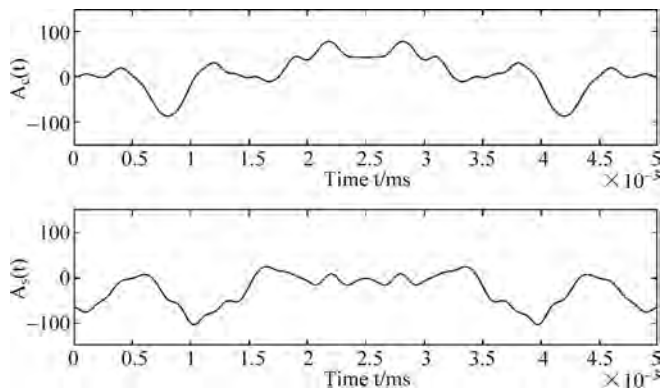
```

功率谱离散采样如图实 5.1-2 所示。



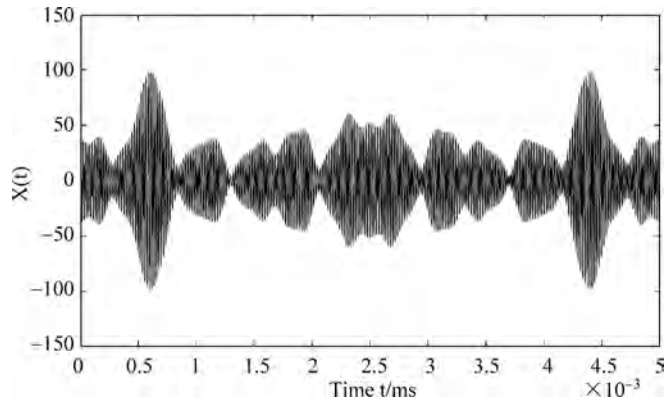
图实 5.1-2 功率谱离散采样

模拟产生的低频高斯随机过程 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 的波形如图实 5.1-3 所示。



图实 5.1-3 模拟产生的低频高斯随机过程 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 的波形

模拟产生的窄带随机过程 $X(t)$ 的波形如图实 5.1-4 所示。



图实 5.1-4 模拟产生的窄带随机过程 $X(t)$ 的波形