

频域图像增强

图像增强可分为空域图像增强和频域图像增强。第3章论述了空域中的图像增强技术,本章将讨论频域中的图像增强技术,以及频域滤波与空域滤波的对应关系,这有利于进一步理解频域的深刻含义。由第4章频域变换可知,离散傅里叶变换将图像从空域转换到频域,图像中的灰度均匀或变化缓慢区域对应频谱中的低频成分,而图像中的灰度突变或变化快速区域对应频谱中的高频成分。频域图像增强正是利用图像在频域中特有的频率特征进行滤波处理。频域滤波的关键是选择合适的滤波器,减弱或增强特定的频率成分。根据滤波特性,常用的频域增强方法又可分为低通滤波、高通滤波、带通、带阻、陷波滤波以及同态滤波。通过本章的学习,还可以从频域直观地理解空域图像增强的原理和方法。

5.1 滤波基础

频域是由傅里叶变换和频率变量 (u, v) 定义的空间,频域滤波的原理是允许特定频率成分通过,即保留某些频率成分,而限制或减弱其他频率成分通过,即消除另一些频率成分。正如第3章中所讨论的,图像中的灰度平坦区域对应频谱中的低频成分,而图像中的边缘、纹理等细节和噪声则对应频谱中的高频成分。在频域中滤波的意义很直观,低通滤波是指允许频域中频谱的低频成分通过,并限制高频成分通过,它的作用是滤除噪声和不必要的细节和纹理(类似于空域图像平滑);而高通滤波是指允许频域中频谱的高频成分通过,并限制低频成分通过,它的作用是突出边缘和细节(类似于空域图像锐化)。

根据4.4.5.1节的卷积定理,频域滤波表示为频域滤波器的传递函数与输入图像频谱乘积的形式:

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) \quad (5-1)$$

式中, $H(u, v)$ 为滤波器的传递函数, $F(u, v)$ 为输入图像 $f(x, y)$ 的离散傅里叶变换。 $H(u, v)$ 和 $F(u, v)$ 的乘积是逐元素相乘,即 $H(u, v)$ 的第一个元素乘以 $F(u, v)$ 的第一个元素, $H(u, v)$ 的第二个元素乘以 $F(u, v)$ 的第二个元素,以此类推。

频域滤波的核心是根据需求设计滤波器的传递函数 $H(u, v)$,其作用是允许某些频率成分通过,而限制另一些频率成分通过,也可简称 $H(u, v)$ 为滤波函数,对图像进行频域滤

波实现所需的增强效果。本章介绍的典型滤波器的传递函数均为实函数,具有这种特性的滤波器称为零相位滤波器。顾名思义,这样的滤波器不会改变输出图像频谱的相位。 $F(u, v)$ 的元素为复数,对于零相位滤波器, $H(u, v)$ 的每一个元素乘以 $F(u, v)$ 中对应元素的实部和虚部,对 $F(u, v)$ 实部和虚部的影响完全相同。从式(4-86)中相角的计算式可以看到,实部和虚部的乘数可以抵消。

最后,对频域滤波结果 $G(u, v)$ 进行傅里叶逆变换,转换回空域中,可表示为

$$g(x, y) = \mathcal{F}^{-1}(G(u, v)) \quad (5-2)$$

式中, $g(x, y)$ 为最终的滤波图像, $\mathcal{F}^{-1}(\cdot)$ 表示傅里叶逆变换。当输入图像和滤波函数都为实数时,傅里叶逆变换的虚部应为零。在实际的计算过程中,由于机器字长的舍入误差会引入非零值(几乎为零)的虚部,因此,对傅里叶逆变换的结果截取其实部,即 $\text{Re}[g(x, y)]$ 。

频域滤波的基本步骤如图 5-1 所示的方框图,包括图像的离散傅里叶变换、频域滤波以及离散傅里叶逆变换三个基本步骤。频域滤波的三个基本步骤具体描述如下:

(1) 计算 $f(x, y)(-1)^{x+y}$ 的二维离散傅里叶变换 $F(u, v)$ 。输入图像 $f(x, y)$ 乘以 $(-1)^{x+y}$ 使图像的低频成分移到频谱的中央部分。

(2) 设计频域滤波函数 $H(u, v)$,与输入图像的频谱 $F(u, v)$ 相乘,频域滤波结果为 $G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$ 。

(3) 计算 $G(u, v)$ 的二维离散傅里叶逆变换 $g(x, y)$,截取它的实部 $\text{Re}[g(x, y)]$,并乘以 $(-1)^{x+y}$ 以抵消步骤(1)的移位。



图 5-1 频域滤波的方框图

在频域中研究图像增强主要有三点作用:①在频域中滤波的意义更直观,一些直接在空域中表述困难的增强任务,利用频率成分与图像内容之间的对应关系,在频域中设计滤波器;②通过分析空域模板的频率响应函数,解释空域滤波的某些特性,从频域直观理解空域图像增强的原理和方法;③通过对频域中设计的滤波器计算傅里叶逆变换,根据其对应于空域中冲激响应函数的形式指导空域模板,在空域滤波中使用小尺寸模板的卷积达到等效的图像增强作用。

频域滤波函数 $H(u, v)$ 的傅里叶逆变换对应于空域中的冲激响应函数 $h(x, y)$,由于频域滤波函数 $H(u, v)$ 是以中心移位频谱而设计的,从频域滤波函数 $H(u, v)$ 到空域冲激响应函数 $h(x, y)$ 的具体计算过程为:① $H(u, v)$ 乘以 $(-1)^{u+v}$,将 $H(u, v)$ 的中心移到坐标原点;②计算二维离散傅里叶逆变换;③傅里叶逆变换的结果乘以 $(-1)^{x+y}$,将 $h(x, y)$ 的中心从坐标原点移到图像显示的中心。

5.2 低通滤波器

低通滤波的目的是允许图像的低频成分通过,限制高频成分通过。由第 4 章可知,由于图像中的灰度平坦区域对应频谱中的低频成分,而图像的灰度突变对应频谱中的高频成分,因此限制或减弱频谱中的高频成分可以起到图像平滑的作用,频域中的低通滤波器和空域

中的平滑模板具有等效的作用。

5.2.1 理想低通滤波器

最简单的低通滤波器完全截断频谱中的高频成分,这种滤波器称为**理想低通滤波器**(ideal low-pass filter, ILPF),其传递函数定义为

$$H_{\text{ilp}}(u, v) = \begin{cases} 1, & D(u, v) \leq D_0 \\ 0, & D(u, v) > D_0 \end{cases} \quad (5-3)$$

式中, $D(u, v)$ 为点 (u, v) 到频谱中心的距离, 半径 D_0 称为截止频率。式(5-3)表明, 理想低通滤波器完全阻止以 D_0 为半径的圆周外的所有频率成分, 而完全通过圆周内的任何频率成分。

根据前面章节的讨论, 在滤波前对输入图像的频谱作中心移位变换。尺寸为 $M \times N$ 二维离散傅里叶变换的频谱中心位于 $(M/2, N/2)$ 。在这种情况下, 从点 (u, v) 到频谱中心 $(M/2, N/2)$ 的距离 $D(u, v)$ 可写为

$$D(u, v) = [(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2]^{1/2} \quad (5-4)$$

图 5-2(a) 为理想低通滤波器的三维网格图, 图 5-2(b) 则是以图像方式来显示。图 5-2(c) 为过图像中心的径向剖面图, 径向剖面绕纵轴旋转一周, 就形成了如图 5-2(a) 所示的三维表示。理想低通滤波器的锐截止频率不能用电子器件实现。由于理想低通滤波器的原理非常简单, 通过对理想低通滤波器的分析阐述, 来深刻理解滤波器的滤波原理。

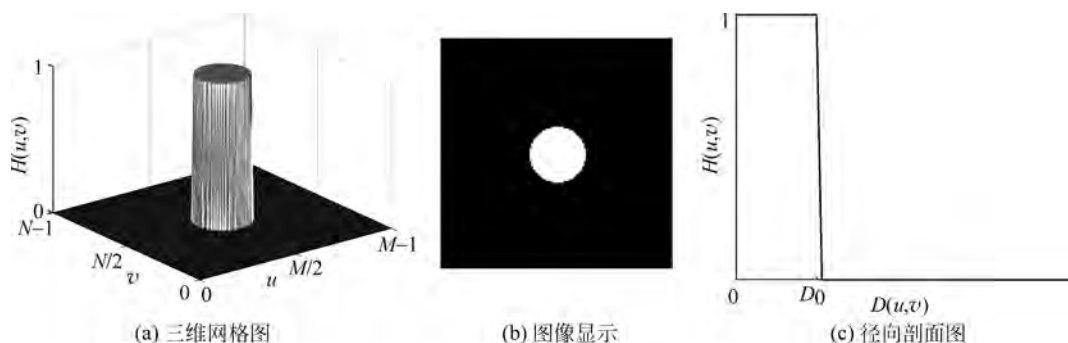


图 5-2 理想低通滤波器的传递函数

理想低通滤波器会产生振铃效应。振铃效应表现为在图像灰度剧烈变化的邻域产生灰度振荡, 是导致图像失真的一个主要因素。现通过分析理想低通滤波函数 $H_{\text{ilp}}(u, v)$ 对应空域中冲激响应函数 $h_{\text{ilp}}(x, y)$ 的特性来解释理想低通滤波器在空域中的振铃效应。由于 $H_{\text{ilp}}(u, v)$ 是圆域函数, 是圆对称函数, 可以写成

$$H_{\text{ilp}}(u, v) = \text{circ}(\rho; D_0) = \begin{cases} 1, & |\rho| \leq D_0 \\ 0, & |\rho| > D_0 \end{cases}, \quad \rho = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (5-5)$$

圆域函数的傅里叶逆变换可表示为

$$h_{\text{ilp}}(x, y) = h_{\text{ilp}}(r) = D_0 J_1(2\pi D_0 r) / r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (5-6)$$

式中, $J_1(x)$ 为一阶第一类贝塞尔(Bessel)函数。根据傅里叶变换的性质可知, 圆对称函数的傅里叶变换和逆变换均具有圆对称性。图 5-3(a) 给出了 $h_{\text{ilp}}(r)$ 关于 r 的曲线, 将其绕纵

轴旋转一周,形成图 5-3(b)所示的圆域函数 $H_{ilp}(u,v)$ 的傅里叶逆变换 $h_{ilp}(x,y)$ 。根据卷积定理,在频域中图像的频谱与频域函数的乘积等效于空域中图像与冲激响应函数的卷积。将输入图像与图 5-3(b)所示的冲激响应函数作卷积,显然图像会产生振铃效应。

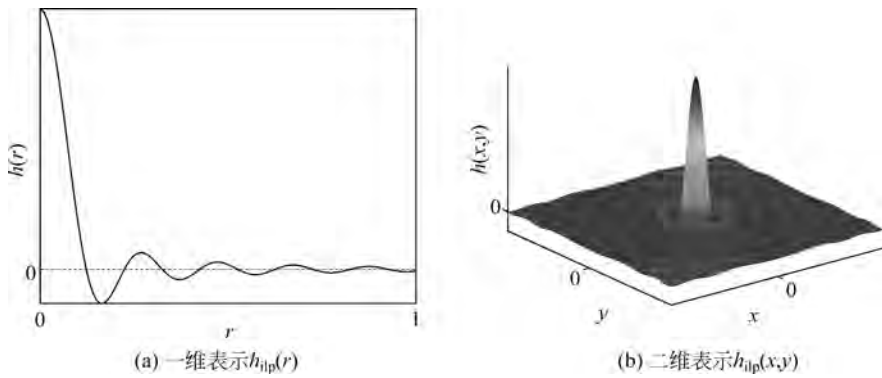


图 5-3 半径 D_0 为 10 的圆域函数的傅里叶逆变换

图 5-4(a)和图 5-4(b)分别为截止频率为 15 和 5 的理想低通滤波器的传递函数及其冲激响应函数,左图为频域滤波函数 $H_{ilp}(u,v)$ 的三维网格图和图像显示,中间为其冲激响应函数 $h_{ilp}(x,y)$ 的三维网格图和图像显示,右图为对应的径向剖面图,主瓣决定了模糊,旁瓣决定了理想滤波器振铃效应的特性。随着滤波器半径的减小,滤除了更多的高频成分,使图像更加模糊,同时振铃效应也越明显。由右图的比较可以看出,理想低通滤波器传递函数的截止频率越小,尽管振铃的间隔变大,然而,在空域中旁瓣值相对主瓣值越大,即表现的振铃特性越强。需要说明的是,图中的理想低通滤波器是离散采样的圆域函数,圆对称函数离散化后不具备各向同性,因此,它的傅里叶逆变换不再具备圆对称的特性。

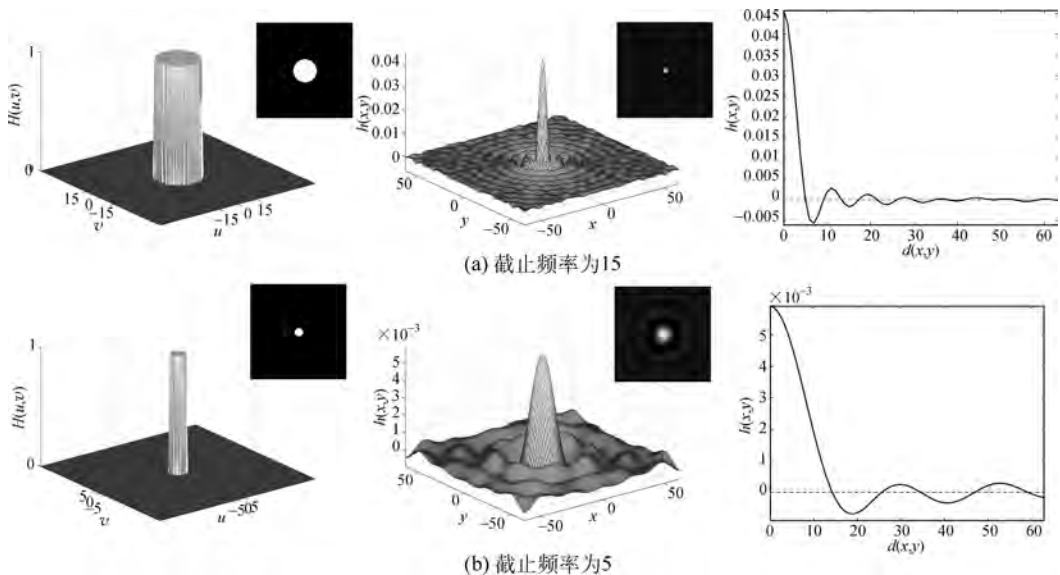


图 5-4 截止频率为 15 和 5 的理想低通滤波器的传递函数及其冲激响应函数

例 5-1 理想低通滤波器图像滤波

图 5-5(a)为一幅尺寸为 256×256 的图像,这幅图像的傅里叶谱如图 5-5(b)所示。在傅里叶谱上叠加了半径 D_0 分别为 5、15、30、50、80 和 120 的圆环。傅里叶变换的能量随着频率的增大而迅速衰减。以图像频谱中心为原点,在对应的圆环内包含的能量占整个能量的百分比分别为 95.78%、98.22%、99.13%、99.54%、99.80% 和 99.97%。可见,在频域中能量集中于频率很小的圆域,半径 D_0 为 5 的小圆域包含整个能量的约 96%。高频成分虽然能量少,但是包含细节信息,当截止频率减小时,能量损失不大,亮度基本不变,图像变得模糊。

图 5-6 给出了图 5-5(b)所示的不同半径作为截止频率进行理想低通滤波的滤波结果。图 5-6(a)显示了截止频率为 5 的滤波结果,这种情况下仅保留了频谱中半径为 5 的圆域内的低频成分,模糊了图像中的所有细节。随着半径的增大,保留的低频成分越多,滤除的高频成分越少,使模糊的程度减弱。同时,注意理想低通滤波器有振铃效应,随着半径的增大,振铃效应逐渐减弱。如图 5-6(e)所示,当截止频率为 80 时,振铃效应也是较为明显的。如图 5-6(f)所示,当截止频率为 120 时,由于滤除的高频成分仅包含很少的图像细节内容,滤波图像与原图像的视觉效果几乎一致。从这个例子和振铃特性的解释可以看出,理想低通滤波器并不实用。

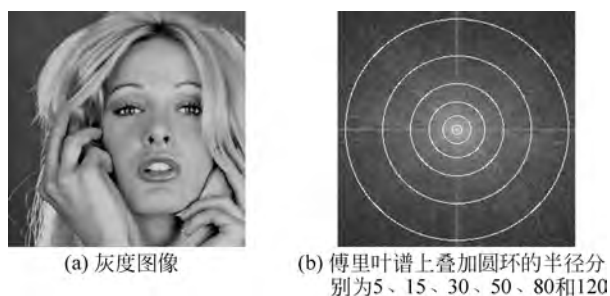


图 5-5 灰度图像及其傅里叶谱



图 5-6 截止频率为 5、15、30、50、80 和 120 的理想低通滤波器的滤波结果

5.2.2 巴特沃斯低通滤波器

巴特沃斯低通滤波器(Butterworth low-pass filter, BLPF)是一种物理可实现的低通滤波器^①, n 阶巴特沃斯低通滤波器的传递函数定义为

$$H_{\text{blp}}(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}} \quad (5-7)$$

式中, $D(u, v)$ 是由式(5-4)给出的点 (u, v) 到频谱中心 $(M/2, N/2)$ 的距离, D_0 为截止频率。图 5-7 显示了二阶巴特沃斯低通滤波器的三维网格图、图像显示以及径向剖面图。巴特沃斯低通滤波器的特点是在通带(passband)与阻带(stopband)之间并非锐截止而是逐渐下降为零。通常截止频率定义为使 $H(u, v)$ 值下降到其最大值的某一比例。在式(5-7)中, 当 $D(u, v) = D_0$ 时, $H_{\text{blp}}(u, v) = 0.5$, 即从最大值 1 下降到它的 50%。

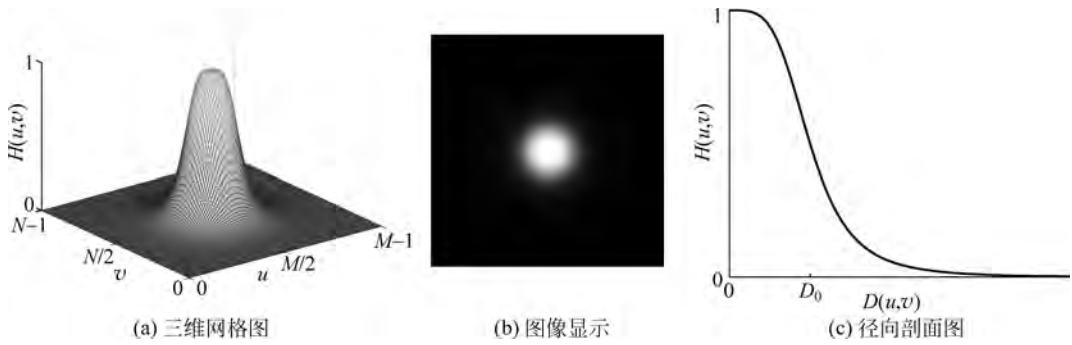


图 5-7 二阶巴特沃斯低通滤波器的传递函数

图 5-8 给出了阶数为 1、2、5、8、10 和 20 的巴特沃斯低通滤波器的径向剖面图。巴特沃斯低通滤波器从通带到阻带之间的过渡比较平滑, 因此, 其滤波图像的振铃效应不明显。滤波器的阶数越高, 从通带到阻带振幅衰减速度越快。若阶数 n 充分大, 则当 $D(u, v) \rightarrow D_0^+$ 时, $H_{\text{blp}}(u, v) \rightarrow 0$; 当 $D(u, v) \rightarrow D_0^-$ 时, $H_{\text{blp}}(u, v) \rightarrow 1$ 。在这种情况下, 巴特沃斯低通滤波器逼近于理想低通滤波器。如图 5-8 所示, 20 阶巴特沃斯低通滤波器从通带到阻带的过渡趋于锐截止。

通过分析巴特沃斯低通滤波器的传递函数在空域中的冲激响应函数, 来分析其振铃特性。图 5-9(a)~(d) 分别显示了阶数为 1、2、5 和 20, 截止频率为 15 的巴特沃斯低通滤波器的传递函数及其冲激响应函数, 左图为频域滤波函数的三维网格图和图像显示, 右图为其冲激响应函数的三维网格图和图像显示。从右图中可以看出, 一阶巴特沃斯低通滤波器没有振铃效应, 二阶巴特沃斯低通滤波器的冲激响应函数从原点向外下降到零值以下很小就返回零值, 几乎不会导致振铃效应。但是, 随着阶数的增加, 振铃效应越来越明显。在实际使用中, 需折中考虑平滑效果和振铃效应来确定巴特沃斯低通滤波器的阶数。二阶巴特沃斯低通滤波器在图像平滑与可接受的振铃效应之间作出了较好的折中。

^① 巴特沃斯滤波器最先由英国工程师斯蒂芬·巴特沃斯(Stephen Butterworth)于 1930 年发表在英国《无线电工程》期刊的一篇论文中提出。

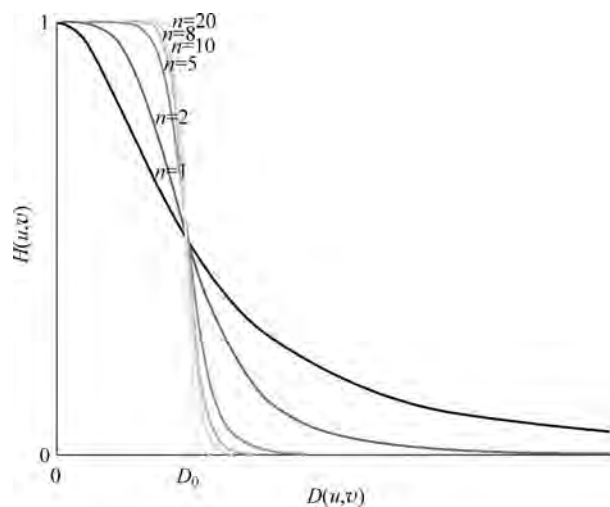


图 5-8 不同阶数的巴特沃斯低通滤波器的传递函数的径向剖面图

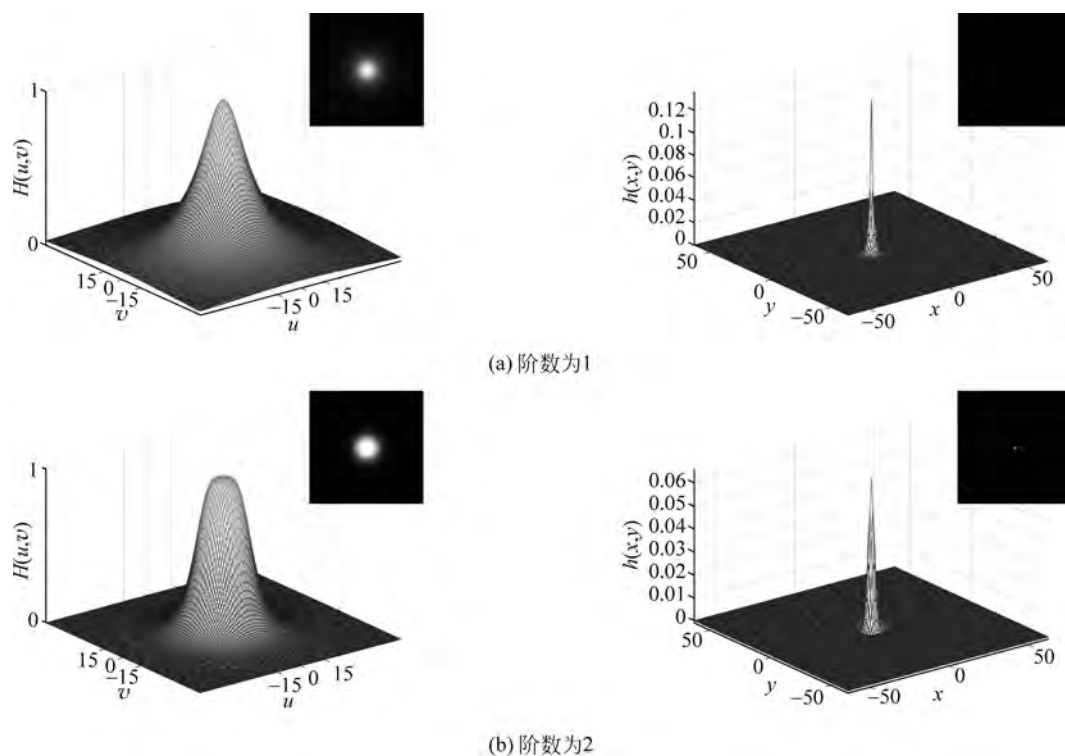
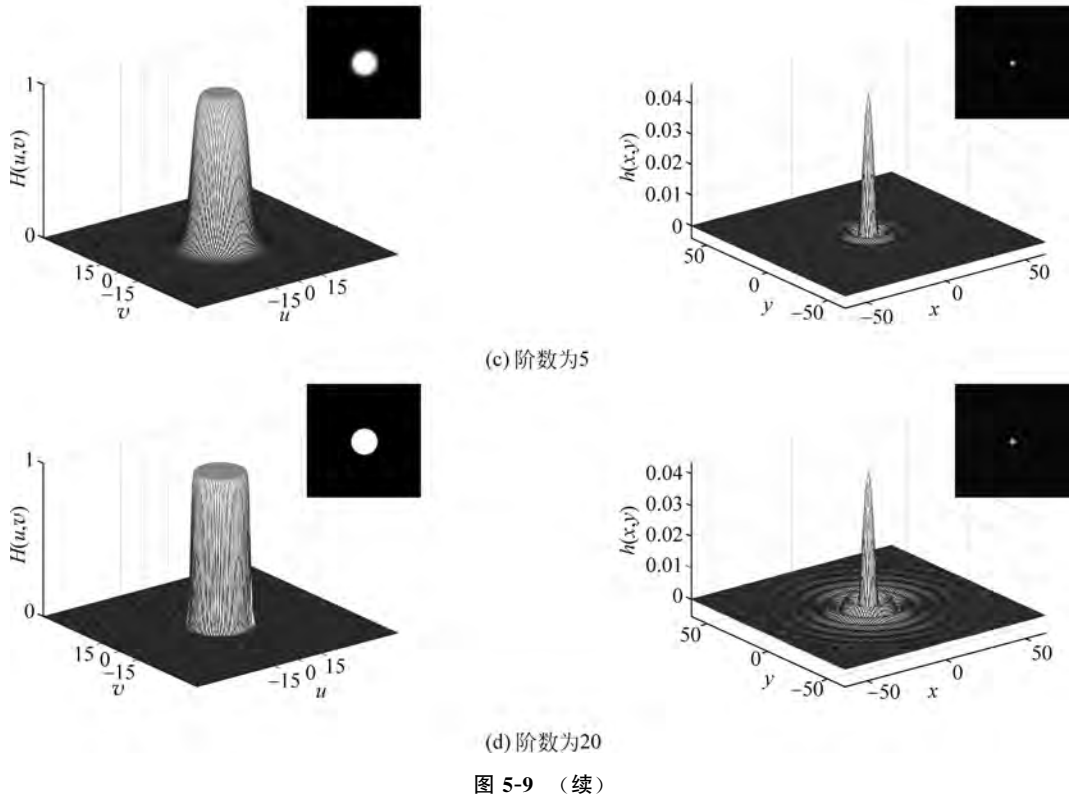


图 5-9 阶数为 1、2、5 和 20、截止频率为 15 的巴特沃斯低通滤波器的传递函数及冲激响应函数

(注意, 振铃效应随着阶数的增大趋于明显)





例 5-2 巴特沃斯低通滤波器图像滤波

对于图 5-5(a) 所示的灰度图像, 图 5-10 为二阶巴特沃斯低通滤波器的滤波图像。图 5-10(a)~图 5-10(f) 的截止频率分别为 5、15、30、50、80 和 120, 如图 5-5(b) 所示。与图 5-6



图 5-10 截止半径为 5、15、30、50、80 和 120 的二阶巴特沃斯低通滤波器的滤波结果

中理想低通滤波器的滤波图像相比,二阶巴特沃斯低通滤波器的滤波图像更加平滑,且几乎不存在可见的振铃效应。随着截止频率的增加,被滤除的高频成分减少,模糊的程度减弱。当截止频率为 120 时,被滤除的高频成分仅包含很少的细节内容,滤波图像与原图像的视觉效果几乎一致。

5.2.3 指数低通滤波器

指数低通滤波器(exponential low-pass filter, ELPF)也是一种物理可实现的低通滤波器, n 阶指数低通滤波器的传递函数定义为

$$H_{\text{elp}}(u, v) = e^{-(D(u, v)/D_0)^n} \quad (5-8)$$

式中, $D(u, v)$ 是由式(5-4)给出的点 (u, v) 到频谱中心 $(M/2, N/2)$ 的距离, D_0 为截止频率。图 5-11 显示了二阶指数低通滤波器的三维网格图、图像显示以及径向剖面图。如同巴特沃斯低通滤波器,在通带和阻带之间不是锐截止。式(5-8)中,当 $D(u, v) = D_0$ 时, $H_{\text{elp}}(u, v) = 0.368$,即从最大值 1 降到它的 36.8%。

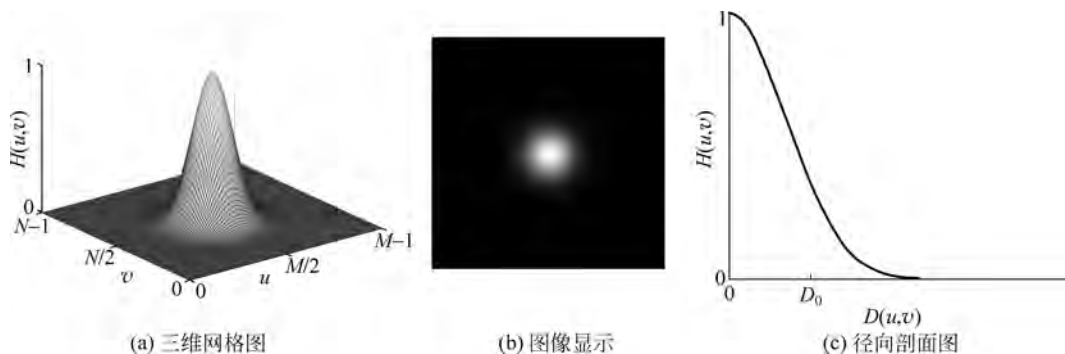


图 5-11 二阶指数低通滤波器的传递函数

图 5-12 给出了阶数为 1、2、5、8、10 和 20 的指数低通滤波器的传递函数的径向剖面图。与巴特沃斯低通滤波器类似,由于从通带到阻带之间的平滑过渡,因此,指数低通滤波器的振铃效应也不明显。滤波器的阶数越高,从通带到阻带振幅衰减速度越快。若阶数 n 充分大,则当 $D(u, v) \rightarrow D_0^+$ 时, $H_{\text{elp}}(u, v) \rightarrow 0$; 当 $D(u, v) \rightarrow D_0^-$ 时, $H_{\text{elp}}(u, v) \rightarrow 1$ 。在这种情况下,指数低通滤波器逼近于理想低通滤波器。如图 5-12 所示,20 阶指数低通滤波器从通带到阻带的过渡趋于锐截止。通过比较图 5-8 和图 5-12 所示的滤波器传递函数的径向剖面图可以看到,与巴特沃斯低通滤波器相比,指数低通滤波器的传递函数随频率下降得更快,允许通过的低频成分更少,尾部更快地衰减至零,对高频成分的抑制更强。因此,指数低通滤波器滤除的高频成分更多,图像更加平滑。

通过分析指数低通滤波器的传递函数在空域中的冲激响应函数,来分析其振铃特性。图 5-13(a)~(d)分别显示了阶数为 1、2、5 和 20 的指数低通滤波器的传递函数及其冲激响应函数,左图为频域滤波函数的三维网格图和图像显示,右图为其冲激响应函数的三维网格图和图像显示。从右图中可以看出,一阶指数低通滤波器没有振铃效应。二阶指数低通滤波器具有高斯函数形式,也称为**高斯低通滤波器**。通常情况下,高斯低通滤波器在实际中有更广泛的应用。由于高斯函数的傅里叶逆变换也是高斯函数,因此,二阶指数低通滤波器也

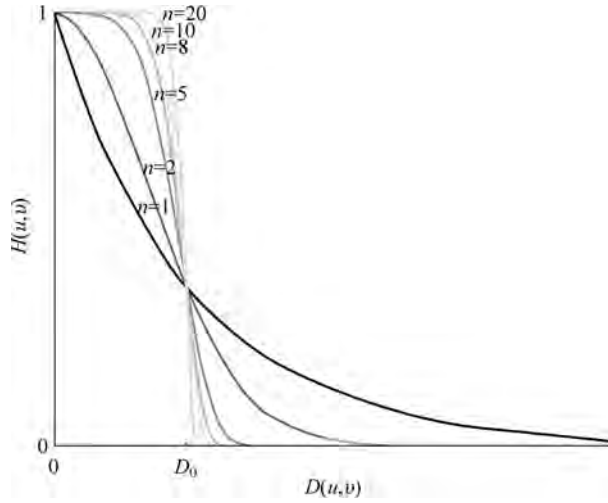


图 5-12 不同阶数的指数低通滤波器的传递函数的径向剖面图

没有振铃效应。当 n 为 5 时,有较弱的振铃效应。随着阶数的增加,指数低通滤波器逼近理想低通滤波器,振铃效应逐渐明显。

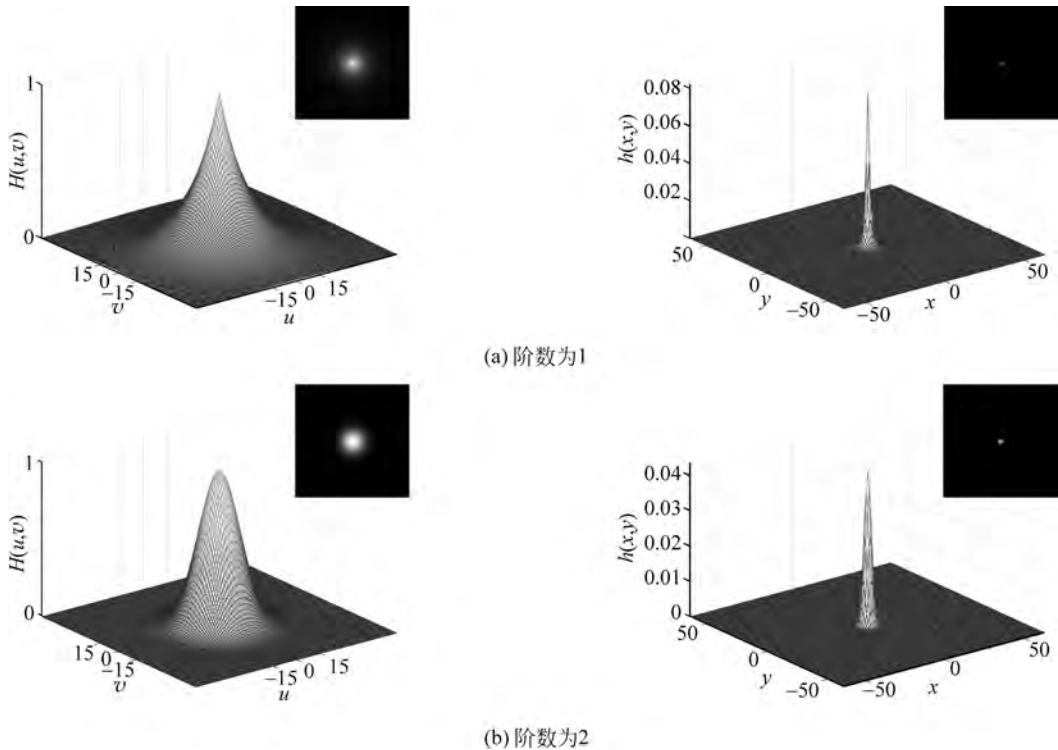
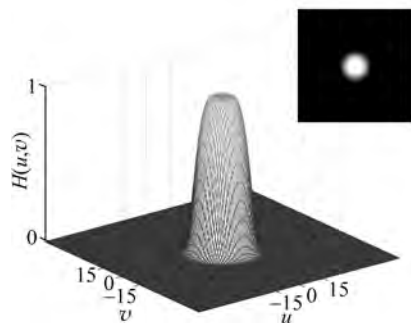
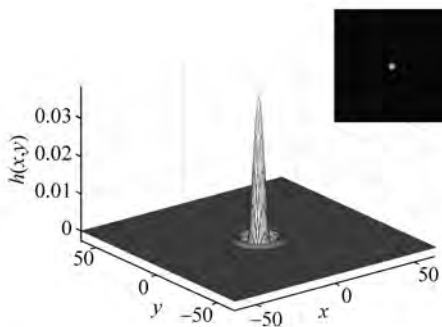


图 5-13 阶数为 1、2、5 和 20、截止频率为 15 的指数低通滤波器的传递函数及冲激响应函数
(注意,振铃效应随着阶数的增大趋于明显)



(c) 阶数为5



(d) 阶数为20

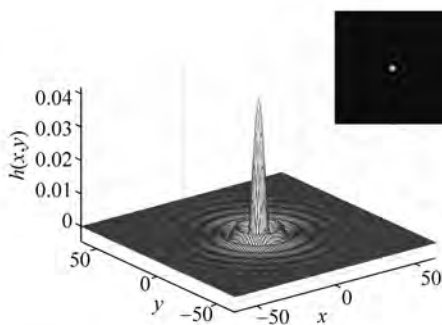
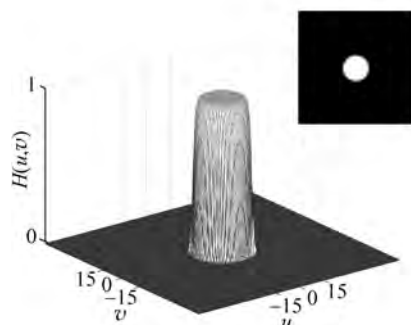


图 5-13 (续)

例 5-3 指数低通滤波器图像滤波

对于图 5-5(a)所示的灰度图像,图 5-14 为高斯低通滤波器的滤波图像。图 5-14(a)~图 5-14(f)的截止频率分别为 5、15、30、50、80 和 120,如图 5-5(b)所示。高斯低通滤波器的



图 5-14 截止频率为 5、15、30、50、80 和 120 的二阶指数低通滤波器的滤波结果

冲激响应函数仍是高斯函数,由于高斯函数无振荡的旁瓣现象,因而,滤波图像中没有振铃效应。从图 5-14(a)到图 5-14(f),随着截止频率的增加,被滤除的高频成分减少,模糊的程度减弱。同样地,当截止频率为 120 时,被滤除的高频成分仅包含很少的细节内容,滤波图像与原图像的视觉效果几乎一致。在相同截止频率的情况下,高斯低通滤波器的滤波图像相比二阶巴特沃斯低通滤波器的结果更加平滑。

5.3 高通滤波器

高通滤波器的目的是允许图像的高频成分通过,而限制低频成分通过。由于灰度平坦区域对应图像的低频成分,而灰度突变对应图像的高频成分,限制或减弱频谱中的低频成分可以起到锐化图像的作用,所以空域图像锐化在频域中用高通滤波器实现。正如 5.2 节讨论的低通滤波器,本节仅讨论零相位高通滤波器。

本节中的高通滤波器的传递函数与 5.2 节讨论的低通滤波器的传递函数有如下关系:

$$H_{hp}(u, v) = 1 - H_{lp}(u, v) \quad (5-9)$$

式中, $H_{hp}(u, v)$ 表示高通滤波器的传递函数, $H_{lp}(u, v)$ 表示与之对应的低通滤波器的传递函数。对应 5.2 节中的低通滤波器,本节讨论三种高通滤波器:理想高通滤波器、巴特沃斯高通滤波器和指数高通滤波器,并在频域和空域分别说明这些滤波器的特性。

5.3.1 理想高通滤波器

理想高通滤波器(ideal high-pass filter, IHPF)完全截断频谱中的低频成分,其传递函数定义为

$$H_{ihp}(u, v) = \begin{cases} 1, & D(u, v) \geq D_0 \\ 0, & D(u, v) < D_0 \end{cases} \quad (5-10)$$

式中, $D(u, v)$ 是由式(5-4)给出的点 (u, v) 到频谱中心 $(M/2, N/2)$ 的距离,半径 D_0 为截止频率。式(5-10)表明,理想高通滤波器完全阻止以 D_0 为半径的圆周内的所有频率成分,而无衰减地通过圆周外的任何频率成分。理想高通滤波器无法用电子器件实现,只能用计算机来模拟。通过讨论最简单的高通滤波器,有助于更好地理解高通滤波器的特性和滤波原理。图 5-15 显示了理想高通滤波器的三维网格图、图像显示以及径向剖面图。

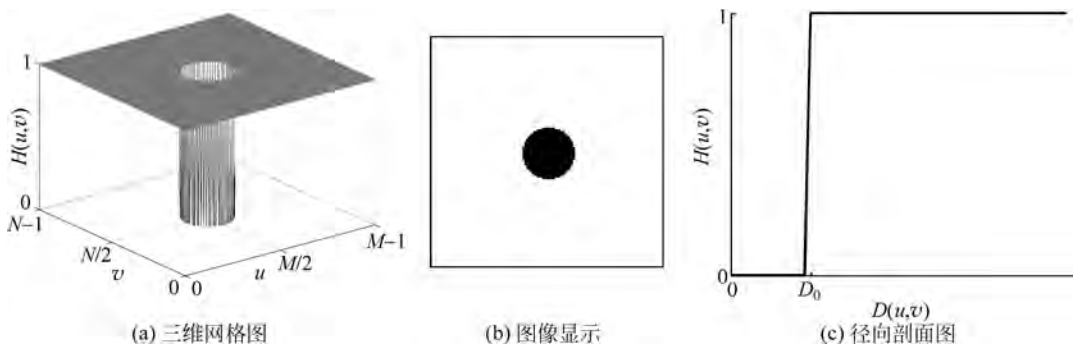


图 5-15 理想高通滤波器的传递函数

与理想低通滤波器相同,通过分析理想高通滤波器的传递函数在空域中对应的冲激响应函数,来分析其振铃特性。理想高通滤波器也会产生明显的振铃效应,因此,理想高通滤波器是不实用的。图 5-16(a)为截止频率为 15 的理想高通滤波器的传递函数及其冲激响应函数,图 5-16(b)为截止频率为 30 的理想高通滤波器的传递函数及其冲激响应函数,左图为频域滤波函数的三维网格图和图像显示,右图为其冲激响应函数的三维网格图和图像显示。从冲激响应函数的比较可以看到,随着理想高通滤波器截止频率的增大,允许通过的高频成分减少,振铃效应更明显。值得注意的是,高通滤波器的空域冲激响应函数中心有一个脉冲信号,这是因为

$$H_{\text{hp}}(u, v) = 1 - H_{\text{lp}}(u, v) \stackrel{\mathcal{F}}{\Leftrightarrow} h_{\text{hp}}(x, y) = \delta(x, y) - h_{\text{lp}}(x, y) \quad (5-11)$$

式中, $\delta(x, y)$ 为单位脉冲函数, $\stackrel{\mathcal{F}}{\Leftrightarrow}$ 表示互为傅里叶变换对。

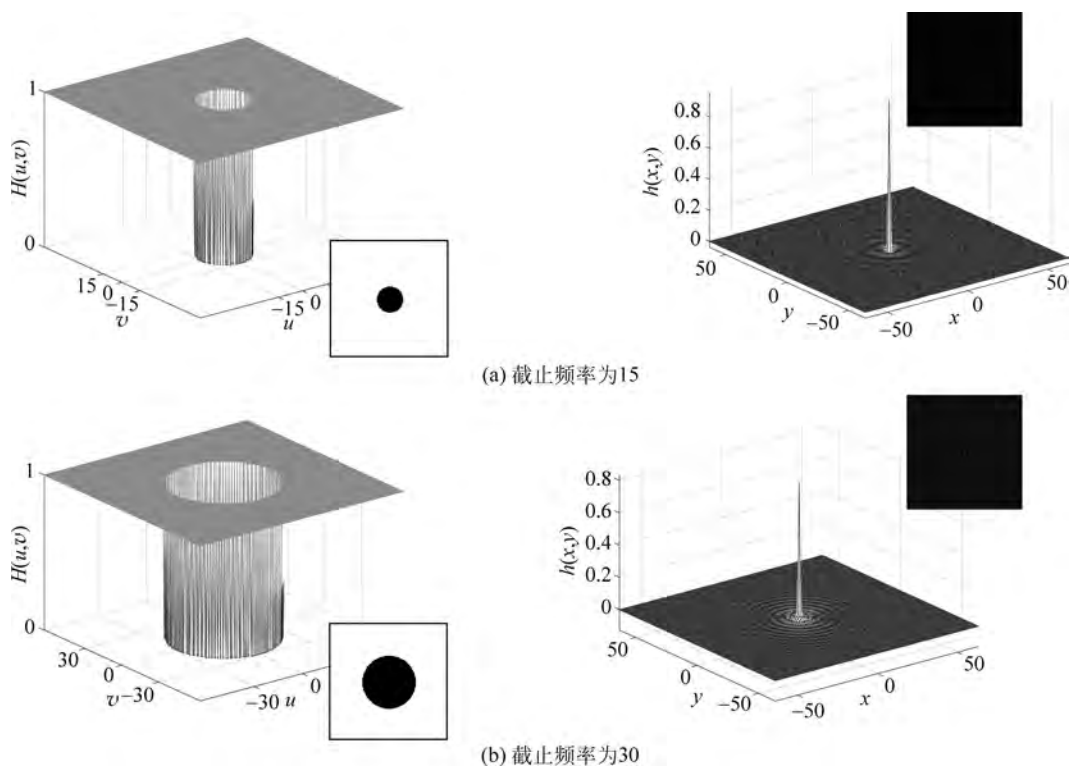


图 5-16 截止频率为 15 和 30 的理想高通滤波器的传递函数及其冲激响应函数

例 5-4 理想高通滤波器图像滤波

图 5-17(a)为一幅尺寸为 512×512 的图像,这幅图像的傅里叶谱如图 5-17(b)所示,在傅里叶谱上叠加了半径分别为 5、15、30 和 60 的圆环。图 5-18 给出了图 5-17(b)所示的不同半径作为截止频率的理想高通滤波器的滤波结果。图 5-18(a)显示了截止频率为 5 的滤波结果,这种情况下仅滤除了频谱中半径为 5 的圆环内的低频成分,保留图像中几乎所有的细节,包括一部分较平坦区域。随着截止频率的增大,被滤除的低频成分越多,边缘细节逐渐突出。注意到理想高通滤波器有振铃效应,图 5-18(b)和图 5-18(c)中表现的振铃效应使图像中边缘产生了重影。随着截止频率的增大,振铃效应应趋于增强。但是,与此同时,随

着截止频率的增大,允许通过的高频成分也越少,边缘逐渐细化,此时振铃效应反而不明显,如图 5-18(d)所示。



图 5-17 傅里叶谱上叠加圆环的半径分别为 5、15、30 和 60

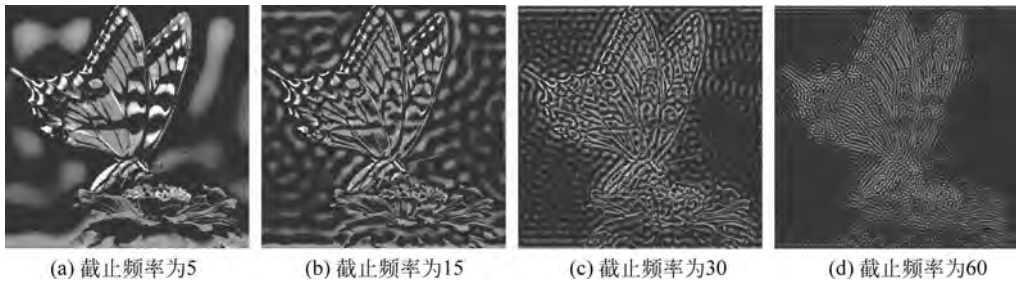


图 5-18 截止频率为 5、15、30 和 60 的理想高通滤波器的滤波结果

5.3.2 巴特沃斯高通滤波器

巴特沃斯高通滤波器(Butterworth high-pass filter, BHPF)是一种物理可实现的高通滤波器, n 阶巴特沃斯高通滤波器的传递函数定义为

$$H_{\text{bhp}}(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}} \quad (5-12)$$

式中, $D(u, v)$ 是由式(5-4)给出的点 (u, v) 到频谱中心 $(M/2, N/2)$ 的距离, D_0 为截止频率。式(5-12)满足式(5-7)和式(5-9)的关系。图 5-19 显示了二阶巴特沃斯高通滤波器的三维网格图、图像显示以及径向剖面图。与巴特沃斯低通滤波器相同,巴特沃斯高通滤波器在阻带与通带之间不是锐截止。

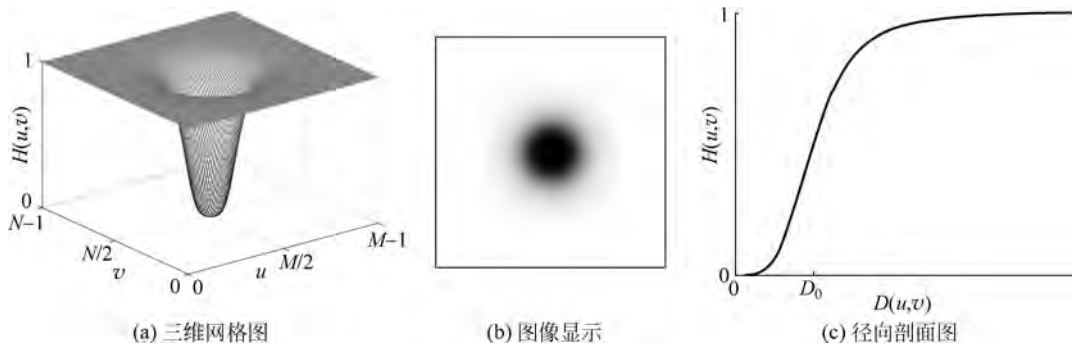


图 5-19 二阶巴特沃斯高通滤波器的传递函数

图 5-20 给出了阶数为 1、2、5、8、10 和 20 的巴特沃斯高通滤波器的传递函数的径向剖面图。如同巴特沃斯低通滤波器,巴特沃斯高通滤波器在阻带与通带之间的过渡比较平滑,因此,其滤波图像的振铃效应不明显。当阶数 n 逐渐增大时,从阻带到通带振幅上升速度加快。若阶数 n 充分大,则当 $D(u, v) \rightarrow D_0^+$ 时, $H_{\text{bhp}}(u, v) \rightarrow 1$; 当 $D(u, v) \rightarrow D_0^-$ 时, $H_{\text{bhp}}(u, v) \rightarrow 0$ 。在这种情况下,巴特沃斯高通滤波器逼近于理想高通滤波器。注意,如图 5-20 所示,20 阶巴特沃斯高通滤波器从阻带到通带的过渡趋于锐截止。

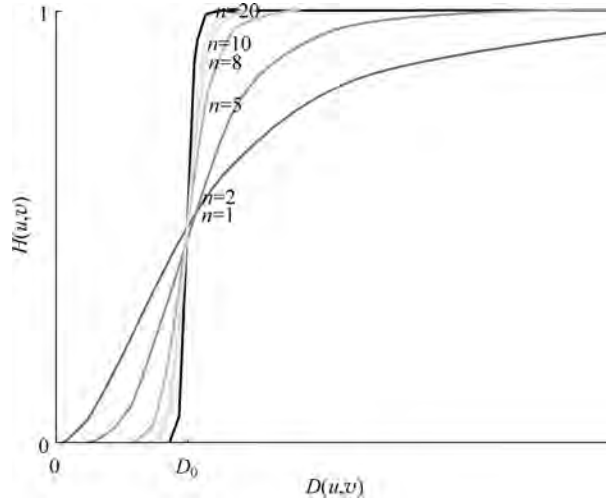


图 5-20 不同阶数的巴特沃斯高通滤波器的传递函数的径向剖面图

通过分析巴特沃斯高通滤波器的传递函数在空域中对应的冲激响应函数,来分析其振铃特性。对于高通滤波器,若其冲激响应函数从原点向外下降到负值,再上升趋近 0,并不再上升到正值,则无振铃效应。图 5-21(a)~(d)分别显示了阶数为 1、2、5 和 20、截止频率为 15 的巴特沃斯高通滤波器的传递函数及其冲激响应函数,左图为频域滤波函数的三维网格图和图像显示,右图为其冲激响应函数的三维网格图和图像显示。从右图中可以看出,一阶、二阶巴特沃斯高通滤波器没有振铃效应,5 阶巴特沃斯高通滤波器的空域冲激响应函数下降返回至零值以上,但正值很小,几乎不会导致振铃效应。随着阶数的增加,振铃效应趋于明显。对于巴特沃斯高通滤波器,20 阶的振铃效应也不太明显。

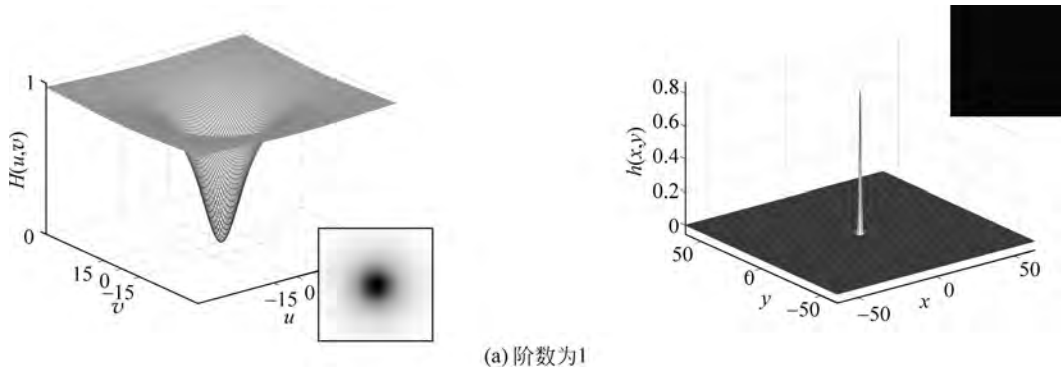


图 5-21 阶数为 1、2、5 和 20、截止频率为 15 的巴特沃斯高通滤波器的传递函数及冲激响应函数

(注意,振铃效应随着阶数的增大趋于明显)

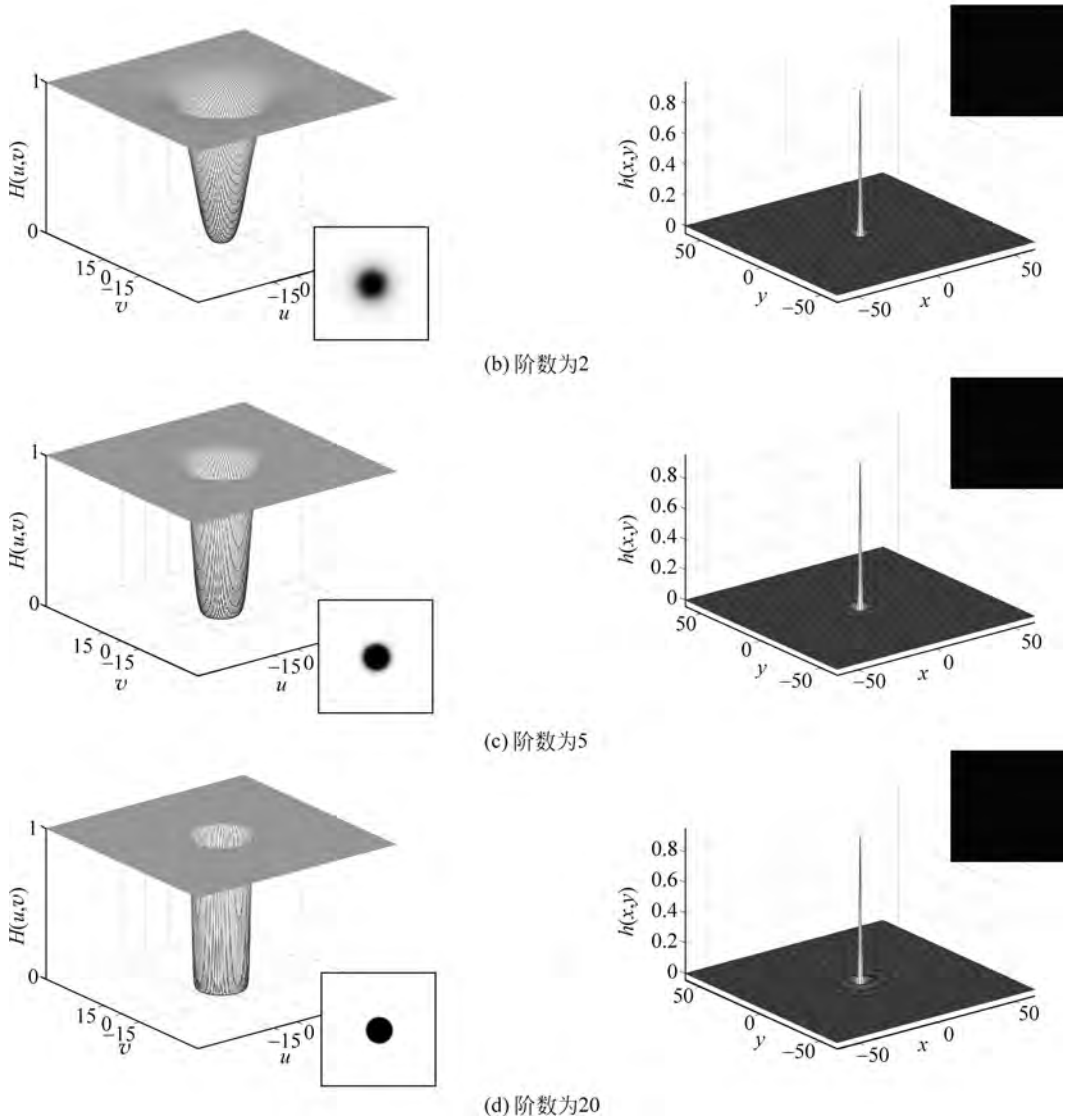


图 5-21 (续)

例 5-5 巴特沃斯高通滤波器图像滤波

对于图 5-17(a) 所示的灰度图像, 图 5-22 为二阶巴特沃斯高通滤波器的滤波图像。从

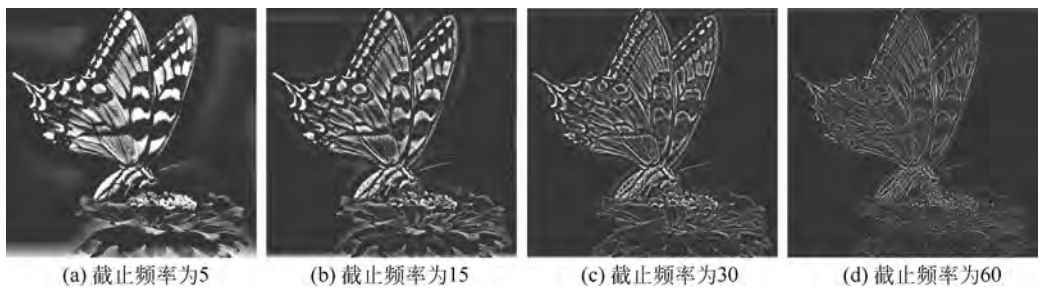


图 5-22 截止频率为 5、15、30 和 60 的巴特沃斯高通滤波器的滤波结果

图 5-22(a)到图 5-22(d),截止频率分别为 5、15、30 和 60,如图 5-17(b)所示。二阶巴特沃斯高通滤波器的传递函数在阻带与通带之间平滑的过渡,不会使滤波图像产生振铃效应。从图中可以看到,随着截止频率的增加,被滤除的低频成分越来越多,边缘更加清晰细化。

5.3.3 指数高通滤波器

指数高通滤波器(exponential high-pass filter,EHPF)也是一种物理可实现的高通滤波器, n 阶指数高通滤波器的传递函数定义为

$$H_{\text{ehp}}(u,v) = 1 - e^{-D(u,v)/D_0} \quad (5-13)$$

式中, $D(u,v)$ 是由式(5-4)给出的点 (u,v) 到频谱中心 $(M/2,N/2)$ 的距离, D_0 为截止频率。式(5-13)满足式(5-9)和式(5-8)的关系。图 5-23 显示了二阶指数高通滤波器的三维网格图、图像显示以及径向剖面图。与指数低通滤波器相同,指数高通滤波器在阻带与通带之间不是锐截止。

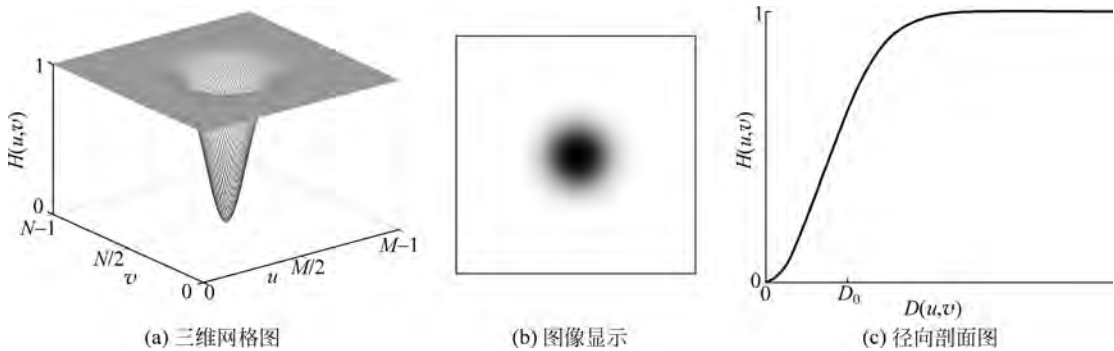


图 5-23 二阶指数高通滤波器的传递函数

图 5-24 给出了阶数为 1、2、5、8、10 和 20 的指数高通滤波器的传递函数的径向剖面图。与巴特沃斯高通滤波器类似,指数高通滤波器在阻带与通带之间有比较平滑的过渡,所以其

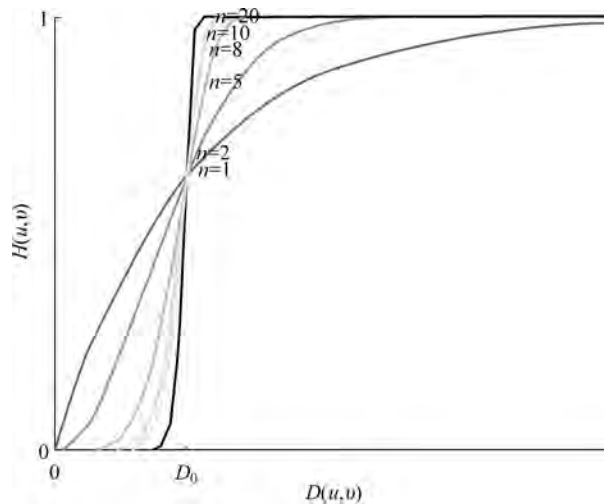


图 5-24 不同阶数的指数高通滤波器的传递函数的剖面示意图

振铃效应不明显,一阶、二阶指数高通滤波器则没有振铃效应。二阶指数高通滤波器也称为**高斯高通滤波器**。当阶数 n 值逐渐增大时,从阻带到通带振幅上升速度加快。若阶数 n 充分大,则当 $D(u, v) \rightarrow D_0^+$ 时, $H_{\text{ehp}}(u, v) \rightarrow 1$; 当 $D(u, v) \rightarrow D_0^-$ 时, $H_{\text{ehp}}(u, v) \rightarrow 0$ 。在这种情况下,指数高通滤波器逼近于理想高通滤波器。如图 5-24 所示,20 阶指数高通滤波器从阻带到通带的过渡趋于锐截止。通过比较图 5-20 和图 5-24 所示的滤波器传递函数的径向剖面图可以看到,与巴特沃斯高通滤波器相比,指数高通滤波器的传递函数随频率上升更快,抑制低频成分更弱,尾部很快逼近饱和值,允许通过的高频成分更多。因此,相同截止频率的巴特沃斯高通滤波器与指数高通滤波器相比,指数高通滤波器允许更多的低频成分通过,表现在滤波图像中就是保留了更多的背景基调。

通过分析指数高通滤波器的传递函数在空域中对应的冲激响应函数,来分析其振铃特性。图 5-25(a)~(d)分别给出了阶数为 1、2、5、8、10 和 20、截止频率为 15 的指数高通滤波器的传递函数及其冲激响应函数,左图为频域滤波函数的三维网格图和图像显示,右图为其冲激响应函数的三维网格图和图像显示。从右图中可以看出,一阶、二阶指数高通滤波器没有振铃效应,5 阶指数高通滤波器的空域冲激响应函数下降返回至零值以上的正值很小,几乎不会导致振铃效应。而随着阶数的增加,振铃效应趋于明显。20 阶指数高通滤波器的振铃效应也不太明显。

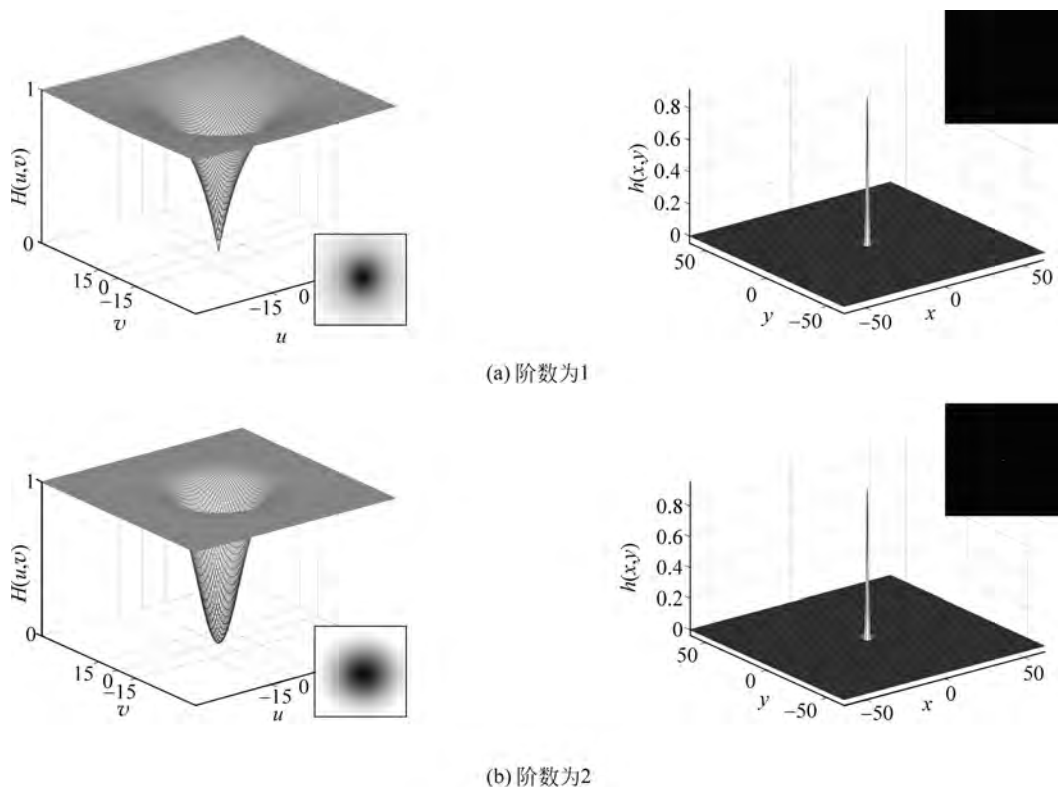
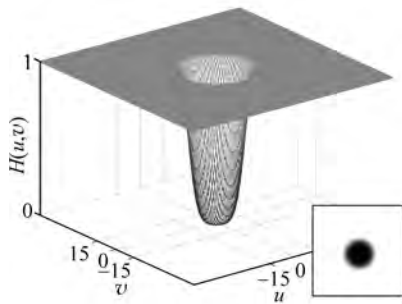
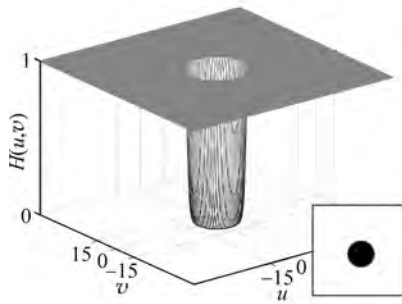
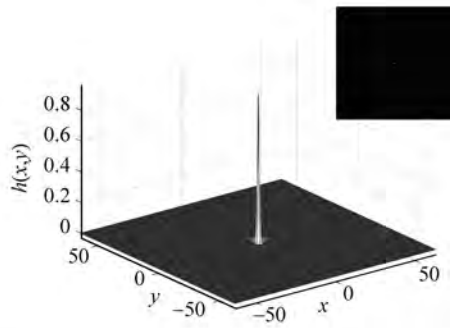


图 5-25 阶数为 1、2、5 和 20、截止频率为 15 的指数高通滤波器的传递函数及冲激响应函数

(注意,振铃效应随着阶数的增大趋于明显)



(c) 阶数为5



(d) 阶数为20

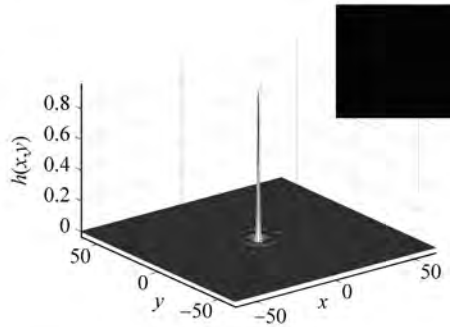


图 5-25 (续)

例 5-6 指数高通滤波器图像滤波

对于图 5-17(a) 所示的灰度图像, 图 5-26 为高斯高通滤波器的滤波图像。从图 5-26(a) 到图 5-26(f), 截止频率分别为 5、15、30 和 60, 如图 5-17(b) 所示。如同二阶巴特沃斯高通滤波器的情形, 高斯高通滤波器的传递函数在阻带与通带之间平滑地过渡, 滤波图像不会出现振铃效应。随着截止频率的增加, 被滤除的低频成分越来越多, 边缘更加清晰细化。相同截止频率的二阶巴特沃斯高通滤波器和高斯高通滤波器相比, 指数高通滤波器的滤波图像中保留了更多的背景基调。



图 5-26 截止频率为 5、15、30 和 60 的二阶指数高通滤波器的滤波结果

5.4 拉普拉斯频域滤波器

空域拉普拉斯算子是二阶差分算子,3.6.3.2节利用二阶差分近似二阶偏导数推导出了空域拉普拉斯算子对应的4邻域拉普拉斯模板,本节推导空域拉普拉斯算子的频域滤波器,并阐明两者之间的关系。

回顾空域拉普拉斯算子的定义为

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \quad (5-14)$$

傅里叶变换的一对微分性质如下:

$$\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^n} \stackrel{\mathcal{F}}{\Leftrightarrow} (j2\pi u)^n F(u, v) \quad (5-15)$$

$$(-j2\pi x)^n f(x, y) \stackrel{\mathcal{F}}{\Leftrightarrow} \frac{\partial^n F(u, v)}{\partial u^n} \quad (5-16)$$

利用傅里叶变换的微分性质,可以推导出空域拉普拉斯算子的频域滤波器的传递函数。对式(5-14)两端作傅里叶变换,可得频域拉普拉斯滤波结果:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\nabla^2 f(x, y)) &= \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}\right) \\ &= -4\pi^2(u^2 + v^2)F(u, v) \end{aligned} \quad (5-17)$$

其中, $\mathcal{F}(\cdot)$ 表示傅里叶变换。不考虑式(5-17)中的常数项,空域拉普拉斯算子对应的频域滤波器的传递函数为

$$H(u, v) = -A(u^2 + v^2) \quad (5-18)$$

式中, A 表示滤波器的通带增益。5.2节和5.3节中低通和高通滤波器的传递函数值均在区间 $[0, 1]$ 内,不会改变图像的灰度级范围,而 $u^2 + v^2$ 比图像像素的灰度值高数个量级,增益 A 的作用是调整滤波器的幅度范围。

正如本章所有频域滤波的实现,前提都是在频域滤波之前对频谱 $F(u, v)$ 进行中心移位变换。对于尺寸为 $M \times N$ 的输入图像 $f(x, y)$,中心移位变换将频率中心从原点 $(0, 0)$ 平移到 $(M/2, N/2)$ 。如前所述,滤波函数的中心也平移到 $(M/2, N/2)$,于是,频域拉普拉斯滤波器的传递函数改写为

$$H(u, v) = -A[(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2] = -A \cdot D^2(u, v) \quad (5-19)$$

式中, $D(u, v)$ 是由式(5-4)给出的点 (u, v) 到频谱中心 $(M/2, N/2)$ 的距离。

图5-27给出了式(5-14)定义的空域拉普拉斯算子对应的频域滤波器,图5-27(a)、(b)和(c)分别为频域拉普拉斯函数的三维网格图、径向剖面图和图像方式显示,纵轴表示频域滤波器的幅度。观察频域拉普拉斯滤波器的幅频特性,这是高通滤波器的形式,允许频谱的高频成分通过,而限制频谱的低频成分通过。通过计算频域拉普拉斯滤波函数的傅里叶逆变换,其空域冲激响应函数的三维网格图和径向剖面图如图5-27(d)和图5-27(e)所示。图5-27(f)为使用最近邻插值放大6倍的中心区域,正如所估计的,图5-27(f)的基本形状与图3-62(a)所示的空域拉普拉斯模板^①都是中心为负值,且4邻域为正值。因此,从频域滤

^① 5.7.1节分析了4邻域拉普拉斯模板的频率响应函数,通过比较可见,空域模板的频率响应函数与从式(5-14)定义的空域拉普拉斯算子直接推导的频域滤波器具有一致的形状。

波器推导出的空域模板与 3.6.3.2 节中的一致,频域滤波器与空域模板互为傅里叶变换对。

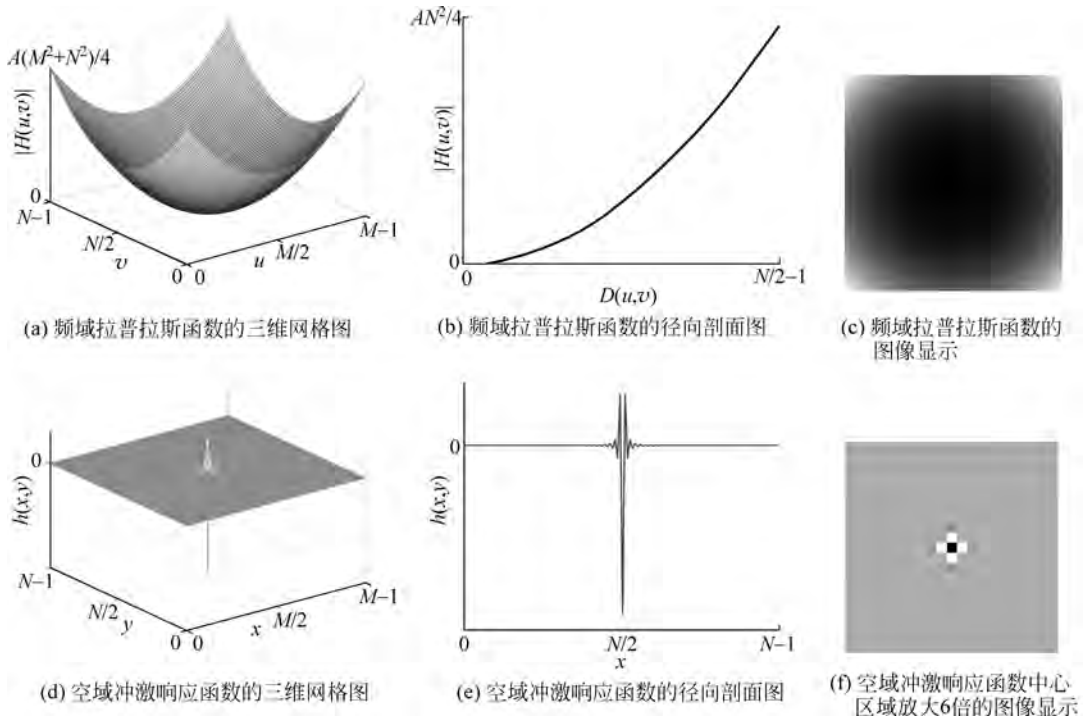


图 5-27 频域拉普拉斯滤波函数及其空域冲激响应函数

将式(5-19)的频域拉普拉斯滤波函数与输入图像的频谱相乘 $H(u, v)F(u, v)$, 计算其傅里叶逆变换, 在频域中实现拉普拉斯滤波, 即

$$\nabla^2 f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[H(u, v)F(u, v)] = \mathcal{F}^{-1}[-A \cdot D^2(u, v)F(u, v)] \quad (5-20)$$

其中, $\mathcal{F}^{-1}(\cdot)$ 表示傅里叶逆变换。根据卷积定理, 使用频域拉普拉斯滤波器等效于空域拉普拉斯算子的卷积滤波。

5.5 高频增强滤波器

5.3 节和 5.4 节中高通滤波器滤除了频谱的零频率成分, 因而滤波图像的平均灰度为零, 整幅图像接近黑色。如同 3.6.3 节所讨论的, 将高通滤波的结果加上原图像, 就可以实现边缘增强。高频增强(high frequency emphasis, HFE)滤波是将高通滤波器前乘以一个常数, 给高频成分一定的增益, 并加上一个偏移, 来增加一定比例的原始图像, 可表示为如下传递函数:

$$H_{\text{hfe}}(u, v) = bH_{\text{hp}}(u, v) + a \quad (5-21)$$

式中, $H_{\text{hp}}(u, v)$ 表示高通滤波器, $a \geq 0$ 且 $b > a$ 。当 $b > 1$ 时, 则提升了高频成分。高频增强滤波的过程可以表示为

$$\begin{aligned} G(u, v) &= [bH_{\text{hp}}(u, v) + a]F(u, v) \\ &= bH_{\text{hp}}(u, v)F(u, v) + aF(u, v) \end{aligned} \quad (5-22)$$

其中, $H_{\text{hp}}(u, v)F(u, v)$ 表示高频成分, $F(u, v)$ 为原图像的频谱。式(5-22)表明, 给高频成

分比例系数为 b 的增益,在加上比例系数为 a 的原图像,用来增强高频成分,同时保留部分低频成分。当 $a=0$ 且 $b=1$ 时,式(5-21)退化为高通滤波器。

例 5-7 高频增强图像滤波

图 5-28(a)显示了一幅窄灰度级的 X 射线胸透图像,图像尺寸为 602×418 ,使用二阶巴特沃斯高通滤波器对图 5-28(a)所示的灰度图像进行高频增强滤波,截止频率 $D_0=15$ 。图 5-28(b)为高通滤波器的滤波结果,由于滤除了大部分低频成分,仅保留了图像的边缘和细节,而图像的能量集中在低频成分,因而高频成分看起来很暗。图 5-28(c)为原图像直接加到高通滤波图像上的结果,这是 3.6.3 节所讨论的内容,这样能够保持原图像的能量,并增加图像的细节,实现图像锐化。图 5-28(d)对高频成分进行了增强,高频成分的系数 b 提升为 2,因此与图 5-28(c)相比,边缘和细节更加锐化。图 5-28(e)仅加上一半比例的原图像,与高频成分的反差提升,有助于观察高频成分。由于图像仍然很暗,其灰度值分布在很窄的灰度级范围内,对于这种情况,直方图均衡化是一种有效的图像后处理方法,图 5-28(f)是对图 5-28(e)进行直方图均衡化的图像增强结果。由图中可见,高频增强滤波与直方图均衡化结合的方法尽管也放大了噪声,然而更好地增强了图像中的边缘和细节。

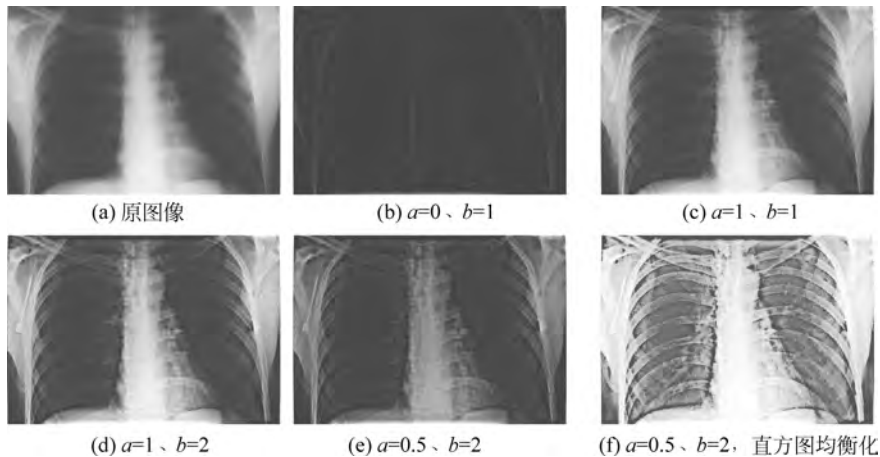


图 5-28 高频增强滤波器的滤波示例

5.6 带通、带阻与陷波滤波器

本节讨论更专用的带通、带阻和陷波滤波器。带通滤波器允许一定频带的信号通过,用于抑制低于或高于该频带的信号、噪声干扰。与带通滤波器相反,带阻滤波器用于抑制一定频带内的信号,允许该频带以外的所有信号通过。陷波滤波器是一种限制窄带频率范围通过的特殊带阻滤波器,通常用于单一频率成分的滤除。

5.6.1 带通滤波器

带通滤波器(band-pass filter, BPF)允许某一带宽范围的频率成分通过,而限制带宽范围以外的频率成分通过。理想带通滤波器具有完全平坦的通带,在通带内没有增益或者衰减,完全阻止通带之外的所有频率成分,通带与阻带之间的过渡在瞬时频率完成。理想带通

滤波器的传递函数定义为

$$H_{\text{ibp}}(u, v) = \begin{cases} 0, & D(u, v) < D_0 - W/2 \\ 1, & D_0 - W/2 \leq D(u, v) \leq D_0 + W/2 \\ 0, & D(u, v) > D_0 + W/2 \end{cases} \quad (5-23)$$

式中, W 为带宽, 半径 D_0 为频带中心, $D_0 - W/2$ 和 $D_0 + W/2$ 分别为下限截止频率和上限截止频率, $D(u, v)$ 是由式(5-4)给出的点 (u, v) 到频谱中心 $(M/2, N/2)$ 的距离。

实际上, 理想带通滤波器并不存在。物理可实现的滤波器并不能够完全阻止期望频带以外的所有频率成分, 在通带与阻带之间有一个衰减范围并非完全阻止。 n 阶巴特沃斯带通滤波器的传递函数定义为

$$H_{\text{bbp}}(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u, v)W}{D^2(u, v) - D_0^2} \right]^{2n}} \quad (5-24)$$

高斯带通滤波器的传递函数定义为

$$H_{\text{gbp}}(u, v) = e^{-\left[\frac{D^2(u, v) - D_0^2}{D(u, v)W} \right]^2} \quad (5-25)$$

式(5-24)和式(5-25)中, 变量的定义与理想带通滤波器中的一致。

图 5-29(a)~(c) 分别显示了带宽为 10、频带中心为 15 的理想带通滤波器、二阶巴特沃斯带通滤波器、高斯带通滤波器的三维网格图、图像显示以及径向剖面图。从图中可以看到, 巴特沃斯带通滤波器和高斯带通滤波器在阻带与通带、通带与阻带之间有比较平滑的过渡。

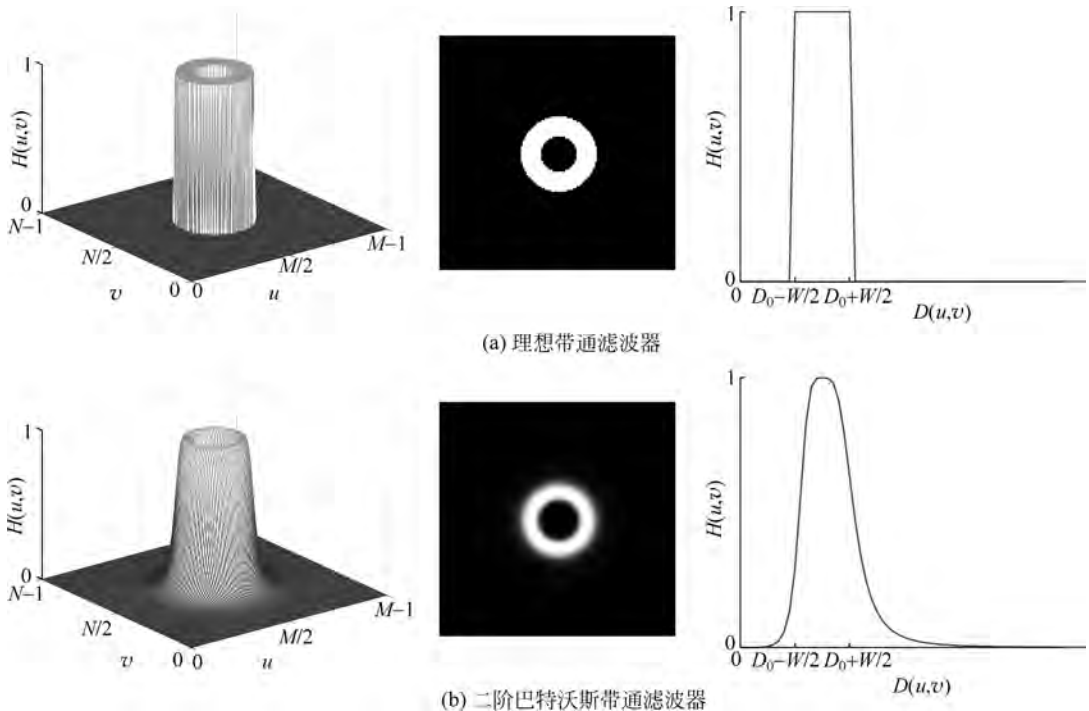
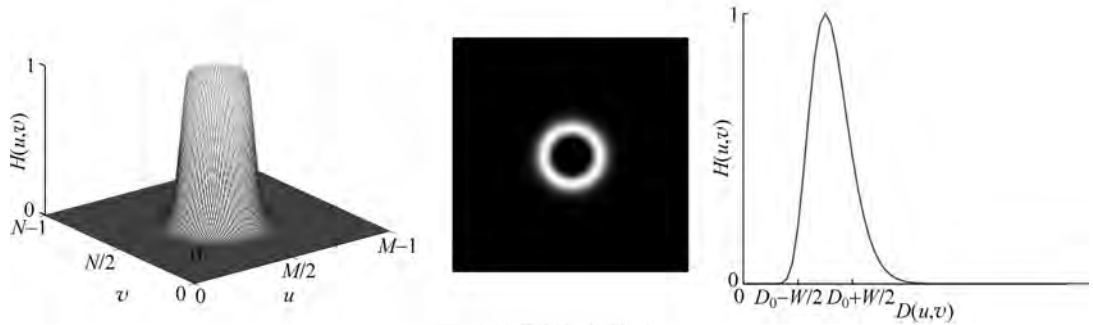


图 5-29 带宽为 10、频带中心为 15 的带通滤波器的三维网格图、图像显示及径向剖面图



(c) 高斯带通滤波器

图 5-29 (续)

5.6.2 带阻滤波器

带阻滤波器(band-reject filter, BRF)与带通滤波器执行相反的操作,限制某一带宽范围的频率成分通过,而允许带宽范围以外的频率成分通过。带阻滤波器的传递函数 $H_{br}(u, v)$ 根据相应的带通滤波器的传递函数 $H_{bp}(u, v)$ 定义为

$$H_{br}(u, v) = 1 - H_{bp}(u, v) \quad (5-26)$$

理想带阻滤波器的传递函数定义为

$$H_{ibr}(u, v) = \begin{cases} 1, & D(u, v) < D_0 - W/2 \\ 0, & D_0 - W/2 \leq D(u, v) \leq D_0 + W/2 \\ 1, & D(u, v) > D_0 + W/2 \end{cases} \quad (5-27)$$

式中, W 为带宽,半径 D_0 为频带中心, $D_0 - W/2$ 和 $D_0 + W/2$ 分别为下限截止频率和上限截止频率, $D(u, v)$ 是由式(5-4)给出的点 (u, v) 到频谱中心 $(M/2, N/2)$ 的距离。

同样地,物理可实现的带阻滤波器不能完全阻止期望频带之内的所有频率成分,在通带与阻带之间有一个衰减范围。 n 阶巴特沃斯带阻滤波器的传递函数定义为

$$H_{bbr}(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u, v)W}{D^2(u, v) - D_0^2} \right]^{2n}} \quad (5-28)$$

高斯带阻滤波器的传递函数定义为

$$H_{gbr}(u, v) = 1 - e^{-\left[\frac{D^2(u, v) - D_0^2}{D(u, v)W} \right]^2} \quad (5-29)$$

式(5-28)和式(5-29)中,变量的定义与理想带阻滤波器中的一致。

图 5-30(a)~(c)分别显示了带宽为 10、频带中心为 15 的理想带阻滤波器、二阶巴特沃斯带阻滤波器、高斯带阻滤波器的三维网格图、图像显示以及径向剖面图。从图中可以看到,巴特沃斯带阻滤波器和高斯带阻滤波器在通带与阻带、阻带与通带之间有比较平滑的过渡。

例 5-8 带阻滤波器消除周期噪声

带阻滤波器的应用之一是,在已知频域中噪声频率情况下消除周期噪声。一个纯频率正弦波的傅里叶变换是位于正弦波共轭频率处的一对共轭脉冲,这两个脉冲是关于频谱中心对称的。指定不同频率的 6 个正弦波,对应 6 对关于频谱中心对称的脉冲,图 5-31(a)给

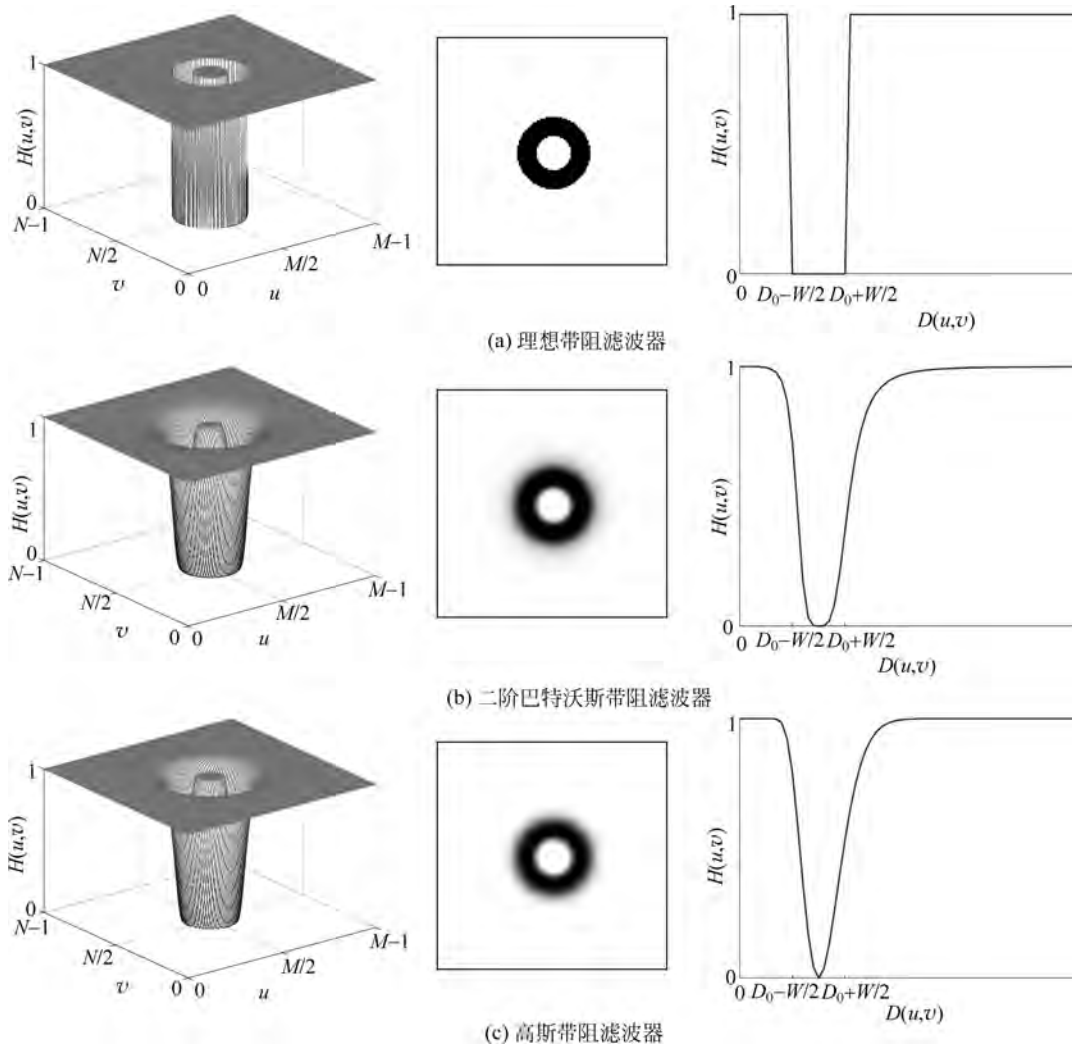


图 5-30 带宽为 10、频带中心为 15 的带阻滤波器的三维网格图、图像显示及径向剖面图

出了这 6 个不同频率正弦波的频域表示, 频谱的尺寸为 256×256 , 其中 6 个脉冲关于频谱中心的位置分别为 $(0, 64)$ 、 $(32, 56)$ 、 $(56, 32)$ 、 $(64, 0)$ 、 $(-32, 56)$ 和 $(-56, 32)$, 另外 6 对共轭脉冲的位置与它们关于频谱中心对称。傅里叶谱中存在的对称脉冲对是由正弦周期噪声造成的, 图 5-31(b) 为这 6 对共轭脉冲对应的空域正弦噪声模式, 空域中正弦噪声呈现一种周期模式, 故称为周期噪声。对图 5-31(c) 所示的灰度图像加上这 6 个不同频率的正弦周期噪声, 图 5-31(d) 和图 5-31(e) 分别为加性正弦周期噪声干扰的图像及其傅里叶谱, 若空域中正弦波的振幅足够强, 则在图像频谱中可以看到图像中每一个正弦波对应的共轭脉冲对, 每一对共轭脉冲对应一个正弦波。

在这个特殊例子中, 正弦噪声的频率对应的共轭脉冲对以近似于圆的形状出现, 且位于关于频谱中心的半径为 64 的近似圆上, 因此, 选择频带中心 $D_0 = 64$ 、带宽 $W = 10$ 的二阶巴特沃斯带阻滤波器的传递函数。将图 5-31(f) 所示的二阶巴特沃斯带阻滤波器与图 5-31(e) 所示的傅里叶谱相乘, 图 5-31(g) 中傅里叶谱上的圆环是二阶巴特沃斯带阻滤波器, 由图中

可见,该圆环完全包围了噪声脉冲。图 5-31(h)为最终的滤波图像,从图中可以看到,带阻滤波器有效地消除了周期噪声的干扰。在带阻滤波器中通常要求接近锐截止的窄带滤波器以使得尽可能小地损失细节,因此,滤波图像在强边缘处会表现出振铃效应。

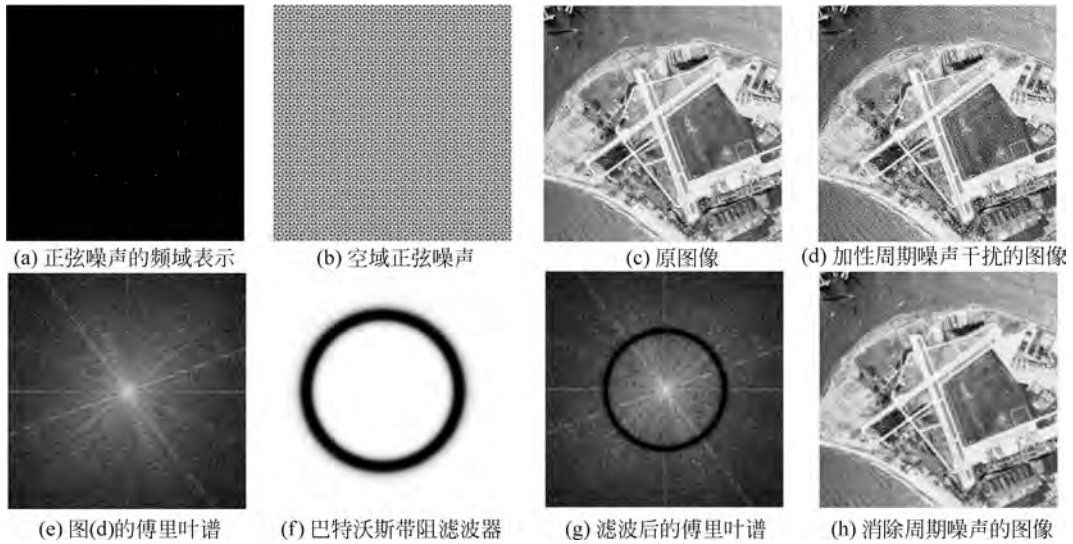


图 5-31 巴特沃斯带阻滤波器消除周期噪声的示例

5.6.3 陷波滤波器

陷波滤波器(notch filter, NF)是一种窄阻带的带阻滤波器。陷波滤波器限制某一中心频率邻域内的频率成分通过,而允许其他频率成分通过。陷波的含义是指仅对某些特定的频率及其邻域进行抑制,其他频率成分不会发生衰减。中心频率在 (u_0, v_0) 和对称位置 $(-u_0, -v_0)$ 的理想陷波滤波器的传递函数定义为

$$H_{\text{inr}}(u, v) = \begin{cases} 0, & D_+(u, v) \leq D_0; D_-(u, v) \leq D_0 \\ 1, & \text{其他} \end{cases} \quad (5-30)$$

式中,半径 D_0 为截止频率, $D_+(u, v)$ 和 $D_-(u, v)$ 分别是点 (u, v) 到中心频率 $(u_0 + M/2, v_0 + N/2)$ 和 $(-u_0 + M/2, -v_0 + N/2)$ 的距离,表达式为

$$D_+(u, v) = [(u - u_0 - M/2)^2 + (v - v_0 - N/2)^2]^{1/2} \quad (5-31)$$

$$D_-(u, v) = [(u + u_0 - M/2)^2 + (v + v_0 - N/2)^2]^{1/2} \quad (5-32)$$

式(5-30)表明,理想陷波滤波器完全阻止以 (u_0, v_0) 和 $(-u_0, -v_0)$ 为圆心,以 D_0 为半径的圆周内的所有频率成分,而完全通过其他频率成分。如前所述,频域滤波之前,需对频谱 $F(u, v)$ 的原点进行中心移位变换。中心移位变换将中心频率从频率坐标 (u_0, v_0) 和 $(-u_0, -v_0)$ 平移到 $(u_0 + M/2, v_0 + N/2)$ 和 $(-u_0 + M/2, -v_0 + N/2)$ 。同样地,理想陷波滤波器是物理不可实现的。

n 阶巴特沃斯陷波滤波器的传递函数定义为

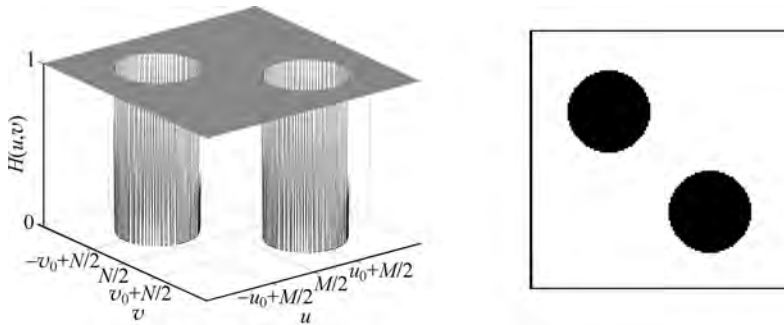
$$H_{\text{bnr}}(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D_0^2}{D_+(u, v)D_-(u, v)} \right]^n} \quad (5-33)$$

高斯陷波滤波器的传递函数定义为

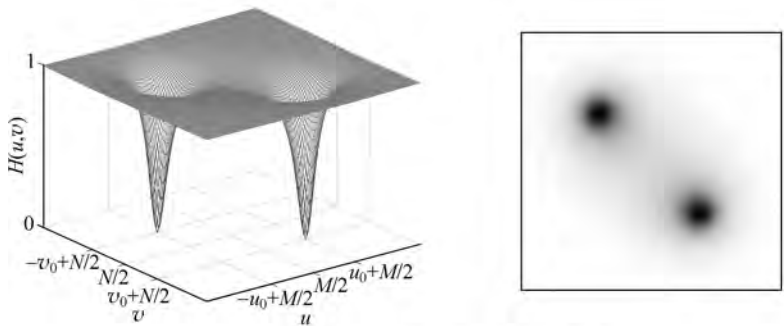
$$H_{\text{gnr}}(u, v) = 1 - e^{-D_+(u, v)D_-(u, v)/D_0^2} \quad (5-34)$$

式(5-33)和式(5-34)中,变量的定义与理想陷波滤波器中的一致。陷波滤波器可以通过对高通滤波器的中心进行位移得到,不同的是频率具有对称性,因而存在两个对称的中心频率。当 $(u_0, v_0) = (0, 0)$ 时,陷波滤波器将转换为高通滤波器。

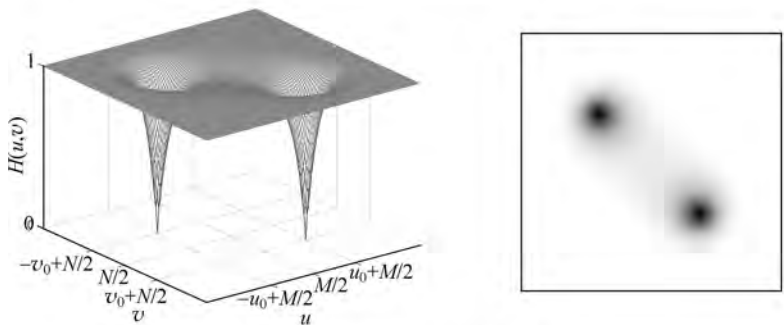
图 5-32(a)~(c)分别显示了截止频率为 20、中心频率在(25, 25)和对称位置(-25, -25)的理想陷波滤波器、二阶巴特沃斯陷波滤波器、高斯陷波滤波器的三维网格图及其图像显示。从图中可以看到,巴特沃斯陷波滤波器和高斯陷波滤波器在阻带与通带之间的过渡比较平滑。



(a) 理想陷波滤波器



(b) 二阶巴特沃斯陷波滤波器



(c) 高斯陷波滤波器

图 5-32 截止频率为 20、中心频率在(25, 25)和对称位置(-25, -25)的陷波滤波器三维网格图及其图像显示

例 5-9 陷波滤波器去除周期噪声

周期噪声表现为图像中周期性重复出现的噪声,在空域去除周期噪声基本是不可能的,周期性噪声在频域中表现为特定频率的高能量,通过频域滤波能够去除周期噪声。由降质图像的频谱可知,周期噪声趋于产生频率峰值,通过检测这些峰值来估计典型的周期噪声参数,进而通过频域滤波能够显著地降低周期噪声。在 5.6.2 节中已经讨论了相关问题,在该节中给出了带阻滤波器用于去除周期噪声的例子。带阻滤波器虽然能够去除周期噪声,但是也会造成噪声以外频率成分的衰减。

陷波滤波器也能够应用于去除周期噪声,同样需要已知周期噪声的尖峰频率。陷波滤波器直接对噪声的频率处进行抑制,而不会造成其他频率成分的衰减,特别当周期噪声的尖峰频率个数较少或者较分散时,陷波滤波器对频率的抑制具有很强的针对性,在去除噪声的同时,能够更好地保持图像内容。图 5-33(a)显示了一幅受不同频率的周期性噪声干扰的图像,图像尺寸为 168×246 。通过傅里叶变换将图像从空域变换到频域中,如图 5-33(b)所示,周期噪声在傅里叶谱中产生峰值,可以通过视觉分析检测出任意相邻两个象限中峰值的位置,峰值处的频率用 (u_l, v_l) 表示,傅里叶域中的频率具有共轭对称性,对称位置的频率为 $(-u_l, -v_l)$, $l=1, 2, \dots, L$, 傅里叶谱中峰值的总数为 $2L$ 。采用巴特沃斯陷波滤波器抑制傅里叶域中的噪声峰值。中心频率在 (u_l, v_l) 和对称位置 $(-u_l, -v_l)$ 的 n 阶巴特沃斯陷波滤波器的传递函数可表示为

$$H_{\text{bwr}}(u, v) = \prod_{l=1}^L \frac{1}{1 + \left[\frac{D_0^2}{D_{l,+}(u, v)D_{l,-}(u, v)} \right]^n} \quad (5-35)$$

式中,半径 D_0 为截止频率, $D_{l,+}(u, v)$ 和 $D_{l,-}(u, v)$ 分别为点 (u, v) 到中心频率 $(u_l + M/2, v_l + N/2)$ 和 $(-u_l + M/2, -v_l + N/2)$ 的距离,表达式为

$$D_{l,+}(u, v) = [(u - u_l - M/2)^2 + (v - v_l - N/2)^2]^{1/2} \quad (5-36)$$

$$D_{l,-}(u, v) = [(u + u_l - M/2)^2 + (v + v_l - N/2)^2]^{1/2} \quad (5-37)$$

如前所述,频域滤波之前,需对频谱 $F(u, v)$ 的原点进行中心移位变换。中心移位变换将中心频率从频率坐标 (u_l, v_l) 和 $(-u_l, -v_l)$ 平移到 $(u_l + M/2, v_l + N/2)$ 和 $(-u_l + M/2, -v_l + N/2)$ 。图 5-33(c) 为所用的陷波滤波器的图像显示, $D_0=25, L=4$ 。图 5-33(d) 为经过滤波的傅里叶谱,由图中可见,相应频率处的峰值能量明显衰减了。最后,再从频域变换

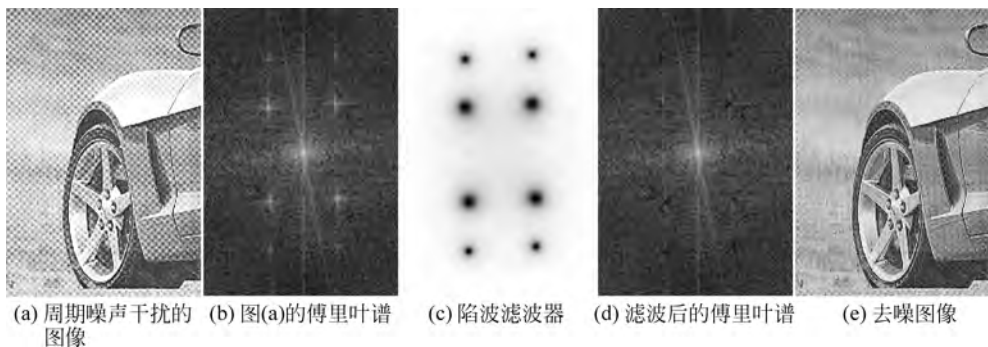


图 5-33 陷波滤波器的周期噪声滤波示例

回空域,如图 5-33(e)所示,通过选取合适的半径,陷波滤波器有效抑制中心频率及其邻域内的频率成分,而保留其他频率成分。因此,在有效降低对应频率的周期噪声的同时,能够保持图像的内容。

5.7 空域滤波与频域滤波的对应关系

卷积定理表明,空域中两个函数的卷积等效于这两个函数在频域中傅里叶变换的乘积。根据卷积定理,空域模板和频域滤波函数互为傅里叶变换对。因此,频域增强和空域增强有着密切的对应关系。一方面,可以通过分析频域特性(主要是幅度特性)来分析空域模板的作用;另一方面,可以借助频域滤波器的设计来指导空域模板。

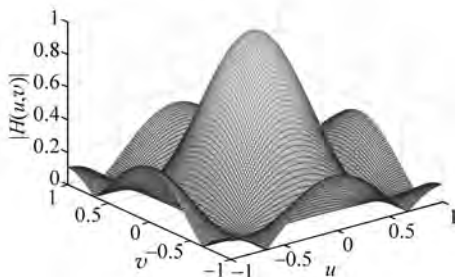
5.7.1 空域到频域

空域模板与其频率响应函数(即空域模板的傅里叶变换)互为傅里叶变换对。因此,空域模板的作用可以通过分析其频域特性而知。对空域模板作傅里叶变换,通过分析空域模板的幅频特性来解释第 3 章介绍的空域平滑模板和锐化模板的作用。

图像平滑处理的作用是模糊细节和降低噪声。图 5-34(a)给出了均值平滑模板及其频率响应函数的三维网格图,图 5-34(b)给出了高斯平滑模板及其频率响应函数的三维网格图,由图中可见,平滑模板的幅频特性表现为低通滤波器,即允许低频成分通过,而限制高频成分通过。从频率的角度分析,细节和噪声对应于频域中的高频成分,因此,低通滤波器可

$$\frac{1}{9} \times$$

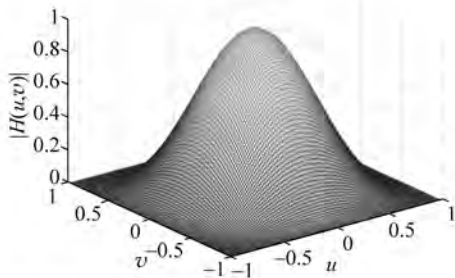
1	1	1
1	1	1
1	1	1



(a) 均值平滑模板

$$\frac{1}{16} \times$$

1	2	1
2	4	2
1	2	1



(b) 高斯平滑模板

图 5-34 空域平滑模板及其频率响应函数

以达到平滑和降噪的目的。比较这两种平滑模板频率响应函数可发现,由于均值平滑模板对应的频域滤波函数具有旁瓣泄漏的性质,因而导致振铃效应,而高斯平滑模板对应的频域滤波函数无旁瓣现象,且通带与阻带之间过渡比较平滑,因而不会产生振铃效应。

图像锐化处理的作用是增强图像中的边缘和细节。图 5-35 给出了两种拉普拉斯锐化模板以及相应的频率响应函数的三维网格图,从频率特性可知,这两种拉普拉斯模板的作用是允许高频成分通过,而限制低频成分通过,因此,在频域中对应高通滤波器。从频率的角度分析,图像中的平坦区域具有较小的灰度变化,对应于频域中的低频成分,边缘和细节对应频域中的高频成分,因此,高通滤波器可以达到边缘锐化和细节突出的目的。通过对这两种拉普拉斯频域响应函数的比较,8 邻域拉普拉斯模板相比 4 邻域拉普拉斯模板允许更多的高频成分通过,因而,边缘和细节的响应更强。在频率响应函数的图示中, u 和 v 表示归一化频率,其值范围为 $[-1,1]$,其中 1 对应采样频率的一半,即 πrad ; $|H(u,v)|$ 表示傅里叶变换系数的模值。

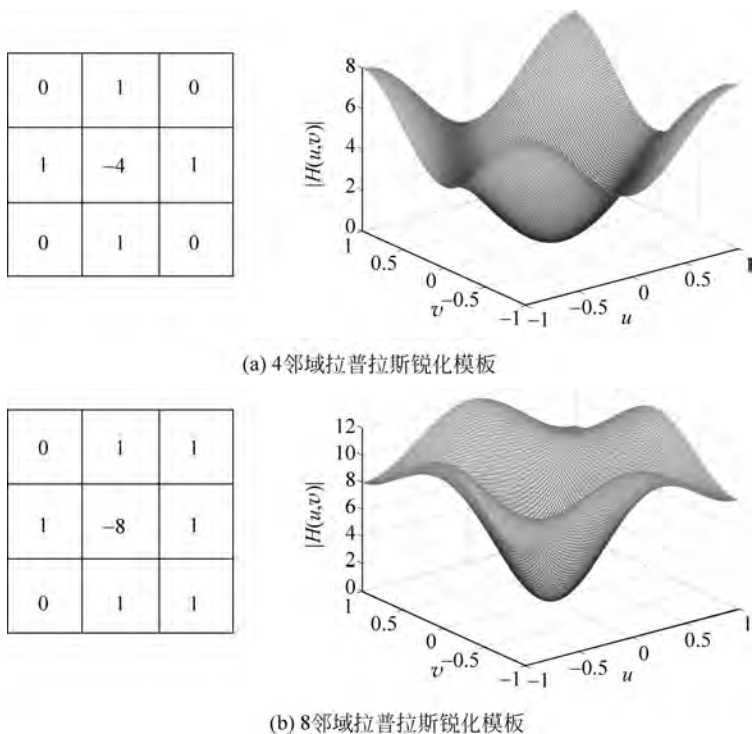


图 5-35 空域锐化模板及其频率响应函数

5.7.2 频域到空域

频域滤波器的传递函数与其空域冲激响应函数互为傅里叶变换对。借助频域滤波器的设计,通过对频域滤波器的传递函数计算傅里叶逆变换来确定空域模板。高斯函数的傅里叶逆变换也是高斯函数,实函数有利于通过图形来分析自身特性。对高斯函数表示的低通滤波器和高通滤波器进行傅里叶逆变换,通过分析频域滤波函数与其空域冲激响应函数的关系有助于理解空域和频域之间的滤波特性。

在频域中高斯低通滤波器的传递函数可表示为

$$H_{\text{glp}}(u, v) = A e^{-\frac{u^2+v^2}{2\sigma^2}} \quad (5-38)$$

式中, σ 为高斯函数的标准差; A 表示滤波器的通带增益, 在 5.2 节讨论的低通滤波器中, 通带增益 $A=1$ 。频域滤波函数 $H_{\text{glp}}(u, v)$ 对应的空域冲激响应函数为

$$h_{\text{glp}}(x, y) = 2\pi A \sigma^2 e^{-2\pi^2 \sigma^2 (x^2+y^2)} \quad (5-39)$$

式(5-38)和式(5-39)构成傅里叶变换对, 频域滤波函数 $H_{\text{glp}}(u, v)$ 和空域冲激响应函数 $h_{\text{glp}}(x, y)$ 都是实高斯函数。图 5-36(a) 给出了频域滤波函数 $H_{\text{glp}}(u, v)$ 的三维网格图和径向剖面图, 图 5-36(b) 给出了其空域冲激响应函数 $h_{\text{glp}}(x, y)$ 的三维网格图和径向剖面图, 根据 $h_{\text{glp}}(x, y)$ 的一般形状作为指导来确定小尺寸空域模板的系数。由空域函数均为正值可得出结论, 空域滤波使用全部系数为正值的模板实际上是实现低通滤波, 见 3.6.2 节讨论的空域平滑滤波。

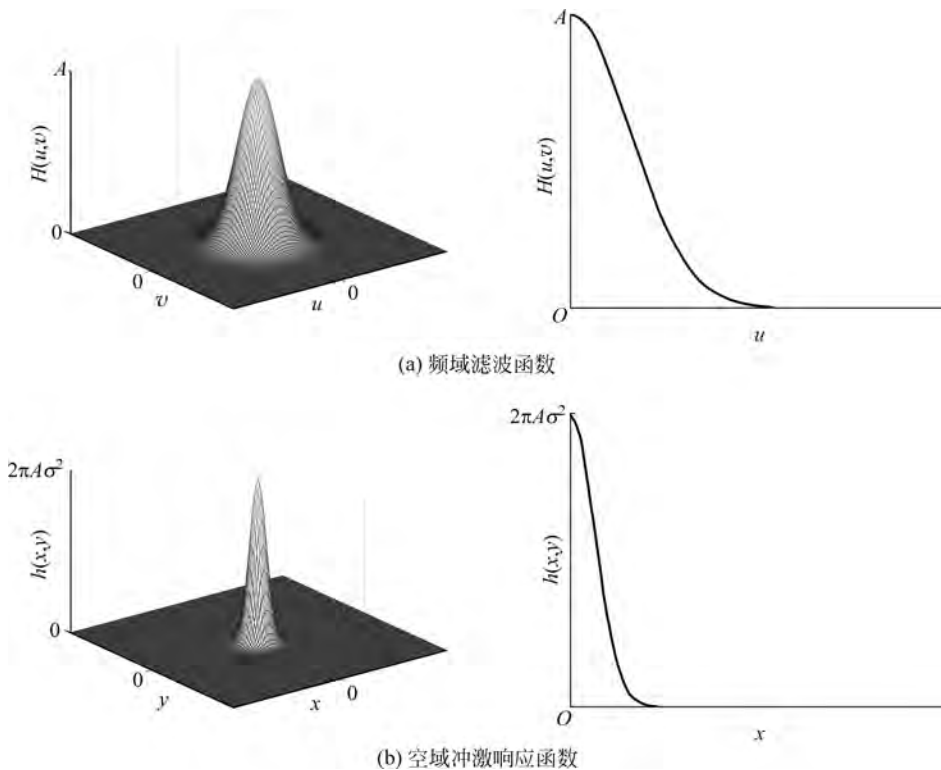


图 5-36 高斯低通滤波器的传递函数及其空域冲激响应函数($\sigma=10$)

为了便于观察, 如图 5-37 所示, 以一维函数形式来说明参数 σ 对频域滤波函数及其空域冲激响应函数的影响, 图 5-37(a) 和图 5-37(b) 分别为参数 σ 取不同值时高斯低通滤波器的传递函数及其空域冲激响应函数。可见, 当 σ 减小时, 频域滤波函数 $H_{\text{glp}}(u, v)$ 收窄, 允许通过的低频成分越少, 限制通过的高频成分越多; 对应地, 空域冲激响应函数 $h_{\text{glp}}(x, y)$ 展宽, 模板尺寸越大, 平滑能力越强。频域和空域的处理具有等效的滤波作用。

为了便于分析高通滤波器的特性, 由高斯函数构造一个高通滤波器, 其表达式如下:

$$H_{\text{hp}}(u, v) = A e^{-\frac{u^2+v^2}{2\sigma_1^2}} - B e^{-\frac{u^2+v^2}{2\sigma_2^2}} \quad (5-40)$$

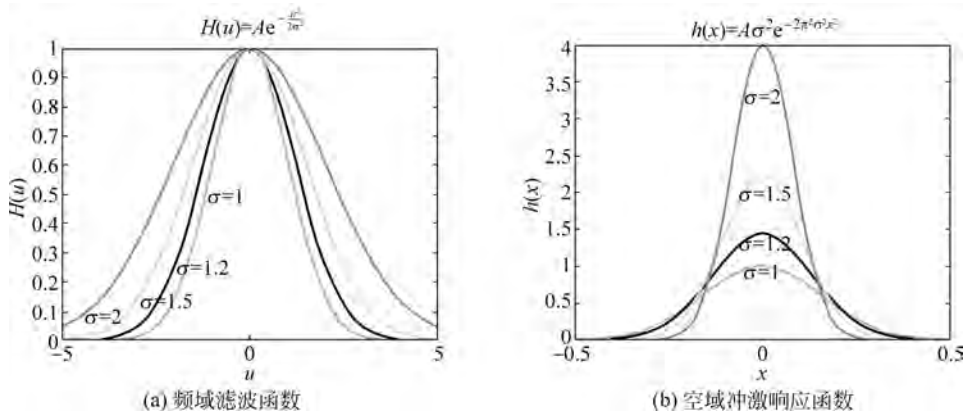


图 5-37 一维形式的高斯低通滤波器的传递函数及其空域冲激响应函数

式中, $A \geq B$, 且 $\sigma_1 > \sigma_2$ 。当 $A = B$ 时, 滤除频谱的零频率成分, 即滤波图像中直流成分为零。当 $\sigma_1 \rightarrow \infty$ 时, 式(5-40)中等式右端的第一项趋近于常数 A , 此时的定义与式(5-9)的定义是一致的。频域滤波函数 $H_{hp}(u, v)$ 对应的空域冲激响应函数为

$$h_{hp}(x, y) = 2\pi [A\sigma_1^2 e^{-2\pi^2\sigma_1^2(x^2+y^2)} - B\sigma_2^2 e^{-2\pi^2\sigma_2^2(x^2+y^2)}] \quad (5-41)$$

式(5-40)和式(5-41)构成傅里叶变换对, 频域滤波函数 $H_{hp}(u, v)$ 和空域冲激响应函数 $h_{hp}(x, y)$ 都是实函数。图 5-38(a) 给出了频域滤波函数 $H_{hp}(u, v)$ 的三维网格图和径向剖面图, 图 5-38(b) 给出了其空域冲激响应函数的三维网格图和径向剖面图。从图中可以看

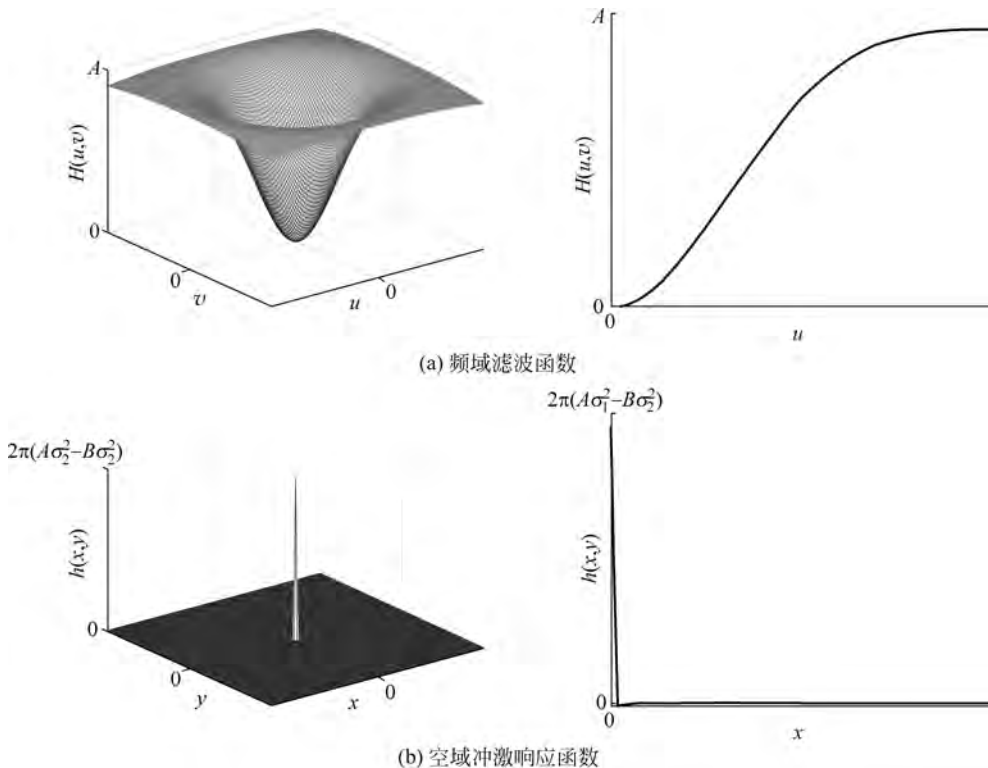


图 5-38 高通滤波器的传递函数及其空域冲激响应函数 ($\sigma_1 = 200, \sigma_2 = 20$)

到,空域函数的取值有正值也有负值,模板系数一旦取负值后不会再变为正值。3.6.3节中使用的锐化模板系数与图 5-38(b)的形状近似一致。

为了便于观察,如图 5-39 所示,以一维函数形式来说明参数 σ_2 对频域滤波函数及其空域冲激响应函数的影响,固定 $\sigma_1=10$,调整 σ_2 ,在图 5-39(a)和图 5-39(b)中, σ_2 取值分别为 1 和 2。可见,当 σ_2 增大时,频域滤波函数 $H_{\text{hp}}(u, v)$ 展宽,阻止通过的低频成分越多,允许通过的高频成分越少;对应地,空域冲激响应函数 $h_{\text{hp}}(x, y)$ 向负值的波动越强。频域和空域的处理具有等效的滤波作用。

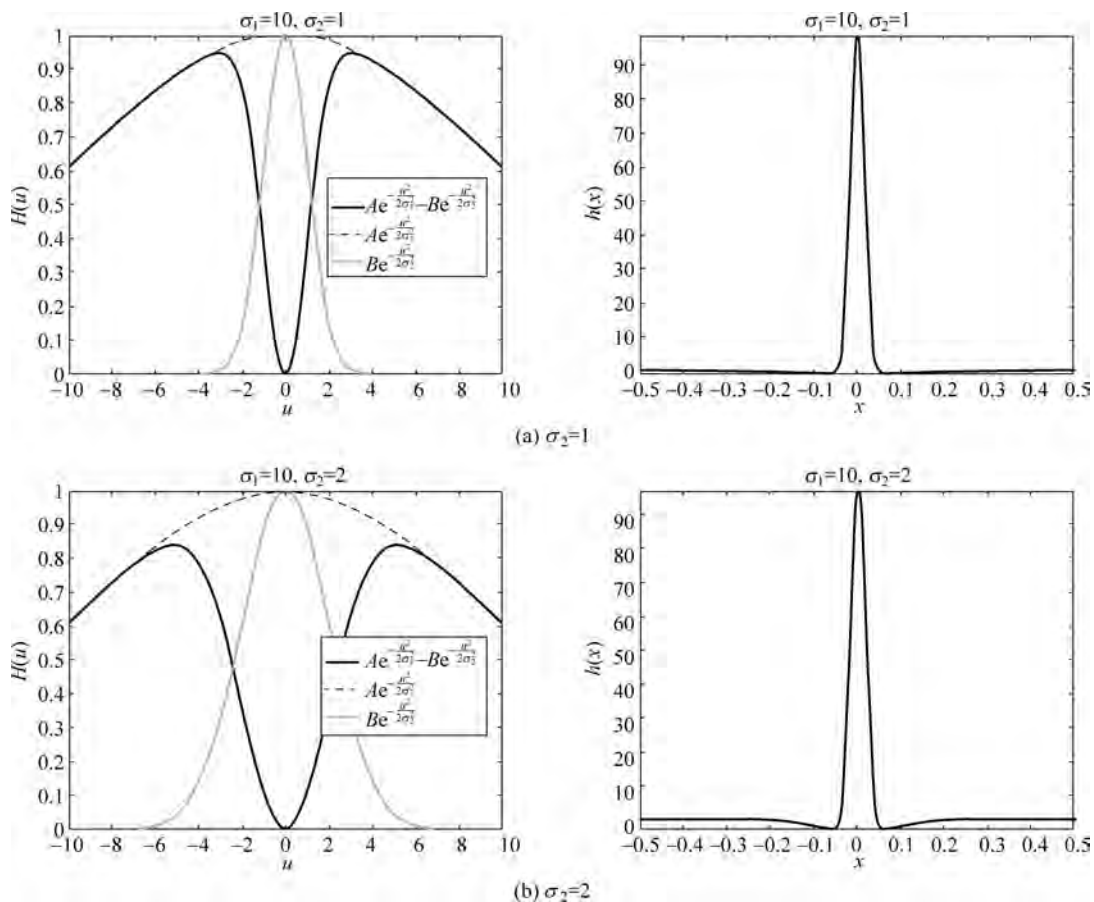


图 5-39 一维形式的高斯高通滤波器的传递函数及其空域冲激响应函数

在频域图像增强中,通常利用频率成分和图像内容之间的对应关系,凭借主观判断指定频域滤波器。一些直接在空域中表述困难的增强任务,在频域中非常直观。频域滤波需要对图像进行傅里叶变换和傅里叶逆变换,而在线性空域滤波中,通常使用小尺寸的空域模板,直接与图像作卷积。显然,空域滤波具有计算量小的优势。可以通过频域滤波器设计而近似选择空域滤波,根据频域滤波器对应的空域冲激响应函数的形式,确定小尺寸的空域模板。另外,可以利用加窗方法、频域取样、频域变换等方法设计二维数字滤波器,对数字图像进行滤波。

5.8 同态滤波

自然场景的动态范围^①可达到 $10^8 : 1$,人眼同时观察的动态范围可达到 $10^4 : 1$,而一般成像设备的动态范围仅能达到 $10^2 : 1$ 。图 5-40 显示了自然场景的照度范围,最高的照度可达 10^4 cd/m^2 ,最低的照度可至 10^{-4} cd/m^2 。当成像场景具有很高的动态范围时,在传感器的成像过程中,有限的动态范围造成采集图像的局部区域曝光不足或过度、暗区域或亮区域细节损失。图 5-43(a)直观地说明了高动态范围场景的成像问题,天空区域的光强高,而阴影区域的光强低,所成像场景的照度范围横跨约 10^3 及以上数量级,当焦点聚焦在天空区域则造成阴影区域曝光不足,反之亦然。对于这种低对比度图像,采用简单的线性灰度级拉伸是无效的。同态滤波(homomorphic filtering)的作用是同时实现动态范围压缩和图像对比度增强。已有的研究表明,人眼对全局对比度并不敏感,而对局部对比度更为敏感,因此,同态滤波具备可行性。

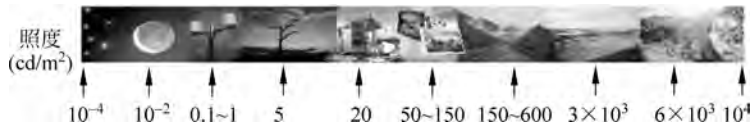


图 5-40 自然场景的照度范围

依据照度-反射图像生成模型,一幅图像 $f(x, y)$ 可表示为照度(illumination)分量 $i(x, y)$ 和反射(reflectance)分量 $r(x, y)$ 乘积的形式,可表示为

$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y) \quad (5-42)$$

其中,照度分量 $i(x, y)$ 取决于照射源的光照特性,其范围为 $0 < i(x, y) < \infty$; 反射分量 $r(x, y)$ 取决于成像物体表面固有的反射特性,其值限制在 0(全吸收)和 1(全反射)之间,即 $0 < r(x, y) < 1$ 。一幅图像的亮度值正比于照射源的照度,因而, $0 < f(x, y) < \infty$ 。

同态滤波的过程是通过将图像分解为照度分量和反射分量两部分,从图像中去除照度分量的影响,从而获得反射分量。同态滤波的过程见图 5-41 所示的方框图,包括图像正向变换(对数变换和离散傅里叶变换)、频域滤波和图像反向变换(离散傅里叶逆变换和指数变换)三个步骤。

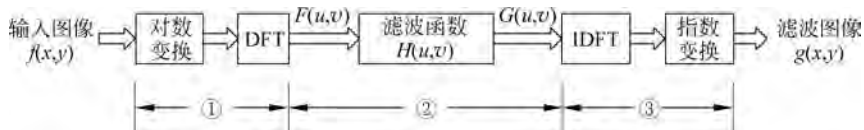


图 5-41 同态滤波的方框图

首先,对输入图像 $f(x, y)$ 进行对数变换,将照度分量和反射分量的相乘运算转换为对数域中的相加运算,可表示为

$$\ln f(x, y) = \ln[i(x, y)r(x, y)] = \ln i(x, y) + \ln r(x, y) \quad (5-43)$$

① 动态范围定义为最大照度与最小照度的比值。

对式(5-43)两端作傅里叶变换,并简化表示为

$$F(u, v) = I(u, v) + R(u, v) \quad (5-44)$$

式中, $F(u, v) = \mathcal{F}(\ln f(x, y))$, $I(u, v) = \mathcal{F}(\ln i(x, y))$, $R(u, v) = \mathcal{F}(\ln r(x, y))$, 其中, $\mathcal{F}(\cdot)$ 表示傅里叶变换。

然后,设计滤波器的传递函数 $H(u, v)$ 。照度分量取决于外界光源照射在物体上的能量强度,一般变化缓慢,因而在频域中表现为低频成分;而反射分量取决于物体表面的反射率,不同材质的反射率差异较大,反射分量反映了图像的细节内容,因而在频域中表现为高频成分。在对数域中,使频谱的低频成分衰减,而使高频成分增益,从而减弱照度分量并增强反射分量,将这种频率特性的滤波器称为同态滤波器。同态滤波器的传递函数 $H(u, v)$ 以不同的方式作用于频谱中的高频成分和低频成分。

同态滤波本质上是一种高通滤波,根据图像具有的不同频谱特性,可选择最适合的高通滤波器来达到最优效果。高斯同态滤波器的传递函数是建立在高斯高通滤波器基本形式的基础上,其表达式如下:

$$H_{\text{gh}}(u, v) = (\gamma_H - \gamma_L) [1 - e^{-c(D(u, v)/D_0)^2}] + \gamma_L \quad (5-45)$$

式中, $\gamma_L < 1$, 且 $\gamma_H > 1$; 常数 c 用于控制传递函数在 γ_L 与 γ_H 之间过渡的坡度,常数 c 越小,振幅上升速度越平缓; $D(u, v)$ 是由式(5-4)给出的点 (u, v) 到频谱中心 $(M/2, N/2)$ 的距离, D_0 为截止频率。图 5-42 显示了高斯同态滤波器的传递函数的三维网格图和径向剖面图,任何一种高通滤波器都可引伸出对应的同态滤波器。

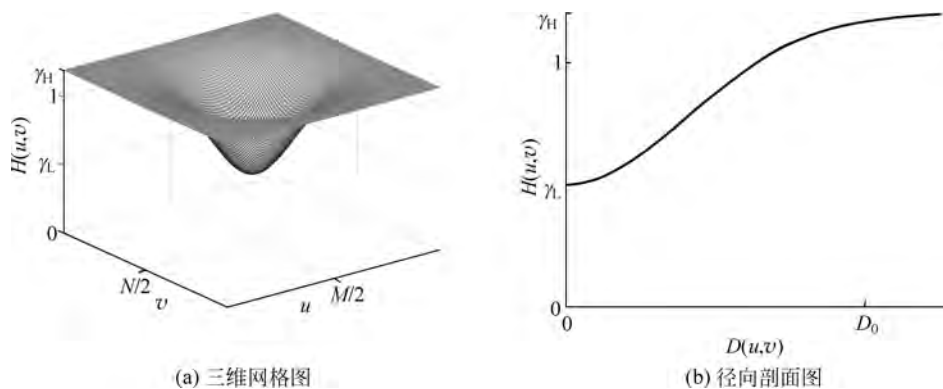


图 5-42 高斯同态滤波器的传递函数

于是,将同态滤波器的传递函数 $H(u, v)$ 与对数域中图像频谱 $F(u, v)$ 的乘积近似等于对数域中反射分量的频谱 $R(u, v)$:

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) \approx R(u, v) \quad (5-46)$$

最后,对频域滤波结果进行傅里叶逆变换,转换回空域中,再进行指数变换,抵消对数变换的作用,可表示为

$$g(x, y) = e^{\mathcal{F}^{-1}(G(u, v))} \approx r(x, y) \quad (5-47)$$

式中, $g(x, y)$ 为最终的滤波图像, $\mathcal{F}^{-1}(\cdot)$ 表示傅里叶逆变换。

例 5-10 同态滤波在图像增强中的应用

灰度图像的反差范围是由从黑到白等间隔灰阶来描述的,高反差图像在黑和白之间仅

有很少的或没有中间灰色调。图 5-43(a) 为一幅逆光拍摄的图像, 场景照度的动态范围过大, 造成了图像的高反差。因为整体曝光受到天空区域的影响, 阴影区域曝光严重不足, 所以难以辨认建筑物的细节。同态滤波能够同时压缩动态范围和提高局部对比度。考虑照度分量在空间上变化缓慢, 其频谱特性集中在低频成分; 而反射分量描述的景物本身具有较多的细节特征, 其频谱特性集中在高频成分。同态滤波在频域中减弱照度分量对应的低频成分, 压缩照度分量的灰度范围, 同时增强反射分量对应的高频成分, 拉伸反射分量的灰度范围。图 5-43(b) 为同态滤波的增强结果, 式(5-45)中高斯同态滤波器的参数设置: γ_L 和 γ_H 分别取值为 0.5 和 1.2, c 为 3, $D_0 = \max(M/2, N/2)$, M 和 N 为图像频谱的两个维度。从图中可以看到, 同态滤波明显增强了图像中暗区域的细节(注意建筑物自身影子遮挡的部分), 并且又不损失亮区域的图像细节(注意高亮的天空区域)。最后需要说明的是, 同态滤波在高通滤波之前使用对数变换压缩图像的动态范围, 已有的研究表明, 在滤波之前使用非线性变换的问题是易于产生 Halo 效应^①。



图 5-43 同态滤波增强示例

5.9 小结

在第 4 章频域变换的基础上, 本章介绍频域中的图像增强方法, 与第 3 章介绍的空域图像增强结合起来是图像增强技术的完整内容。频域图像增强基于图像的傅里叶变换, 它的关键是选择合适的频域滤波器, 减弱或增强特定的频率成分。本章中低通滤波器和高通滤波器是频域图像增强中最基本的内容, 通过这两部分的学习了解频域滤波的基本原理与方法。此外, 介绍了几种专用的滤波器, 包括带通、带阻和陷波滤波器。频域滤波和空域滤波的对应关系是本章的难点内容, 卷积定理是这部分内容的前提和基础, 通过这部分的学习了解频域增强和空域增强密切的对应关系。最后, 介绍了一种特殊的同态滤波方法, 其本质仍是基本的高通滤波器。图像增强技术广泛应用于实际场合, 但图像增强没有通用的理论, 针对特定的用途, 应采取特定的处理方法, 以取得特定的增强效果。应该特别指出的是, 增强后图像的质量主要由人的视觉来评定, 对其质量的评价方法和准则也需要具体问题具体分析。

^① Halo 效应是指在图像边缘处, 由于边缘两侧的灰度存在强对比, 而在处理后围绕着边缘产生的光晕现象。