新高中数学
同步全刷

选择性必修第二册

陈飞 主编

清華大学出版社
北京

内 容 简 介

本书专为高二学生打造，可与人民教育出版社2019年新改版高中数学A版选择性必修第二册教材配合使用，为全面系统夯实高二学生基础知识，提升解题能力编写而成。每一道例题代表一种题型，针对不同基础的学生，设有“练其形”和“悟其神”两个层次。全书共分2个章节：数列、一元函数的导数及其应用。每个章节题型丰富，知识全面。通过对例题的深入讲解，真正做到举一反三、触类旁通，提炼解题方法，拓展学生思维。

本书不仅是高二学生攻克数学题型的必备同步辅导书，还可供一线教师参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

新高中数学同步全刷：选择性必修.第二册/陈飞主编.—北京：清华大学出版社，2022.11
ISBN 978-7-302-62095-2

Ⅰ.①新…　Ⅱ.①陈…　Ⅲ.①中学数学课－高中－教学参考资料　Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2022)第196132号

责任编辑：汪　操
封面设计：鞠一村
责任校对：王淑云
责任印制：沈　露

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-83470000　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市龙大印装有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：210mm×285mm　　**印　　张**：21.75　　**字　　数**：581千字
版　　次：2022年11月第1版　　**印　　次**：2022年11月第1次印刷
定　　价：69.00元(全两册)

产品编号：092267-01

前　言

这是一本极具个性和特色的高中数学同步知识和解题方法的刷题教辅书！
它是来自于长期在教学一线并从事高中数学教学多年的教师的心血之作！
它站在实用的立场，瞄准高考，几乎一网打尽高中数学解题方法和题型！

随着新课程改革的落实，全国各省市也正在陆续推进新教材的使用。“新高中数学同步全刷”系列对应的教材是人民教育出版社2019年新改版高中数学A版教材。精选各类经典考试题目，精解精析，突出核心数学素养及数学能力培养，体现新课改要求，实现学生巩固基础知识与提高解题能力之目的。本系列不仅是高一、高二学生攻克题型的范本，还是一线教师备课教学的题参。愿它能成为你攻克题型的法宝，助你找到解题的精髓，带给你一些惊喜。

“新高中数学同步全刷”的目的非常纯粹，即弄懂一道例题，攻克一类题，成为解题高手。由“例题”发散“变式”，理顺“一个题”与“多个题”的关系，寻找“一类题”在思维方法和解题技巧上的“共性”，通吃“千张纸、万道题”，实现知识“内化”，促成能力“迁移”。让你的学习省时省力，事半功倍。一位名师能引领你走进科学的殿堂，一本好书能改变你一生的命运，拥有它，你会领略到学习的艺术，它会成为你的良师益友，会照亮你前进的道路，提升你高考总成绩；拥有它，你将一生受用无穷。

“新高中数学同步全刷”的主要特点如下：

1. 题型全面，题源精良

对新教材高中数学同步题型，无死角全方位归纳，杜绝超纲、超难题目，摈弃题型老、材料旧的陈题，提倡原创，鼓励改编，融入了多选题，打造“全新同步”。

2. 方法精炼，总结到位

方法点拨一语中的，问题归类讲解给出“撒手锏”，得一题而会一类题，力求小题秒杀，大题通杀。提高数学解题能力，提升数学素养。

3. 夯实基础，全面提升

练其形：注重基础，强调基础知识的识记和运用；悟其神：强调能力，注重解题能力的培养和提高。既注重知识的全面性、系统性，又突出重难点，注重迁移、应用，真正做到举一反三，触类旁通。

4. 题配视频，细致入微

每一道例题都配有免费视频讲解，对例题的解题思路剖析构建，归纳总结出解决同一种类型题目的方法和技巧，并且对二级结论进行了推导和演绎。通过观看视频讲解，可以让你形成自己的解题思想和方法，让学习变得更加高效和有趣。

一种题型，启解题之奥妙；一道好题，成高考之好运；一本好书，圆大学之美梦。

我们以精益求精的质量、独具匠心的创意，希望能让学生在短时间内提高数学的分析、解题技能，缩短解题时间，减轻学习负担，提高学习成绩。

本书的完成有赖于一支高度负责的团队，各位编委都花了大量时间精心编写各自分工的内容。然而，编者虽倾心倾力，但终究水平有限，书中若有不妥之处，敬请各位读者不吝指正。由衷地感谢本书的责任编辑汪操，他的辛勤努力和卓有成效的工作，才使本书得以顺利面世。感谢广大师生的肯定和认可，你们是我工作前行的动力。感恩生命中给予我指导的老师们，感恩今生所有的相遇！

最后，感谢您选择了这本书，它能让您学知识、做好题、练方法、提能力、拔成绩，最终赢得高考！

编　者

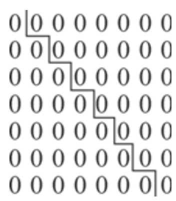
2022 年 6 月于北京

目　录

第4章 数列

特殊数列求和

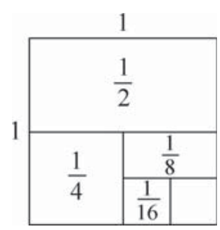
等差数列求和



$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

口诀：$\dfrac{(\text{上底}+\text{下底})\times\text{高}}{2}$

公比为 2 或$\dfrac{1}{2}$的等比数列求和



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

口诀：最大的数×2—最小的数

4.1 数列的概念

核心笔记

1. 数列的定义：按一定次序排列的一列数叫作数列。数列中的每个数都叫作这个数列的项。数列的一般形式：a_1，a_2，…，a_n，…，或简记为$\{a_n\}$。其中a_1是数列的第1项(又称首项)，a_n是数列的第n项(又称通项)。
2. 通项公式的定义：如果数列$\{a_n\}$的第n项与n之间的关系可以用一个式子表示，那么这个式子就叫作这个数列的通项公式。

   说明：(1)$\{a_n\}$表示数列，a_n表示数列中的第n项，$a_n=f(n)$表示数列的通项公式；

   (2)同一个数列的通项公式的形式不一定唯一。例如，$a_n=(-1)^n=\begin{cases}-1, & n=2k-1, \\ 1, & n=2k,\end{cases} k\in\mathbf{N}_+$；

   (3)不是每个数列都有通项公式，例如1，1.4，1.41，1.414，…。
3. 数列的特性：(对比集合的特性)→数列是特殊的数集、点集。

   (1)有序性：数列的数是按一定次序排列的，因此，如果组成两个数列的数相同而排列次序不同，那么它们就是不同的数列。

   (2)可异性：定义中并没有规定数列中的数必须不同，因此，同一个数在数列中可以重复出现，如常数列。

   (3)从函数角度看数列：数列可以看作是一个定义域为正整数集$\mathbf{N}_+$(或它的有限子集$\{1,2,\cdots,n\}$)的函数。

   即当自变量从小到大依次取值时对应的一列函数值，这里说的函数是一种特殊函数，其特殊性为自变量只能取正整数，且只能从1开始依次增大。可以将序号作为横坐标，相应的项作为纵坐标描点画图来表示一个数列，从数列的图像可以看出数列中各项的变化情况。在解决数列问题时，要善于利用函数的知识、函数的观点、函数的思想方法来解题，即用共性来解决特殊问题。
4. 数列的分类：

   (1)根据数列项数的多少分类：

   ①有穷数列：项数有限的数列；例如数列$\{1,2,3,4,5,6\}$是有穷数列；

   ②无穷数列：项数无限的数列；例如数列$\{1,2,3,4,5,6,\cdots\}$是无穷数列。

   (2)根据数列项的大小分类：

   ①递增数列：从第2项起，每一项都大于它的前一项的数列，即$a_{n+1}>a_n$；

   ②递减数列：从第2项起，每一项都小于它的前一项的数列，即$a_{n+1}<a_n$；

   ③常数数列：各项相等的数列，即$a_{n+1}=a_n$；

   ④摆动数列：从第2项起，有些项大于它的前一项，有些项小于它的前一项的数列。

   (3)根据任何一项的绝对值是否小于或等于某一正数可分类为：①有界数列；②无界数列。

愿你经历再多，都不忘初心；愿你难过再多，都不忘微笑。愿你能披荆斩棘，做到自己想要做到的事情。(推荐人：@睢阳(贵州))

核心例题 1　数列通项公式

(难度)数列 0.3,0.33,0.333,0.3333,…的通项公式为(　　)。

A. $\frac{1}{9}(10^n-1)$　　B. $\frac{2}{9}(10^n-1)$

C. $\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$　　D. $\frac{3}{10}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$

【答案】C

【解析】原数列可变形为 $\frac{1}{3}\times0.9$，$\frac{1}{3}\times0.99$，$\frac{1}{3}\times0.999$，$\frac{1}{3}\times0.9999$，…，即 $\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{10}\right)$，$\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$，$\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{10^3}\right)$，$\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{10^4}\right)$，…，故通项公式为 $a_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$。故选 C。

解题必备

1. 根据数列的前 n 项写出这个数列的通项公式

(1) **编号**：把序号 1,2,…,n 标在相应项上，便于突出第 n 项 a_n 与项数 n 的关系，即 a_n 如何用 n 表示。

(2) **变形**：① 出现正负间隔用 $(-1)^n$ 或 $(-1)^{n+1}$ 进行调整；

② 出现分数首先考虑分子、分母是否存在规律，然后考虑通分成同分母分数；

③ 找不到规律可以考虑 ±1 后再观察；

④ 当一个数列间隔几项才具有相同规律(特别是奇数项与偶数项)时，不妨用分段函数来表示其通项公式。

2. 常见数列通项公式

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	…	a_n
(1)	1	2	3	4	5	6	…	$a_n=n$
(2)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	…	$a_n=\frac{1}{n}$
(3)	1	3	5	7	9	11	…	$a_n=2n-1$
	2	4	6	8	10	12	…	$a_n=2n$
(4)	1	4	9	16	25	36	…	$a_n=n^2$
(5)	1	2	4	8	16	32	…	$a_n=2^{n-1}$
	2	4	8	16	32	64	…	$a_n=2^n$
(6)	-1	1	-1	1	-1	1	…	$a_n=(-1)^n$
	1	-1	1	-1	1	-1	…	$a_n=(-1)^{n+1}$
(7)	1	0	1	0	1	0	…	$a_n=\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}$
(8)	1	11	111	1111	11111	111111	…	$a_n=\frac{10^n-1}{9}$
	8	88	888	8888	88888	888888	…	$a_n=\frac{8}{9}(10^n-1)$

续表

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	…	a_n
(9)	0.1	0.11	0.111	0.1111	0.11111	0.111111	…	$a_n=\frac{1-10^{-n}}{9}$
	0.7	0.77	0.777	0.7777	0.77777	0.777777	…	$a_n=\frac{7}{9}(1-10^{-n})$
(10)	1	0	-1	0	1	0	…	$a_n=\cos\frac{(n-1)\pi}{2}=\sin\frac{n\pi}{2}$

题型训练 · 练其形

1.1 (，多选题)已知数列$\{0,2,0,2,0,2,\cdots\}$，则前六项适合的通项公式为(　　)。

A. $a_n=1+(-1)^n$

B. $a_n=2\cos\frac{n\pi}{2}$

C. $a_n=2\left|\sin\frac{(n+1)\pi}{2}\right|$

D. $a_n=1-\cos(n-1)\pi+(n-1)(n-2)$

1.2 ()若数列的前 4 项分别是$-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5}$，则此数列一个通项公式为(　　)。

A. $\frac{(-1)^n}{n+1}$　　B. $\frac{(-1)^n}{n}$

C. $\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$　　D. $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$

1.3 ()数列$\left\{-\frac{1}{5},\frac{1}{7},-\frac{1}{9},\frac{1}{11},\cdots\right\}$的通项公式可能是$a_n=$(　　)。

A. $\frac{(-1)^n}{3n+2}$　　B. $\frac{(-1)^{n-1}}{2n+3}$

C. $\frac{(-1)^n}{2n+3}$　　D. $\frac{(-1)^{n-1}}{3n+2}$

题型训练 · 悟其神

1.4 ()已知数列$\{a_n\}$对任意的$p,q\in\mathbf{N}^*$都满足$a_{p+q}=a_p+a_q$，且$a_2=-6$，则$a_{10}=$(　　)。

A. -165　　B. -33

C. -30　　D. -21

1.5 ()如图所示，在下列四个图形中，着色三角形的个数依次构成一个数列的前 4 项，则这个数列的一个通项公式为(　　)。

①　②　③　④

A. $a_n=3^{n-1}$　　B. $a_n=3^n$

C. $a_n=3^n-2n$　　D. $a_n=3^{n-1}+2n-3$

1.6 ()已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$，其中$a_n=n^2,n\in\mathbf{N}^*$，$\{b_n\}$的项是互不相等的正整数，若对于任意$n\in\mathbf{N}^*$，$\{b_n\}$的第a_n项等于$\{a_n\}$的第b_n项，则$\frac{\lg(b_1b_4b_9b_{16})}{\lg(b_1b_2b_3b_4)}=$________。

越是不自信，就越找不到学习的意义。(推荐人：@黄玉锦(浙江))

核心例题 2 数列的周期性

(🌶🌶🌶)设数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$,$a_{n+1}=1-\frac{1}{a_n}$,记数列$\{a_n\}$前n项之积为T_n,则T_{2022}的值为(　　)。

A. 2　B. 1　C. -1　D. -2

【答案】B

【解析】因为$a_1=2$,$a_{n+1}=1-\frac{1}{a_n}$,所以$a_2=1-\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2}$,$a_3=1-\frac{1}{a_2}=-1$,$a_4=1-\frac{1}{a_3}=2$,即数列$\{a_n\}$是周期为 3 的周期数列,且$a_1\cdot a_2\cdot a_3=-1$,故$T_{2022}=T_{674\times3}=(-1)^{674}=1$。

故选 B。

解题必备

1. 周期数列的定义:对于数列$\{a_n\}$,如果存在一个常数$T(T\in\mathbf{N}_+)$,恒有$a_{n+T}=a_n$成立,则称数列$\{a_n\}$是最小正周期为T的周期数列。
2. 周期数列的性质

(1) 如果T是数列$\{a_n\}$的周期,则对于任意的$k\in\mathbf{N}_+$,kT也是数列$\{a_n\}$的周期;

(2) 若数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}+a_n=a_{n+1}$ $(n\in\mathbf{N}_+)$,则数列$\{a_n\}$是周期数列且$T=6$;

(3) 若数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}\cdot a_n=a_{n+1}$ $(n\in\mathbf{N}_+)$,则数列$\{a_n\}$是周期数列且$T=6$;

(4) 若数列$\{a_n\}$满足$a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+k}=S$($S$为常数)或数列$\{a_n\}$满足$a_n\cdot a_{n+1}\cdots a_{n+k}=S$($S$为常数),则数列$\{a_n\}$是周期数列,周期$T=k+1$。

题型训练 · 练其形

2.1 (🌶🌶🌶)数列$\{a_n\}$中,若$a_1=1$,$a_{n+1}=\frac{1}{a_n+1}-1$,则$a_{2022}=$________。

2.2 (🌶🌶🌶)设数列$\{a_n\}$满足:$a_1=\frac{1}{2}$,$a_{n+1}=\frac{1+a_n}{1-a_n}$ $(n\geq1)$,则$a_{2022}=$________。

2.3 (🌶🌶🌶)在数列$\{a_n\}$中,$a_1=0$,$a_{n+1}=\frac{\sqrt{3}+a_n}{1-\sqrt{3}a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$,则$a_{2022}=$(　　)。

A. 0　B. $\sqrt{3}$　C. $-\sqrt{3}$　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

题型训练 · 悟其神

2.4 (🌶🌶🌶🌶)数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_2=5$,$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n(n\in\mathbf{N}^*)$,则$a_{2022}=$________。

2.5 (🌶🌶🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_2=2$,且$a_n\cdot a_{n+2}=a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$,则$a_{2019}$的值为________。

2.6（🌶🌶🌶🌶，多选题）若数列$\{a_n\}$满足

$$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & 0\leqslant a_n\leqslant\frac{1}{2},\\ 2a_n-1, & \frac{1}{2}<a_n<1,\end{cases}\quad a_1=\frac{3}{5},$$

则数列$\{a_n\}$中的项的值可能为（　　）。

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{6}{5}$

核心例题 3　数列的单调性

（🌶🌶）数列$\{a_n\}$中，$a_n=\frac{n+4}{2n-99}$，则数列$\{a_n\}$的最大项项数为________，最小项项数为________。

【答案】 50，49

【解析】 因为$a_n=\frac{n+4}{2n-99}=\frac{1}{2}+\frac{107}{2(2n-99)}$，所以数列$\{a_n\}$的图像为函数$y=\frac{1}{2}+\frac{107}{2(2x-99)}$图像上的一系列孤立的点，如图4.1所示。

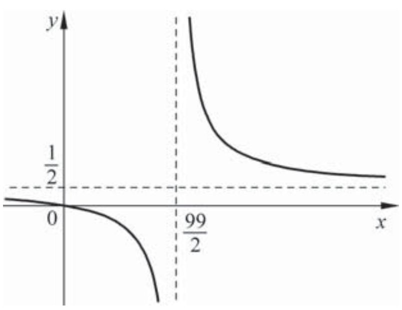


图　4.1

当$n=49$时，a_n最小，即$a_{49}=-53$；当$n=50$时，a_n最大，即$a_{50}=54$。

所以，最大项项数为50，最小项项数为49。

解题必备

1. 数列单调性定义判定

$a_{n+1}>a_n$	$a_{n+1}-a_n>0$	$\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$，$a_n>0$或$\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$，$a_n<0$	单调递增数列
$a_{n+1}<a_n$	$a_{n+1}-a_n<0$	$\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$，$a_n>0$或$\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$，$a_n<0$	单调递减数列
$a_{n+1}=a_n$	$a_{n+1}-a_n=0$	$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$	常数列

2. 数列单调性函数性质判定

（1）$a_n=kn+b$为一次函数形式：①当$k>0$时，为递增数列；②当$k<0$时，为递减数列。

（2）$a_n=kn^2+tn+c$为二次函数形式，只有对称轴$-\frac{t}{2k}<\frac{3}{2}$才有增减性：

①当$k>0$时，为递增数列；②当$k<0$时，为递减数列。

（3）$a_n=\frac{k}{n}$为反比例函数形式：①当$k>0$时，为递减数列；②当$k<0$时，为递增数列。

（4）$a_n=k^n$为指数函数形式，只有当$k>0$且$\neq1$时才有增减性：①当$k>1$时，为递增数列；②当$0<k<1$时，为递减数列。

3. 数列单调性应用

利用$\begin{cases}a_n\geqslant a_{n+1},\\ a_n\geqslant a_{n-1}\end{cases}$求数列中的最大项$a_n$；

利用$\begin{cases}a_n\leqslant a_{n+1},\\ a_n\leqslant a_{n-1}\end{cases}$求数列中的最小项$a_n$。

当解不唯一时，比较各解大小即可确定。

题型训练·练其形

3.1 (🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$中,$a_n=n^2-\lambda n$,若$\{a_n\}$为递增数列,则λ的取值范围是(　　)。

A. $(-\infty,3)$　　B. $(-\infty,3]$

C. $(-\infty,2)$　　D. $(-\infty,2]$

3.2 (🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$是递增数列,且对于任意的$n\in \mathbf{N}_+$,$a_n=2n^2+\lambda n+3$恒成立,则实数λ的取值范围是________。

3.3 (🌶🌶🌶)数列$\{a_n\}$满足$a_n=n^2-2pn+2$,$n\in \mathbf{N}_+$,且数列$\{a_n\}$满足从且只从第三项开始为递增数列,则实数p的取值范围是________。

题型训练·悟其神

3.4 (🌶🌶🌶)函数$f(x)=\begin{cases}(3-a)x-3, & x\leqslant 7,\\ a^{x-6}, & x>7,\end{cases}$若数列$\{a_n\}$满足$a_n=f(n)$,$n\in \mathbf{N}^*$,且$\{a_n\}$是递增数列,则实数$a$的取值范围是(　　)。

A. $\left[\frac{9}{4},3\right)$　　B. $\left(\frac{9}{4},3\right)$

C. $(1,3)$　　D. $(2,3)$

3.5 (🌶🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=(n+1)\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^n$,则数列$\{a_n\}$的最大项为(　　)。

A. a_8或a_9　　B. a_9或a_{10}

C. a_{10}或a_{11}　　D. a_{11}或a_{12}

3.6 (🌶🌶🌶🌶)已知数列$\{b_n\}$满足$b_n=2\lambda\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}-n^2$,若数列$\{b_n\}$是单调递增数列,则实数$\lambda$的取值范围是(　　)。

A. $\left(-1,\frac{10}{3}\right)$　　B. $\left(-\frac{1}{2},\frac{10}{3}\right)$

C. $(-1,1)$　　D. $\left(-\frac{1}{2},1\right)$

核心例题 4　通项与前 n 项和关系

(🌶🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$的前n项和S_n,且$S_n=3^n-2$,则$a_n=$________。

【答案】$\begin{cases}1, & n=1,\\ 2\times 3^{n-1}, & n\geqslant 2\end{cases}$

【解析】因为$S_n=3^n-2$,所以$S_{n-1}=3^{n-1}-2(n>1)$,则$a_n=3^n-3^{n-1}=2\times 3^{n-1}$。

当$n=1$时,$a_1=S_1=3-2=1$,不符合上式,所以$a_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ 2\times 3^{n-1}, & n\geqslant 2。\end{cases}$

解题必备

已知$S_n=f(a_n)$或$S_n=f(n)$,求a_n的一般步骤:

第 1 步:利用S_n满足的条件,写出当$n\geqslant 2$时S_{n-1}的表达式;

第 2 步:利用$a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$,求出$a_n$或者转化为$a_n$的递推公式的形式;

第 3 步:根据$a_1=S_1$求出a_1,看是否符合$n\geqslant 2$时a_n的表达式,如果符合,则可以把数列的通项公式合写;如果不符合,

则应该分 $n=1$ 与 $n\geqslant 2$ 两段来写，即 $a_n=\begin{cases}S_1, & n=1,\\ S_n-S_{n-1}, & n\geqslant 2。\end{cases}$

题型训练·练其形

4.1 (🌶)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=n^2-n$，则数列$\{a_n\}$的第 4 项是________。

4.2 (🌶)已知数列$\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2$，则 $a_n=$(　　)。

A. n　B. n^2　C. $2n+1$　D. $2n-1$

4.3 (🌶🌶)已知 S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，且满足 $S_n=n^2+4n+2$，则 $a_3+a_4+a_5=$(　　)。

A. 10　B. 11　C. 33　D. 34

题型训练·悟其神

4.4 (🌶🌶)数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=\dfrac{2n}{n+1}$，则 $a_n=$(　　)。

A. $\dfrac{2}{3n(n+1)}$　B. $\dfrac{2}{n(n+1)}$

C. $\dfrac{1}{n(n+1)}$　D. $\dfrac{1}{2n(n+1)}$

4.5 (🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $S_n=2-2^{n+1}$，则 $a_n=$________。

4.6 (🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=2n^2+3$，则 $a_n=$________。

达标全刷

1. (🌶🌶🌶)下列说法正确的是(　　)。

A. 数列中不能重复出现同一个数

B. $\{1,2,3,4\}$与$\{4,3,2,1\}$是同一数列

C. $\{1,1,1,1\}$不是数列

D. 若两个数列的每一项均相同，则这两个数列相同

2. (🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$的前 4 项依次为 2,6,12,20，则数列$\{a_n\}$的通项公式可能是(　　)。

A. $a_n=4n-2$　B. $a_n=2^n+2(n-1)$

C. $a_n=n^2+n$　D. $a_n=3^{n-1}+2n-1$

3. (🌶🌶)数列$\{2,22,222,2222,\cdots\}$的一个通项公式是(　　)。

A. $\dfrac{2}{9}(10^n-1)$　B. 10^n-1

C. $2(10^n-1)$　D. 10^n-8

4. (🌶🌶)若数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\begin{cases}3n-2, & n\geqslant 10,\\ 3^{n-2}, & n\leqslant 9\end{cases}(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_5=$(　　)。

A. 27　B. 21　C. 15　D. 13

5. (🌶🌶🌶)在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_n=\dfrac{2}{2a_{n-1}-1}(n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_4=$(　　)。

A. $\dfrac{2}{11}$　B. $\dfrac{2}{3}$　C. 2　D. 6

6. (🌶🌶🌶)在数列$\{a_n\}$中，$a_1=-\dfrac{1}{4}$，$a_n=1-\dfrac{1}{a_{n-1}}(n>1)$，则 a_{2014} 的值为(　　)。

A. $-\frac{1}{4}$　　　　B. 5

C. $\frac{4}{5}$　　　　D. 以上都不对

7. (🌶🌶🌶)数列$\{a_n\}$中,已知$a_2=2$,$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$,若$a_8=34$,则数列$\{a_n\}$的前 6 项和为________。

8. (🌶🌶🌶)观察下列数表:

1							
3	5						
7	9	11	13				
15	17	19	21	23	25	27	29
…	…	…					

设 1025 是该表第m行的第n个数,则$m+n=$________。

9. (🌶🌶🌶)数学上有很多著名的猜想,角谷猜想就是其中之一,它是指对于任意一个正整数,如果是奇数,则乘 3 加 1。如果是偶数,则除以 2,得到的结果再按照上述规则重复处理,最终总能够得到 1。对任意正整数a_0,记按照上述规则实施第n次运算的结果为$a_n(n\in\mathbf{N})$,则使$a_7=1$的a_0所有可能取值的个数为(　　)。

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

10. (🌶🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=2n^2-30n$。

(1) 当S_n取最小值时,求n的值;

(2) 求出$\{a_n\}$的通项公式。

4.2 等差数列

核心笔记

一、等差数列的概念

1. 等差数列的定义

一般地,如果一个数列从第 2 项起,每一项与它的前一项的差等于同一个常数,那么这个数列就叫作等差数列。这个常数叫作等差数列的公差,公差通常用字母d表示,即$a_{n+1}-a_n=d$,d为常数。

2. 等差中项

如果a,A,b成等差数列,那么A叫作a与b的等差中项,且$A=\frac{a+b}{2}$。

二、等差数列的前 n 项和

1. 等差数列的前n项和

首项为a_1、末项为a_n、项数为n的等差数列$\{a_n\}$的前n项和公式:$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$。

2. 用前n项和公式法判定等差数列

等差数列的前n项和公式与函数的关系给出了一种判断数列是否为等差数列的方法:若数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=an^2+bn+c$,那么当且仅当$c=0$时,数列$\{a_n\}$是以$a+b$为首项、$2a$为公差的等差数列;当$c\neq0$时,数列$\{a_n\}$不是等差数列。

三、等差数列的性质

1. 等差数列的常用性质

由等差数列的定义可得公差为d的等差

数列$\{a_n\}$具有如下性质：

(1) 通项公式的推广：$a_n=a_m+(n-m)d$，$m,n\in\mathbf{N}^*$。

(2) 若$m+n=p+q$，则$a_m+a_n=a_p+a_q(m,n,p,q\in\mathbf{N}^*)$。

特别地，①若$m+n=2p$，则$a_m+a_n=2a_p(m,n,p\in\mathbf{N}^*)$；

②若$m+n+t=p+q+r$，则$a_m+a_n+a_t=a_p+a_q+a_r(m,n,p,q,t,r\in\mathbf{N}^*)$；

③有穷等差数列中，与首末两项等距离的两项之和都相等，都等于首末两项的和，即$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\cdots=a_i+a_{n+1-i}=\cdots$。

(3) 下标成等差数列的项$a_k,a_{k+m},a_{k+2m},\cdots$组成以$md$为公差的等差数列。

(4) 数列$\{ta_n+\lambda\}$(t,λ是常数)是公差为td的等差数列。

(5) 若数列$\{b_n\}$为等差数列，则数列$\{ta_n\pm\lambda b_n\}$(t,λ是常数)仍为等差数列。

(6) 若$a_p=q,a_q=p$，则$a_{p+q}=0$。

2. 与等差数列各项的和有关的性质

利用等差数列的通项公式及前n项和公式易得等差数列的前n项和具有如下性质：

设等差数列$\{a_n\}$(公差为d)和$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n,T_n，则：

(1) 数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是等差数列，首项为$a_1$，公差为$\frac{1}{2}d$；

(2) $S_k,S_{2k}-S_k,S_{3k}-S_{2k},\cdots,S_{mk}-S_{(m-1)k},\cdots$构成公差为$k^2d$的等差数列；

(3) 若数列$\{a_n\}$共有$2n$项，则$S_{偶}-S_{奇}=nd$，$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}$；

(4) 若数列$\{a_n\}$共有$2n-1$项，则$S_{奇}-S_{偶}=a_n$，$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{n}{n-1}$($S_{奇}=na_n$，$S_{偶}=(n-1)a_n$)；

(5) $\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\frac{a_n}{b_n}$，$\frac{S_{2m-1}}{T_{2n-1}}=\frac{2m-1}{2n-1}\cdot\frac{a_m}{b_n}$。

核心例题 1 等差数列通项公式

( )在等差数列$\{a_n\}$中，首项$a_1=0$，公差$d\neq0$，若$a_m=a_1+a_2+\cdots+a_{15}$，则$m=$( )。

A. 89 B. 98 C. 103 D. 106

【答案】 D

【解析】 $a_m=a_1+(m-1)d=a_1+(a_1+d)+\cdots+(a_1+14d)=15a_1+105d$，而$a_1=0$，则$a_m=a_1+105d$，即$m=106$。故选D。

解题必备

由等差数列的通项公式$a_n=a_1+(n-1)d$可知：

(1) 已知等差数列的首项和公差，可以求得这个数列的任何一项；

你与别人的距离不是短时间就能看出来的，而是经过长期的选择，经过无数的磨炼，无数次尝试，渐渐便超出了对方的认知范围，渐渐地也就更加优秀了。(推荐人：@李明霞(内蒙古))

(2) 已知 a_1,n,d,a_n 这四个量中的任意三个，可以求得另一个量；

(3) $a_n=a_m+(n-m)d,m,n\in\mathbf{N}^*$，已知等差数列中的任意两项就可以确定等差数列中的任何一项。

题型训练 · 练其形

1.1 (　)数列$\{a_n\}$为等差数列，$a_1=1,a_3=4$，则通项公式是(　　)。

A. $3n-2$　　B. $\frac{3}{2}n-2$

C. $\frac{3}{2}n-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}$

1.2 (　)在数列$\{a_n\}$中，若 $a_1=1,a_{n+1}=a_n+2(n\in\mathbf{N}^*)$，则该数列的通项 a_n ________。

1.3 (　)若数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}=\frac{2a_n+1}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$，且 $a_1=1$，则 $a_{2021}=$(　　)。

A. 1010　B. 1011　C. 2020　D. 2021

题型训练 · 悟其神

1.4 (　)已知等差数列$\{a_n\}$满足 $a_2+a_4=6,a_5+a_7=10$，则 $a_{18}=$(　　)。

A. 12　B. 13　C. $\frac{13}{3}$　D. $\frac{14}{3}$

1.5 (　)已知数列$\{a_n\}$中，$a_3=2,a_7=1$，若$\left\{\frac{1}{a_n+1}\right\}$为等差数列，则 $a_{19}=$(　　)。

A. 0　B. $\frac{1}{2}$　C. $\frac{2}{3}$　D. 2

1.6 (　)等差数列$\{a_n\}$中，$a_4=18,a_{20}=30$，则满足不等式 $a_n>n$ 的正整数 n 的最大值是________。

核心例题 2　等差数列通项公式变形

(　)已知等差数列$\{a_n\}$，$a_n=m,a_m=n$，则 $a_{m+n}=$(　　)。

A. m　B. n　C. 0　D. $m+n$

【答案】 C

【解析】 设等差数列的公差为 d，由题意得 $a_n=a_m+(n-m)d=m$，则 $(n-m)d=m-n$，即 $d=-1$，所以 $a_{m+n}=a_m+(m+n-m)d=n+n\cdot(-1)=0$。

故选 C。

解题必备

等差数列的通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d$，此通项公式存在以下几种变形：

(1) $a_n=dn+a_1-d$：关于 n 的一次函数；

(2) $a_n=a_m+(n-m)d$，其中 $m\neq n$：已知数列中的某项 a_m 和公差 d 即可求出通项公式；

(3) $d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$：已知等差数列的两项即可求出公差，即项的差除以对应序号的差；

(4) $n=\frac{a_n-a_1}{d}+1\left(项数=\frac{末项-首项}{公差}+1\right)$：已知首项，末项和公差即可计算出项数。

题型训练·练其形

2.1 (🌶🌶)在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$a_5=-5$，则公差$d=$(　　)。

A. 1　B. 2　C. -1　D. -2

2.2 (🌶🌶)等差数列$\{a_n\}$中，若$a_2=6$，$a_4=3$，则$a_5=$(　　)。

A. $\frac{3}{2}$　B. $\frac{9}{2}$　C. 2　D. 9

2.3 (🌶🌶)在数列$\{a_n\}$中，$a_4=49$，$\sqrt{a_{n+1}}=\sqrt{a_n}+2$，则$a_7=$(　　)。

A. 121　B. 144　C. 169　D. 196

题型训练·悟其神

2.4 (🌶🌶)如果2，a，b，c，10成等差数列，那么$c-a=$(　　)。

A. 1　B. 2　C. 4　D. 8

2.5 (🌶🌶)若x，a_1，a_2，y成等差数列，x，b_1，b_2，b_3，y也成等差数列，其中$x\neq y$，则$\frac{a_2-a_1}{b_2-b_1}=$(　　)。

A. $\frac{2}{3}$　B. $\frac{4}{3}$　C. $\frac{5}{3}$　D. 3

2.6 (🌶🌶🌶)在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=-9$，$a_5=-1$。记$T_n=a_1a_2\cdots a_n(n=1,2,\cdots)$，则数列$\{T_n\}$(　　)。

A. 有最大项，有最小项

B. 有最大项，无最小项

C. 无最大项，有最小项

D. 无最大项，无最小项

核心例题3　等差数列通项性质

(🌶🌶🌶)在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_8+a_{15}=72$，则a_2+a_{14}的值为(　　)。

A. 6　B. 12　C. 24　D. 48

【答案】D

【解析】由等差数列的性质知$2a_8=a_1+a_{15}=a_2+a_{14}$，又$a_1+a_8+a_{15}=3a_8=72$，所以$a_8=24$，即$a_2+a_{14}=2a_8=48$。

故选D。

解题必备

1. 若$\{a_n\}$是等差数列，且$k+l=m+n(k,l,m,n\in\mathbf{N}^*)$，则$a_k+a_l=a_m+a_n$。
2. 若$\{a_n\}$是等差数列，且$m+n+t=p+q+r$，则$a_m+a_n+a_t=a_p+a_q+a_r$，以此类推，若$m_1+m_2+\cdots+m_n=p_1+p_2+\cdots+p_n$，则$a_{m_1}+a_{m_2}+\cdots+a_{m_n}=a_{p_1}+a_{p_2}+\cdots+a_{p_n}$。
3. 若$\{a_n\}$是等差数列，公差为d_1，$\{b_n\}$是等差数列，公差为d_2，则$\{a_n+b_n\}$也是等差数列，公差为d_1+d_2。

4. 若$\{a_n\}$是等差数列，公差为 d，则$\{a_{2n}\}$也是等差数列，公差为 $2d$。同理$\{a_{2n-1}\}$也是等差数列，公差为 $2d$。

5. 若$\{a_n\}$是等差数列，公差为 d，则$\{pa_n+b\}$也是等差数列，公差为 pd。

6. 若$\{a_n\}$是等差数列，公差为 d，则 a_k，a_{k+m}，a_{k+2m}，…($k,m\in\mathbf{N}^*$)组成公差为 md 的等差数列。

题型训练 · 练其形

3.1 (　)在等差数列$\{a_n\}$中，$a_3+a_4+a_5=6$，则 $a_1+a_7=$(　　)。

A. 2　B. 3　C. 4　D. 5

3.2 (　)等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，当首项 a_1 与 d 变化时，$a_2+a_{10}+a_{21}$ 是一个定值，则下各项中一定为定值的是(　　)。

A. a_{10}　B. a_{11}　C. a_{12}　D. a_{13}

3.3 (　)等差数列$\{a_n\}$中，$a_4+a_{10}+a_{16}=30$，则 $a_{18}-2a_{14}$ 的值为(　　)。

A. -20　B. -10　C. 10　D. 20

题型训练 · 悟其神

3.4 (　)已知数列$\{a_n\}$是等差数列，且 $a_1+a_4+a_7=2\pi$，则 $\tan(a_3+a_5)$的值为(　　)。

A. $\sqrt{3}$　B. $-\sqrt{3}$　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

3.5 (　)设数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都是等差数列，且 $a_1=25$，$b_1=75$，$a_2+b_2=100$，则 $a_{37}+b_{37}=$(　　)。

A. 0　B. 37　C. 100　D. -37

3.6 (　，多选题)已知数列$\{a_n\}$为等差数列，则下列说法正确的是(　　)。

A. $a_{n+1}=a_n+d$(d 为常数)

B. 数列$\{-a_n\}$是等差数列

C. 数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是等差数列

D. a_{n+1} 是 a_n 与 a_{n+2} 的等差中项

核心例题 4　等差数列的判定与证明

(　)已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足 $b_n=a_n+a_{n+1}$，则“数列$\{a_n\}$为等差数列”是“数列$\{b_n\}$为等差数列”的(　　)。

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】 A

【解析】 若数列$\{a_n\}$是等差数列，设其公差为 d_1，则 $b_{n+1}-b_n=(a_{n+1}+a_{n+2})-(a_n+a_{n+1})=a_{n+2}-a_n=2d_1$，所以数列$\{b_n\}$是等差数列。

若数列$\{b_n\}$是等差数列，设其公差为 d_2，则 $b_{n+1}-b_n=(a_{n+1}+a_{n+2})-(a_n+a_{n+1})=a_{n+2}-a_n=d_2$，不能推出数列$\{a_n\}$是等差数列。

满腹经纶，却不知如何下手；胸怀大志，却只能虚度光阴。有个合理的方向，才有为之改变的动力。既然路远任重，那就迎着太阳，开始奋斗。(推荐人：@徐佳玥（北京）)

所以，"数列$\{a_n\}$为等差数列"是"数列$\{b_n\}$为等差数列"的充分不必要条件。故选 A。

解题必备

1. 等差数列的判定与证明的方法

(1) 定义法：$a_{n+1}-a_n=d(n\in\mathbf{N}^*)$或$a_n-a_{n-1}=d(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列；

(2) 定义变形法：验证是否满足$a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$；

(3) 等差中项法：$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow\{a_n\}$为等差数列；

(4) 通项公式法：通项公式形如$a_n=pn+q$(p,q为常数)$\Leftrightarrow\{a_n\}$为等差数列；

(5) 前 n 项和公式法：$S_n=pn^2+qn$(p,q为常数)$\Leftrightarrow\{a_n\}$为等差数列。

2. 递推关系式构造等差数列的常见类型

(1) 转化为$(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)=$常数，则$\{a_{n+1}-a_n\}$是等差数列；

(2) 转化为$\dfrac{1}{a_{n+1}+c}-\dfrac{1}{a_n+c}=$常数，则$\left\{\dfrac{1}{a_n+c}\right\}$($c$可以为 0)是等差数列；

(3) 转化为$\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}=$常数，则$\{\sqrt{a_n}\}$是等差数列；

(4) 转化为$a_{n+1}^2-a_n^2=$常数，则$\{a_n^2\}$是等差数列；

(5) 转化为$\dfrac{1}{S_{n+1}+c}-\dfrac{1}{S_n+c}=$常数，则$\left\{\dfrac{1}{S_n+c}\right\}$($c$可以为 0)是等差数列。

题型训练·练其形

4.1 (难度2)已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=2$，对$\forall n\in\mathbf{N}^*$都有$2a_{n+1}^3=a_{n+2}^3+a_n^3$，则$a_{10}$等于(　　)。

A. 10　　B. $\sqrt[3]{10}$　　C. 64　　D. 4

4.2 (难度2)在数列$\{x_n\}$中，$\dfrac{2}{x_n}=\dfrac{1}{x_{n-1}}+\dfrac{1}{x_{n+1}}$ $(n\geqslant 2)$，且$x_2=\dfrac{2}{3}$，$x_4=\dfrac{2}{5}$，则$x_{10}=$________。

4.3 (难度3，多选题)已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=3$，当$n\geqslant 2$时，$a_n=(\sqrt{a_{n-1}+1}+1)^2-1$，则关于数列$\{a_n\}$说法正确的是(　　)。

A. $a_2=8$

B. 数列$\{a_n\}$为递增数列

C. 数列$\{a_n\}$为周期数列

D. $a_n=n^2+2n$

题型训练·悟其神

4.4 (难度4)定义：在数列$\{a_n\}$中，若满足$\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=d(n\in\mathbf{N}^*$，$d$为常数)，称$\{a_n\}$为"等差比数列"，已知在"等差比数列"$\{a_n\}$中，$a_1=a_2=1$，$a_3=3$，则$\dfrac{a_{2020}}{a_{2018}}$等于(　　)。

A. $4\times2016^2-1$　　B. $4\times2017^2-1$

C. $4\times2018^2-1$　　D. 4×2018^2

4.5 (，多选题)在数列$\{a_n\}$中，若$a_n^2-a_{n-1}^2=p(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*,p$ 为常数)，则称$\{a_n\}$为“等方差数列”。下列对“等方差数列”的判断正确的是(　　)。

A. 若$\{a_n\}$是等差数列，则$\{a_n\}$是等方差数列

B. $\{(-1)^n\}$是等方差数列

C. 若$\{a_n\}$是等方差数列，则$\{a_{kn}\}(k\in\mathbf{N}^*,k$ 为常数)也是等方差数列

D. 若$\{a_n\}$既是等方差数列，又是等差数列，则该数列为常数列

4.6 ()已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，$a_1=1$，$a_n\neq 0$，$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$，其中 λ 为常数。

(1) 证明：$a_{n+2}-a_n=\lambda$；

(2) 是否存在 λ，使得$\{a_n\}$为等差数列？并说明理由。

核心例题 5　等差数列前 n 项和公式

()已知在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_3=2a+1$，$a_5=3a+2$，若 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，且 $S_k=66$，则 k 的值为(　　)。

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

【答案】C

【解析】由等差中项得 $2(2a+1)=1+3a+2$，解得 $a=1$，所以公差 $d=\dfrac{a_3-a_1}{2}=\dfrac{3-1}{2}=1$，则 $S_k=k\times 1+\dfrac{k(k-1)}{2}\times 1=66$，解得 $k=-12$(舍去)或 $k=11$。故选 B。

解题必备

等差数列的前 n 项和公式：$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n$。

题型训练 · 练其形

5.1 (，多选题)等差数列$\{a_n\}$是递增数列，公差为 d，前 n 项和为 S_n，满足 $a_7=3a_5$，下列选项正确的是(　　)。

A. $d<0$

B. $a_1<0$

C. 当 $n=5$ 时，S_n 最小

D. $S_n>0$ 时，n 的最小值为 8

5.2 ()设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，若 $S_{m-1}=-2$，$S_m=0$，$S_{m+1}=3$，则 $m=$(　　)。

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

5.3 ()将数列$\{2n-1\}$与$\{3n-2\}$的公共项从小到大排列得到数列$\{a_n\}$，则$\{a_n\}$的前 n 项和为________。

题型训练 · 悟其神

5.4 ()等差数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_2+a_3=$

-24，$a_{18}+a_{19}+a_{20}=78$，则此数列的前20项和等于（　　）。

A. 160　B. 180　C. 200　D. 220

5.5 （难度3）设 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $a_1=1$，公差 $d=2$，$S_{k+2}-S_k=24$，则 $k=$（　　）。

A. 8　B. 7　C. 6　D. 5

5.6 （难度3）记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，已知 $a_5=3$，$S_3=\frac{9}{2}$。

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若 $S_m=27$，求 m。

核心例题 6　等差数列基本量

（难度3，多选题）记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和。已知 $S_4=0$，$a_5=5$，则（　　）。

A. $a_n=2n-5$　　B. $a_n=3n-10$

C. $S_n=n^2-4n$　　D. $S_n=\frac{1}{2}n^2-2n$

【答案】 AC

【解析】 设首项为 a_1，公差为 d，由 $S_4=0$，$a_5=5$ 可得 $\begin{cases}a_1+4d=5,\\4a_1+\frac{4\times3}{2}d=0,\end{cases}$ 解得 $a_1=-3$，$d=2$，所以 $a_n=-3+2(n-1)=2n-5$，则 $S_n=\frac{n(-3+2n-5)}{2}=n^2-4n$。

故选AC。

解题必备

等差数列通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 及前 n 项和公式 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，共涉及五个量 a_1，d，n，a_n，S_n，知其中三个就能求另外两个，即“知三求二”。

题型训练·练其形

6.1 （难度2）已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，若 $a_{m+1}+a_m+a_{m-1}=15$，且 $S_m=27$，则 m 的值是（　　）。

A. 7　B. 8　C. 9　D. 10

6.2 （难度2）记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $a_3=5$，$a_7=13$，则 $S_{10}=$________。

6.3 （难度3）记等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $S_4\geqslant4$，$S_7\leqslant28$，则 a_{10} 的最大值为________。

题型训练·悟其神

6.4 （难度2）在等差数列$\{a_n\}$中，首项 $a_1=0$，公差 $d\neq0$，S_n 是其前 n 项和，若 $a_k=S_6$，则 $k=$（　　）。

A. 15　B. 16　C. 17　D. 18

6.5 （难度3，多选题）设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $S_3=9$，$a_4=7$，则（　　）。

A. $S_n=n^2$　　B. $S_n=2n^2-3n$
C. $a_n=2n-1$　　D. $a_n=3n-5$

6.6 (,多选题)下面是关于公差 $d>0$ 的等差数列$\{a_n\}$的四个命题,其中的真命题为(　　)。
A. 数列$\{a_n\}$是递增数列
B. 数列$\{na_n\}$是递增数列
C. 数列$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$是递增数列
D. 数列$\{a_n+3nd\}$是递增数列

核心例题 7　口算等差数列前 n 项与通项

()已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=-2n^2+3n$,则数列$\{a_n\}$的通项公式为________。

【答案】$a_n=-4n+5$

【解析】方法一:当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=1$。当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=-2n^2+3n+2(n-1)^2-3(n-1)=-4n+5$,又 $a_1=1$,适合上式,所以 $a_n=-4n+5$。

方法二:因为 $S_n=-2n^2+3n$,所以 $a_n=2\times(-2)n+[3-(-2)]=-4n+5$。

解题必备

数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n

$S_n=An^2+Bn\Leftrightarrow a_n=2An+(B-A)$。

$S_n=An^2+Bn+C$

$$\Leftrightarrow a_n=\begin{cases}A+B+C, & n=1,\\ 2An+(B-A), & n\geqslant2。\end{cases}$$

题型训练·练其形

7.1 ()已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $S_n=n^2+2n$,则它的通项公式为 $a_n=$________。

7.2 ()数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=n^2+3n$,则它的通项公式为 $a_n=$________。

7.3 ()数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=3n-2$,则它的前 n 项和 $S_n=$________。

题型训练·悟其神

7.4 ()已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和公式为 $S_n=2n^2-n+1$,则数列$\{a_n\}$的通项公式为________。

7.5 ()已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $S_n=-n^2+n+1$,则 $a_n=$________。

7.6 ()数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\begin{cases}2, & n=1,\\ n-1, & n\geqslant2,\end{cases}$ 则它的前 n 项和 $S_n=$________。

核心例题 8　等差绝对值求和

()已知数列$\{a_n\}$中 $a_1=8,a_4=2$,且满足 $a_{n+2}+a_n=2a_{n+1}$。
(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2) 设 S_n 是数列$\{|a_n|\}$的前 n 项和，求 S_n。

【答案】(1) $a_n=-2n+10(n\in\mathbf{N}^*)$；

(2) $S_n=\begin{cases}-n^2+9n, & n\leqslant 5,\\ n^2-9n+40, & n\geqslant 6\end{cases}$

【解析】(1) 由题意得数列$\{a_n\}$是等差数列，$d=\dfrac{a_4-a_1}{4-1}=-2$，则 $a_n=-2n+10(n\in\mathbf{N}^*)$。

(2) 令 $a_n\geqslant 0$，得 $n\leqslant 5$，即当 $n\leqslant 5$ 时，$a_n\geqslant 0$，当 $n\geqslant 6$ 时，$a_n<0$，则当 $n\leqslant 5$ 时，$S_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=a_1+a_2+\cdots+a_n=-n^2+9n$。

当 $n\geqslant 6$ 时，$S_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=a_1+a_2+\cdots+a_5-(a_6+a_7+\cdots+a_n)=-(a_1+a_2+\cdots+a_n)+2(a_1+a_2+\cdots+a_5)=-(-n^2+9n)+2\times 20=n^2-9n+40$，即 $S_n=\begin{cases}-n^2+9n, & n\leqslant 5,\\ n^2-9n+40, & n\geqslant 6。\end{cases}$

解题必备

1. 数列$\{a_n\}$为等差数列，$a_1>0$，$d<0$，$a_m>0$，$a_{m+1}\leqslant 0$，前 n 项和为 S_n，则数列$\{|a_n|\}$的前 n 项和为 $T_n=\begin{cases}S_n, & n\leqslant m,\\ -S_n+2S_m, & n\geqslant m+1。\end{cases}$

2. 数列$\{a_n\}$为等差数列，$a_1<0$，$d>0$，$a_m<0$，$a_{m+1}\geqslant 0$，前 n 项和为 S_n，则数列$\{|a_n|\}$的前 n 项和为 $T_n=\begin{cases}-S_n, & n\leqslant m,\\ S_n-2S_m, & n\geqslant m+1。\end{cases}$

题型训练·练其形

8.1 (⚫⚫⚫)在公差为 d 的等差数列$\{a_n\}$中，已知 $a_1=10$，$a_{11}=0$。

(1) 求 d，a_n；

(2) 求$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{20}|$。

8.2 (⚫⚫⚫)在公差为 d 的等差数列$\{a_n\}$中，已知 $a_1=10$，且 $2a_1$，$2a_2+2$，$5a_3-1$ 成等比数列。

(1) 求 d，a_n；

(2) 若 $d<0$，求$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$。

8.3 (⚫⚫⚫)已知等差数列$\{a_n\}$前三项的和为-3，前三项的积为 15。

(1) 求等差数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 若公差 $d>0$，求数列$\{|a_n|\}$的前 n 项和 T_n。

题型训练·悟其神

8.4 (⚫⚫⚫)已知数列$\{a_n\}$为等差数列，其前 n 项和为 S_n，且 $a_3=5$，$S_9=9$，数列 $b_n=|a_n|$。

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 求数列 b_n 的前 n 项和 T_n。

8.5 ()已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差不为零，$a_1=11$，且 a_2,a_5,a_6 成等比数列。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $S_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$，求 S_n。

8.6 ()在公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=10$ 且 $5a_3a_1=(2a_2+2)^2$。

(1) 求 a_n；

(2) 若 $d<0$，求 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$。

核心例题 9　等差数列前 n 项和性质

()已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项和为 100，前 100 项和为 10，则前 110 项和为________。

【答案】-110

【解析】方法一：$a_n=a_1+(n-1)d$，$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$，则 $S_{10}=10a_1+\dfrac{10\times(10-1)}{2}d=100$，即 $a_1+\dfrac{9}{2}d=10$①。

$S_{100}=100a_1+\dfrac{100\times(100-1)}{2}d=10$，则 $10a_1+\dfrac{990}{2}d=1$②。

由①②得 $a_1=\dfrac{1099d}{22}$，则 $S_{110}=110a_1+\dfrac{110\times(110-1)}{2}d=-110$。

方法二：因为当 $S_m=n,S_n=m(m\neq n)$ 时，$S_{m+n}=-(m+n)$，所以 $S_{10}=100$，$S_{100}=10$，则 $S_{110}=-110$。

解题必备

1. 若任意的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，前 $2n$ 项和为 S_{2n}，前 $3n$ 项和为 S_{3n}，则有 $S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}$ 也成等差数列，公差为 n^2d。

2. 若 $\{a_n\}$ 为等差数列，则

(1) 项数为 $2n$，则 $S_{偶}=na_{n+1}$，$S_{奇}=na_n$，$S_{偶}-S_{奇}=nd$，$\dfrac{S_{奇}}{S_{偶}}=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$；

(2) 项数为 $2n-1$，则 $S_{偶}=(n-1)a_n$，$S_{奇}=na_n$，$S_{奇}-S_{偶}=a_n$，$\dfrac{S_{奇}}{S_{偶}}=\dfrac{n}{n-1}$。

3. 若 $\{a_n\}$ 是等差数列，则 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 也成等差数列，其首项与 $\{a_n\}$ 首项相同，公差是 $\{a_n\}$ 公差的 $\dfrac{1}{2}$。

4. $S_{m+n}=S_m+S_n+mnd$
$=\dfrac{(m+n)(S_n-S_m)}{n-m}$。

(1) 当 $S_m=S_n(m\neq n)$ 时，$S_{m+n}=0$；

(2) 当 $S_m=n$，$S_n=m(m\neq n)$ 时，$S_{m+n}=-(m+n)$。

题型训练 · 练其形

9.1 (难度3)已知等差数列$\{a_n\}$的前 m 项之和为 30，前 $2m$ 项和为 100，则它的前 $3m$ 项的和为(　　)。

A. 130　B. 170　C. 210　D. 260

9.2 (难度3)设 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若$\frac{S_3}{S_6}=\frac{1}{3}$，则$\frac{S_6}{S_{12}}=$(　　)。

A. $\frac{3}{10}$　B. $\frac{1}{3}$　C. $\frac{1}{8}$　D. $\frac{1}{9}$

9.3 (难度3)设$\{a_n\}$是任意等差数列，它的前 n 项和、前 $2n$ 项和与前 $4n$ 项和分别为 X，Y，Z，则下列等式中恒成立的是(　　)。

A. $2X+Z=3Y$　B. $4X+Z=4Y$

C. $2X+3Z=7Y$　D. $8X+Z=6Y$

题型训练 · 悟其神

9.4 (难度3)设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_n=2n-1$，则数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$的前 20 项和为________。

9.5 (难度3)在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=-2015$，其前 n 项和为 S_n，若$\frac{S_{12}}{12}-\frac{S_{10}}{10}=2$，则 $S_{2018}=$(　　)。

A. 2018　　B. -2018

C. 4036　　D. -4036

9.6 (难度3)已知$\{a_n\}$是等差数列，S_n 是其前 n 项和，$S_7=7$，$S_{15}=75$，则 S_{21} 的值为________。

核心例题 10　等差数列前 n 项和与通项关系

(难度3)在等差数列$\{a_n\}$中，若 $a_5+a_6+a_7+a_8+a_9=400$，则数列$\{a_n\}$的前 13 项和 $S_{13}=$(　　)。

A. 260　B. 520　C. 1040　D. 2080

【答案】 C

【解析】 因为 $a_5+a_6+a_7+a_8+a_9=(a_5+a_9)+(a_6+a_8)+a_7=5a_7=400$，所以 $a_7=80$。则 $S_{13}=\frac{13(a_1+a_{13})}{2}=13a_7=1040$。故选 C。

解题必备

1. 等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，则 $S_{2n-1}=(2n-1)a_n$。

2. 两个等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n，T_n 之间的关系为

$\frac{a_n}{b_n}=\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}$，$\frac{a_m}{b_n}=\frac{2n-1}{2m-1}\cdot\frac{S_{2m-1}}{T_{2n-1}}$。

题型训练 · 练其形

10.1 (🌶🌶)已知等差数列$\{a_n\}$,其前 n 项的和为S_n,$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=20$,则$S_9=$(　　)。

A. 24　B. 36　C. 48　D. 64

10.2 (🌶🌶)设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $a_3+a_9=a_4+4$,则 $S_{15}=$(　　)。

A. 45　B. 50　C. 60　D. 80

10.3 (🌶🌶🌶)设等差数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n,T_n,若$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{3n+33}{n+3}$,则$\dfrac{a_5}{b_5}$为(　　)。

A. 3　B. 4　C. 5　D. 6

题型训练 · 悟其神

10.4 (🌶🌶🌶)等差数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n,T_n,若$\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{2n}{3n+1}$,则$\dfrac{S_{21}}{T_{21}}$的值为(　　)。

A. $\dfrac{13}{15}$　B. $\dfrac{23}{35}$　C. $\dfrac{11}{17}$　D. $\dfrac{4}{9}$

10.5 (🌶🌶🌶)两个等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 A_n 和 B_n,且$\dfrac{A_n}{B_n}=\dfrac{7n+45}{n+3}$,则使得$\dfrac{a_n}{b_n}$为整数的 n 的个数是(　　)。

A. 2　B. 3　C. 4　D. 5

10.6 (🌶🌶🌶)已知等差数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n 和 T_n,且$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{n+5}{2n-1}$,则$\dfrac{a_7}{b_6}=$(　　)。

A. $\dfrac{6}{7}$　B. $\dfrac{12}{11}$　C. $\dfrac{18}{25}$　D. $\dfrac{16}{21}$

核心例题 11　等差数列前 n 项和的最值

(🌶🌶🌶,多选题)已知数列$\{a_n\}$是等差数列,前 n 项和为 S_n,且 $2a_1+2a_3=S_5$,下列结论中正确的是(　　)。

A. S_7 最小　　B. $S_{13}=0$

C. $S_4=S_9$　　D. $a_7=0$

【答案】 BCD

【解析】 D:设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,由 $2a_1+2a_3=S_5$ 有 $2a_1+2(a_1+2d)=5a_1+\dfrac{5\times4}{2}d$,即 $a_1+6d=0$,所以 $a_7=0$,则 D 正确。

A:$S_7=7a_1+\dfrac{7\times6}{2}d=7(a_1+3d)=-21d$,无法判断其是否有最小值,故 A 错误。

B:$S_{13}=\dfrac{a_1+a_{13}}{2}\times13=13a_7=0$,故 B 正确。

C:$S_9-S_4=a_9+a_8+a_7+a_6+a_5=5a_7=0$,所以 $S_4=S_9$,故 C 正确。故选 BCD。

炎炎夏日似火烧,教室上课甚煎熬。翻开数学练习册,众人皆泪我独笑。(推荐人:@汪家庆(浙江))

解题必备

1. 数列中最大项和最小项的求法

(1) 求最大项的方法：设 a_n 为最大项，则有 $\begin{cases} a_n \geqslant a_{n-1}, \\ a_n \geqslant a_{n+1}; \end{cases}$

(2) 求最小项的方法：设 a_n 为最小项，则有 $\begin{cases} a_n \leqslant a_{n-1}, \\ a_n \leqslant a_{n+1}. \end{cases}$

2. 已知 a_n，求 S_n 最值时 n 的值（$n \in \mathbf{N}_+$）

(1) 当 $a_1>0, d<0$ 时，满足 $\begin{cases} a_n \geqslant 0, \\ a_{n+1} \leqslant 0 \end{cases}$ 的项数 n 使得 S_n 取最大值；

(2) 当 $a_1<0, d>0$ 时，满足 $\begin{cases} a_n \leqslant 0, \\ a_{n+1} \geqslant 0 \end{cases}$ 的项数 n 使得 S_n 取最小值。

3. 利用等差数列的前 n 项和求最值

$S_n=An^2+Bn$（A, B 为常数，$n \in \mathbf{N}^*$）为二次函数，通过配方或借助图像，二次函数的性质，转化为二次函数的最值的方法求解，但注意 n 取整数。

题型训练 · 练其形

11.1 (难度★★★)在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=7$，公差为 d，前 n 项和为 S_n，当且仅当 $n=8$ 时 S_n 取得最大值，则 d 的取值范围为________。

11.2 (难度★★★，多选题)等差数列$\{a_n\}$是递增数列，满足 $a_7=3a_5$，前 n 项和为 S_n，下列选项正确的是（　　）。

A. $d>0$

B. $a_1<0$

C. 当 $n=5$ 时 S_n 最小

D. $S_n>0$ 时 n 的最小值为 8

11.3 (难度★★★)已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $a_{2020}>0$，且 $a_{2019}+a_{2020}<0$，则满足 $S_n>0$ 的最小正整数 n 的值为（　　）。

A. 2019　B. 2020　C. 4039　D. 4040

题型训练 · 悟其神

11.4 (难度★★★，多选题)设数列$\{a_n\}$是等差数列，公差为 d，S_n 是其前 n 项和，$a_1>0$ 且 $S_6=S_9$，则（　　）。

A. $d>0$

B. $a_8=0$

C. S_7 或 S_8 为 S_n 的最大值

D. $S_5>S_6$

11.5 (难度★★★，多选题)$\{a_n\}$是等差数列，公差为 d，前 n 项和为 S_n，若 $S_5<S_6$，$S_6=S_7>S_8$，则下列结论正确的是（　　）。

A. $d<0$　　B. $a_7=0$

C. $S_9>S_5$　　D. $S_{17}<0$

11.6 (难度★★★，多选题)已知 S_n 是等差数列$\{a_n\}$（$n \in \mathbf{N}^*$）的前 n 项和，且 $S_8>S_9>S_7$，有下列四个命题，其中是真命题的是（　　）。

A. 公差 $d<0$

人的精力是有限的，不必付出得越来越多，只要尽心尽力就好。生命有限，过好每天，向着太阳展示今天积极的心，只要后来觉得问心无愧就好。（推荐人：@王菲（广东））

B. 在所有 $S_n<0$ 中，S_{17} 最大

C. $a_8>a_9$

D. 满足 $S_n>0$ 的 n 的个数有 15 个

达标全刷

1. (🌶)在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，公差 $d=2$，则 $a_8=$(　　)。

A. 13　　B. 14　　C. 15　　D. 16

2. (🌶🌶)在等差数列$\{a_n\}$中，$a_8=24$，$a_{16}=8$，则 $a_{24}=$(　　)。

A. -24　　B. -16　　C. -8　　D. 0

3. (🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$中，$a_3=2$，$a_7=1$，若$\left\{\dfrac{1}{a_n+1}\right\}$为等差数列，则 $a_{19}=$(　　)。

A. 0　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. 2

4. (🌶🌶)在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2+a_5=10$，$a_3+a_6=14$，则 $a_5+a_8=$(　　)。

A. 12　　B. 22　　C. 24　　D. 34

5. (🌶🌶)在等差数列$\{a_n\}$中，首项 $a_1=0$，公差 $d\neq0$，S_n 是其前 n 项和，若 $a_k=S_6$，则 $k=$(　　)。

A. 15　　B. 16　　C. 17　　D. 18

6. (🌶🌶🌶)我国古代数学名著《算法统宗》中说：“九百九十六斤棉，赠分八子做盘缠。次第每人多十七，要将第八数来言。务要分明依次第，孝和休惹外人传。”意为：“996 斤棉花，分别赠送给 8 个子女做旅费，从第 1 个孩子开始，以后每人依次多 17 斤，直到第 8 个孩子为止。分配时一定要按照次序分，要顺从父母，兄弟间和气，不要引得外人说闲话。”在这个问题中，第 8 个孩子分到的棉花为(　　)。

A. 184 斤　　B. 176 斤

C. 65 斤　　D. 60 斤

7. (🌶🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$是公差 $d>0$ 的等差数列，$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1\cdot a_6=39$，$S_6=48$，则 $S_{10}=$________。

8. (🌶🌶🌶)设数列$\{a_n\}$为等差数列，其前 n 项和为 S_n，已知 $a_1+a_4+a_7=99$，$a_2+a_5+a_8=93$，若对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 都有 $S_n\leqslant S_k$ 成立，则 k 的值为________。

9. (🌶🌶🌶)已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_2=5$，$a_5=11$。

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 若 $S_n=120$，求 n。

10. (🌶🌶🌶🌶)在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_n^2-a_{n+1}^2=2a_n^2a_{n+1}^2$。

(1) 证明：数列$\left\{\dfrac{1}{a_n^2}\right\}$是等差数列；

(2) 设 $b_n=a_{n+1}^2+a_{n+2}^2+\cdots+a_{2n+1}^2$，是否存在正整数 k，使得对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，

$b_n<2k$ 恒成立？若存在，求出 k 的最小值；若不存在，说明理由。

4.3 等比数列

核心笔记

一、等比数列

1. 等比数列的概念

如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的比等于同一个常数 $q(q\neq0)$，那么这个数列叫作等比数列，这个常数叫作等比数列的公比。

注意：(1)等比数列的每一项都不可能为 0；

(2) 公比是每一项与其前一项的比，前后次序不能颠倒，且公比是一个与 n 无关的常数。

2. 等比中项

如果在 a 与 b 中间插入一个数 G，使 a，G，b 成等比数列，那么 G 叫作 a 与 b 的等比中项，此时 $G^2=ab$。

3. 等比数列的通项公式及其变形

首项为 a_1、公比为 q 的等比数列的通项公式是 $a_n=a_1q^{n-1}(a_1,q\neq0)$。

等比数列通项公式的变形：$a_n=a_mq^{n-m}$。

二、等比数列的前 n 项和公式

首项为 a_1、公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和的公式为

$$S_n=\begin{cases}na_1, & q=1,\\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}, & q\neq1。\end{cases}$$

(1) 当公比 $q=1$ 时，因为 $a_1\neq0$，所以 $S_n=na_1$ 是关于 n 的正比例函数，则数列 $S_1,S_2,\cdots,S_n,\cdots$ 的图像是正比例函数 $y=a_1x$ 图像上的一群孤立的点。

(2) 当公比 $q\neq1$ 时，等比数列的前 n 项和公式是 $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，即 $S_n=-\dfrac{a_1}{1-q}\cdot q^n+\dfrac{a_1}{1-q}$，设 $m=\dfrac{a_1}{1-q}$，则上式可写成 $S_n=-mq^n+m$ 的形式，数列 $S_1,S_2,\cdots,S_n,\cdots$ 的图像是函数 $y=-mq^x+m$ 图像上的一群孤立的点。

由此可见，非常数列的等比数列的前 n 项和 S_n 是一个关于 n 的指数型函数与一个常数的和，且指数型函数的系数与常数项互为相反数。

三、等比数列通项及其前 n 项和的性质

若数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，前 n 项和为 S_n，则有如下性质：

(1) 若 $m+n=p+q$，则 $a_ma_n=a_pa_q$；若 $m+n=2r$，则 $a_ma_n=a_r^2(m,n,p,q,r\in\mathbf{N}^*)$。

推广：①$a_1a_n=a_2a_{n-1}=\cdots a_ia_{n+1-i}=\cdots$；

② 若 $m+n+t=p+q+r$，则 $a_ma_na_t=a_pa_qa_r$。

(2) 若 m,n,p 成等差数列，则 a_m,a_n,a_p 成等比数列。

(3) 数列$\{\lambda a_n\}(\lambda\neq 0)$仍是公比为 q 的等比数列；数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是公比为$\frac{1}{q}$的等比数列；数列$\{|a_n|\}$是公比为$|q|$的等比数列；若数列$\{b_n\}$是公比为 q' 的等比数列，则数列$\{a_nb_n\}$是公比为 qq' 的等比数列。

(4) $a_k,a_{k+m},a_{k+2m},\cdots$成等比数列，公比为 q^m。

(5) 连续相邻 k 项的和(或积)构成公比为 q^k(或 q^{k^2})的等比数列。

(6) 当 $q=1$ 时，$\frac{S_n}{S_m}=\frac{n}{m}$；当 $q\neq\pm 1$ 时，$\frac{S_n}{S_m}=\frac{1-q^n}{1-q^m}$。

(7) $S_{n+m}=S_m+q^mS_n=S_n+q^nS_m$。

(8) 若项数为 $2n$，则$\frac{S_{偶}}{S_{奇}}=q$，若项数为 $2n+1$，则$\frac{S_{奇}-a_1}{S_{偶}}=q$。

(9) 当 $q\neq -1$ 时，连续 m 项的和(如 $S_m,S_{2m}-S_m,S_{3m}-S_{2m},\cdots$)仍组成等比数列(公比为 q^m，$m\geqslant 2$)。注意：这里连续 m 项的和均非零。

核心例题 1　等比数列通项公式

( )等比数列$\{a_n\}$中，已知 $a_1=2,a_4=16$，数列$\{a_n\}$的公比为(　　)。

A. $\frac{1}{2}$　　B. -2　　C. 2　　D. $-\frac{1}{2}$

【答案】 C

【解析】 数列$\{a_n\}$是等比数列，则 $a_n=a_1q^{n-1}$(q 为数列$\{a_n\}$的公比)，故 $a_4=a_1q^3$，即 $16=2q^3$，解得 $q=2$。故选 C。

解题必备

1. 通项公式：$a_n=a_1q^{n-1}(a_1q\neq 0)$，其中 a_1 是首项，q 是公比。

2. 当 $q\neq 1$ 时，$a_n=\frac{a_1}{q}q^n$，可以看成函数 $y=cq^x$，是一个不为 0 的常数与指数函数的乘积，因此数列$\{a_n\}$各项所对应的点都在函数 $y=cq^x$ 的图像上。

题型训练 · 练其形

1.1 ( )设等比数列$\{a_n\}$满足 $a_1+a_2=-1,a_1-a_3=-3$，则公比 $q=$________。

1.2 ( )等比数列$\{a_n\}$中 $a_1=3,a_4=24$，则 $a_3+a_4+a_5=$(　　)。

A. 33　　B. 72　　C. 84　　D. 189

1.3 ( )设正项等比数列$\{a_n\}$满足 $a_4=81$，$a_2+a_3=36$，则 $a_n=$________。

题型训练 · 悟其神

1.4 ( )“十二平均律”是通用的音律体系，明代朱载堉最早用数学方法计算出半音比例，为这个理论的发展做出了重要贡献. 十二平均律将一个纯八度音程分成十二份，依次得到十三个单音，从第二个单音起，每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于$\sqrt[12]{2}$。若第一个单音的频率为 f，则第八个单音的频率为(　　)。

A. $\sqrt[3]{2}f$　　B. $\sqrt[3]{2^2}f$

C. $\sqrt[12]{2^5}f$　　D. $\sqrt[12]{2^7}f$

1.5 ( )已知在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1a_2a_3=1$，$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=\frac{7}{2}$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为________。

1.6 ( )设无穷等比数列$\{a_n\}$的各项为整数，公比为 q，且$|q|\neq1$，$a_1+a_3<2a_2$，写出数列$\{a_n\}$的一个通项公式：________。

核心例题 2　等比数列通项公式变形

( )在等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=\sqrt{2}$，$a_5=4$，则数列$\{a_n\}$的公比 $q=$(　　)。

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】 A

【解析】 因为等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=\sqrt{2}$，$a_5=4$，所以 $q^{5-2}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2^{\frac{3}{2}}$，解得 $q=\sqrt{2}$。

故选 A。

解题必备

1. 通项：$a_n=a_1\cdot q^{n-1}=a_m\cdot q^{n-m}$，即可以用数列中的任意一项来表示。

2. $q=\sqrt[n-m]{\frac{a_n}{a_m}}$，注意 $n-m$ 的奇偶性，若为偶数，则公比有两个。

3. $q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\cdots=\frac{a_n}{a_{n-1}}$

$=\frac{a_2+a_3+\cdots+a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}$。

题型训练 · 练其形

2.1 ( )已知数列$\{a_n\}$为等比数列，$a_2=1$，$a_5=8$，则数列$\{a_n\}$的公比为________。

2.2 ( )若等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$满足 $a_1=b_1=-1$，$a_4=b_4=8$，则$\frac{a_2}{b_2}$为(　　)。

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

2.3 ( )在等比数列$\{a_n\}$中，$a_2+a_4=1$，$a_6+a_8=4$，则 $a_2=$(　　)。

A. 2　　B. 4　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$

题型训练 · 悟其神

2.4 ( )已知$\{a_n\}$是等比数列，$a_1=1$，

$a_3=2$，则$\dfrac{a_5+a_{10}}{a_1+a_6}=$(　　)。

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

2.5 (🌶🌶🌶)等比数列$\{a_n\}$的公比$q=3$，则$\dfrac{a_1+a_3+a_5+a_7}{a_2+a_4+a_6+a_8}=$(　　)。

A. $-\dfrac{1}{3}$　　B. -3　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. 3

2.6 (🌶🌶🌶)若正项等比数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$，则其公比为(　　)。

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 2 或-1　　C. 2　　D. -1

核心例题 3　等比数列单调性

(🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$为等比数列，则“$a_1<0,q>1$”是“$\{a_n\}$为递减数列”的(　　)。

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】 A

【解析】 若等比数列$\{a_n\}$满足$a_1<0,q>1$，则数列$\{a_n\}$为递减数列，故“$a_1<0,q>1$”是“$\{a_n\}$为递减数列”的充分条件。

因为若等比数列$\{a_n\}$满足$a_1>0,0<q<1$，则数列$\{a_n\}$也是递减数列，所以“$a_1<0,q>1$”不是“$\{a_n\}$为递减数列”的必要条件。

综上所述，“$a_1<0,q>1$”是“$\{a_n\}$为递减数列”的充分不必要条件。故选 A。

解题必备

1. 当$a_1>0,q>1$或$a_1<0,0<q<1$时，等比数列$\{a_n\}$为递增数列。
2. 当$a_1>0,0<q<1$或$a_1<0,q>1$时，等比数列$\{a_n\}$为递减数列。
3. 当$q<0$时，等比数列$\{a_n\}$为摆动数列。
4. 当$q=1$时，等比数列$\{a_n\}$为常数列。

题型训练 · 练其形

3.1 (🌶🌶)在等比数列$\{a_n\}$中，已知$a_1>0$，$8a_2-a_5=0$，则数列$\{a_n\}$为(　　)。

A. 递增数列　　B. 递减数列

C. 常数列　　D. 不能确定单调性

3.2 (🌶🌶)设数列$\{a_n\}$是等比数列，则“$a_1<a_2<a_3$”是$\{a_n\}$为递增数列的(　　)。

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

3.3 (🌶🌶🌶)在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1>0$，则“$a_3<a_6$”是“$a_{2021}<a_{2023}$”的(　　)。

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

题型训练 · 悟其神

3.4 (难度)已知等比数列$\{a_n\}$是递增数列且$a_n=(\lambda+1)\lambda^n$，则 λ 的取值范围为________。

3.5 (难度)设$\{a_n\}$为等比数列，则"对于任意的$m\in\mathbf{N}^*$，$a_{m+2}>a_m$"是"$\{a_n\}$为递增数列"的(　　)。

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

3.6 (难度，多选题)关于递增等比数列$\{a_n\}$，下列说法不正确的是(　　)。

A. $a_1>0$　　B. $q>1$

C. $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<1$　　D. 当$a_1>0$时，$q>1$

核心例题 4　等比数列通项性质

(难度)正项等比数列$\{a_n\}$满足$a_2^2+2a_3a_7+a_6a_{10}=16$，则$a_2+a_8=$(　　)。

A. -4　　B. 4　　C. ±4　　D. 8

【答案】B

【解析】根据题意，等比数列$\{a_n\}$满足$a_2^2+2a_3a_7+a_6a_{10}=16$，则有$a_2^2+2a_2a_8+a_8^2=16$，即$(a_2+a_8)^2=16$，又数列$\{a_n\}$为正项等比数列，故$a_2+a_8=4$。故选 B。

解题必备

1. $\{a_n\}$是等比数列，则$\{ka_n\}$，$\{a_n^k\}$成等比数列。

2. $\{a_n\}$，$\{b_n\}$是等比数列，则$\{a_nb_n\}$，$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$，$\{a_n^pb_n^q\}$成等比数列。

3. $\{a_n\}$是等比数列，相隔等距离的项组成的数列仍是等比数列，即$a_k,a_{k+m},a_{k+2m},\cdots$仍是等比数列，公比为$q^m(k,m\in\mathbf{N}^*)$。

4. $\{a_n\}$是等比数列，若$m,n,p,q\in\mathbf{N}_+$且$m+n=p+q$，则$a_ma_n=a_pa_q$。特殊地，当$2m=p+q$时，有$a_m^2=a_pa_q$，则a_m是a_p,a_q的等比中项。

题型训练 · 练其形

4.1 (难度)已知各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$，$a_1a_2a_3=3$，$a_7a_8a_9=27$，则$a_4a_5a_6=$________。

4.2 (难度)等比数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_2+a_3=4$，$a_4+a_5+a_6=8$，则$a_7+a_8+a_9=$(　　)。

A. 16　　B. 32　　C. 64　　D. 128

4.3 (难度)已知$\{a_n\}$为等比数列，$a_4+a_7=2$，$a_5a_6=-8$，则$a_1+a_{10}=$(　　)。

A. 7　　B. ±7　　C. -7　　D. -5

题型训练 · 悟其神

4.4 (难度)数列$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是各

项均为正数的等比数列，公比 $q>1$，且 $a_4=b_4$，则（　　）。

A. $a_2+a_6>b_3+b_5$

B. $a_2+a_6=b_3+b_5$

C. $a_2+a_6<b_3+b_5$

D. a_2+a_6 与 b_3+b_5 大小不确定

4.5（🌶🌶🌶）已知正项等比数列 $\{a_n\}$，满足 $a_2a_7^2a_{2020}=16$，则 $a_1a_2\cdots a_{1017}=$（　　）。

A. 4^{1017}　B. 2^{1017}　C. 4^{1018}　D. 2^{1018}

4.6（🌶🌶🌶🌶，多选题）已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，n_1，n_2，…，$n_r\in\mathbf{N}^*$，m_1，m_2，…，$m_t\in\mathbf{N}^*$，r，$t\in\mathbf{N}^*$ 且 $r\neq t$，若 $n_1+n_2+\cdots+n_r=m_1+m_2+\cdots+m_t$，则下列结论正确的是（　　）。

A. 若 $a_1=d$，则 $a_{n_1}+a_{n_2}+\cdots+a_{n_r}=a_{m_1}+a_{m_2}+\cdots+a_{m_t}$

B. 若 $a_{n_1}+a_{n_2}+\cdots+a_{n_r}=a_{m_1}+a_{m_2}+\cdots+a_{m_t}$，则 $a_1=d$

C. 若 $b_1=q$，则 $b_{n_1}b_{n_2}\cdots b_{n_r}=b_{m_1}b_{m_2}\cdots b_{m_t}$

D. 若 $b_{n_1}b_{n_2}\cdots b_{n_r}=b_{m_1}b_{m_2}\cdots b_{m_t}$，则 $b_1=q$

核心例题 5　等比数列的判定和证明

（🌶🌶🌶，多选题）设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n(n\in\mathbf{N}^*)$，关于数列 $\{a_n\}$，下列四个命题中正确的是（　　）。

A. 若 $a_{n+1}=a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $\{a_n\}$ 既是等差数列又是等比数列

B. 若 $S_n=An^2+Bn$（A，B 为常数，$n\in\mathbf{N}^*$），则 $\{a_n\}$ 是等差数列

C. 若 $S_n=1-(-1)^n$，则 $\{a_n\}$ 是等比数列

D. 若 $\{a_n\}$ 是等差数列，则 S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}(n\in\mathbf{N}^*)$ 也成等差数列

【答案】 BCD

【解析】 A：$a_{n+1}=a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_{n+1}-a_n=0$，得 $\{a_n\}$ 是等差数列，当 $a_n=0$ 时不是等比数列，故 A 错误。

B：因为 $S_n=An^2+Bn$，所以 $a_n-a_{n-1}=2A$，得 $\{a_n\}$ 是等差数列，故 B 正确。

C：$S_n=1-(-1)^n$，则 $S_n-S_{n-1}=a_n=2\times(-1)^{n-1}(n\geqslant2)$，当 $n=1$ 时也成立，则 $a_n=2\times(-1)^{n-1}$ 是等比数列，故 C 正确。

D：$\{a_n\}$ 是等差数列，由等差数列性质得 S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}(n\in\mathbf{N}^*)$ 是等差数列，故 D 正确。

故选 BCD。

解题必备

等比数列的判定与证明常用的方法：

（1）定义法：$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$（q 为常数且 $q\neq0$）$\Leftrightarrow$ 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列；

（2）等比中项法：$a_{n+1}^2=a_na_{n+2}$（$n\in\mathbf{N}^*$，$a_n\neq0$）$\Leftrightarrow$ 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列；

（3）通项公式法：$a_n=tq^n$（$tq\neq0$，$n\in\mathbf{N}^*$）$\Leftrightarrow$ 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列；

（4）前 n 项和公式法：若数列的前 n 项和

$S_n=-Aq^n+A(A\neq0,q\neq0,q\neq1)$，则该数列是等比数列。

注意：

(1) 若要判定一个数列不是等比数列，则只需判定存在连续三项不成等比数列即可。

(2) 只满足 $a_{n+1}=qa_n(q\neq0)$ 的数列未必是等比数列，要使其成为等比数列还需要 $a_1\neq0$。

题型训练 · 练其形

5.1 (🌶🌶) 数列 $\{a_n\}$ 中"$a_n,a_{n+1},a_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$ 成等比数列"是"$a_{n+1}^2=a_na_{n+2}$"的(　　)。

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

5.2 (🌶🌶🌶，多选题) 下列说法中正确的是(　　)。

A. 数列 $\{a_n\}$ 成等差数列的充要条件是对于任意的正整数 n，都有 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$

B. 数列 $\{a_n\}$ 成等比数列的充要条件是对于任意的正整数 n，都有 $a_{n+1}^2=a_na_{n+2}$

C. 若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，则 S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$ 也是等差数列

D. 若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，则 S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$ 也是等比数列

5.3 (🌶🌶🌶，多选题) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中，满足 $a_1=1,q=2$，S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则下列说法正确的是(　　)。

A. 数列 $\{a_{2n}\}$ 是等比数列

B. 数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是递增数列

C. 数列 $\{\log_2 a_n\}$ 是等差数列

D. 数列 $\{a_n\}$ 中，S_{10},S_{20},S_{30} 仍成等比数列

题型训练 · 悟其神

5.4 (🌶🌶🌶，多选题) 已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，有下列四个命题，其中正确的命题有(　　)。

A. 数列 $\{|a_n|\}$ 是等比数列

B. 数列 $\{a_na_{n+1}\}$ 是等比数列

C. 数列 $\{\lg a_n^2\}$ 是等比数列

D. 数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是等比数列

5.5 (🌶🌶🌶，多选题) 设 $\{a_n\}$ 是无穷数列，$A_n=a_n+a_{n+1}(n=1,2,\cdots)$，则下面给出的四个判断中正确的有(　　)。

A. 若 $\{a_n\}$ 是等差数列，则 $\{A_n\}$ 是等差数列

B. 若 $\{A_n\}$ 是等差数列，则 $\{a_n\}$ 是等差数列

C. 若 $\{a_n\}$ 是等比数列，则 $\{A_n\}$ 是等比数列

D. 若 $\{A_n\}$ 是等差数列，则 $\{a_{2n}\}$ 都是等差数列

5.6 (🌶🌶🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足$a_1=b_1+1=2$，$a_{n+1}=3b_n+4n-1$，$b_{n+1}=3a_n-4n+1$。

(1) 求证：$\{a_n+b_n\}$是等比数列，$\{a_n-b_n\}$是等差数列；

(2) 求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式。

核心例题 6　等比数列前 n 项和公式

(🌶🌶🌶)已知正项等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $a_4=\frac{1}{8}$，$S_3-a_1=\frac{3}{4}$，则 $S_4=$(　　)。

A. $\frac{1}{16}$　　B. $\frac{1}{8}$　　C. $\frac{31}{16}$　　D. $\frac{15}{8}$

【答案】 D

【解析】 正项等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_4=\frac{1}{8}$，$S_3-a_1=\frac{3}{4}$，则

$$\begin{cases} a_1q^3=\frac{1}{8}, \\ \frac{a_1(1-q^3)}{1-q}-a_1=\frac{3}{4}, \end{cases}$$ $q>0$，且 $q\neq1$，解得

$a_1=1$，$q=\frac{1}{2}$，则 $S_4=\frac{1\times\left(1-\frac{1}{2^4}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{15}{8}$。

故选 D。

解题必备

等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和公式为 $S_n=\begin{cases} na_1, & q=1, \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}, & q\neq1。\end{cases}$

(1) 求等比数列前 n 项和时，如果已知 a_1，q ($q\neq1$)，则可用公式 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$求解；

(2) 如果已知 a_1，a_n，q($q\neq1$)，则可用公式 $S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$求解。

题型训练 · 练其形

6.1 (🌶🌶🌶)数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{m+n}=a_ma_n$，若 $a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+10}=2^{15}-2^5$，则 $k=$(　　)。

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

6.2 (🌶🌶🌶，多选题)设数列$\{a_n\}$是等比数列，前 n 项和为 S_n，若 $S_3=3a_3$，则公比 q 为(　　)。

A. $-\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

6.3 (🌶🌶🌶)记 S_n 是等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和，已知 $a_1=1$，$S_3=\frac{3}{4}$，则 $S_4=$(　　)。

A. $\frac{5}{8}$　　B. $\frac{15}{8}$　　C. $\frac{17}{8}$　　D. $\frac{17}{24}$

等待一切就绪，等待万物俱备才开始，恐怕随时都在准备。有了方向，就要全力寻求答案，并非苦苦相守。时机变幻无穷，真正的机会却稍纵即逝。(推荐人：@韩雪(云南))

题型训练 · 悟其神

6.4 (🌶🌶🌶)已知公差不为零的等差数列$\{a_n\}$的前3项和为3，且a_2,a_3,a_6成等比数列。

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 设$b_n=3^{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n。

6.5 (🌶🌶🌶)等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_5=4a_3$。

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 记S_n为$\{a_n\}$的前n项和，若$S_m=63$，求m。

6.6 (🌶🌶🌶)设$\{a_n\}$是等差数列，且$a_1=\ln 2$，$a_2+a_3=5\ln 2$。

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 求$e^{a_1}+e^{a_2}+\cdots+e^{a_n}$。

核心例题 7 等比数列基本量

(🌶🌶🌶)在各项为正的递增等比数列$\{a_n\}$中，$a_1a_2a_6=64$，$a_1+a_3+a_5=21$，则$a_n=$(　　)。

A. 2^{n+1}　　B. 2^{n-1}

C. $3\times 2^{n-1}$　　D. $2\times 3^{n-1}$

【答案】 B

【解析】 因为$\{a_n\}$为等比数列，设其公比为q，所以$a_1a_2a_6=a_1^3q^6=(a_1q^2)^3=a_3^3=64$，则$a_3=4$，故$a_1+a_3+a_5=21$，则$\frac{a_3}{q^2}+a_3+a_3q^2=21$，即$\frac{4}{q^2}+4+4q^2=21$，解得$q=\pm 2$或$q=\pm\frac{1}{2}$。又因为$\{a_n\}$各项为正且递增，所以$q=2$，则$a_n=a_3q^{n-3}=4\times 2^{n-3}=2^{n-1}$。

故选B。

解题必备

1. 等比数列的基本运算方法：

(1) 等比数列由首项a_1与公比q确定，所有关于等比数列的计算和证明，都可围绕a_1与q进行；

(2) 对于等比数列问题，一般给出两个条件，就可以通过解方程(组)求出a_1与q，对于a_n,a_1,q,n,S_n五个基本量，如果再给出第三个条件就可以“知三求二”。

2. 基本量计算过程中涉及的数学思想方法：

(1) 方程思想。等比数列的通项公式和前n项和公式联系着五个基本量，“知三求二”是一类最基本的运算，通过列方程(组)求出关键量a_1和q，问题可迎刃而解。

(2) 分类讨论思想。等比数列的前 n 项和公式为 $S_n=\begin{cases}na_1, & q=1,\\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}, & q\neq 1,\end{cases}$ 所以当公比未知或是代数式时，要对公比分 $q=1$ 和 $q\neq 1$ 进行讨论. 此处是常考易错点，一定要引起重视。

(3) 整体思想。应用等比数列前 n 项和公式时，常把 q^n，$\dfrac{a_1}{1-q}$ 当成整体求解。

题型训练 · 练其形

7.1 ( )设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=\dfrac{1}{2}$，前 n 项和为 S_n，则 $\dfrac{S_4}{a_4}=$(　　)。

A. $\dfrac{1}{15}$　B. -15　C. 15　D. $-\dfrac{1}{15}$

7.2 ( )已知 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_7=8a_4$，$S_4=45$，则 $a_1=$(　　)。

A. 3　B. 5　C. -3　D. -5

7.3 ( )在正项等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1a_9=64$，$a_4+a_6=20$，则 $a_n=$(　　)。

A. 2^{n-2}　B. 2^{8-n}

C. 2^{n-2} 或 2^{8-n}　D. 2^{2-n} 或 2^{n-2}

题型训练 · 悟其神

7.4 ( )已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $\dfrac{S_{2m}}{S_m}=\dfrac{33}{32}$，$\dfrac{a_{m+3}}{a_3}=\dfrac{m-4}{5m+7}$，则数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=$(　　)。

A. 2　B. -2　C. $\dfrac{1}{2}$　D. $-\dfrac{1}{2}$

7.5 (，多选题)已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_4=2a_2+a_3$，若设其公比为 q，前 n 项和为 S_n，则(　　)。

A. $q=2$　B. $a_n=2^n$

C. $S_{10}=2047$　D. $a_n+a_{n+1}<a_{n+2}$

7.6 (，多选题)已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_3=1$，$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_5}=\dfrac{21}{4}$，则(　　)。

A. $\{a_n\}$ 必是递减数列

B. $S_5=\dfrac{31}{4}$

C. 公比 $q=4$ 或 $\dfrac{1}{4}$

D. $a_1=4$ 或 $\dfrac{1}{4}$

核心例题 8　等差与等比的转换

( )已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足数列 $\{2^{a_n}\}$ 是等比数列，若 $a_4+a_{1009}+a_{2014}=\dfrac{3}{2}$，则 S_{2017} 的值是(　　)。

A. $\dfrac{2017}{2}$　B. 1008　C. 2015　D. 2016

【答案】 A

【解析】 设等比数列 $\{2^{a_n}\}$ 的公比为 q，则 $\dfrac{2^{a_{n+1}}}{2^{a_n}}=2^{a_{n+1}-a_n}=q$，即 $a_{n+1}-a_n=\log_2 q$，

所以数列$\{a_n\}$是等差数列。因为$a_4+a_{1009}+a_{2014}=\frac{3}{2}$，所以根据等差数列的性质得$a_4+a_{2014}=2a_{1009}$，即$3a_{1009}=\frac{3}{2}$，则$a_{1009}=\frac{1}{2}$，所以$S_{2017}=\frac{2017(a_1+a_{2017})}{2}=2017a_{1009}=\frac{2017}{2}$。故选A。

解题必备

1. $\{a_n\}$是等差数列$\Leftrightarrow\{a^{a_n}\}$是等比数列，且$q=a^d$。
2. $\{a_n\}$是正项等比数列$\Leftrightarrow\{\log_a a_n\}$是等差数列，且$d=\log_a q$。

题型训练·练其形

8.1 (★★★)已知等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且$a_{10}a_{11}+a_9a_{12}=2e^2$，则$\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_{20}=$________。

8.2 (★★★)已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=\frac{1}{4}$，$a_5=\frac{1}{32}$，则数列$\{\log_2 a_n\}$的前10项之和是(　　)。

A. 45　B. -35　C. 55　D. -55

8.3 (★★★)已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_3+a_7=22$，$a_4=9$，数列$\{b_n\}$满足$b_n=2^{a_n-1}$，则$b_1b_2\cdots b_n=$________。

题型训练·悟其神

8.4 (★★★，多选题)已知等比数列$\{a_n\}$中，满足$a_1=1$，公比$q=-2$，则(　　)。

A. 数列$\{2a_n+a_{n+1}\}$是等比数列

B. 数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是等比数列

C. 数列$\{a_na_{n+1}\}$是等比数列

D. 数列$\{\log_2|a_n|\}$是递减数列

8.5 (★★★，多选题)数列$\{a_n\}$满足$a_n=q^n(q>0,n\in\mathbf{N}^*)$，则以下结论正确的是(　　)。

A. $\{a_{2n}\}$是等比数列

B. $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是等比数列

C. $\{\lg a_n\}$是等差数列

D. $\{\lg a_n^2\}$是等差数列

8.6 (★★★)已知数列$\{a_n\}$为等差数列，公差$d\neq0$，$\{a_n\}$中的部分项组成的数列a_{k_1}，a_{k_2}，…，a_{k_n}，…恰为等比数列，其中$k_1=1$，$k_2=5$，$k_3=7$。

(1) 求k_n；

(2) 求证：$k_1+k_2+\cdots+k_n=3^n-n-1$。

核心例题9　等比数列前n项和结构特征

(★★)已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=p\times2^n+1$，则$\{a_n\}$为等比数列的充要条件

是(　　)。

A. $p=-1$　　B. $0<p<1$

C. $p=-2$　　D. $p>1$

【答案】A

【解析】方法一：$S_n=p\times2^n+1$。

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=p\times2+1=2p+1$；

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=p\times2^n+1-(p\times2^{n-1}+1)=p\times2^{n-1}$。因为$\{a_n\}$为等比数列，所以 $2p+1=p$，即 $p=-1$。

故选 A。

方法二：$\{a_n\}$为等比数列，其前 n 项和 $S_n=k-kq^n$，当 $S_n=p\times2^n+1$，对比系数得 $p=-1$。故选 A。

解题必备

已知 S_n 为等比数列$\{a_n\}$前 n 项和，当公比 $q\neq1$ 时，有：

(1) $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1}{1-q}-\dfrac{a_1}{1-q}q^n=k-kq^n$（系数互为相反数）；

(2) $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-qa_n}{1-q}=\dfrac{a_1}{1-q}-\dfrac{q}{1-q}a_n=A+Ba_n$（一次线性关系）。

题型训练·练其形

9.1 (★★)已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=2\lambda+(\lambda-3)2^n$（$\lambda$ 为常数），则 $\lambda=$(　　)。

A. -2　B. -1　C. 1　D. 2

9.2 (★★)等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=2^n-p$，则 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=$________。

9.3 (★★)在数列$\{a_n\}$中，其前 n 项和 $S_n=2^{n+1}+k$，若数列$\{a_n\}$是等比数列，则常数 k 的值为________。

题型训练·悟其神

9.4 (★★)已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=x\cdot3^{n-1}-\dfrac{1}{6}$，则 x 的值为(　　)。

A. $\dfrac{1}{3}$　B. $-\dfrac{1}{3}$　C. $\dfrac{1}{2}$　D. $-\dfrac{1}{2}$

9.5 (★★)已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=3^{n+2}+3t$，则 $t=$(　　)。

A. 1　B. -1　C. -3　D. -9

9.6 (★★★，多选题)已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=4^{n-1}+t$，则(　　)。

A. 首项 a_1 不确定　B. 公比 $q=4$

C. $a_2=3$　D. $t=-\dfrac{1}{4}$

核心例题 10　等比数列前 n 项和性质

(★★★)已知等比数列$\{a_n\}$的各项都是正数，S_n 为其前 n 项和，若 $S_4=8$，$S_8=24$，则 $S_{16}=$________。

【答案】120

【解析】因为等比数列$\{a_n\}$的各项都是正

数，S_n 为其前 n 项和，$S_4=8$，$S_8=24$，由等比数列的性质得 S_4，S_8-S_4，$S_{12}-S_8$，$S_{16}-S_{12}$ 成等比数列，所以 8，24－8，$S_{12}-24$，$S_{16}-S_{12}$ 成等比数列，则 $S_{12}-24=32$，$S_{16}-S_{12}=64$，解得 $S_{12}=56$，$S_{16}=120$。

解题必备

1. 当 $q\neq-1$（或 $q=-1$ 且 k 为奇数）时，S_k，$S_{2k}-S_k$，$S_{3k}-S_{2k}$，…是等比数列。
注：当 $q=-1$ 且 k 为偶数时，S_k，$S_{2k}-S_k$，$S_{3k}-S_{2k}$，…不是等比数列。
2. 若等比数列 $\{a_n\}$ 的项数为 $2n$，$S_{偶}$ 与 $S_{奇}$ 分别为偶数项与奇数项的和，则 $\dfrac{S_{偶}}{S_{奇}}=q$；若项数为 $2n+1$，则 $\dfrac{S_{奇}-a_1}{S_{偶}}=q$。
3. $\{a_n\}$ 是等比数列，S_n 是其前 n 项的和，则 $S_{m+n}=S_n+q^nS_m=S_m+q^mS_n$。
4. $\{a_n\}$ 是等比数列，S_n 是其前 n 项的和，当公比 $q\neq1$ 时，$\dfrac{S_m}{S_n}=\dfrac{1-q^m}{1-q^n}$。

题型训练 · 练其形

10.1 公比 $q\neq-1$ 的等比数列的前 3 项，前 6 项，前 9 项的和分别为 S_3，S_6，S_9，则下面等式成立的是（　　）。

A. $S_3+S_6=S_9$

B. $S_6^2=S_3S_9$

C. $S_3+S_6-S_9=S_6^2$

D. $S_3^2+S_6^2=S_3(S_6+S_9)$

10.2 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_2=3$，$S_4=15$，则 $S_6=$（　　）。

A. 31　B. 32　C. 63　D. 64

10.3 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $\dfrac{S_{10}}{S_5}=\dfrac{1}{2}$，则 $\dfrac{S_{15}}{S_5}=$（　　）。

A. $-\dfrac{3}{2}$　B. $-\dfrac{1}{3}$　C. $\dfrac{1}{4}$　D. $\dfrac{3}{4}$

题型训练 · 悟其神

10.4 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公比为 q，其前 n 项和为 S_n，下列命题中正确的是________。（写出全部正确命题的序号）

（1）若等比数列 $\{a_n\}$ 单调递增，则 $a_1>0$，且 $q>1$；

（2）数列：$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，$S_{4n}-S_{3n}$，…也是等比数列；

（3）$S_n=qS_{n-1}+a_1(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant2)$。

10.5 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $\dfrac{S_{2m}}{S_m}=\dfrac{33}{32}$，$\dfrac{a_{m+3}}{a_3}=\dfrac{m-4}{5m+7}$，则数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=$（　　）。

A. 2　B. -2　C. $\dfrac{1}{2}$　D. $-\dfrac{1}{2}$

10.6 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3=4$，且 $\dfrac{S_6}{S_3}=9$，则 $a_1+\dfrac{a_2}{2}+a_3+\dfrac{a_4}{2}+a_5+$

$\frac{a_6}{2}+\cdots+a_{19}+\frac{a_{20}}{2}=($　　$)$。

A. $\frac{2^{20}-1}{3}$　　B. $\frac{2^{21}-1}{3}$

C. $\frac{2^{20}-2}{3}$　　D. $\frac{2^{21}-2}{3}$

核心例题 11　等比数列最值

(多选题)设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,其前n项和为S_n,前n项积为T_n,并且满足条件$a_1>1$,$a_6a_7>1$,$\frac{a_6-1}{a_7-1}<0$,则下列结论正确的是(　　)。

A. $0<q<1$

B. $0<a_6a_8<1$

C. S_n 的最大值为S_7

D. T_n 的最大值为T_6

【答案】 ABD

【解析】 A:若$q<0$,则$a_6<0$,$a_7>0$,有$a_6a_7<0$与$a_6a_7>1$矛盾;若$q\geqslant1$,则因为$a_1>1$,所以$a_6>1$,$a_7>1$,则$\frac{a_6-1}{a_7-1}>0$与$\frac{a_6-1}{a_7-1}<0$矛盾,因此$0<q<1$,所以A正确。

B:因为$\frac{a_6-1}{a_7-1}<0$,所以$a_6>1>a_7>0$,因此$a_6a_8=a_7^2\in(0,1)$,即B正确。

C:因为$a_n>0$,所以S_n单调递增,即S_n的最大值不为S_7,C错误。

D:因为当$n\geqslant7$时,$a_n\in(0,1)$,当$1\leqslant n\leqslant6$时,$a_n\in(1,+\infty)$,所以T_n的最大值为T_6,即D正确。故选ABD。

解题必备

1. 已知$\{a_n\}$为等比数列,若$a_1a_2\cdots a_n=T_n$,则T_n,$\frac{T_{2n}}{T_n}$,$\frac{T_{3n}}{T_{2n}}$,…成等比数列。

2. 已知$\{a_n\}$为等比数列,若$a_1a_2\cdots a_n=T_n$,则

(1)当n为奇数时,$T_n=(\text{中项})^n$;

(2)当n为偶数时,$T_n=(\text{首末两项积})^{\frac{n}{2}}$。

题型训练·练其形

11.1 ()已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,若公比$q=-\frac{1}{2}$,$S_6=\frac{21}{4}$,则数列$\{a_n\}$的前n项积T_n的最大值为(　　)。

A. 16　　B. 64　　C. 128　　D. 256

11.2 ()在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=32$,$a_4=4$。记$T_n=a_1a_2\cdots a_n(n=1,2,\cdots)$,则数列$\{T_n\}$(　　)。

A. 有最大项,有最小项

B. 有最大项,无最小项

C. 无最大项,有最小项

D. 无最大项,无最小项

11.3 ()已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和与前n项积分别为S_n,T_n,公比为正数,且$a_3=16$,$S_3=112$,则使$T_n>1$成立的n的最大值为(　　)。

A. 8　　B. 9　　C. 12　　D. 13

题型训练 · 悟其神

11.4 (🌶🌶🌶)若一个数列的第 m 项等于这个数列的前 m 项的乘积，则称该数列为"m 积数列"，若正项等比数列$\{a_n\}$是一个"2020 积数列"，且 $a_1>1$，则其前 n 项的积最大时 n 的值为(　　)。

A. 1008 或 1009　　B. 1009 或 1010

C. 1010 或 2020　　D. 2020

11.5 (🌶🌶🌶🌶，多选题)已知等比数列$\{a_n\}$，公比为 q，其前 n 项积为 T_n，并且满足条件：$a_1>1$，$a_{2020}a_{2021}>1$，$(a_{2020}-1)\cdot(a_{2021}-1)<0$，则下列结论中正确的有(　　)。

A. $q>1$

B. $0<q<1$

C. $a_{2020}a_{2022}>1$

D. T_{2020} 的值是 T_n 中最大的

11.6 (🌶🌶🌶🌶，多选题)设$\{a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$是各项为正数的等比数列，$q$ 是其公比，K_n 是其前 n 项的积，且 $K_5<K_6$，$K_6=K_7>K_8$，则下列选项中成立的是(　　)。

A. $0<q<1$

B. $a_7=1$

C. $K_9>K_5$

D. K_6 与 K_7 均为 K_n 的最大值

达标全刷

1. (🌶🌶)各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_5=4$，则 $a_3=$(　　)。

A. 2　　B. -2　　C. $\sqrt{2}$　　D. $-\sqrt{2}$

2. (🌶🌶)等比数列$\{a_n\}$中，已知 $a_1=2$，$a_4=16$，数列$\{a_n\}$的公比为(　　)。

A. $\frac{1}{2}$　　B. -2　　C. 2　　D. $-\frac{1}{2}$

3. (🌶🌶)在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$q=2$，则数列的前 5 项和等于(　　)。

A. 31　　B. 32　　C. 63　　D. 64

4. (🌶🌶🌶)已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，则"$a_1>0$"是"$S_{2021}>0$"的(　　)。

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. (🌶🌶🌶)我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题："远望巍巍塔七层，红光点点倍加增，共灯三百八十一，请问尖头几盏灯？"意思是："一座 7 层塔共挂了 381 盏灯，且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的 2 倍，则塔的顶层共有灯多少？"现有类似问题：一座 5 层塔共挂了 363 盏灯，且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的 3 倍，则塔的中间一层共有灯(　　)。

A. 3 盏　　B. 9 盏　　C. 27 盏　　D. 81 盏

6. (🌶🌶🌶)公差不为 0 的等差数列$\{a_n\}$中，$2a_3-a_7^2+2a_{11}=0$，数列$\{b_n\}$是等比数列，且 $b_7=a_7$，则 $b_6b_8=$(　　)。

A. 2　　B. 4　　C. 8　　D. 16

7. 在等比数列$\{a_n\}$中，$0<a_1<a_4=1$，则能使不等式$\left(a_1-\dfrac{1}{a_1}\right)+\left(a_2-\dfrac{1}{a_2}\right)+\cdots+\left(a_n-\dfrac{1}{a_n}\right)\leqslant 0$成立的最大正整数$n$是（　　）。

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

8. 已知$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，$a_1=\dfrac{1}{8}$，$a_3=2a_2+1$，$b_n=\log_2 a_n$，则数列$\{b_n\}$的前 10 项和为________。

9. 设$\{a_n\}$是等比数列，其前n项的和为S_n，且$a_2=2$，$S_2-3a_1=0$。

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$S_n+a_n>48$，求n的最小值。

10. 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，公差为d，且$(S_6-S_3)^2=S_9$。

（1）若$d=-1$，求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$a_5<1$，$1<a_6<2$，求数列$\{d\cdot 2^{n-1}\}$的前 10 项和T_{10}的取值范围。

4.4 数学归纳法

核心笔记

1. 数学归纳法的概念

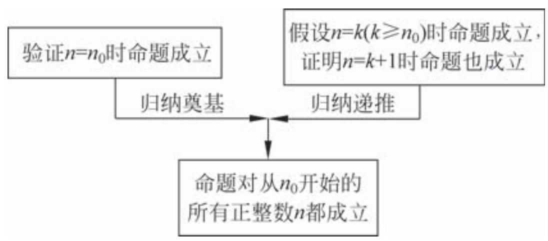
一般地，证明一个与正整数n有关的命题，可按下列步骤进行：

（1）（归纳奠基）证明当n取第一个值n_0（$n_0\in\mathbf{N}^*$）时命题成立；

（2）（归纳递推）假设$n=k$（$k\geqslant n_0$，$k\in\mathbf{N}^*$）时命题成立，证明当$n=k+1$时命题也成立。

只要完成这两个步骤，就可以断定命题对从n_0开始的所有正整数n都成立。

上述证明方法叫作数学归纳法，可以用框图表示为：



注意：（1）数学归纳法主要用于解决与正整数有关的数学问题，但并不是所有与正整数有关的问题都能用数学归纳法解决；

（2）n_0不一定都是 1。

2. 数学归纳法中两个步骤的作用及关系

步骤（1）是命题论证的基础，步骤（2）是判断命题的正确性能否递推下去的保证。

没有人生来愚笨，只因你还不够努力。（推荐人：@黄玉锦（浙江））

这两个步骤缺一不可，如果只有步骤(1)缺少步骤(2)，则无法判断 $n=k(k>n_0)$ 时命题是否成立；如果只有步骤(2)缺少步骤(1)这个基础，假设就失去了成立的前提，步骤(2)就没有意义了。注意步骤(2)中必须用到归纳假设。

核心例题 1 对数学归纳法的理解

(难度★★★)用数学归纳法证明不等式 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}>\frac{13}{14}$ 的过程中，由 $n=k$ 递推到 $n=k+1$ 时，不等式左边(　　)。

A. 增加了 $\frac{1}{2(k+1)}$

B. 增加了 $\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$

C. 增加了 $\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{k+1}$

D. 增加了 $\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}$

【答案】 D

【解析】 用数学归纳法证明不等式 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}>\frac{13}{14}$ 的过程中，当 $n=k$ 时，$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{k+k}>\frac{13}{14}$①。

当 $n=k+1$ 时，左边 $=\frac{1}{(k+1)+1}+\frac{1}{(k+1)+2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)+(k+1)}=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{k+k}\right)-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$②，②－①得，左边 $=\frac{1}{2k+2}+\frac{2}{2k+1}-\frac{1}{k+1}$。故选 D。

解题必备

1. 数学归纳法：通过假设 $n=k$ 成立，再结合其他条件去证 $n=k+1$ 成立即可。证明的步骤如下：

   (1) 归纳验证：验证 $n=n_0$(n_0 是满足条件的最小整数)时，命题成立；

   (2) 归纳假设：假设 $n=k(k\geqslant n_0, n\in\mathbf{N}^*)$ 成立，证明当 $n=k+1$ 时，命题也成立；

   (3) 归纳结论：得到结论：当 $n\geqslant n_0, n\in\mathbf{N}^*$ 时，命题均成立。

2. 数学归纳法要注意的地方：

   (1) 数学归纳法所证命题不一定从 $n=1$ 开始成立，可从任意一个正整数 n_0 开始，此时归纳验证从 $n=n_0$ 开始；

   (2) 归纳假设中，要注意 $k\geqslant n_0$，保证递推的连续性；

   (3) 归纳假设中的"当 $n=k$ 时，命题成立"是证明 $n=k+1$ 命题成立的重要条件，在证明的过程中要注意寻找 $n=k+1$ 与 $n=k$ 的联系。

题型训练 · 练其形

1.1 (难度★★)已知 n 为正偶数，用数学归纳法证

明 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}=2\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$ 时，若已假设 $n=k(k\geqslant 2$ 且 k 为偶数)时命题为真，则还需要用归纳假设再证 $n=($　　)时等式成立。

A. $n=k+1$　　B. $n=k+2$

C. $n=2k+2$　　D. $n=2(k+2)$

1.2 (🌶🌶)某个命题与自然数 n 有关，若 $n=k$ $(k\in\mathbf{N}^*)$时命题成立，那么可推得当 $n=k+1$ 时该命题也成立。现已知 $n=5$ 时，该命题不成立，那么可以推得(　　)。

A. $n=6$ 时该命题不成立

B. $n=6$ 时该命题成立

C. $n=4$ 时该命题不成立

D. $n=4$ 时该命题成立

1.3 (🌶🌶)用数学归纳法证明 $-1+3-5+\cdots+(-1)^n(2n-1)=(-1)^n n$，$n\in\mathbf{N}^*$ 成立。那么，“当 $n=1$ 时，命题成立”是“对 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，命题成立”的(　　)。

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

题型训练 · 悟其神

1.4 (🌶🌶🌶)用数学归纳法证明：$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n}\geqslant\frac{5}{6}$ 时，从 $n=k$ 到 $n=k+1$，不等式左边需添加的项是(　　)。

A. $\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}$

B. $\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}-\frac{1}{k+1}$

C. $\frac{1}{3k+1}$

D. $\frac{1}{3k+3}$

1.5 (🌶🌶🌶)用数学归纳法证明：$(n+1)(n+2)\cdots(n+n)=2^n\times1\times3\times\cdots\times(2n-1)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$时，从“$n=k$ 到 $n=k+1$”等式左边的变化结果是(　　)。

A. 增乘一个因式 $2k+1$

B. 增乘两个因式 $2k+1$ 和 $2k+2$

C. 增乘一个因式 $2(2k+1)$

D. 增乘 $2k+1$ 同时除以 $k+1$

1.6 (🌶🌶🌶)用数学归纳法证明不等式 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}>\frac{n}{2}-1(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$时，以下说法正确的是(　　)。

A. 第一步应该验证当 $n=1$ 时不等式成立

B. 从“$n=k$ 到 $n=k+1$”左边需要增加的代数式是 $\frac{1}{2^k}$

C. 从“$n=k$ 到 $n=k+1$”左边需要增加 2^k 项

D. 以上说法都不对

核心例题 2　等式的证明

(🌶🌶)用数学归纳法证明：$1\times4+2\times7+\cdots+n(3n+1)=n(n+1)^2(n\in\mathbf{N}^*)$。

【证明】(1) 当 $n=1$ 时，$3n+1=4$，等式左边 $=1\times4=4$，右边 $=1\times2^2=4$，等式成立。

(2) 设当 $n=k$ 时，等式成立，即 $1\times4+2\times7+\cdots+k(3k+1)=k(k+1)^2$，则当 $n=k+1$ 时，$1\times4+2\times7+3\times10+\cdots+k(3k+1)+(k+1)(3k+4)=k(k+1)^2+(k+1)(3k+4)=(k+1)(k^2+k+3k+4)=(k+1)(k+1+1)^2$，即当 $n=k+1$ 时等式也成立。

由(1)(2)知，等式对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 都有 $1\times4+2\times7+\cdots+n(3n+1)=n(n+1)^2$。

解题必备

数学归纳法证明等式的思路和注意点

(1) 思路：用数学归纳法证明等式问题，要“先看项”，弄清等式两边的构成规律，等式两边各有多少项，初始值 n_0 是多少。

(2) 注意点：由 $n=k$ 时等式成立，推出 $n=k+1$ 时等式成立，一要找出等式两边的变化(差异)，明确变形目标；二要充分利用归纳假设，进行合理变形，正确写出证明过程，不利用归纳假设的证明，就不是数学归纳法。

题型训练 · 练其形

2.1 ()：用数学归纳法证明：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}(n\in\mathbf{N}^*)$。

2.2 ()用数学归纳法证明：$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2(n\in\mathbf{N}^*)$。

2.3 ()用数学归纳法证明：$1\times n+2(n-1)+\cdots+n\times1=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}(n\in\mathbf{N}^*)$。

题型训练 · 悟其神

2.4 ()用数学归纳法证明：$-1+3-5+\cdots+(-1)^n(2n-1)=(-1)^n n(n\in\mathbf{N}^*)$。

2.5 ()用数学归纳法证明等式 $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$。

2.6 ()设 $n\in\mathbf{N}^*$，证明：$1(n^2-1^2)+2(n^2-2^2)+\cdots+n(n^2-n^2)=\dfrac{n^2(n-1)(n+1)}{4}$。

核心例题 3 不等式的证明

()已知数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=2n$，求证：对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，不等式 $\dfrac{b_1+1}{b_1}\cdot\dfrac{b_2+1}{b_2}\cdots\dfrac{b_n+1}{b_n}>\sqrt{n+1}$ 都成立。

【证明】由 $b_n=2n$ 得 $\dfrac{b_n+1}{b_n}=\dfrac{2n+1}{2n}$，所以 $\dfrac{b_1+1}{b_1}\cdot\dfrac{b_2+1}{b_2}\cdots\dfrac{b_n+1}{b_n}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{5}{4}\times\dfrac{7}{6}\times\cdots\times\dfrac{2n+1}{2n}$，用数学归纳法证明不等式 $\dfrac{3}{2}\times\dfrac{5}{4}\times$

$\frac{7}{6}\times\cdots\times\frac{2n+1}{2n}>\sqrt{n+1}$成立，证明如下：

（1）当 $n=1$ 时，左边 $=\frac{3}{2}$，右边 $=\sqrt{2}$，因为 $\frac{3}{2}>\sqrt{2}$，所以不等式成立。

（2）假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时不等式成立，

即 $\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}\times\cdots\times\frac{2k+1}{2k}>\sqrt{k+1}$ 成立，

则当 $n=k+1$ 时，左边 $=\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}\times\cdots\times\frac{2k+1}{2k}\times\frac{2k+3}{2k+2}>\sqrt{k+1}\times\frac{2k+3}{2k+2}$

$$=\sqrt{\frac{(2k+3)^2}{4(k+1)}}$$

$$=\sqrt{\frac{4k^2+12k+9}{4(k+1)}}>\sqrt{\frac{4k^2+12k+8}{4(k+1)}}$$

$$=\sqrt{\frac{4(k^2+3k+2)}{4(k+1)}}$$

$$=\sqrt{\frac{4(k+1)(k+2)}{4(k+1)}}=\sqrt{k+2}$$

$=\sqrt{(k+1)+1}=$ 右边。

所以当 $n=k+1$ 时，不等式也成立。

由(1)(2)可得不等式 $\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}\times\cdots\times\frac{2n+1}{2n}>\sqrt{n+1}$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立，即原不等式成立。

解题必备

数学归纳法证明不等式的适用范围及关键

（1）适用范围：当遇到与正整数 n 有关的不等式证明时，若用其他办法不容易证，则可考虑应用数学归纳法。

（2）关键：由 $n=k$ 时命题成立证 $n=k+1$ 时命题也成立，在归纳假设使用后可运用比较法、综合法、分析法、放缩法等来加以证明，充分应用均值不等式、不等式的性质等放缩技巧，使问题得以简化。

题型训练 · 练其形

3.1（🌶🌶🌶）试用数学归纳法证明：$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}>\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$。

3.2（🌶🌶🌶）在数列$\{a_n\}$中，已知 $a_1=a(a>2)$，且 $a_{n+1}=\frac{a_n^2}{2(a_n-1)}(n\in\mathbf{N}^*)$，求证：$a_n>2$。

3.3（🌶🌶🌶）各项都为正数的数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}^2-a_n^2=2$。

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求证：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\leqslant\sqrt{2n-1}$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立。

题型训练 · 悟其神

3.4（🌶🌶🌶）用数学归纳法证明：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+$

$\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}\leqslant n(n\in\mathbf{N}^*)$。

3.5 (🌶🌶🌶)证明：不等式 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}>\frac{n}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$恒成立。

3.6 (🌶🌶🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$前 n 项和为 S_n，且满足 $a_1=1,a_n=-S_nS_{n-1}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$。

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 记 T_n 为$\{a_{n+1}S_n\}$的前 n 项和 $n\in\mathbf{N}^*$，证明：$T_n\geqslant-\frac{3}{4}+\frac{1}{2n(n+1)}$。

核心例题 4 整除的证明

(🌶🌶)用数学归纳法证明：对任意正整数 n，$4^n+15n-1$ 能被 9 整除。

【证明】(1) 当 $n=1$ 时，$4^n+15n-1=18$，能被 9 整除，故当 $n=1$ 时，$4^n+15n-1$ 能被 9 整除。

(2) 假设当 $n=k$ 时，命题成立，即 $4^k+15k-1$ 能被 9 整除，则当 $n=k+1$ 时，$4^{k+1}+15(k+1)-1=4(4^k+15k-1)-9(5k-2)$也能被 9 整除。

综合(1)(2)可得，对任意正整数 n，$4^n+15n-1$ 能被 9 整除。

解题必备

与 $n\in\mathbf{N}^*$ 有关的整除证明可以用数学归纳法来证明，一般，证明步骤如下：

(1) 证明当 n 取第一个值 n_0 时命题成立。

(2) 假设当 $n=k(k\geqslant n,k\in\mathbf{N}^*)$时命题成立，证明当 $n=k+1$ 时命题也成立(证明时以证的条件和假设的条件作为论证的依据进行推导，在接下来的推导过程中不能直接将 $n=k+1$ 代入假设的原式中去)。

综合(1)(2)，即可得所证命题对 $n\in\mathbf{N}^*$ 均成立(两步缺一不可)。

题型训练 · 练其形

4.1 (🌶🌶)用数学归纳法证明命题“当 n 为奇数时，x^n+y^n 能被 $x+y$ 整除”，在证明 $n=1$ 正确后，归纳假设应写成(　　)。

A. 假设 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$时命题成立

B. 假设 $n\leqslant k(k\in\mathbf{N}^*)$时命题成立

C. 假设 $n=2k+1(k\in\mathbf{N}^*)$时命题成立

D. 假设 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$时命题成立

4.2 (🌶🌶)用数学归纳法证明“$5^n-2^n(n\in\mathbf{N}^*)$能被 3 整除”的过程中，$n=k+1$ 时，为了使用假设，应将 $5^{k+1}-2^{k+1}$ 变形为(　　)。

A. $5(5^k-2^k)+3\times2^k$

如果一件事你不相信自己能做到，那你就真的做不到！因为如果连希望都丢掉了，你又怎么做得到？(推荐人：@刘志坚(浙江))

B. $(5^k-2^k)+4\times5^k-2^k$

C. $(5-2)(5^k-2^k)$

D. $2(5^k-2^k)-3\times5^k$

4.3 ( )用数学归纳法证明“$(3n+1)\times7^n-1(n\in\mathbf{N}^*)$能被 9 整除”，在假设 $n=k$ 时命题成立之后，需证明 $n=k+1$ 时命题也成立，这时除了用归纳假设外，还需证明的是余项(　　)能被 9 整除。

A. $3\times7^k+6$　　B. $3\times7^{k+1}+6$

C. $3\times7^k-3$　　D. $3\times7^{k+1}-3$

题型训练 · 悟其神

4.4 ( )用数学归纳法证明：$11^{n+2}+12^{2n-1}$ 能被 133 整除$(n\in\mathbf{N}^*)$。

4.5 ( )已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=0,a_2=1$，当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

求证：数列$\{a_n\}$的第 $4m+1(m\in\mathbf{N}^*)$项能被 3 整除。

4.6 ( )求证：$a^{n+1}+(a+1)^{2n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$能被 a^2+a+1 整除。

核心例题 5　归纳、猜想及证明

( )已知正项数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，前 n 项和 S_n 满足 $4S_n=(a_n+1)^2(n\in\mathbf{N}^*)$。

(1) 求 a_2,a_3,a_4 的值；

(2) 猜测数列$\{a_n\}$的通项公式，并用数学归纳法证明。

【答案】(1) $a_2=3,a_3=5,a_4=7$；(2) 见解析

【解析】(1) 当 $n=2$ 时，$4S_2=(a_2+1)^2$，$4(1+a_2)=(a_2+1)^2$，解得 $a_2=3$。当 $n=3$ 时，$4S_3=(a_3+1)^2$，$4(S_2+a_3)=(a_3+1)^2$，则 $a_3=5$。当 $n=4$ 时，$4S_4=(a_4+1)^2$，$a_4=7$。

(2) 猜想得 $a_n=2n-1$。

下面用数学归纳法证明：

(1) $n=1,2$ 时，$a_1=1,a_2=3$，满足 $a_n=2n-1$。

(2) 假设 $n=k$ 时，结论成立，即 $a_k=2k-1$，则 $n=k+1$ 时，$4S_{k+1}=(a_{k+1}+1)^2$，则 $4(S_k+a_{k+1})=(a_k+1)^2+4a_{k+1}=(a_{k+1}+1)^2$，将 $a_k=2k-1$ 代入化简得 $(a_{k+1}-1)^2=4k^2$，即 $a_{k+1}=2k+1=2(k+1)-1$，故 $n=k+1$ 时结论成立。

综合(1)(2)可知，$a_n=2n-1$。

解题必备

1. “归纳-猜想-证明”的一般步骤

(1) 验证 $n=1$ 时，等式成立；

(2) 假设 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$成立(把式子中 n

换成 k 即可)，证明当 $n=k+1$ 时，该式子也成立；

(3) 综上，对 $\forall x\in\mathbf{N}^*$ 都成立。

2. 与“归纳-猜想-证明”相关的常用题型的处理策略

(1) 与函数有关的证明：由已知条件验证前几个特殊值正确得出猜想，充分利用已知条件并用数学归纳法证明。

(2) 与数列有关的证明：利用已知条件，当直接证明遇阻时，可考虑应用数学归纳法。

题型训练 · 练其形

5.1 (🔥🔥🔥)已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，点$(a_n,a_{n+1})(n\in\mathbf{N}^*)$在直线 $y=2x+1$ 上。

(1) 求 a_2,a_3,a_4 的值，并猜想数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 用数学归纳法证明(1)中你的猜想。

5.2 (🔥🔥🔥)设数列$\{a_n\}$满足 $a_1=3$，$a_{n+1}=a_n^2-2na_n+2$，$n=1,2,\cdots$。

(1) 求 a_2,a_3,a_4 的值，并猜想数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 用数学归纳法证明你的猜想。

5.3 (🔥🔥🔥)在数列$\{a_n\}$中，已知 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+2a_n}$。

(1) 计算 a_2,a_3,a_4；

(2) 根据计算结果猜想出$\{a_n\}$的通项公式 a_n，并用数学归纳法证明你的结论。

题型训练 · 悟其神

5.4 (🔥🔥🔥)数列$\{a_n\}$满足 $S_n=2n-a_n(n\in\mathbf{N}^*)$。

(1) 计算 a_1,a_2,a_3,a_4，并由此猜想通项公式 a_n；

(2) 用数学归纳法证明(1)中的猜想。

5.5 (🔥🔥🔥)设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且对任意的正整数 n 都满足$(S_n-1)^2=a_nS_n$。

(1) 求 S_1,S_2,S_3 的值，猜想 S_n 的表达式；

(2) 用数学归纳法证明(1)中猜想的 S_n 的表达式的正确性。

5.6 (🔥🔥🔥)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_2=14$，且 $a_n=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right)S_n-2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$。

(1) 求$\frac{S_1}{2},\frac{S_2}{4},\frac{S_3}{8}$；

(2) 由(1)猜想数列$\left\{\frac{S_n}{2^n}\right\}$的通项公式，并用数学归纳法证明。

达标全刷

1. (🌶🌶)已知 $f(n)=\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$，则(　　)。

A. $f(n)$中共有 n 项，当 $n=2$ 时，$f(2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

B. $f(n)$中共有 $n+1$ 项，当 $n=2$ 时，$f(2)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

C. $f(n)$中共有 n^2-n+2 项，当 $n=2$ 时，$f(2)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

D. $f(n)$中共有 n^2-n+1 项，当 $n=2$ 时，$f(2)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

2. (🌶🌶)用数学归纳法证明：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<n(n\in\mathbf{N}^*,n>1)$时，第一步应验证的不等式是(　　)。

A. $1+\frac{1}{2}<2$　　B. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<2$

C. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<3$　　D. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}<4$

3. (🌶🌶🌶)用数学归纳法证明：“$2^n>n^2+1$对于 $n\geqslant n_0$ 的正整数 n 成立”时，第一步证明中的起始值 n_0 应取(　　)。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 5

4. (🌶🌶🌶)用数学归纳法证明：$1+2+3+\cdots+n^2=\frac{n^2(n^2+1)}{2}$，则当 $n=k+1$ 时，左端应在 $n=k$ 的基础上加上(　　)。

A. k^2+1

B. $(k+1)^2$

C. $(k^2+1)+(k^2+2)+\cdots+(k+1)^2$

D. $\frac{(k^2+1)(k^2+2)}{2}$

5. (🌶🌶🌶)用数学归纳法证明：$1+2+3+\cdots+2n=n(2n+1)$时，从 $n=k$ 推证 $n=k+1$ 时，左边增加的代数式是(　　)。

A. $4k+3$　　B. $4k+2$

C. $2k+2$　　D. $2k+1$

6. (🌶🌶🌶)用数学归纳法证明：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<n(n\geqslant2)$时，由 $n=k$ 的假设证明 $n=k+1$ 时，不等式左边需增加的项数为(　　)。

A. 2^{k-1}　　B. 2^k-1

C. 2^k　　D. 2^k+1

7. (🌶🌶🌶)用数学归纳法证明关于 n 的恒等式，当 $n=k$ 时，表达式为 $1\times4+2\times7+\cdots+k(3k+1)=k(k+1)^2$，则当 $n=k+1$ 时，表达式为________。

人生没有那么多的假设，现实是一个一个真实的耳光，打在你的脸上，喊疼毫无意义，唯有一往无前。(推荐人：@史倩倩(陕西))

8.（🌶🌶🌶）在证明：$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}$，由$n=k$到$n=k+1$的变化过程中，左边增加的部分是什么，右边增加的部分是什么？

9.（🌶🌶🌶）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=-\frac{2}{3}$，$a_n=-\frac{1}{a_{n-1}+2}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$。

(1) 求a_2,a_3；

(2) 猜想数列通项公式a_n，并用数学归纳法给出证明。

10.（🌶🌶🌶🌶）已知正项数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\sqrt{\frac{n}{a_n^2}+n}\,(n\in\mathbf{N}^*)$。

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 令$b_n=(n+1)a_n-na_{n+1}$，记数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，求证：$T_n<\frac{1}{3}(n+1)^{\frac{3}{2}}$。

4.5 递推公式求通项公式

核心笔记

已知数列的递推公式，求通项公式的常见类型及解法如下：

(1) $a_{n+1}=a_n+f(n)$：常用累加法，即利用恒等式$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$求通项公式。

(2) $a_{n+1}=f(n)a_n$：常用累乘法，即利用恒等式$a_n=a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}$求通项公式。

(3) $a_{n+1}=pa_n+q$（其中p,q为常数，$p\neq 0,1$）：先用待定系数法把原递推公式转化为$a_{n+1}-k=p(a_n-k)$，其中$k=\frac{q}{1-p}$，进而转化为等比数列进行求解。

(4) $a_{n+1}=pa_n+q^n$：两边同时除以q^{n+1}，然后可转化为类型(3)，利用待定系数法进行求解；两边同时除以p^{n+1}，然后可转化为类型(1)，利用累加法进行求解。

(5) $a_{n+1}=pa_n+qn+t$：把原递推公式转化为$a_{n+1}-xn-y=p(a_n-xn-y)$，解法同类型(3)。

(6) $a_{n+1}=pa_n^r$：把原递推公式两边同时取对数，然后可转化为类型(3)，利用待定系数法进行求解。

(7) $a_{n+1}=\frac{pa_n}{qa_n+r}$：把原递推公式两边同时取倒数，然后可转化为类型(3)，利用待定系数法进行求解。

(8) $a_{n+1}+a_n=f(n)$：易得 $a_{n+2}-a_n=f(n+1)-f(n)$，然后分 n 为奇数、偶数两种情况分类讨论即可。

(9) $a_{n+1}a_n=f(n)$：易得 $\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{f(n+1)}{f(n)}$，然后分 n 为奇数、偶数两种情况分类讨论即可。

核心例题 1 数列通项累加法

( )已知 $a_1=2$，$a_{n+1}-a_n=2n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_n=$( )。

A. $n+1$ B. $2n+1$

C. n^2+1 D. $2n^2+1$

【答案】C

【解析】因为 $a_{n+1}-a_n=2n+1$，则当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n-a_{n-1}=2n-1$，…，$a_3-a_2=5$，$a_2-a_1=3$，则 $a_n-a_{n-1}+\cdots+a_3-a_2+a_2-a_1=2n-1+\cdots+5+3$，化简得 $a_n-a_1=\frac{(n-1)(2n-1+3)}{2}=n^2-1$。又 $a_1=2$，则 $a_n=n^2+1$，经检验 $a_1=2$ 也符合上式，故 $a_n=n^2+1(n\in\mathbf{N}^*)$。

故选 C。

解题必备

形如 $a_{n+1}-a_n=f(n)$ 或 $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 求通项可以使用累加法，步骤如下：

第 1 步：将递推公式写成 $a_{n+1}-a_n=f(n)$；

第 2 步：依次写出 a_n-a_{n-1}，…，a_2-a_1，并将它们累加起来；

第 3 步：得到 a_n-a_1 的值，解出 a_n；

第 4 步：检验 a_1 是否满足所求通项公式，若成立，则合并；若不成立，则写出分段形式。

题型训练 · 练其形

1.1 ( )数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_n-a_{n-1}=n(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_n=$________。

1.2 ( )设数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+n+1$，则通项 $a_n=$ ________。

1.3 ( )如果数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1$，$a_n-a_{n-1}=2^{n-1}(n\geqslant 2)$，则 $a_n=$( )。

A. $2^{n+1}-1$ B. $(n-1)\cdot 2^{n-1}+1$

C. 2^n-1 D. 2^{n-1}

题型训练 · 悟其神

1.4 ( )已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n^2+n}$，则 $a_n=$________。

人这辈子，有人羡慕你，有人讨厌你，有人嫉妒你，有人看不起你，没关系，他们都是外人。生活就是这样，你所做的一切不能让每个人都满意。不要为了讨好别人，而丢失自己的本性。(推荐人：@郭晨岚(河南))

1.5 （🌶🌶🌶）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{4n^2-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，则$a_n=$________。

1.6 （🌶🌶🌶）在数列$\{a_n\}$中，$a_1=0$，$a_{n+1}=a_n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$，则$\{a_n\}$的通项公式为（　　）。

A. $a_n=\ln n$

B. $a_n=(n-1)\ln(n+1)$

C. $a_n=n\ln n$

D. $a_n=\ln n+n-2$

核心例题 2　数列通项累乘法

（🌶🌶🌶）已知$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$(n+1)a_n=2na_{n+1}$，则数列$\{a_n\}$的通项公式是________。

【答案】 $a_n=\frac{n}{2^{n-1}}(n\in\mathbf{N}^*)$

【解析】 已知$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$(n+1)a_n=2na_{n+1}$，化简整理可得$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)}{2n}$，所以递推可得$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n}{2(n-1)}$，$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\frac{n-1}{2(n-2)}$，

…

$\frac{a_3}{a_2}=\frac{3}{2\times2}$，$\frac{a_2}{a_1}=\frac{2}{2\times1}$。等式两边分别相乘可得$\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\cdots\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}=\frac{n}{2(n-1)}\cdot\frac{n-1}{2(n-2)}\cdot\frac{n-2}{2(n-3)}\cdots\frac{3}{2\times2}\times\frac{2}{2\times1}$即$\frac{a_n}{a_1}=\frac{n}{2^{n-1}}$，所以$a_n=a_1\cdot\frac{n}{2^{n-1}}=\frac{n}{2^{n-1}}(n\in\mathbf{N}^*)$。

解题必备

形如$\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$或$a_{n+1}=a_n\times f(n)$求通项可以使用累乘法，步骤如下：

第1步：将递推公式写成$\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$；

第2步：依次写出$\frac{a_n}{a_{n-1}},\cdots,\frac{a_2}{a_1}$，并将它们累乘起来；

第3步：得到$\frac{a_n}{a_1}$的值，解出a_n；

第4步：检验a_1是否满足所求通项公式，若成立，则合并；若不成立，则写出分段形式。

题型训练·练其形

2.1 （🌶🌶🌶）已知数列$\{a_n\}$满足$(n+2)\cdot a_{n+1}=(n+1)a_n$，且$a_2=\frac{1}{3}$，则$a_n=$（　　）。

A. $\frac{1}{n+1}$　　B. $\frac{1}{2n-1}$

C. $\frac{n-1}{2n-1}$　　D. $\frac{n-1}{n+1}$

2.2 （🌶🌶🌶）已知数列$\{a_n\}$的递推公式为

$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，$a_1=1$，则通项公式 $a_n=$________。

2.3（🌶🌶🌶）已知 $a_1=2$，$a_{n+1}=2^n a_n$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 等于（　　）。

A. $2^{\frac{n^2-n+1}{2}}$　　B. $2^{\frac{n^2+n+1}{2}}$

C. $2^{\frac{n^2-n+2}{2}}$　　D. $2^{\frac{n^2-n-2}{2}}$

题型训练 · 悟其神

2.4（🌶🌶🌶）已知 $a_1=1$，$a_n=n(a_{n+1}-a_n)(n\in\mathbf{N}^*)$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是（　　）。

A. $2n-1$　　B. $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1}$

C. n^2　　D. n

2.5（🌶🌶🌶）若数列 $\{a_n\}$ 首项为 1，数列 $\{b_n\}$ 为等比数列，且 $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$，$b_{10}b_{11}=2$，则 $a_{21}=$________。

2.6（🌶🌶🌶）已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，前 n 项和为 S_n，对任意的正整数 n，都有 $2S_n=(n+1)a_n$ 恒成立。则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=$________。

核心例题 3　数列通项构造法（一）

（🌶🌶🌶）设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的正项数列，且 $(n+1)a_{n+1}^2-na_n^2+a_{n+1}a_n=0(n=1,2,\cdots)$，则它的通项公式是 $a_n=$________。

【答案】 $\frac{1}{n}$

【解析】 $(n+1)a_{n+1}^2-na_n^2+a_{n+1}a_n=0$，可化为 $(a_{n+1}+a_n)((n+1)a_{n+1}-na_n)=0$，因为 $\{a_n\}$ 为正项数列，所以 $(n+1)\cdot a_{n+1}-na_n=0$，则 $\{na_n\}$ 为常数列，而 $1\times a_1=1$，故 $na_n=1$，即 $a_n=\frac{1}{n}$。

解题必备

1. 若 $a_{n+1}=\frac{n}{n+1}\cdot a_n$，则 $(n+1)a_{n+1}=na_n$，构造 $b_n=na_n$，即 $\{b_n\}$ 为常数数列。

2. 若 $a_{n+1}=\frac{n+1}{n}\cdot a_n$，则 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}$，构造 $b_n=\frac{a_n}{n}$，即 $\{b_n\}$ 为常数数列。

3. 若 $a_{n+1}=\frac{n}{n+2}\cdot a_n$，则 $a_{n+1}=\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}\cdot a_n$，$(n+1)(n+2)\cdot a_{n+1}=n(n+1)a_n$，构造 $b_n=n(n+1)\cdot a_n$，即 $\{b_n\}$ 为常数数列。

4. 若 $a_{n+1}=\frac{n+2}{n}\cdot a_n$，则 $a_{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}\cdot a_n$，$\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}=\frac{a_n}{n(n+1)}$，构造 $b_n=\frac{a_n}{n(n+1)}$，即 $\{b_n\}$ 为常数数列。

题型训练 · 练其形

3.1（🌶🌶）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，且

$na_{n+1}=(n+1)a_n$，则 $a_n=$(　　)。

A. $n+1$　　B. n

C. $n-1$　　D. $n-2$

3.2 (🔥🔥🔥)设数列$\{a_n\}$满足 $na_{n+1}-(n+1)\cdot a_n=\frac{n}{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$，$a_1=\frac{1}{2}$，则 $a_n=$________。

3.3 (🔥🔥🔥)在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$(2n+1)\cdot a_n=(2n-3)a_{n-1}(n\geqslant 2)$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为________。

题型训练 · 悟其神

3.4 (🔥🔥🔥)在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}=a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_n=$________。

3.5 (🔥🔥🔥)在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_n=\frac{n}{n-1}\cdot a_{n-1}+2n\times 3^{n-2}(n\in\mathbf{N}^*, n\geqslant 2)$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为________。

3.6 (🔥🔥🔥🔥)已知数列$\{a_n\}$满足$\frac{a_n}{n}=\frac{n-1}{n}\left(\frac{a_{n+1}}{n+1}-1\right)+1(n\in\mathbf{N}^*)$，且 $a_2=6$，则$\{a_n\}$的通项公式为________。

核心例题 4 数列通项构造法(二)

(🔥🔥🔥)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=-2$，且 $a_{n+1}=3a_n+6$，则 $a_n=$________。

【答案】$a_n=3^{n-1}-3$

【解析】由 $a_{n+1}=3a_n+6$ 可得 $a_{n+1}+3=3(a_n+3)$，因为 $a_1=-2$，所以 $a_1+3=1$，即$\{a_n+3\}$是以 1 为首项、3 为公比的等比数列，所以 $a_n+3=3^{n-1}$，即 $a_n=3^{n-1}-3$。

解题必备

形如 $a_{n+1}=pa_n+q$(其中 p,q 均为常数，且 $pq(p-1)\neq 0$)，求通项可以使用待定系数法，步骤如下：

第 1 步：假设将递推公式改写为 $a_{n+1}+t=p(a_n+t)$；

第 2 步：由待定系数法，解得 $t=\frac{q}{p-1}$；

第 3 步：写出数列$\left\{a_n+\frac{q}{p-1}\right\}$的通项公式；

第 4 步：写出数列$\{a_n\}$通项公式。

题型训练 · 练其形

4.1 (🔥🔥🔥)数列$\{a_n\}$中，若 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+3(n\geqslant 1)$，则该数列的通项 $a_n=$(　　)。

A. $2^{n+1}-3$　　B. 2^n-3

C. 2^n+3　　D. $2^{n-1}-3$

4.2 (🔥🔥🔥)数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+2$，则 $a_n=$________。

4.3 (🌶🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_n=3a_{n-1}+4(n\in\mathbf{N}^*$，且$n\geqslant 2)$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为________。

题型训练 · 悟其神

4.4 (🌶🌶🌶)设数列$\{a_n\}$中前n项的和$S_n=2a_n+3n-7$，则$a_n=$________。

4.5 (🌶🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_1=1$，$2S_n=a_{n+1}+1$，则$S_n=$________。

4.6 (🌶🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{2}$且$a_{n+1}=3a_n+1$。

(1) 证明数列$\left\{a_n+\frac{1}{2}\right\}$是等比数列；

(2) 设数列$\{b_n\}$满足$b_1=1$，$b_{n+1}-b_n=a_n+\frac{1}{2}$，求数列$\{b_n\}$的通项公式。

核心例题 5　数列通项构造法(三)

(🌶🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{5}{6}$，$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，则$a_n=$________。

【答案】$\frac{3}{2^n}-\frac{2}{3^n}$

【解析】方法一：将$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$两边分别乘以$2^{n+1}$，得$2^{n+1}\cdot a_{n+1}=\frac{2}{3}(2^n\cdot a_n)+1$。令$b_n=2^n\cdot a_n$，则$b_{n+1}=\frac{2}{3}b_n+1$，根据待定系数法，得$b_{n+1}-3=\frac{2}{3}(b_n-3)$。所以数列$\{b_n-3\}$是首项为$b_1-3=2\times\frac{5}{6}-3=-\frac{4}{3}$、公比为$\frac{2}{3}$的等比数列，有$b_n-3=-\frac{4}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，即$b_n=3-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$，于是$a_n=\frac{b_n}{2^n}=\frac{3}{2^n}-\frac{2}{3^n}$。

方法二：将$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$两边分别乘以$3^{n+1}$，得$3^{n+1}a_{n+1}=3^na_n+\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$。令$b_n=3^n\cdot a_n$，则$b_{n+1}=b_n+\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$，所以$b_n-b_{n-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^n$，$b_{n-1}-b_{n-2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$，…，$b_2-b_1=\left(\frac{3}{2}\right)^2$。将以上各式叠加，得$b_n-b_1=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{3}{2}\right)^n$，又$b_1=3a_1=3\times\frac{5}{6}=\frac{5}{2}=1+\frac{3}{2}$，所以$b_n=1+\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{3}{2}\right)^n=\frac{1\times\left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right]}{1-\frac{3}{2}}=2\times\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-$

2，即 $b_n=2\times\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-2$，故 $a_n=\frac{b_n}{3^n}=\frac{3}{2^n}-\frac{2}{3^n}$。

解题必备

形如 $a_{n+1}=pa_n+q^n$（其中 p,q 为常数，且 $pq(p-1)\neq0$），求通项可以使用构造法（两种方法），步骤如下：

方法一：构造后利用待定系数法

第 1 步：在递推公式两边同除以 q^{n+1}，得 $\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}}=\frac{p}{q}\cdot\frac{a_n}{q^n}+\frac{1}{q}$；

第 2 步：利用待定系数法，求数列 $\left\{\frac{a_n}{q^n}\right\}$ 的通项公式；

第 3 步：写出数列 $\{a_n\}$ 通项公式。

方法二：构造后利用累加法

第 1 步：在递推公式两边同除以 p^{n+1}，得 $\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\frac{a_n}{p^n}+\frac{q^n}{p^{n+1}}$；

第 2 步：利用累加法，求数列 $\left\{\frac{a_n}{p^n}\right\}$ 的通项公式；

第 3 步：写出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

题型训练·练其形

5.1（🌶🌶🌶）以下数表的构造思路源于我国南宋数学家杨辉所著的《详解九章算术》一书中的“杨辉三角形”。

1	2	3	4	5	…	2017	2018	2019	2020
3	5	7	9		…	4035	4037	4039	
8	12	16			…	8072	8076		
20	28				…	16148			

此表由若干个数字组成，从第二行起，每一行中的数字均等于其“肩上”两数之和。若每行的第一个数构成有穷数列 $\{a_n\}$，并且得到递推关系为 $a_n=2a_{n-1}+2^{n-2}$，$a_1=1$，则 $a_n=$________。

5.2（🌶🌶🌶）在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=-1$，$a_{n+1}=2a_n+4\times3^{n-1}$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为________。

5.3（🌶🌶🌶）数列 $\{a_n\}$ 满足递推式 $2a_n-a_{n-1}=3\times2^{n-1}(n\geqslant2)$，且 $3a_1=2a_2$，则 $a_n=$________。

题型训练·悟其神

5.4（🌶🌶🌶）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n=2a_n+(-1)^n$，$n\in\mathbf{N}^*$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为________。

5.5（🌶🌶🌶）数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}=S_n+3^n(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant1)$，则数列 $\{S_n\}$ 的通项公式为________。

5.6（🌶🌶🌶）数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=11$，$a_{n+1}=3a_n+3^{n+1}-2^n$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为________。

核心例题 6　数列通项构造法(四)

(🌶🌶🌶)已知 $a_1=1$，$n\geqslant 2$ 时，$a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+2n-1$，则 $\{a_n\}$ 的通项公式为________。

【答案】 $a_n=\frac{3}{2^{n-1}}+4n-6$

【解析】 设 $a_n+An+B=\frac{1}{2}[a_{n-1}+A(n-1)+B]$，则 $a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}-\frac{1}{2}An-\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B$，可得 $\begin{cases}-\frac{1}{2}A=2,\\-\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=-4,\\B=6,\end{cases}$ 因此 $a_1-4+6=3$。所以 $\{a_n-4n+6\}$ 是以 3 为首项、$\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，可得 $a_n-4n+6=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，即 $a_n=\frac{3}{2^{n-1}}+4n-6$。

解题必备

形如 $a_{n+1}=pa_n+qn+r$（其中 p,q 均为常数，且 $pq(p-1)\neq 0$，）求通项可以使用待定系数法，步骤如下：

第 1 步：假设将递推公式改写为 $a_{n+1}+A(n+1)+B=p(a_n+An+B)$；

第 2 步：由待定系数法，求出 A,B 的值；

第 3 步：写出数列 $\{a_n+An+B\}$ 的通项公式；

第 4 步：写出数列 $\{a_n\}$ 通项公式。

题型训练 · 练其形

6.1 (🌶🌶🌶)已知 $a_1=2$，$a_{n+1}=4a_n-3n+1$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 为________。

6.2 (🌶🌶🌶)设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=4$，$a_n=3a_{n-1}+2n-1(n\geqslant 2)$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 为________。

6.3 (🌶🌶🌶)数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$3a_{n+1}=2a_n+3n-12$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 为________。

题型训练 · 悟其神

6.4 (🌶🌶🌶🌶)设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-4n$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 为________。

6.5 (🌶🌶🌶🌶)数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=2$，且 $a_{n+1}=2S_n+2n+2$，则 $S_n=$________。

6.6 (🌶🌶🌶🌶)在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+(2n-1)\cdot 2^n$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 为________。

核心例题 7　数列通项构造法(五)

(🌶🌶🌶)已知数列 $\{a_n\}$($n\in\mathbf{N}^*$)中，$a_1=2$，$a_2=3$，当 $n\geqslant 3$ 时，$a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}$，则

$a_n=$________。

【答案】$2^{n-1}+1$

【解析】由 $a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}$，设 $a_n+sa_{n-1}=t(a_{n-1}+sa_{n-2})$，则 $a_n=(t-s)\cdot a_{n-1}+sta_{n-2}$。对比系数得 $\begin{cases}t-s=3,\\st=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}t_1=2,\\s_1=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}t_2=1,\\s_2=-2。\end{cases}$ 又 $a_1=2,a_2=3$，$a_2-a_1=1\neq0,a_2-2a_1=-1$，所以数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是以 1 为首项、公比为 2 的等比数列，可得 $a_{n+1}-a_n=2^{n-1}$ ①。数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ 是各项为 -1 的常数列，可得 $a_{n+1}-2a_n=-1$ ②，由①－②得 $a_n=2^{n-1}+1$。

解题必备

形如 $a_{n+1}=pa_n+qa_{n-1}$（其中 p,q 为常数，且 $pq\neq0,n\geqslant2$），求通项可以使用待定系数法，步骤如下：

第 1 步：假设将递推公式改写成 $a_{n+1}+sa_n=t(a_n+sa_{n-1})$；

第 2 步：利用待定系数法，求出 s,t 的值；

第 3 步：若 s,t 有两组不同解，则数列 $\{a_{n+1}+s_1a_n\}$ 和 $\{a_{n+1}+s_2a_n\}$ 分别为等比数列，求出两组通项公式；若 s,t 只有一组解，则数列 $\{a_{n+1}+sa_n\}$ 为等比数列，求出通项公式；

第 4 步：根据第 3 步所得通项公式，列方程组求出数列 $\{a_n\}$ 通项公式。

题型训练 · 练其形

7.1 （🌶🌶🌶）数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1,a_2=2$，$3a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为________。

7.2 （🌶🌶🌶🌶）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_2=5,a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为________。

7.3 （🌶🌶🌶🌶）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_2=\frac{3}{4},a_{n+2}=a_{n+1}-\frac{1}{4}a_n$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为________。

题型训练 · 悟其神

7.4 （🌶🌶🌶🌶）设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_1=1,S_{n+1}=4a_n+2$。则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为________________。

7.5 （🌶🌶🌶🌶）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_2=\frac{1}{3}$，若 $a_n(a_{n-1}+2a_{n+1})=3a_{n-1}\cdot a_{n+1}$ $(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=$（　　）。

A. $\frac{1}{2^{n-1}}$　　B. $\frac{1}{2^n-1}$

C. $\frac{1}{3^{n-1}}$　　D. $\frac{1}{2^{n-1}+1}$

7.6 （🌶🌶🌶🌶）已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_2=\frac{x_1}{3}$，

$x_n=\frac{1}{3}(x_{n-1}+2x_{n-2})$，$n=3,4,\cdots$，若对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $|x_n-3|\leqslant\frac{3}{n}$，则 $x_1=$（　　）。

A. 3　　B. $\frac{9}{2}$　　C. 5　　D. 6

核心例题 8　数列通项倒数法

（多选题）数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}$，$a_1=1$，则下列说法正确的是（　　）。

A. 数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列

B. 数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2$

C. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-1$

D. 数列 $\{a_n\}$ 为递减数列

【答案】ABD

【解析】A：因为 $a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}$，$a_1=1$，所以 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+1}{a_n}=2+\frac{1}{a_n}$，即 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2$，所以 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是以首项为 1、公差为 2 的等差数列，故 A 正确。

B：由 A 知 $\frac{1}{a_n}=1+2(n-1)=2n-1$，数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$，故 B 正确。

C：因为 $\frac{1}{a_n}=2n-1$，所以 $a_n=\frac{1}{2n-1}$，故 C 错误。

D：因为 $a_n=\frac{1}{2n-1}$，所以数列 $\{a_n\}$ 为递减数列，故 D 正确。

故选 ABD。

解题必备

形如 $a_{n+1}=\frac{pa_n}{qa_n+r}$（其中 p,q,r 为常数），求通项可以使用取倒数法，步骤如下：

第 1 步：将递推公式两边取倒数得 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{r}{p}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{q}{p}$；

第 2 步：利用待定系数法，求出数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的通项公式；

第 3 步：求出数列 $\{a_n\}$ 通项公式。

题型训练 · 练其形

8.1（）在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=2$，$a_n=\frac{2a_{n-1}}{a_{n-1}+2}(n\geqslant2)$，则 a_n 等于（　　）。

A. $\frac{2}{n+1}$　　B. $\frac{2}{n}$　　C. $\frac{3}{n}$　　D. $\frac{3}{n+1}$

8.2（）在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$a_n=\frac{a_{n-1}}{2a_{n-1}+3}(n\geqslant2)$，则 $a_n=$________。

8.3（）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$a_{n+1}+2S_{n+1}S_n=0$，则 $S_n=$________。

题型训练·悟其神

8.4 (🌶🌶🌶🌶)设数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足$S_n-S_{n+1}=S_n\cdot S_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，且$a_1=1$，则$a_n=$________。

8.5 (🌶🌶🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{3}$，$a_n=\frac{2na_{n-1}}{2a_{n-1}+n-1}$ $(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$，则$a_n=$________。

8.6 (🌶🌶🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{2a_n}{4-a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$。

(1) 证明：数列$\left\{\frac{2}{a_n}-1\right\}$为等比数列；

(2) 求数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前$n$项和。

核心例题 9 数列通项奇偶讨论法

(🌶🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}+a_n=2n$，则$a_n=$________。

【答案】 $\begin{cases}n, & n\text{为奇数}，\\ n-1, & n\text{为偶数}\end{cases}$

【解析】 因为$a_{n+1}+a_n=2n$，所以$a_{n+2}+a_{n+1}=2n+2$，故$a_{n+2}-a_n=2$，即数列$\{a_n\}$是奇数项与偶数项都是公差为2的等差数列。当n为偶数时，$a_2=1$，故$a_n=a_2+2\left(\frac{n}{2}-1\right)=n-1$。当$n$为奇数时，因为$a_{n+1}+a_n=2n$，$a_{n+1}=n$($n+1$为偶数)，故$a_n=n$。

综上所述，$a_n=\begin{cases}n, & n\text{为奇数}，\\ n-1, & n\text{为偶数}。\end{cases}$

解题必备

1. 形如$a_{n+1}+a_n=f(n)$

将原递推关系改写成$a_{n+2}+a_{n+1}=f(n+1)$，两式相减即得$a_{n+2}-a_n=f(n+1)-f(n)$，然后将n分奇数、偶数分类讨论即可。

2. 形如$a_{n+1}a_n=f(n)$

将原递推关系改写成$a_{n+2}a_{n+1}=f(n+1)$，两式作商可得$\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{f(n+1)}{f(n)}$，然后将$n$分奇数、偶数分类讨论即可。

题型训练·练其形

9.1 (🌶🌶🌶)数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$且对任意$k\in\mathbf{N}^*$，$a_{2k+1}=a_{2k}+1$，$a_{2k}=a_{2k-1}+2$，则$a_{2020}=$(　　)。

A. 3027　B. 3030　C. 2018　D. 2020

9.2 (🌶🌶🌶)在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=6n-a_n$，则$a_n=$________。

9.3 (🌶🌶🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}+a_n=(n+1)^2$，则$a_n=$________。

题型训练·悟其神

9.4 (🌶🌶🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$a_{n+1}a_n=2^n$，则$a_n=$________。

9.5 ( )已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}a_n=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$，$S_n$是数列$\{a_n\}$的前$n$项和，则(　　)。

A. $a_{2018}=2^{2018}$

B. $S_{2018}=3\times2^{1009}-3$

C. 数列$\{a_{2n-1}\}$是等差数列

D. 数列$\{a_n\}$是等比数列

9.6 ( )已知数列$\{a_n\}$中$a_1=1$，且$a_{2k}=a_{2k-1}+(-1)^k$，$a_{2k+1}=a_{2k}+3^k$，其中$k=1,2,\cdots$，则a_n的通项公式为________。

达标全刷

1. ( )已知数列$\{a_n\}$，$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2n$，则$a_n=$________。

2. ( )已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=0$，$a_{n+1}=a_n+\log_2\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)$，则$\{a_n\}$的通项公式为________。

3. ( )在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}=a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，则$a_n=$________。

4. ( )已知正项数列$\{a_n\}$满足$2(n+1)\cdot a_n^2+(n+2)a_na_{n+1}-na_{n+1}^2=0$，$a_1=4$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为________。

5. ( )在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$，则$a_n=$________。

6. ( )在数列$\{a_n\}$中，$a_n\neq0(n\in\mathbf{N}^*)$，$a_1=\frac{1}{2}$，前$n$项和为$S_n$，满足$a_n=\frac{2S_n^2}{2S_n-1}(n\geqslant2)$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为________。

7. ( )已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n+1$，则$a_n=$________。

8. ( )设S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，$2a_n-a_{n-1}=3\times2^{n-1}(n\geqslant2)$，且$3a_1=2a_2$，则$a_n=$________。

9. ( )已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=5$，且$a_n=2a_{n-1}+2^n-1(n\geqslant2$且$n\in\mathbf{N}^*)$，则$a_n=$________。

10. ( )数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n^2(a_n>0)$，则$a_n=$________。

4.6 数列求和

核心笔记

求数列的前 n 项和的基本方法

1. 公式法：直接应用等差数列、等比数列的求和公式，以及正整数的平方和公式、立方和公式等公式求解。

没等到花开，还有往日的激情；得不到当初的梦想，还有可持续的方向；没有翅膀，那就只能奔跑。阴暗的云朵留给畏惧它的人，是勇士，就不惧迷茫。(推荐人：@霍冰儒(广东))

2. 倒序相加(乘)法：数列$\{a_n\}$，若与首末两项等距离的两项之和(积)等于首末两项之和(积)，可采用把正着写和倒着写的两个式子相加(乘)，就得到一个常数列的和(积)，进而求出数列前 n 项和(积)。
3. 错位相减法：若数列$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是等比数列，且公比为 $q(q\neq1)$，求$\{a_nb_n\}$的前 n 项和时，常用错位相减法求和. 基本步骤是：列出和式，两边同乘以公比，两式相减并求和。在写出 S_n 与 qS_n 的表达式时，要将两式“错项对齐”，便于准确写出 S_n-qS_n 的表达式。

   在运用错位相减法求和时需注意：

   (1) 合理选取乘数(或乘式)；

   (2) 对公比 q 的讨论；

   (3) 两式相减后的未消项及相消项呈现的规律；

   (4) 相消项中构成数列的项数。
4. 裂项相消法：即将数列的通项拆成结构相同的两式之差，然后消去相同的项求和. 使用此方法时必须注意消去了哪些项，保留了哪些项，一般未被消去的项有前后对称的特点。
5. 分组转化法：把数列的每一项分成多个项或把数列的项重新组合，使其转化成等差数列或等比数列，然后由等差、等比数列求和公式求解。

核心例题 1　数列求和之分组

( )已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，等比数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n. 若 $a_1=b_1=3$，$a_4=b_2$，$S_4-T_2=12$。

(1) 求数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式；

(2) 求数列$\{a_n+b_n\}$的前 n 项和。

【答案】(1) $a_n=2n+1$，$b_n=3^n$；(2) $n(n+2)+\dfrac{3(3^n-1)}{2}$

【解析】(1) $a_1=b_1$，$a_4=b_2$，则 $S_4-T_2=(a_1+a_2+a_3+a_4)-(b_1+b_2)=a_2+a_3=12$。设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，则 $a_2+a_3=2a_1+3d=6+3d=12$，所以 $d=2$，则 $a_n=3+(n-1)d=2n+1$。设等比数列$\{b_n\}$的公比为 q，$a_4=b_2=9$，$b_1=3$，则 $b_2=b_1q=3q=9$，解得 $q=3$，所以 $b_n=b_1q^{n-1}=3^n$。

(2) $a_n+b_n=(2n+1)+3^n$，则数列$\{a_n+b_n\}$的前 n 项和$(a_2+a_2+\cdots+a_2)+(b_2+b_2+\cdots+b_n)=(3+5+\cdots+2n+1)+(3+3^2+\cdots+3^n)=\dfrac{(3+2n+1)n}{2}+\dfrac{3(1-3^n)}{1-3}=n(n+2)+\dfrac{3(3^n-1)}{2}$。

解题必备

如果一个数列可写成 $c_n=a_n\pm b_n$ 的形式，而数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是等差数列或等比数列或可转化为能够求和的数列，求出这

两个(或多个)数列的和,再相加或相减得到原数列和的方法便是分组求和法。

常见数列的前 n 项和:

(1) $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$;

(2) $1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$;

(3) $2+4+\cdots+2n=n^2+n$;

(4) $2^1+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-2$;

(5) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

(6) $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$。

题型训练 · 练其形

1.1 (🌶🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=n^2+n$。

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2) 若 $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{a_n}+n$,求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n。

1.2 (🌶🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$,$a_{n+1}=a_n+2$,数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $S_n=2-b_n$。

(1) 求数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的通项公式;

(2) 设 $c_n=a_n+b_n$,求数列$\{c_n\}$的前 n 项和 T_n。

1.3 (🌶🌶🌶)已知数列$\{c_n\}$的前 n 项和 $T_n=2^{n+1}-2$,在各项均不相等的等差数列$\{b_n\}$中,$b_1=1$,且 b_1,b_2,b_5 成等比数列。

(1) 求数列$\{b_n\}$、$\{c_n\}$的通项公式;

(2) 设 $a_n=2^{b_n}+\log_2 c_n$,求数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n。

题型训练 · 悟其神

1.4 (🌶🌶🌶)已知在数列$\{a_n\}$中,$a_1=3$,$a_n=a_{n-1}+2^{n-1}(n\geqslant 2)$。

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2) 设 $b_n=\log_2(a_{n+1}-1)$,求 $b_n+\frac{2}{b_nb_{n+1}}$ 的前 n 项和 T_n。

1.5 (🌶🌶🌶)已知 S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和,且满足 $S_n-2a_n=n-4$。

(1) 证明:$\{S_n-n+2\}$为等比数列;

(2) 求数列$\{S_n\}$的前 n 项和 T_n。

1.6 (🌶🌶🌶🌶)设$\{a_n\}$为等差数列,$\{b_n\}$是正项等比数列,且 $a_1=b_1=2$,$a_3=2b_2$。在① $b_5-b_3=12b_1$,② $a_5+2=b_4$ 这两个条件中任选一个,回答下列问题:

(1) 写出你选择的条件并求数列$\{a_n\}$和

$\{b_n\}$的通项公式；

(2) 在(1)的条件下，若 $c_n=a_n+b_n(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和 S_n。

核心例题 2 数列求和之倒序相加

$f(x)$对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)+f(1-x)=\frac{1}{2}$，数列$\{a_n\}$满足：$a_n=f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)$，则 $a_n=$________。

【答案】$\frac{n+1}{4}$

【解析】由题意得 $f(0)+f(1)=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{n-2}{n}\right)=\frac{1}{2}$，…，因为 $a_n=f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)$，$a_n=f(1)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f\left(\frac{n-2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{n}\right)+f(0)$，则 $2a_n=\frac{n+1}{2}$，解得 $a_n=\frac{n+1}{4}$。

解题必备

如果一个数列$\{a_n\}$满足 $a_m+a_{n-m}=2A$（A 为常数），则

$$\begin{cases}S_n=a_1+a_2+\cdots+a_m+\cdots+a_{n-1}+a_n,\\S_n=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_{n-m}+\cdots+a_2+a_1,\end{cases}$$

即 $S_n=\frac{n}{2}(a_m+a_{n-m})=nA$。

题型训练·练其形

2.1 设函数 $f(x)=\frac{2}{2^x+1}$，利用课本中推导等差数列前 n 项和的方法，求得 $f(-5)+f(-4)+\cdots+f(0)+\cdots+f(4)+f(5)$的值为(　　)。

A. 9　B. 11　C. $\frac{9}{2}$　D. $\frac{11}{2}$

2.2 已知函数 $y=f(x)$满足 $f(x)+f(1-x)=1$，若数列$\{a_n\}$满足 $a_n=f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)$，则数列$\{a_n\}$的前 10 项和为(　　)。

A. $\frac{65}{2}$　B. 33　C. $\frac{67}{2}$　D. 34

2.3 已知函数 $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$，设 $a_n=f\left(\frac{n}{2019}\right)(n\in\mathbf{N}^*)$，则数列$\{a_n\}$的前 2019 项和 S_{2019} 的值为(　　)。

A. $\frac{3029}{3}$　B. $\frac{3032}{3}$　C. $\frac{6056}{3}$　D. $\frac{6059}{3}$

题型训练·悟其神

2.4 已知函数 $f(x)=\frac{2}{1+x^2}(x\in\mathbf{R})$，若等比数列$\{a_n\}$满足 $a_1a_{2019}=1$，则 $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{2019})$等于(　　)。

A. 2019　B. $\frac{2019}{2}$　C. 2　D. $\frac{1}{2}$

2.5 (🌶🌶🌶)已知 $F(x)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)-3$ 是 **R** 上的奇函数，$a_n=f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)$，$n\in\mathbf{N}^*$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为(　　)。

A. $a_n=n+1$　　B. $a_n=3n+1$

C. $a_n=3n+3$　　D. $a_n=n^2-2n+3$

2.6 (🌶🌶🌶)已知函数 $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$，$g(x)=f(x-1)+1$，$a_n=g\left(\frac{1}{n}\right)+g\left(\frac{2}{n}\right)+g\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots+g\left(\frac{2n-1}{n}\right)(n\in\mathbf{N}^*)$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为________。

核心例题 3　数列求和之裂项

(🌶🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$各项均为正数，其前 n 项和为 S_n，且满足 $4S_n=(a_n+1)^2$。

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 设 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n。

【答案】(1)$a_n=2n-1$；(2)$T_n=\frac{n}{2n+1}$

【解析】(1)因为 $4S_n=(a_n+1)^2$，所以 $4a_1=(a_1+1)^2$，解得 $a_1=1$，当 $n\geqslant 2$ 时，由 $4S_n=(a_n+1)^2$ ① 可得 $4S_{n-1}=(a_{n-1}+1)^2$ ②，① − ② 得 $(a_n+a_{n-1})\cdot(a_n-a_{n-1}-2)=0$。因为 $a_n>0$，所以 $a_n+a_{n-1}\neq 0$，则 $a_n-a_{n-1}-2=0$，即 $a_n-a_{n-1}=2$，所以$\{a_n\}$是以 $a_1=1$ 为首项、以 $d=2$ 为公差的等差数列，则 $a_n=a_1+(n-1)d=1+2(n-1)=2n-1$。

(2) 由(1)可得 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$。

解题必备

常见的拆项公式：

(1) $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$；

(2) $\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$；

(3) $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$；

(4) 若$\{a_n\}$为等差数列，公差为 $d(d\neq 0)$，则 $\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$；

(5) $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$；

(6) $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$；

(7) $\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$；

(8) $\log_a\frac{a_{n+1}}{a_n}=\log_a a_{n+1}-\log_a a_n$。

余生很贵，努力活成自己想要的样子，愿你能穿运动鞋撸铁汗如雨下，也能穿高跟鞋潇洒貌美如花，不负青春，不负自己。为了未来美一点，现在必须苦一点。(推荐人：@翁文慧(河南))

题型训练·练其形

3.1 ( )若数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 满足 $S_n=2a_n+n$。

(1) 求证：数列$\{a_n-1\}$是等比数列；

(2) 设 $b_n=\log_2(1-a_n)$，求数列$\left\{\frac{1}{b_nb_{n+1}}\right\}$的前 n 项和 T_n。

3.2 ( )已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+n+1$。

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 令 $b_n=\frac{1}{a_n-1}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n。

3.3 ( )已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $4S_n=(2n-1)a_{n+1}+1$，且 $a_1=1$。

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 设 $c_n=\frac{1}{a_n(a_n+2)}$，数列$\{c_n\}$的前 n 项和为 T_n，求 T_n。

题型训练·悟其神

3.4 ( )设数列$\{a_n\}$是公差不为零的等差数列，其前 n 项和为 S_n，$a_1=1$. 若 a_1，a_2，a_5 成等比数列。

(1) 求 a_n 及 S_n；

(2) 设 $b_n=\frac{1}{a_{n+1}^2-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n。

3.5 ( )已知数列$\{a_n\}$为公差不为 0 的等差数列，且 $a_2=3$，a_1，a_2，a_5 成等比数列。

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 设 S_n 为数列$\{a_n+2\}$的前 n 项和，$b_n=\frac{1}{S_n}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n。

3.6 ( )已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=2$，$3S_n=(n+2)a_n$。

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 设 $b_n=\frac{n+2}{a_n\cdot 2^n}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n。

核心例题 4 数列求和之错位相减

( )已知数列$\{a_n\}$满足$(n+1)a_n=na_{n+1}$，且 $a_1=1$。

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 设 $b_n=a_n\cdot 2^n$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n。

【答案】(1) $a_n=n$；(2) $S_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2(n\in\mathbf{N}^*)$

【解析】(1) 因为$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n}$，所以当 $n\geqslant 2$ 时，有$\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n-1}$，即$\frac{a_n}{a_1}=n$，则 $a_n=n$。

又当 $n=1$ 时也适合该式，故 $a_n=n$。

(2) 因为 $b_n=n\cdot 2^n$，所以 $S_n=1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^n$ ①，则 $2S_n=1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+3\cdot 2^4+\cdots+n\cdot 2^{n+1}$ ②，①－②得 $-S_n=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1}=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n\cdot 2^{n+1}$，则 $S_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2(n\in\mathbf{N}^*)$。

解题必备

形如 $c_n=a_n\cdot b_n$，其中$\{a_n\}$是等差数列，公差为 d，$\{b_n\}$是等比数列，公比为 q，求和方法如下：

第 1 步：写出 $S_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{n-1}b_{n-1}+a_nb_n$；

第 2 步：写出 $qS_n=a_1b_2+a_2b_3+\cdots+a_{n-2}b_{n-1}+a_{n-1}b_n+a_nb_{n+1}$；

第 3 步：作差：$S_n-qS_n=a_1b_1+d(b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}+b_n)-a_nb_{n+1}$；

第 4 步：化简求出 S_n。

题型训练 · 练其形

4.1 (🌶🌶🌶)已知等差数列$\{a_n\}$与等比数列$\{b_n\}$中，$a_1=b_1=1$，公差 $d=2$，公比 $q=3$，$c_n=a_n\cdot b_n$。

(1) 求数列$\{c_n\}$的通项公式；

(2) 求数列$\{c_n\}$的前 n 项和 S_n。

4.2 (🌶🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}=2a_n-1(n\in\mathbf{N}^*)$，$a_1=2$。

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 求数列$\{na_n\}$的前 n 项和 $S_n(n\in\mathbf{N}^*)$。

4.3 (🌶🌶🌶)已知$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为公比大于 0 的等比数列，且 $b_1=1$，$b_2+b_3=6$，$a_3=3$，$a_4+2a_6=b_5$。

(1) 求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

(2) 记 $c_n=(2a_n-1)\cdot b_{n+1}$，数列$\{c_n\}$的前 n 项和为 S_n，求 S_n。

题型训练 · 悟其神

4.4 (🌶🌶🌶)已知在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2+a_5=13$，其前 8 项和 $S_8=60$。

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 设数列$\{b_n\}$满足$b_n=(a_n-3)\cdot 3^n$，求$\{b_n\}$的前n项和T_n。

4.5 (🌶🌶🌶)已知等差数列$\{a_n\}$的前n项的和为S_n，且$a_3=3$，$S_{10}=55$。

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 设$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n。

4.6 (🌶🌶🌶)设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n-(2n-3)$。

(1) 计算a_2，a_3，猜想$\{a_n\}$的通项公式并利用数学归纳法加以证明；

(2) 记$b_n=2^n\cdot a_n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n。

核心例题 5 数列不等式之放缩

(🌶🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$是等差数列，若$a_1=2$，且a_3，$2a_2$，$2a_4-1$成等比数列，数列$\{b_n\}$满足$b_1+\dfrac{b_2}{2}+\dfrac{b_3}{3}+\cdots+\dfrac{b_n}{n}=\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{3}{2}n$。

(1) 求数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的通项公式；

(2) 若数列$\{a_n\}$为正项等差数列，设$c_n=\dfrac{1}{a_n+b_n}$，求证：数列$\{c_n\}$的前n项和$T_n<\dfrac{3}{4}$。

【答案】(1) $a_n=n+1$或$a_n=-\dfrac{5}{4}n+\dfrac{13}{4}$，$b_n=n^2+n(n\in\mathbf{N}^*)$；(2)证明见解析

【解析】(1) 数列$\{a_n\}$是等差数列，设公差为d，则$a_3\cdot(2a_4-1)=(2a_2)^2$，即$(2+2d)\cdot(6d+3)=(4+2d)^2$，解得$d=1$或$d=\dfrac{5}{4}$，故$a_n=n+1$或$a_n=-\dfrac{5}{4}n+\dfrac{13}{4}$。

令$n=1$，得$b_1=2$。当$n\geqslant 2$时，$b_1+\dfrac{b_2}{2}+\dfrac{b_3}{3}+\cdots+\dfrac{b_{n-1}}{n-1}=\dfrac{1}{2}(n-1)^2+\dfrac{3}{2}(n-1)$，与原式作差得$\dfrac{b_n}{n}=n+1$，$b_n=n^2+n(n\geqslant 2)$，验证得$b_1=2$满足通项，故$b_n=n^2+n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$。

(2) 因为数列$\{a_n\}$为正项等差数列，由(1)可知$a_n=n+1$，$c_n=\dfrac{1}{n^2+2n+1}<\dfrac{1}{n^2+2n}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$，则$T_n<\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$，即$T_n<\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)<\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$，不等式得证。

解题必备

常见的放缩公式：

(1) $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}(n\geqslant 2)$；

(2) $\frac{1}{n^2}>\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$；

(3) $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{(n-1)(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)(n\geqslant 2)$；

(4) $\frac{1}{n^2}=\frac{4}{4n^2}<\frac{4}{4n^2-1}=2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$；

(5) $\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(n\geqslant 2)$；

(6) $\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}>\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(n\geqslant 2)$。

题型训练·练其形

5.1 (🌶🌶🌶)数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}$，$a_1=1$。

(1) 证明：数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是等差数列；

(2) 求数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前$n$项和$S_n$，并证明：$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}>\frac{n}{n+1}$。

5.2 (🌶🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，其前n项的和为S_n，且当$n\geqslant 2$时，满足$a_n=\frac{S_n^2}{S_n-1}$。

(1) 求证：数列$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$是等差数列；

(2) 证明：$S_1^2+S_2^2+\cdots+S_n^2<\frac{7}{4}$。

5.3 (🌶🌶🌶)已知正项等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$S_3=9$，若a_1+1，a_2+1，a_3+3构成等比数列。

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式。

(2) 设数列$\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$的前$n$项和为$T_n$，求证：$T_n\geqslant\frac{1}{3}$。

题型训练·悟其神

5.4 (🌶🌶🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n且满足$S_n=2(a_n-1)$。

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 记$T_n=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}$，求证：$\frac{3}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}\leqslant T_n<1$。

大海茫茫靠舟楫，题海茫茫凭典例。借题发挥他有题，举一反三他有一。

刻骨铭心才深刻，深思熟虑方牢固。来龙去脉弄得清，千变万化找规律。陈飞老师来总结，带你登高望众题。(推荐人：@袁彪老师(山西))

5.5 (🌶🌶🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$。

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 若数列$\{b_n\}$满足：$4^{b_1-1}\cdot4^{b_2-1}\cdots4^{b_n-1}=(a_n+1)^{b_n}(n\in\mathbf{N}^*)$，证明：$\{b_n\}$是等差数列；

(3) 证明：$\frac{n}{2}-\frac{1}{3}<\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{n}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$。

5.6 (🌶🌶🌶🌶)设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_n+a_n=n(n\in\mathbf{N}^*)$。

(1) 证明$\{a_n-1\}$为等比数列并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 设$b_n=(2n-1)(1-a_n)$，数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，求T_n；

(3) 求证：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<n+2$。

达标全刷

1. (🌶🌶)若数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=(-1)^{n+1}(4n+1)$，则$a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{21}=($　　$)$。

A. 45　　B. 65　　C. 69　　D. -105

2. (🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$为等差数列，且$a_2=2$，$a_6=6$，则$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{20}a_{21}}=($　　$)$。

A. $\frac{18}{19}$　　B. $\frac{19}{20}$　　C. $\frac{20}{21}$　　D. $\frac{21}{22}$

3. (🌶🌶🌶)已知函数$f(x)=(x-1)^3+1$，利用课本中推导等差数列的前n项和的公式的方法，可求得$f(-5)+f(-4)+\cdots+f(0)+\cdots+f(6)+f(7)($　　$)$。

A. 25　　B. 26　　C. 13　　D. $\frac{25}{2}$

4. (🌶🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，当$n\geqslant2$时，$a_n+2S_{n-1}=n$，则S_{2019}的值为(　　)。

A. 1008　　B. 1009　　C. 1010　　D. 1011

5. (🌶🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_n=\cos n\pi(n\in\mathbf{N}^*)$，则$S_{2020}=$________。

6. (🌶🌶🌶)若S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，且$a_1+2a_2+2^2a_3+\cdots+2^{n-1}a_n=n^2+2n$，则$a_n=$________，$S_n=$________。

7. (🌶🌶🌶)已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_{n+1}=2+S_n$对一切正整数n恒成立。

努力的意义是为了看到更大的世界，是为了可以有自由选择人生的机会，是为了以后可以不向讨厌的人低头，是为了能够在自己喜欢的人出现的时候，不至于自卑得抬不起头，可以理直气壮地说出那句话："我知道你很好，但是我也不差。"(推荐人：@李佳伟(山东))

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 求数列$\{S_n\}$的前 n 项和 T_n。

8. (🌶🌶🌶)已知$\{a_n\}$是公差不为零的等差数列，$a_1=1$，且 a_1,a_3,a_9 成等比数列。

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项；

(2) 设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，求数列的前 n 项和为 T_n。

9. (🌶🌶🌶)已知等比数列$\{a_n\}$的公比 $q>1$，且 a_1,a_3 的等差中项为 10，$a_2=8$。

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 设 $b_n=\frac{n}{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n。

10. (🌶🌶🌶🌶)设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，从条件①$na_{n+1}=(n+1)a_n$，②$S_n=\frac{(n+1)a_n}{2}$，③$a_n^2+a_n=2S_n$ 中任选一个，补充到下面问题中，并给出解答。已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，________。

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 若 $b_n=-2^n a_n$，求数列$\{b_n\}$的前 n 和 T_n。

微专题 1　等差、等比数列的函数特征

1. 等差数列通项与一次函数的关系

由等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 可得 $a_n=dn+(a_1-d)$。

令 $p=d$，$q=a_1-d$，则 $a_n=pn+q$，其中 p,q 为常数。

(1) 当 $p\neq 0$ 时，(n,a_n)在一次函数 $y=px+q$ 的图像上，数列$\{a_n\}$的图像是直线 $y=px+q$ 上均匀分布的一群孤立的点，且当 $d>0$ 时数列$\{a_n\}$为递增数列，当 $d<0$ 时数列$\{a_n\}$为递减数列。

(2) 当 $p=0$ 时，$a_n=q$，等差数列为常数列，数列$\{a_n\}$的图像是平行于 x 轴的直线(或 x 轴)上均匀分布的一群孤立的点。

2. 等差数列的前 n 项和与二次函数的关系

首项为 a_1、末项为 a_n、项数为 n 的等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和公式：

$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$。令 $p=\frac{d}{2}$，$q=a_1-\frac{d}{2}$，可得 $S_n=pn^2+qn$，则：

(1) 当 $p\neq0$，即 $d\neq0$ 时，S_n 是关于 n 的二次函数，点 (n,S_n) 是 $y=px^2+qx$ 的图像上一系列孤立的点；

(2) 当 $p=0$，即 $d=0$ 时，S_n 是关于 n 的一次函数（$q\neq0$，即 $a_1\neq0$）或常函数（$q=0$，即 $a_1=0$），点 (n,S_n) 是直线 $y=qx$ 上一系列孤立的点。

3. 等比数列通项与指数函数的关系

等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=a_1q^{n-1}$ 还可以改写为 $a_n=\frac{a_1}{q}\cdot q^n$，当 $q\neq1$ 且 $a_1\neq0$ 时，$y=q^x$ 是指数函数，$y=\frac{a_1}{q}\cdot q^x$ 是指数型函数，因此数列 $\{a_n\}$ 的图像是函数 $y=\frac{a_1}{q}\cdot q^x$ 的图像上一些孤立的点。

(1) 当 $\begin{cases}a_1>0,\\q>1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1<0,\\0<q<1\end{cases}$ 时，$\{a_n\}$ 是递增数列；

(2) 当 $\begin{cases}a_1>0,\\0<q<1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1<0,\\q>1\end{cases}$ 时，$\{a_n\}$ 是递减数列；

(3) 当 $q=1$ 时，$\{a_n\}$ 为常数列（$a_n\neq0$）；

(4) 当 $q<0$ 时，$\{a_n\}$ 为摆动数列，所有的奇数项（偶数项）同号，奇数项与偶数项异号。

4. 等比数列的前 n 项和与指数函数的关系

等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式为

$$S_n=\begin{cases}na_1, q=1,\\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}, q\neq1。\end{cases}$$

对于非常数列的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=-\frac{a_1}{1-q}q^n+\frac{a_1}{1-q}$，若设 $a=\frac{a_1}{1-q}$，则 $S_n=-aq^n+a$（$a\neq0$，$q\neq0$，$q\neq1$）。由此可知，数列 $\{S_n\}$ 的图像是函数 $y=-aq^x+a$ 图像上一群孤立的点。

对于常数列的等比数列，即 $q=1$ 时，因为 $a_1\neq0$，所以 $S_n=na_1$。由此可知，数列 $\{S_n\}$ 的图像是函数 $y=a_1x$ 图像上一群孤立的点。

题型一　等差等比数列的证明

【例 1】（ ）已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=pn+q$，其中 p,q 为常数，且 $p\neq0$，证明 $\{a_n\}$ 是等差数列。

【证明】取数列 $\{a_n\}$ 中任意相邻两项 a_n 与 $a_{n-1}(n\geq2)$，作差得 $a_n-a_{n-1}=(pn+q)-[p(n-1)+q]=p$，它是一个与 n 无关的常数，所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列。

【例 2】（ ）已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=A\cdot q^n$，其中 A,q 均为非零常数，证明 $\{a_n\}$ 是等比数列。

【证明】取数列 $\{a_n\}$ 中任意相邻两项 a_n 与 $a_{n-1}(n\geq2)$，作商得 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{A\cdot q^n}{A\cdot q^{n-1}}=q$，它是一个与 n 无关的常数，所以数列 $\{a_n\}$ 是等比

数列，且其指数幂的底数即为等比数列的公比。

【例 3】（　）已知$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是项数相同的等比数列，求证：$\{a_nb_n\}$也是等比数列。

【证明】设等比数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的公比分别为p，q，那么$\{a_nb_n\}$的第n项和第$n+1$项分别为$a_nb_n=a_1p^{n-1}\cdot b_1q^{n-1}$与$a_{n+1}b_{n+1}=a_1p^n\cdot b_1q^n$，作商得$\dfrac{a_{n+1}b_{n+1}}{a_nb_n}=\dfrac{a_1p^n\cdot b_1q^n}{a_1p^{n-1}\cdot b_1q^{n-1}}=pq$，它是一个与$n$无关的常数，所以数列$\{a_nb_n\}$是以为$pq$公比的等比数列。

【例 4】（　）已知$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是项数相同的数列。

(1) 若数列$\{a_n\}$是公差为d的等差数列，数列$\{b_n\}$满足$b_n=10^{a_n}$，证明数列$\{b_n\}$是等比数列；

(2) 若数列$\{a_n\}$是公比为q的正项等比数列，数列$\{b_n\}$满足$b_n=\lg a_n$，证明数列$\{b_n\}$是等差数列。

【证明】(1) 因为$10^{a_n}\neq 0$，所以$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{10^{a_{n+1}}}{10^{a_n}}=10^{a_{n+1}-a_n}=10^d$，因此数列$\{b_n\}$是以$10^d$为公比的等比数列。

(2) 因为$a_n>0$，所以$b_{n+1}-b_n=\lg a_{n+1}-\lg a_n=\lg\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lg q$，因此数列$\{b_n\}$是以$\lg q$为公差的等差数列。

题型二　数列的函数特征应用

由等差数列与一次函数的关系可知：对于公差为$d(d\neq 0)$的等差数列$\{a_n\}$，其通项公式为$a_n=dn+(a_1-d)$，则点$(n,a_n)(n\in\mathbf{N}^*)$共线，又$d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}(n\neq m)$，所以$d$为过$(m,a_m)$，$(n,a_n)$两点的直线的斜率。由此可用三点共线解决等差数列问题。

【例 5】（　）若数列$\{a_n\}$为等差数列，$a_p=q$，$a_q=p(p\neq q)$，求证：$a_{p+q}=0$。

【证明】方法一：设数列$\{a_n\}$的公差为d，因为$a_p=a_q+(p-q)d$，所以$q=p+(p-q)d$，即$q-p=(p-q)d$。因为$p\neq q$，所以$d=-1$。则$a_{p+q}=a_p+(p+q-p)d=q+q(-1)=0$。

方法二：因为数列$\{a_n\}$为等差数列，所以点$(n,a_n)(n\in\mathbf{N}^*)$在一条直线上，故点$(p,a_p)$，$(q,a_q)$，$(p+q,a_{p+q})$共线，因此$\dfrac{a_{p+q}-a_q}{p+q-q}=\dfrac{a_p-a_q}{p-q}$，又因为$a_p=q$，$a_q=p$，且$p\neq q$，所以$\dfrac{a_{p+q}-p}{p}=\dfrac{q-p}{p-q}=-1$，即$a_{p+q}=0$。

在等差数列前n项和公式的变形$S_n=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n$中，两边同除以$n$得$\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{d}{2}n+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)$。该式说明对任意$n\in\mathbf{N}^*$，所有的点$\left(n,\dfrac{S_n}{n}\right)$都在同一条直线上，从而对$m,n\in\mathbf{N}^*(m\neq n)$，有$\dfrac{\dfrac{S_n}{n}-\dfrac{S_m}{m}}{n-m}=\dfrac{d}{2}$（常数），即数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$是一个等差数列。

【例 6】（　）若数列$\{a_n\}$为等差数列，S_n为$\{a_n\}$的前n项和，$p,q\in\mathbf{N}_+$且$p\neq q$，若

六月，有一份期待，十八九岁肩挑使命对人生作第一次交代，七号八号细写今朝风流页页运筹美满，没有畏缩没有迟疑，六月的期待有十年的坚定和数千次的擂台，花样的人生里满怀豪情挥洒自己青春的气派！（推荐人：@朱晓璇老师（陕西））

$S_p=q, S_q=p$，求证：$S_{p+q}=-(p+q)$。

【证明】 因为 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，所以 S_n 是关于 n 的二次函数形式，故可设 $S_n=f(n)=an^2+bn$，$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是关于 n 的一次函数形式，所以点 $\left(n,\frac{S_n}{n}\right)$ 在同一条直线上，故点 $\left(p,\frac{S_p}{p}\right)$，$\left(q,\frac{S_q}{q}\right)$，$\left(p+q,\frac{S_{p+q}}{p+q}\right)$ 共线，因此 $\dfrac{\frac{S_{p+q}}{p+q}-\frac{S_p}{p}}{p+q-q}=\dfrac{\frac{S_q}{q}-\frac{S_p}{p}}{q-p}$。又因为 $S_p=q, S_q=p$，且 $p\neq q$，则 $S_{p+q}=-(p+q)$。

【例 7】（👍👍👍）若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$p,q\in\mathbf{N}_+$ 且 $p\neq q$，若 $S_p=S_q$，求证：$S_{p+q}=0$。

【证明】 由于 S_n 是关于 n 的二次函数形式，故可设 $S_n=f(n)=an^2+bn$。$S_p=S_q$，即 $f(p)=f(q)$，因为 $f(n)=ax^2+bx(a\neq 0)$ 对称轴为 $x=\frac{p+q}{2}$，所以 $f(p+q)=f(0)=0$，即 $S_{p+q}=0$。

微专题 2　数列中的奇偶项问题

数列的奇偶项是指数列中的奇数项与偶数项，按奇偶项分类求和是数列求和的一种重要的方法.有关数列奇偶项的问题是高考中经常涉及的问题，解决此类问题的难点在于搞清数列奇数项和偶数项的首项、项数、公差（比）等。本专题主要研究与数列奇偶项有关的问题，并在解决问题中让学生感悟分类讨论等思想在解题中的有效运用。

（1）在数列 $\{a_n\}$ 中，若对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，存在 $t\in\mathbf{N}^*$ 且 $t\geqslant 2$，都有 $a_{n+t}-a_n=d$（d 为常数），则称数列 $\{a_n\}$ 是"隔项成等差"数列。

（2）在数列 $\{a_n\}$ 中，若对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，存在 $t\in\mathbf{N}^*$ 且 $t\geqslant 2$，都有 $\frac{a_{n+t}}{a_n}=q$（q 为常数），则称数列 $\{a_n\}$ 是"隔项成等比"数列。

类型一　等差或等比奇偶项问题

1. 等差数列（公差为 d）

（1）等差数列的奇数项、偶数项各自组成一个新的等差数列，公差都是 $2d$。

（2）在项数为奇数 $2n-1$ 的等差数列中：$S_{奇}=na_n=na_{中}$；$S_{偶}=(n-1)a_n=(n-1)a_{中}$；$S_{奇}-S_{偶}=a_n=a_{中}$；$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{n}{n-1}$；$S_{2n-1}=(2n-1)a_n=$项数 $\cdot\, a_{中}$。

（3）在项数为偶数 $2n$ 的等差数列中：$S_{奇}=na_n$；$S_{偶}=na_{n+1}$；$S_{偶}-S_{奇}=nd$；$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}$；$S_{2n}=n(a_n+a_{n+1})$。

2. 等比数列（公比为 q）

（1）等比数列的奇数项、偶数项各自组成一个新的等比数列，公比都是 q^2。

（2）在项数为奇数 $2n-1$ 的等比数列中：$S_{奇}=a_1+qS_{偶}$；$S_{2n-1}=a_1+(q+1)S_{偶}$。

（3）在项数为偶数 $2n$ 的等比数列中：$S_{偶}=qS_{奇}$；$S_{偶}-S_{奇}=(q-1)S_{奇}$；$S_{2n}=S_{偶}+S_{奇}=(q+1)S_{奇}$。

【例 1】（👍👍👍）若 $S_{奇}$ 是等差数列 $\{a_n\}$ 的奇数项的和，$S_{偶}$ 是等差数列 $\{a_n\}$ 的偶数项的和，S_n 是等差数列的前 n 项的和，则有如下性质：

(1) 当 n 为偶数时，则 $S_{偶}-S_{奇}=$ ________（其中 d 为公差）；

(2) 当 n 为奇数时，则 $S_{奇}-S_{偶}=$ ________，$S_{奇}=$ ________，$S_{偶}=$ ________，$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=$ ________；$\frac{S_n}{S_{奇}-S_{偶}}=$ $\frac{S_{奇}+S_{偶}}{S_{奇}-S_{偶}}=$ ________（其中 $a_{中}$ 是等差数列的中间一项）。

【答案】(1) $\frac{nd}{2}$，(2) $a_{中}$，$\frac{n+1}{2}a_{中}$，$\frac{n-1}{2}a_{中}$，$\frac{n+1}{n-1}$，n

【解析】设公差为 d。

(1) 当 n 为偶数时，因为 $a_n-a_{n-1}=d$，所以 $S_{偶}-S_{奇}=\frac{nd}{2}$。

(2) 当 n 为奇数时，$S_{奇}=\frac{n+1}{2}\cdot\frac{a_1+a_n}{2}=\frac{n+1}{2}a_{中}$。因为 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_{中}$，所以 $S_{偶}=S_n-S_{奇}=na_{中}-\frac{n+1}{2}a_{中}=\frac{n-1}{2}a_{中}$，则 $S_{奇}-S_{偶}=\frac{n+1}{2}a_{中}-\frac{n-1}{2}a_{中}=a_{中}$，故 $\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{n+1}{n-1}$，则 $\frac{S_n}{S_{奇}-S_{偶}}=\frac{S_{奇}+S_{偶}}{S_{奇}-S_{偶}}=n$。

【变式 1】(🔥🔥🔥)设项数为奇数的等差数列，奇数项之和为 44，偶数项之和为 33，则这个数列的项数是________。

【答案】7

【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的项数为 $2n+1$，则 $S_{奇}=a_1+a_3+\cdots+a_{2n+1}=\frac{(n+1)}{2}\cdot(a_1+a_{2n+1})=(n+1)a_{n+1}$，$S_{偶}=a_2+a_4+\cdots+a_{2n}=\frac{n(a_2+a_{2n})}{2}=na_{n+1}$，所以 $\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{n+1}{n}=\frac{44}{33}$，解得 $n=3$，则项数为 $2n+1=7$。

【变式 2】(🔥🔥🔥)已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，前 m 项（m 为偶数）和为 126，其中偶数项之和为 69，且 $a_m-a_1=20$，则数列 $\{a_n\}$ 公差为（　　）。

A. -4　　B. 4　　C. 6　　D. -6

【答案】B

【解析】由题意可得 $S_{奇}=a_1+a_3+\cdots+a_{m-1}=57$，$S_{偶}=a_2+a_4+\cdots+a_m=69$，则 $S_{偶}-S_{奇}=\frac{md}{2}$，即 $69-57=\frac{md}{2}$，得 $md=24$。因为 $a_m-a_1=(m-1)d=20$，故解得 $d=4$。故选 B。

【变式 3】(🔥🔥🔥)已知一个等比数列首项为 1，项数是偶数，其奇数项之和为 341，偶数项之和为 682，则这个数列的项数为（　　）。

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 10

【答案】D

【解析】因为一个等比数列首项为 1，项数是偶数，其奇数项之和为 341，偶数项之和为 682，所以公比 $q=\frac{682}{341}=2$，则 $S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=341+682$，解得 $n=10$。故选 D。

类型二　$a_{n+1}+a_n=f(n)$ 或 $a_{n+1}a_n=f(n)$ 型

递推公式为 $a_{n+1}+a_n=f(n)$ 或 $a_{n+1}a_n=f(n)$ 的形式，这与使用累加法或累乘法求通项公式的形式类似，即 $a_{n+1}-a_n=f(n)$ 与 $a_{n+1}=a_nf(n)$，通常考查求通项公式

或数列求和。

1. 求通项公式：

构造隔项等差数列：$a_{n+1}+a_n=pn+q(p,q\neq0)\Rightarrow a_{n+2}+a_{n+1}=p(n+1)+q\Rightarrow$ 两式相减得$\Rightarrow a_{n+2}-a_n=p$；

构造隔项等比数列：$a_{n+1}a_n=pq^n(p,q\neq0)\Rightarrow a_{n+2}a_{n+1}=pq^{n+1}\Rightarrow$ 两式相除得 $\Rightarrow \dfrac{a_{n+2}}{a_n}=q$。

2. 求前 n 项和 S_n：

求出通项公式，再求和；或者写为 $a_{n+1}+a_n=f(n)$，可直接并项求和。

【例2】（）定义“等积数列”：在一个数列中，如果每一项与它的后一项的积都为同一个常数，那么这个数列叫作等积数列，这个常数叫作该数列的公积，已知数列$\{a_n\}$是等积数列，且 $a_1=3$，前 7 项的和为 14，则下列结论正确的是（　　）。

A. $a_{n+2}=a_n$　　B. $a_2=\dfrac{2}{3}$

C. 公积为 1　　D. $a_na_{n+1}a_{n+2}=6$

【答案】 AB

【解析】 A：设 $a_na_{n+1}=k$（k 为常数），则 $a_{n+1}a_{n+2}=k$，所以$\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=1$，即 $a_{n+2}=a_n$，故 A 正确。

B,C：因为前 7 项的和为 14，所以 $3(a_1+a_2)+a_1=14$。因为 $a_1=3$，所以 $a_2=\dfrac{2}{3}$，则 $a_na_{n+1}=2$，即公积为 2，故 B 正确，C 错误。

D：当 n 为奇数时，$a_na_{n+1}a_{n+2}=6$；当 n 为偶数时，$a_na_{n+1}a_{n+2}=\dfrac{4}{3}$，故 D 错误。

故选 AB。

【变式1】（）定义“等和数列”：在一个数列，如果每一项与它的后一项的和都为同一个常数，那么这个数列叫作等和数列，这个常数叫作该数列的公和. 已知数列$\{a_n\}$是等和数，且 $a_1=2$，公和为 5，则数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=$________。

【答案】 $\begin{cases}\dfrac{5n}{2}, & n\text{ 为偶数},\\ \dfrac{5n-1}{2}, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$

【解析】 数列$\{a_n\}$是等和数，且 $a_1=2$，公和为 5，则 $5=a_1+a_2=2+a_2$，解得 $a_2=3$。

当 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$时，数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2k-1}+a_{2k})=5+5+\cdots+5=5k=\dfrac{5n}{2}$。

当 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$时，数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2k-3}+a_{2k-2})+a_{2k-1}=\dfrac{5(n-1)}{2}+2=\dfrac{5n-1}{2}$。

因此，$S_n=\begin{cases}\dfrac{5n}{2}, & n\text{ 为偶数},\\ \dfrac{5n-1}{2}, & n\text{ 为奇数}。\end{cases}$

【变式2】（）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=n^2+4n(n\in\mathbf{N}^*)$。

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若数列$\{c_n\}$满足 $c_{n+1}+c_n=a_n$，且不等式 $c_n+2n^2\geqslant0$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立，求 c_1 的取值范围。

【答案】（1）$a_n=2n+3$；（2）$[-2,13]$

【解析】（1）由题意得：

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=5$；

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+4n-$

一件事情，你坚持做了三天，那是心血来潮；你坚持了三个月，那是刚刚上场；你坚持了三年，那才算得上事业；如果你做什么事都要求立马有回报，那注定这辈子只能是一事无成。成功的结果人人想要，成功的路不是人人想走。成功路上并不拥挤，因为坚持的人不多。（推荐人：@孙道老师（河南））

$(n-1)^2-4(n-1)=2n+3$。

当 $n=1$ 时，$a_1=2+3=5$，故 $a_n=2n+3$。

(2) 由(1)知 $c_{n+1}+c_n=2n+3(n\in\mathbf{N}^*)$①，所以当 $n=1$ 时，$c_2+c_1=5$；当 $n\geqslant 2$ 时，$c_n+c_{n-1}=2(n-1)+3$②，①－②得 $c_{n+1}-c_{n-1}=2(n\geqslant 2)$，则数列 $\{c_{2n}\}$ 是以 c_2 为首项、公差为 2 的等差数列。当 n 为偶数时，$c_n=c_2+2\times\left(\frac{n}{2}-1\right)=n+3-c_1$；当 n 为奇数时，$c_n=c_1+2\times\left(\frac{n+1}{2}-1\right)=n-1+c_1$，则 $c_n=\begin{cases}n-1+c_1, & n=2k-1,\\ n+3-c_1, & n=2k\end{cases}(k\in\mathbf{N}^*)$。

又对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $c_n+2n^2\geqslant 0$ 成立，则当 n 为奇数时，$n\geqslant 1$，$c_n+2n^2=n-1+c_1+2n^2\geqslant 0$ 恒成立，即 $-c_1\leqslant 2n^2+n-1$ 对 n 为奇数时恒成立，当 $n=1$ 时，$(2n^2+n-1)_{\min}=2$，则 $-c_1\leqslant 2$，即 $c_1\geqslant -2$；当 n 为偶数时，$n\geqslant 2$，$c_n+2n^2=n+3-c_1+2n^2\geqslant 0$ 恒成立，即 $c_1\leqslant 2n^2+n+3$ 对 n 为偶数时恒成立，当 $n=2$ 时，$(2n^2+n+3)_{\min}=13$，则 $c_1\leqslant 13$。综上所述，c_1 的取值范围是 $[-2,13]$。

【变式 3】(🌶🌶🌶🌶)在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=1$，$a_na_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$b_n=a_{2n}+a_{2n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$。

(1) 判断数列 $\{b_n\}$ 是否为等比数列，并写出其通项公式；

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(3) 求 S_n。

【答案】(1) $b_n=\frac{3}{2^n}$；

(2) $a_n=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}, & n\text{ 为奇数},\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}, & n\text{ 为偶数};\end{cases}$

(3) $S_n=\begin{cases}3-\frac{4}{2^{\frac{n+1}{2}}}, & n\text{ 为奇数},\\ 3-\frac{3}{2^{\frac{n}{2}}}, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$

【解析】(1) 因为 $a_n\cdot a_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，所以 $a_{n+1}\cdot a_{n+2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，则 $\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{1}{2}$，即 $a_{n+2}=\frac{1}{2}a_n$，则 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{2n+2}+a_{2n+1}}{a_{2n}+a_{2n-1}}=\frac{\frac{1}{2}(a_{2n}+a_{2n-1})}{a_{2n}+a_{2n-1}}=\frac{1}{2}$。因为 $b_1=a_2+a_1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$，所以数列 $\{b_n\}$ 是以 $\frac{3}{2}$ 为首项、$\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，故 $b_n=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{3}{2^n}$。

(2) 由(1)可知 $a_{n+2}=\frac{1}{2}a_n$，且 $a_1=1$，$a_2=\frac{1}{2}$，则数列 $\{a_{2n}\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项、$\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，数列 $\{a_{2n-1}\}$ 是以 1 为首项、$\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，故当 n 为奇数时，$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$；当 n 为偶数时，$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$，则 $a_n=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}, & n\text{ 为奇数},\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}, & n\text{ 为偶数}。\end{cases}$

(3) 当 $n=2k$，$k\in\mathbf{N}^*$ 时，$S_{2k}=(a_1+a_3+\cdots+$

$a_{2k-1})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2k})=3-\frac{3}{2^k}$。

当 $n=2k-1,k\in\mathbf{N}^*$ 时，$S_{2k-1}=S_{2k}-a_{2k}=3-\frac{3}{2^k}-\frac{1}{2^k}=3-\frac{4}{2^k}$。

因此，$S_n=\begin{cases}3-\frac{4}{2^{\frac{n+1}{2}}}, & n\text{ 为奇数},\\ 3-\frac{3}{2^{\frac{n}{2}}}, & n\text{ 为偶数}。\end{cases}$

类型三　含有$(-1)^n$型

数列的递推公式和通项公式中会含有$(-1)^n$，都需要讨论 n 的奇偶，使$(-1)^n$ 转化为 1 或 -1。

1. 递推公式中有$(-1)^n$：寻找间隔两项之间的关系

   如 $a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n\Rightarrow$当 n 为奇数时，$\begin{cases}a_{n+1}-a_n=2n,\\ a_{n+2}+a_{n+1}=2n+2\end{cases}\Rightarrow a_{n+2}+a_n=2$；当 n 为偶数时，$\begin{cases}a_{n+1}+a_n=2n,\\ a_{n+2}-a_{n+1}=2n+2\end{cases}\Rightarrow a_{n+2}+a_n=4n+2\Rightarrow$得到相邻两个奇数项或偶数项的关系。若求数列前 n 项的和，本质上是考查分组求和。

2. 通项公式中含有$(-1)^n$

   (1) 等差数列的通项公式乘以$(-1)^n$，用并项求和法求数列前 n 项的和。如 $a_n=(-1)^n(2n-1)$，前 20 项的和 $a_1+a_2+\cdots+a_{20}=(-1+3)+(-5+7)+\cdots+(-37+39)$。

   (2) 等比数列的通项公式中含有$(-1)^n$，其前 n 项和可写成分段的形式，可求最值。如等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=(-1)^{n-1}\cdot\frac{3}{2^n}$，则其前 n 项和 $S_n=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n$，求 $T_n=S_n-\frac{1}{S_n}$ 的取值范围：n 分奇偶，讨论求 T_n 的最值。

   (3) 裂项相消法求和，如 $a_n=(-1)^n\frac{4n}{(2n-1)(2n+1)}=(-1)^n\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)$，求和时通过$(-1)^n$ 实现正负交替。

【例 3】(🌶🌶🌶🌶)已知等差数列$\{a_n\}$的公差为 2，前 n 项和为 S_n，且 S_1,S_2,S_4 成等比数列。

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 令 $b_n=(-1)^{n-1}\frac{4n}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n。

【答案】(1) $a_n=2n-1$；(2) $T_n=\begin{cases}\frac{2n}{2n+1}, & n\text{ 为偶数},\\ \frac{2n+2}{2n+1}, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$

【解析】(1) 因为等差数列$\{a_n\}$的公差为 2，前 n 项和为 S_n，$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=n^2-n+na_1$，$S_1,S_2,S_4$ 成等比数列，所以 $S_2^2=S_1S_4$，则$(2^2-2+2a_1)^2=a_1(4^2-4+4a_1)$化为$(1+a_1)^2=a_1(3+a_1)$，解得 $a_1=1$，则 $a_n=a_1+(n-1)d=1+2(n-1)=2n-1$。

(2) 由(1)可得

$b_n=(-1)^{n-1}\frac{4n}{a_na_{n+1}}=(-1)^{n-1}\frac{4n}{(2n-1)(2n+1)}=(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)$，

$T_n=\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)$。

当 n 为偶数时，$T_n=\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)=1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$。

当 n 为奇数时，$T_n=\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\cdots-\left(\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)=1+\frac{1}{2n+1}=\frac{2n+2}{2n+1}$。

所以，$T_n=\begin{cases}\frac{2n}{2n+1}, & n\text{ 为偶数，}\\ \frac{2n+2}{2n+1}, & n\text{ 为奇数。}\end{cases}$

【变式 1】（）已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $2\sqrt{S_n}=a_n+1$。

（1）求 a_n；

（2）将数列 $\{a_n\}$ 分组：(a_1)，(a_2,a_3)，(a_4,a_5,a_6)，$(a_7,a_8,a_9,a_{10})\cdots$，记第 n 组的和为 b_n。

（i）求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 b_n；

（ii）求数列 $\left\{(-1)^n\frac{b_n}{n}\right\}$ 前 $2n$ 项的和。

【答案】（1）$a_n=2n-1$；（2）（i）$b_n=n^3$；（ii）$T_{2n}=n(2n+1)$

【解析】（1）因为 $2\sqrt{S_n}=a_n+1$，令 $n=1$，所以 $a_1=1$，因为 $2\sqrt{S_n}=a_n+1\Rightarrow S_n=\frac{(a_n+1)^2}{4}$ ①，当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=\frac{(a_{n-1}+1)^2}{4}$ ②，①－②得 $2a_n+2a_{n-1}=a_n^2-a_{n-1}^2\Rightarrow a_n-a_{n-1}=2$，所以数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列，则 $a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)\times 2=2n-1$，当 $n=1$，$a_1=1$ 符合上式，所以 $a_n=2n-1$。

（2）（i）由题意可知，$b_1=a_1=S_1$，$b_2=a_2+a_3=S_3-S_2$，$b_3=a_4+a_5+a_6=S_6-S_3$，$b_4=a_7+a_8+a_9+a_{10}=S_{10}-S_6$，…，所以 $b_n=S_{\frac{n(n+1)}{2}}-S_{\frac{n(n+1)}{2}-n}$，而 $S_n=\frac{(1+2n-1)n}{2}=n^2$，则 $b_n=S_{\frac{n(n+1)}{2}}-S_{\frac{n(n+1)}{2}-n}=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{n(n+1)}{2}-n\right)^2=n^3$。

（ii）由（i）可得 $(-1)^n\frac{b_n}{n}=(-1)^n n^2$，所以 $T_{2n}=(-1+2^2)+(-3^2+4^2)+(-5^2+6^2)+\cdots+[-(2n-1)^2+(2n)^2]=3+7+\cdots+(4n-1)=\frac{n(3+4n-1)}{2}=n(2n+1)$。

【变式 2】（）已知数列 $\{a_n\}$ 是正项等比数列，满足 a_3 是 $2a_1$，$3a_2$ 的等差中项，$a_4=16$。

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $b_n=(-1)^n\log_2 a_{2n+1}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n。

【答案】（1）$a_n=2^n$；（2）$T_n=\begin{cases}n, & n\text{ 为偶数，}\\ -n-2, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$（或 $T_n=(n+1)\cdot(-1)^n-1,n\in\mathbf{N}^*$）

【解析】（1）设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，因为 a_3 是 $2a_n$，$3a_2$ 的等差中项，所以 $2a_3=2a_1+3a_2$，即 $2a_1q^2=2a_1+3a_1q$。因为 $a_1\neq 0$，所以 $2q^2-3q-2=0$，解得 $q=2$ 或 $q=-\frac{1}{2}$，又

现在偷的每个懒，都是给未来挖的一个坑，以后的日子要付出数倍的努力来填补这个坑。现在吃的每个苦，都是给未来添砖加瓦，以后的日子会加倍享受苦所带来的乐。（推荐人：@邵雪梅老师（河北））

数列$\{a_n\}$是正项等比数列，所以$q=2$。因为$a_4=16$，即$a_4=a_1q^3=8a_1=16$，解得$a_1=2$，所以$a_n=2\times 2^{n-1}=2^n$。

(2) 方法一(分奇偶、并项求和)：

由(1)可知$a_{2n+1}=2^{2n+1}$，所以$b_n=(-1)^n\log_2 a_{2n+1}=(-1)^n\log_2 2^{2n+1}=(-1)^n(2n+1)$。

① 若n为偶数，则$T_n=-3+5-7+9-\cdots-(2n-1)+(2n+1)=(-3+5)+(-7+9)+\cdots+[-(2n-1)+(2n+1)]=2\times\frac{n}{2}=n$。

② 若n为奇数，当$n\geqslant 3$时，$T_n=T_{n-1}+b_n=n-1-(2n+1)=-n-2$；当$n=1$时，$T_1=-3$适合上式。

综上，$T_n=\begin{cases}n, & n\text{ 为偶数},\\ -n-2, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$（或$T_n=(n+1)(-1)^n-1, n\in\mathbf{N}^*$）。

解法二(错位相减法)：

由(1)可知$a_{2n+1}=2^{2n+1}$，所以，$b_n=(-1)^n\log_2 a_{2n+1}=(-1)^n\log_2 2^{2n+1}=(-1)^n(2n+1)$，$T_n=(-1)^1\times 3+(-1)^2\times 5+(-1)^3\times 7+\cdots+(-1)^n(2n+1)$，所以$-T_n=(-1)^2\times 3+(-1)^3\times 5+(-1)^4\times 7+\cdots+(-1)^{n+1}(2n+1)$，则$2T_n=-3+2[(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^n]-(-1)^{n+1}(2n+1)=-3+2\times\frac{1-(-1)^{n-1}}{2}+(-1)^n(2n+1)=-3+1-(-1)^{n-1}+(-1)^n(2n+1)=-2+(2n+2)(-1)^n$，所以$T_n=(n+1)(-1)^n-1, n\in\mathbf{N}^*$。

【变式 3】(🔥🔥🔥🔥🔥)已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的各项为正，且$a_3=18b_1$，$\{b_n\}$是公比为$\frac{1}{3}$的等比数列. 再从：①数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足$4S_n=a_n^2+2a_n$；②数列$\{a_n\}$是公差不为0的等差数列，且$a_1+a_2+a_3=12$，a_1,a_2,a_4成等比数列，这两个条件中任选一个，解答下列问题。

(1) 求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

(2) 令$c_n=(a_n+b_n)\cos n\pi$，设$\{c_n\}$的前n项和为T_n。若$(-1)^n(\lambda+n)>T_n$对$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，求实数λ的取值范围。

【答案】(1) $a_n=2n$，$b_n=\frac{1}{3^n}$；(2) $\left(-\frac{2}{9},\frac{5}{4}\right]$

【解析】(1) 若选①，当$n=1$时，$4S_1=a_1^2+2a_1$，则$a_1=2$，当$n\geqslant 2$时，$4S_n=a_n^2+2a_n$，$4S_{n-1}=a_{n-1}^2+2a_{n-1}$，两式相减得$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$，则$a_n+a_{n-1}=0$(舍)或$a_n-a_{n-1}-2=0$，即数列$\{a_n\}$是首项为2、公差为2的等差数列，则$a_n=2n$。因为$a_3=6$，所以$b_1=\frac{1}{18}a_3=\frac{1}{3}$，又$\{b_n\}$的公比为$\frac{1}{3}$，故$b_n=\frac{1}{3^n}$。

若选②，设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=3a_1+3d=12,\\ a_2^2=a_1a_4,\end{cases}$得$d=a_1$或0(舍去)，故$d=a_1=2$，即$a_n=2n$。因为$a_3=6$，所以$b_1=\frac{1}{18}a_3=\frac{1}{3}$，又$\{b_n\}$的公比为$\frac{1}{3}$，则$b_n=\frac{1}{3^n}$。

(2) 由(1)得$c_n=(a_n+b_n)(-1)^n=\left(2n+\frac{1}{3^n}\right)(-1)^n$。

① 当n为偶数时，因为$c_{n-1}+c_n=$

$-\left[\frac{1}{3^{n-1}}+2(n-1)\right]+\left(\frac{1}{3^n}+2n\right)=-2\times\frac{1}{3^n}+2$，所以 $T_n=(c_1+c_2)+(c_3+c_4)+\cdots+(c_{n-1}+c_n)=\left(-2\times\frac{1}{3^2}+2\right)+\left(-2\times\frac{1}{3^4}+2\right)+\cdots+\left(-2\times\frac{1}{3^n}+2\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3^n}-1\right)+n$。

② 当 n 为奇数时，$T_n=T_{n+1}-c_{n+1}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3^{n+1}}-1\right)+(n+1)-\left[\frac{1}{3^{n+1}}+2(n+1)\right]=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3^n}+5\right)-n=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3^n}+5\right)-n$，则 $T_n=\begin{cases}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3^n}-1\right)+n, & n\text{ 为偶数},\\ -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3^n}+5\right)-n, & n\text{ 为奇数}。\end{cases}$ 因为 $(-1)^n\cdot(\lambda+n)>T_n$ 对 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，所以① 当 n 为偶数时，$n\geqslant2$，$\lambda>\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3^n}-1\right)$ 恒成立，当 $n=2$ 时，$\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3^n}-1\right)\right]_{\max}=-\frac{2}{9}$，则 $\lambda>-\frac{2}{9}$；

② 当 n 为奇数时 $n\geqslant1$，$\lambda<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3^n}+5\right)$ 恒成立，当 $n=1$ 时，$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3^n}+5\right)>\frac{5}{4}$，则 $\lambda\leqslant\frac{5}{4}$。

综上所述，实数 λ 的取值范围为 $\left(-\frac{2}{9},\frac{5}{4}\right]$。

类型四　$a_n=\begin{cases}f(n), & n\text{ 为奇数},\\ g(n), & n\text{ 为偶数}\end{cases}$ 型

形如 $a_n=\begin{cases}f(n), & n\text{ 为奇数},\\ g(n), & n\text{ 为偶数}\end{cases}$ 的结构，可分为两种情况：一种是邻项等差、等比数列，如已知 $a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1, & n\text{ 为奇数},\\ 2a_n, & n\text{ 为偶数}；\end{cases}$ 另一种是数列 $\{a_n\}$ 与其他数列的关系，如 $a_n=\begin{cases}b_n, & n\text{ 为奇数},\\ \log_2 b_n, & n\text{ 为偶数}。\end{cases}$

1. 邻项等差、邻项等比数列形

$a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1, & n\text{ 为奇数},\\ 2a_n, & n\text{ 为偶数}\end{cases}\Rightarrow$ 将 n 用 $2k-1$ 或 $2k$ 替代：当 $n=2k-1$ 时，$a_{2k}=a_{2k-1}+1$；当 $n=2k$ 时，$a_{2k+1}=2a_{2k}=2(a_{2k-1}+1)\Rightarrow a_{2k+1}+2=2(a_{2k-1}+2)\Rightarrow$ 构造出以 a_1+2 为首项、2 为公比的等比数列，求出 a_{2k-1} 的通项公式，再求出 a_{2k}。

2. 数列 $\{a_n\}$ 与其他数列的关系：求出其他数列的通项公式，再求出 a_n 的通项公式。

【例 4】（难度：3）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1, & n\text{ 为奇数},\\ a_n+2, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

（1）记 $b_n=a_{2n}$，写出 b_1，b_2，并求数列 $\{b_n\}$ 通项公式；

（2）求 $\{a_n\}$ 的前 20 项和。

【答案】（1）$b_n=3n-1$；（2）300

【解析】（1）由题设可得 $b_1=a_2=a_1+1=2$，$b_2=a_4=a_3+1=a_2+2+1=5$，又 $a_{2k+2}=a_{2k+1}+1$，$a_{2k+1}=a_{2k}+2\ (k\in\mathbf{N}^*)$，故 $a_{2k+2}=a_{2k}+3$，得 $b_{n+1}=b_n+3$，即 $b_{n+1}-b_n=3$，所以 $\{b_n\}$ 为等差数列，故 $b_n=2+(n-1)\times3=3n-1$。

（2）设 $\{a_n\}$ 的前 20 项和为 S_{20}，则 $S_{20}=a_1+a_2+\cdots+a_{20}$。因为 $a_1=a_2-1$，$a_3=a_4-1$，…，$a_{19}=a_{20}-1$，所以 $S_{20}=2(a_2+a_4+\cdots+a_{18}+a_{20})-10=2(b_1+b_2+\cdots+b_9+b_{10})-10=2\times\left(10\times2+\frac{9\times10}{2}\times3\right)-10=300$。

【变式 1】（🌶🌶🌶🌶）已知数列$\{a_n\}$，$a_1=1$，

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{3}a_n+n, & n\text{ 为奇数，}\\ a_n-3n, & n\text{ 为偶数。}\end{cases}$$

(1) 是否存在实数λ，使得数列$\{a_{2n}-\lambda\}$是等比数列？若存在，求出λ的值；若不存在，请说明理由。

(2) 若S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，求满足$S_n>0$的所有正整数n。

【答案】(1) 存在$\lambda=\frac{3}{2}$；(2) 1 和 2

【解析】(1) 由题意得$a_{2n+2}=\frac{1}{3}a_{2n+1}+2n+1=\frac{1}{3}(a_{2n}-6n)+2n+1$，则$a_{2n+2}=\frac{1}{3}a_{2n}+1$，故$a_{2n+2}-\frac{3}{2}=\frac{1}{3}\left(a_{2n}-\frac{3}{2}\right)$。又$a_2=\frac{1}{3a_1}+1=\frac{4}{3}$，则$a_2-\frac{3}{2}=-\frac{1}{6}$，故存在$\lambda$，即当$\lambda=\frac{3}{2}$时，数列$\{a_{2n}-\lambda\}$是以$-\frac{1}{6}$为首项、$\frac{1}{3}$为公比的等比数列。

(2) 由(1)知$a_{2n}-\frac{3}{2}=-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=-\frac{1}{2\times3^n}$，则$a_{2n}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2\times3^n}$。因为$a_{2n}=\frac{1}{3}a_{2n-1}+2n-1$，所以$a_{2n}+a_{2n-1}=4a_{2n}-6n+3=-\frac{2}{3^n}-6n+9$。

① 当$n=2k$，$k\in\mathbf{N}^*$时，$S_{2k}=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_{2k-1}+a_{2k})$，$S_{2k}=-2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^k}\right)+\frac{k(3-6k+9)}{2}=\frac{1}{3^k}-3k^2+6k-1$。

② 当$n=2k-1$，$k\in\mathbf{N}^*$时，$S_{2k-1}=S_{2k}-a_{2k}=\frac{3}{2}\times\frac{1}{3^k}-3k^2+6k-\frac{5}{2}$。因为$\frac{1}{3^k}$与$-3k^2+6k$在$n\in\mathbf{N}^*$时均单调递减，所以$S_{2k}$与$S_{2k-1}$在$n\in\mathbf{N}^*$时均单调递减，又$S_1=1$，$S_2=\frac{7}{3}$，$S_3=-\frac{7}{3}$，则满足$S_n>0$的所有正整数$n$为 1 和 2。

【变式 2】（🌶🌶🌶🌶）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$S_n=1-a_n$。

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) $c_n=\begin{cases}a_n, & n\text{ 为奇数，}\\ \log_2 a_n, & n\text{ 为偶数}\end{cases}(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列$\{c_n\}$的前$n$项和$T_n$。

【答案】(1) $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$；(2) $T_n=\begin{cases}-\frac{1}{3\times2^n}-\frac{n^2}{4}+\frac{11}{12}, & n\text{ 为奇数，}\\ -\frac{1}{3\times2^{n-1}}-\frac{n^2}{4}-\frac{n}{2}+\frac{2}{3}, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$

【解析】由题意得，当$n=1$时，$S_1=1-a_1$，即$a_1=\frac{1}{2}$；当$n\geqslant2$时，由$\begin{cases}S_n=1-a_n,\\ S_{n-1}=1-a_{n-1}\end{cases}$得$a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}$，则数列$\{a_n\}$是以$\frac{1}{2}$为首项、$\frac{1}{2}$为公比的等比数列，即$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$。

(2) 由(1)知$c_n=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n\text{ 为奇数，}\\ -n, & n\text{ 为偶数。}\end{cases}$

① 当n为偶数时，$T_n=(c_1+c_3+\cdots+c_{n-1})+(c_2+c_4+\cdots+c_n)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)+(-2-4-\cdots-n)=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-$

$\dfrac{n(n+2)}{4}=-\dfrac{1}{3\times 2^{n-1}}-\dfrac{n^2}{4}-\dfrac{n}{2}+\dfrac{2}{3}$。

② 当 n 为奇数时，$T_n=(c_1+c_3+\cdots+c_n)+(c_2+c_4+\cdots+c_{n-1})=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)+(-2-4-\cdots-n+1)=\dfrac{2}{3}\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)-\dfrac{n^2-1}{4}=-\dfrac{1}{3\times 2^n}-\dfrac{n^2}{4}+\dfrac{11}{12}$。

所以，$T_n=\begin{cases}-\dfrac{1}{3\times 2^n}-\dfrac{n^2}{4}+\dfrac{11}{12}, & n\text{ 为奇数，}\\ -\dfrac{1}{3\times 2^{n-1}}-\dfrac{n^2}{4}-\dfrac{n}{2}+\dfrac{2}{3}, & n\text{ 为偶数。}\end{cases}$

【变式 3】（🔥🔥🔥🔥）已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，$\{b_n\}$ 为等比数列，$a_1=b_1=1$，$a_5=5(a_4-a_3)$，$b_5=4(b_4-b_3)$。

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求证：$S_nS_{n+2}<S_{n+1}^2(n\in\mathbf{N}^*)$；

(3) 对任意的正整数 n，设 $c_n=\begin{cases}\dfrac{(3a_n-2)b_n}{a_na_{n+2}}, & n\text{ 为奇数，}\\ \dfrac{a_{n-1}}{b_{n+1}}, & n\text{ 为偶数，}\end{cases}$ 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和。

【答案】(1) $a_n=n$，$b_n=2^{n-1}$；(2) 见解析；(3) $\dfrac{4^n}{2n+1}-\dfrac{6n+5}{9\times 4^n}-\dfrac{4}{9}$

【解析】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q。由 $a_1=1$，$a_5=5(a_4-a_3)$ 可得 $d=1$，从而 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n$。又 $b_1=1$，$b_5=4(b_4-b_3)$，而 $q\neq 0$，则可得 $q^2-4q+4=0$，解得 $q=2$，从而 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=2^{n-1}$。

(2) 由 (1) 可得 $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，故 $S_nS_{n+2}=\dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$，$S_{n+1}^2=\dfrac{1}{4}(n+1)^2\cdot(n+2)^2$，从而 $S_nS_{n+2}-S_{n+1}^2=-\dfrac{1}{2}(n+1)\cdot(n+2)<0$，所以 $S_nS_{n+2}<S_{n+1}^2$。

(3) 当 n 为奇数时，$c_n=\dfrac{(3a_n-2)b_n}{a_na_{n+2}}=\dfrac{(3n-2)2^{n-1}}{n(n+2)}=\dfrac{2^{n+1}}{n+2}-\dfrac{2^{n-1}}{n}$；当 n 为偶数时，$c_n=\dfrac{a_{n-1}}{b_{n+1}}=\dfrac{n-1}{2^n}$。对任意的正整数 n，有 $\sum\limits_{k=1}^{n}c_{2k-1}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{2^{2k}}{2k+1}-\dfrac{2^{2k-2}}{2k-1}\right)=\dfrac{2^{2n}}{2n+1}-1$，$\sum\limits_{k=1}^{n}c_{2k}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k-1}{4^k}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4^2}+\dfrac{5}{4^3}+\cdots+\dfrac{2n-3}{4^{n-1}}+\dfrac{2n-1}{4^n}$ ①，由①得 $\dfrac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{n}c_{2k}=\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{3}{4^3}+\dfrac{5}{4^4}+\cdots+\dfrac{2n-3}{4^n}+\dfrac{2n-1}{4^{n+1}}$ ②，由①②得 $\dfrac{3}{4}\sum\limits_{k=1}^{n}c_{2k}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{4^2}+\cdots+\dfrac{2}{4^n}-\dfrac{2n-1}{4^{n+1}}=\dfrac{\frac{2}{4}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{2n-1}{4^{n+1}}$。由于 $\dfrac{\frac{2}{4}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{2n-1}{4^{n+1}}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{4^n}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{2n-1}{4^n}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{12}-\dfrac{6n+5}{3\times 4^{n+1}}$，从而得 $\sum\limits_{k=1}^{n}c_{2k}=\dfrac{5}{9}-\dfrac{6n+5}{9\times 4^n}$，因此 $\sum\limits_{k=1}^{2n}c_k=\sum\limits_{k=1}^{n}c_{2k-1}+\sum\limits_{k=1}^{n}c_{2k}=\dfrac{4^n}{2n+1}-\dfrac{6n+5}{9\times 4^n}-\dfrac{4}{9}$。

所以，数列$\{c_n\}$的前$2n$项和为$\frac{4^n}{2n+1}-\frac{6n+5}{9\times 4^n}-\frac{4}{9}$。

微专题 3 极速搞定错位相减求和

错位相减求和法是数列求和的重要方法，其适用范围明确，学生容易理解，思维也很清楚，但是，大多数学生往往难于计算正确，屡用屡错，为此，介绍一种方法快速地“搞定”错位相减求和法的计算结果！

一、极速“搞定”的公式法

错位相减求和法是适用于通项公式为“等差数列乘以等比等比 ”形式的数列，此类数列$\{c_n\}$总可以化为$\{a_nb_n\}$的形式，其中数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$分别是等差数列、等比数列，它们的通项分别为$a_n=an+b$，$b_n=q^{n-1}(q\neq 1)$，则$\{c_n\}$的前n项的和S_n也一定为一个等差数列乘以公比q的n次方再加一个常数形式，亦即$S_n=(An+B)q^n-B$，其中$A=\frac{a}{q-1}$，$B=\frac{b-A}{q-1}$。

特别提醒：

（1）等比数列的首项必须化为1；

（2）解答题我们该怎么书写？只需要写出$S_n=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n$，乘以公比，得$qS_n=a_1b_2+a_2b_3+\cdots+a_{n-1}b_n+a_nb_{n+1}$，再两式相减，最终写结果即可。

二、极速“搞定”的公式法的验证

【例 1】（🌶🌶🌶）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，前n项和为S_n，等比数列$\{b_n\}$的公比为q。已知$b_1=a_1$，$b_2=2$，$q=d$，$S_{10}=100$。

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）当$d>1$时，记$c_n=\frac{a_n}{b_n}$，求数列$\{c_n\}$的前n项和T_n。

【答案】（1）$a_n=2n-1$，$b_n=2^{n-1}$，或$a_n=\frac{2n+79}{9}$，$b_n=9\times\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}$；（2）$T_n=6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}$

【解析】（1）由题意有$\begin{cases}10a_1+45d=100,\\ a_1d=2,\end{cases}$即$\begin{cases}2a_1+9d=20,\\ a_1d=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=1,\\ d=2,\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=9,\\ d=\frac{2}{9},\end{cases}$故$\begin{cases}a_n=2n-1,\\ b_n=2^{n-1},\end{cases}$或$\begin{cases}a_n=\frac{1}{9}(2n+79),\\ b_n=9\times(\frac{2}{9})^{n-1}.\end{cases}$

（2）常规法：由$d>1$知$a_n=2n-1$，$b_n=2^{n-1}$，故$c_n=\frac{2n-1}{2^{n-1}}$，于是$T_n=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\frac{9}{2^4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$ ①，$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\frac{9}{2^5}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$ ②。①－②可得$\frac{1}{2}T_n=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{2n+3}{2^n}$，故$T_n=6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}$。

技巧法：当$d>1$时，记$c_n=\frac{a_n}{b_n}=\frac{2n-1}{2^{n-1}}=$

$(2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，则 $A=\frac{a}{q-1}=\frac{2}{\frac{1}{2}-1}=-4$，$B=\frac{b-A}{q-1}=\frac{-1-(-4)}{\frac{1}{2}-1}=-6$，故 $T_n=(An+B)q^n+C=(-4n-6)\left(\frac{1}{2}\right)^n+6=6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}$。

【变式】（🔥🔥🔥）已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，$\{b_n\}$ 是等差数列，且 $a_1=b_1=1$，$b_2+b_3=2a_3$，$a_5-3b_2=7$。

（1）求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $c_n=a_nb_n(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n。

【答案】（1）$a_n=2^{n-1}$，$b_n=2n-1$，$n\in\mathbf{N}^*$；（2）$S_n=(2n-3)2^n+3$

【解析】（1）设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，$\{b_n\}$ 公差为 d，由题意知 $q>0$，有 $\begin{cases}2q^2-3d=2,\\ q^4-3d=10,\end{cases}$ 消去 d 得 $q^4-2q^2-8=0$，解得 $q=2$，$d=2$，故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，$\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=2n-1$，$n\in\mathbf{N}^*$。

（2）常规法：由（1）知 $c_n=(2n-1)2^{n-1}$，设 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_n=1\times2^0+3\times2^1+5\times2^2+\cdots+(2n-1)\times2^{n-1}$，$2S_n=1\times2^1+3\times2^2+5\times2^3+\cdots+(2n-1)\times2^n$，两式相减得 $-S_n=1+2^2+2^3+\cdots+2^n-(2n-1)\times2^n=-(2n-3)\times2^n-3$，所以 $S_n=(2n-3)2^n+3$。

技巧法：$c_n=(2n-1)2^{n-1}$，则 $A=\frac{a}{q-1}=\frac{2}{2-1}=2$，$B=\frac{b-A}{q-1}=\frac{-1-2}{2-1}=-3$，故 $S_n=(An+B)\cdot q^n-B=(2n-3)\cdot2^n+3$。

三、公式法应用的释疑

利用公式法快速地寻求错位相减求和法的计算结果，需使得等比数列 $\{b_n\}$ 的通项为 $b_n=q^{n-1}(q\neq1)$，即 $b_1=1$。此时可能同学们要问了，如果等比数列 $\{b_n\}$ 的首项不为 1，不是“标准形式”怎么办呢？

【例 2】（🔥🔥🔥）已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足，$a_1=2$，$b_1=1$，$a_{n+1}=2a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，$b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{3}b_3+\cdots+\frac{1}{n}b_n=b_{n+1}-1(n\in\mathbf{N}^*)$。

（1）求 a_n 与 b_n；

（2）记数列 $\{a_nb_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求 T_n。

【答案】（1）$a_n=2^n$，$b_n=n$；（2）$T_n=(n-1)2^{n+1}+2$

【解析】（1）由 $a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n(n\in\mathbf{N}^*)$ 知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，则 $a_n=a_1\cdot2^{n-1}=2^n$。

由 $b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{3}b_3+\cdots+\frac{1}{n}b_n=b_{n+1}-1$ 得，当 $n\geqslant2$ 时，有 $b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{3}b_3+\cdots+\frac{1}{n-1}b_{n-1}=b_n-1$，两式相减，得 $\frac{1}{n}b_n=b_{n+1}-b_n$，则 $b_{n+1}=\frac{n+1}{n}b_n$，即 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{n+1}{n}(n\geqslant2)$。又当 $n=1$ 时，得 $b_1=b_2-1$，故 $b_2=2$，则 $b_n=$

拼搏还有百分之五十的机会，不去拼搏则毫无希望。努力不一定成功，但是不努力绝对不会成功。（推荐人：@杨誉球老师（广西））

$\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdot\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{b_3}{b_2}\cdot b_2=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{2}\times2=n$（满足 $b_1=1$），即 $b_n=n$。

（2）常规法：$a_nb_n=n\cdot2^n$，则 $T_n=1\times2^1+2\times2^2+\cdots+(n-1)\cdot2^{n-1}+n\cdot2^n$，$2T_n=1\times2^2+2\times2^3+\cdots+(n-1)\cdot2^n+n\cdot2^{n+1}$，故 $-T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot2^{n+1}=(1-n)2^{n+1}-2$，即 $T_n=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$。

技巧法：$c_n=n\cdot2^n=2n\cdot2^{n-1}$，则 $A=\frac{a}{q-1}=\frac{2}{2-1}=2$，$B=\frac{b-A}{q-1}=\frac{0-2}{2-1}=-2$，故 $T_n=(An+B)q^n-B=(2n-2)2^n+2=(n-1)2^{n+1}+2$。

评注：本题中 $c_n=n\cdot2^n$ 改写为 $c_n=2n\cdot2^{n-1}$，变形调整为“标准形式”，只有如此，才能利用公式法快速探求结果。

【变式 1】（）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=3n^2+8n$，$\{b_n\}$ 是等差数列，且 $a_n=b_n+b_{n+1}$。

（1）求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）令 $c_n=\frac{(a_n+1)^{n+1}}{(b_n+2)^n}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n。

【答案】（1）$b_n=3n+1$；（2）$T_n=3n\cdot2^{n+2}$

【解析】（1）由题意知当 $n\geq2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=6n+5$；当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=11$，所以 $a_n=6n+5$。

设数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d，有 $\begin{cases}a_1=b_1+b_2,\\a_2=b_2+b_3,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}11=2b_1+d,\\17=2b_1+3d,\end{cases}$ 可解得 $b_1=4$，$d=3$，所以 $b_n=3n+1$。

（2）常规法：由（1）知 $c_n=\frac{(6n+6)^{n+1}}{(3n+3)^n}=3(n+1)2^{n+1}$，又 $T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$，得 $T_n=3\times[2\times2^2+3\times2^3+4\times2^4+\cdots+(n+1)2^{n+1}]$，$2T_n=3\times[2\times2^3+3\times2^4+4\times2^5+\cdots+(n+1)2^{n+2}]$，两式作差得 $-T_n=3\times[2\times2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{n+1}-(n+1)2^{n+2}]=3\times\left[4+\frac{4(2^n-1)}{2-1}-(n+1)2^{n+2}\right]=-3n\cdot2^{n+2}$，所以 $T_n=3n\cdot2^{n+2}$。

技巧法：$c_n=3(n+1)\cdot2^{n+1}=(12n+12)\cdot2^{n-1}$，则 $A=\frac{a}{q-1}=\frac{12}{2-1}=12$，$B=\frac{b-A}{q-1}=\frac{12-12}{2-1}=0$，故 $T_n=(An+B)q^n-B=12n\cdot2^n=3n\cdot2^{n+2}$。

评注：本题中 $c_n=3(n+1)2^{n+1}$ 改写为 $c_n=(12n+12)2^{n-1}$，变形调整为“标准形式”是利用公式法的关键。

【变式 2】（）已知数列 $\{a_n\}$ 是首项为正数的等差数列，数列 $\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 $\frac{n}{2n+1}$。

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=(a_n+1)2^{a_n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n。

【答案】（1）$a_n=2n-1$；（2）$T_n=\frac{3n-1}{9}\cdot4^n+\frac{4}{9}$

现在的你，应该明白，没有什么捷径能让你出类拔萃，没有哪些艰难困苦是白白煎熬。你的每一份经历，不管是顺境还是坎坷，都会增加你生命的厚度。世界很小，请带着梦想一起奔跑；世界很大，请带着坚持努力向前！（推荐人：@唐小德老师（河南））

【解析】(1) 设数列$\{a_n\}$的公差为d,令$n=1$,得$\frac{1}{a_1a_2}=\frac{1}{3}$,所以$a_1a_2=3$。令$n=2$,得$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}=\frac{2}{5}$,所以$a_2a_3=15$,解得$a_1=1,d=2$,所以$a_n=2n-1$。

(2) 常规法:由(1)知$b_n=2n\cdot 2^{2n-4}=n\cdot 4^n$,所以$T_n=1\times 4^1+2\times 4^2+\cdots+n\cdot 4^n$,所以$4T_n=1\times 4^2+2\times 4^3+\cdots+(n-1)\cdot 4^n+n\cdot 4^{n+1}$,两式相减得$-3T_n=4^1+4^2+\cdots+4^n-n\cdot 4^{n+1}=\frac{4(1-4^n)}{1-4}-n\cdot 4^{n+1}=\frac{1-3n}{3}\cdot 4^{n+1}-\frac{4}{3}$,即$T_n=\frac{3n-1}{9}\cdot 4^n+\frac{4}{9}$。

技巧法:$b_n=2n\cdot 2^{2n-1}=n\cdot 4^n=4n\cdot 4^{n-1}$,

则$A=\frac{a}{q-1}=\frac{4}{4-1}=\frac{4}{3}$,$B=\frac{b-A}{q-1}=\frac{0-\frac{4}{3}}{4-1}=-\frac{4}{9}$,故$T_n=(An+B)q^n-B=\left(\frac{4}{3}n-\frac{4}{9}\right)4^n+\frac{4}{9}=\frac{3n-1}{9}\cdot 4^{n+1}+\frac{4}{9}$。

评注:本题中$b_n=n\cdot 4^n$改写为$b_n=4n\cdot 4^{n-1}$,变形调整为“标准形式”是利用公式法的关键。

四、公式法的活用

【例 4】(🌶🌶🌶🌶)已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}=qa_n$(q为实数,且$q\neq 1$),$n\in\mathbf{N}^*$,$a_1=1$,$a_2=2$,且a_2+a_3,a_3+a_4,a_4+a_5成等差数列。

(1) 求q的值和$\{a_n\}$的通项公式;

(2) 设$b_n=\frac{\log_2 a_{2n}}{a_{2n-1}}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$,求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n。

【答案】(1) $a_n=\begin{cases}2^{\frac{n-1}{2}}, & n\text{是奇数},\\ 2^{\frac{n}{2}}, & n\text{是偶数};\end{cases}$ (2) $S_n=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$

【解析】(1) 由已知有$(a_3+a_4)-(a_2+a_3)=(a_4+a_5)-(a_3+a_4)$,即$a_4-a_2=a_5-a_3$,所以$a_2(q-1)=a_3(q-1)$。又因为$q\neq 1$,故$a_3=a_2=2$,由$a_3=a_1q$得$q=2$,则当$n=2k-1(n\in\mathbf{N}^*)$时,$a_n=a_{2k-1}=2^{k-1}=2^{\frac{n-1}{2}}$;当$n=2k(n\in\mathbf{N}^*)$时,$a_n=a_{2k}=2^k=2^{\frac{n}{2}}$,所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\begin{cases}2^{\frac{n-1}{2}}, & n\text{是奇数},\\ 2^{\frac{n}{2}}, & n\text{是偶数}。\end{cases}$

(2) 常规法:由(1)得$b_n=\frac{\log_2 a_{2n}}{a_{2n-1}}=\frac{n}{2^{n-1}}$,设数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$S_n$,则$S_n=1\times\frac{1}{2^0}+2\times\frac{1}{2^1}+3\times\frac{1}{2^2}+\cdots+n\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$,$\frac{1}{2}S_n=1\times\frac{1}{2^1}+2\times\frac{1}{2^2}+3\times\frac{1}{2^3}+\cdots+n\cdot\frac{1}{2^n}$,两式相减得$\frac{1}{2}S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{2}{2^n}-\frac{n}{2^n}$,整理得$S_n=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$,所以数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$。

技巧法:$b_n=\frac{\log_2 a_{2n}}{a_{2n-1}}=\frac{n}{2^{n-1}}=n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,则

$A=\dfrac{a}{q-1}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}-1}=-2$，$B=\dfrac{b-A}{q-1}=\dfrac{0-(-2)}{\frac{1}{2}-1}=-4$，故 $S_n=(An+B)q^n-B=(-2n-4)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+4=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$。

【变式】(🌶🌶🌶🌶)设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，已知 $2S_n=3^n+3$。

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 若数列$\{b_n\}$满足 $a_nb_n=\log_3 a_n$，求$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n。

【答案】(1) $a_n=\begin{cases}3, & n=1,\\ 3^{n-1}, & n\geqslant 2;\end{cases}$ (2) $T_n=\dfrac{13}{12}-\dfrac{2n+1}{4\times 3^{n-1}}$

【解析】(1) 因为 $2S_n=3^n+3$，所以 $2a_1=3+3$，故 $a_1=3$。当 $n>1$ 时，$2S_{n-1}=3^{n-1}+3$，此时 $2a_n=2S_n-2S_{n-1}=3^n-3^{n-1}$，即 $a_n=3^{n-1}$，所以 $a_n=\begin{cases}3, & n=1,\\ 3^{n-1}, & n\geqslant 2。\end{cases}$

(2) 常规法：因为 $a_nb_n=\log_3 a_n$，所以 $b_1=\dfrac{1}{3}$。当 $n>1$ 时，$b_n=3^{1-n}\log_3 3^{n-1}=(n-1)\cdot 3^{1-n}$，所以 $T_1=b_1=\dfrac{1}{3}$，$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\dfrac{1}{3}+[1\times 3^{-1}+2\times 3^{-2}+\cdots+(n-1)\cdot 3^{1-n}]$，所以 $3T_n=1+[1\times 3^0+2\times 3^{-1}+\cdots+(n-1)3^{2-n}]$，两式相减得 $2T_n=\dfrac{2}{3}+(3^0+3^{-1}+3^{2-n})-(n-1)3^{1-n}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1-3^{1-n}}{1-3^{-1}}-(n-1)3^{1-n}=\dfrac{13}{6}-\dfrac{6n+3}{2\times 3^n}$，所以 $T_n=\dfrac{13}{12}-\dfrac{2n+1}{4\cdot 3^{n-1}}$。经检验，$n=1$ 时也适合。

综上可得，$T_n=\dfrac{13}{12}-\dfrac{2n+1}{4\times 3^{n-1}}$。

技巧法：由题意知 $b_n=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & n=1,\\ (n-1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}, & n\geqslant 2,\end{cases}$

则 $T_n=\dfrac{1}{3}+\left[1\times\dfrac{1}{3}+2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\cdots+(n-1)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+n\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right]-n\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$。令 $c_n=n\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=\dfrac{n}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$，其前 n 项和 M_n，则

$A=\dfrac{a}{q-1}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-1}=-\dfrac{1}{2}$，$B=\dfrac{b-A}{q-1}=\dfrac{0-\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{3}-1}=-\dfrac{3}{4}$，$M_n=(An+B)q^n-B=\left(-\dfrac{1}{2}n-\dfrac{3}{4}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2n+3}{4\times 3^n}$，所以 $T_n=\dfrac{1}{3}+M_n-n\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{2n+3}{4\times 3^n}-n\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=\dfrac{13}{12}-\dfrac{2n+1}{4\times 3^{n-1}}$。

五、极速“搞定”的缘由

数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$分别是等差数列、等比数列，它们的通项分别为 $a_n=an+b$，$b_n=q^{n-1}$ $(q\neq 1)$，则$\{c_n\}$的前 n 项的和为 $S_n=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n$，$qS_n=a_1b_2+a_2b_3+\cdots+$

$a_{n-1}b_n+a_nb_{n+1}$，两式相减得 $(q-1)S_n=-a_1b_1-d(b_2+b_3+b_4+\cdots+b_n)+a_nb_{n+1}$

$$=-a_1b_1-a\frac{b_2q^{n-1}-b_2}{q-1}+a_nb_{n+1}$$

$$=-a-b-a\cdot\frac{q^n-q}{q-1}+anq^n+bq^n$$

$$=-a-b-\frac{a}{q-1}\cdot q^n+\frac{aq}{q-1}+anq^n+bq^n$$

$$=anq^n+\left(b-\frac{a}{q-1}\right)q^n+\frac{aq}{q-1}-a-b$$

$$=anq^n+\left(b-\frac{a}{q-1}\right)q^n-\left(b-\frac{a}{q-1}\right),$$

所以 $S_n=\frac{a}{q-1}nq^n+\frac{b-\frac{a}{q-1}}{q-1}\cdot q^n-\frac{b-\frac{a}{q-1}}{q-1}$，令 $A=\frac{a}{q-1}$，则 $B=\frac{b-A}{q-1}$，故 $S_n=(An+B)q^n-B$。

微专题 4　斐波那契数列

1. 数学文化背景

人教 A 版(2019 版)高中数学教科书选择性必修第二册第 10 页“阅读与思考”栏目介绍了斐波那契数列。

1202 年，意大利数学家莱昂纳多·斐波那契(Leonardo Fibonacci，约 1170—约 1250)出版了他的《算盘全书》(Liber Abaci)。他在书中收录了一些有意思的问题，其中有一个关于兔子繁殖的问题：如果 1 对兔子每月能生 1 对小兔子(一雄一雌)，而每 1 对小兔子在它出生后的第 3 个月里，又能生 1 对小兔子，假定在不发生死亡的情况下，由 1 对初生的小兔子开始，50 个月后会有多少对兔子？

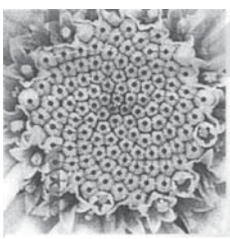
计算可知，从第 1 个月开始，每月末的兔子总对数为 1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，…。

你发现这个数列的规律了吗？

观察发现，这个数列从第三项开始，每一项都等于其相邻的前两项之和，如果用 a_n 表示第 n 个月的兔子的总对数，可以得出 $a_1=a_2=1$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ $(n\geqslant 3, n\in\mathbf{N}^*)$。这是一个由递推公式给出的数列，称为斐波那契数列，也称“兔子数列”。

特别地，当数列的项数趋于无穷大时，数列的每一项与其后一项的比值 $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ 无限趋近于黄金分割比 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$，故斐波那契数列又称为“黄金分割数列”。

人们在自然界中发现了许多斐波那契数列。例如，一棵树在第一年长出一条新枝，新枝成长一年后变为老枝，老枝每年都长出一条新枝。每一条树枝都按照这个规律成长，则每年的树枝总数正好构成了斐波那契数列。又如右图中，向日葵的管状小花排列成两组交错的螺旋，从内往外看，逆时针方向的螺旋有 13 条，顺时针方向的有 21 条，恰为斐波那契数列的相邻两项。蒲公英的种子和松塔的鳞片的



排列也呈现出类似的规律。

2. 斐波那契数列的应用

(1) 斐波那契数列递推公式的应用

【例1】(难度)著名的斐波那契数列的递推公式是 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant 3,n\in\mathbf{N}^*)$，其中 $a_1=1,a_2=1$. 若从该数列的前 300 项中随机地抽取一个数，则这个数是偶数的概率为(　　)。

A. $\frac{1}{3}$　B. $\frac{33}{100}$　C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{67}{100}$

【答案】A

【解析】因为奇数加奇数结果是偶数，奇数加偶数结果是奇数，偶数加奇数结果是奇数，所以数列中任意相邻的三项，其中一项是偶数，两项是奇数，则前 300 项中偶数有 100 项，故从该数列的前 300 项中随机地抽取一个数，这个数是偶数的概率为 $p=\frac{100}{300}=\frac{1}{3}$。故选 A。

【变式】(难度)斐波那契数列的前 2022 项中有(　　)个奇数。

A. 1012　B. 1346　C. 1348　D. 1350

【答案】C

【解析】从斐波那契数列 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,…可得，每 3 个数中有 1 个偶数(并且是最后一个)、2 个奇数，又 $2022=674\times 3$，可知有 $\frac{2}{3}\times 2022=1348$ 个奇数。故选 C。

【例2】(难度)现有与斐波那契数列性质类似的数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=2,a_4=10$，且 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n\in\mathbf{N}^*)$。记数列 $\{a_n^2\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_p=2852$，则 $p=$________。

【答案】7

【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=2,a_4=10$，且 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $10=a_4=a_3+a_2,a_3=a_2+a_1$，可得 $10=2a_2+2$，解得 $a_2=4$，故 $a_3=2+4=6$，则数列 $\{a_n\}$ 为 2,4,6,10,16,26,42,…，数列 $\{a_n^2\}$ 为 4,16,36,100,256,676,1764,…，则 $S_7=4+16+36+100+256+676+1764=2852$。因为 $S_p=2852$，所以 $p=7$。

【变式】(难度)斐波那契数列各项被 3 除后的余数构成一新数列 $\{a_n\}$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 2022 项的和为________。

【答案】2276

【解析】由数列 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,…各项除以 3 的余数可得数列 $\{a_n\}$ 为 1,1,2,0,2,2,1,0,1,1,2,0,2,2,1…，则数列 $\{a_n\}$ 是周期为 8 的数列，一个周期中八项和为 $1+1+2+0+2+2+1+0=9$，又 $2022=252\times 8+6$，故数列 $\{a_n\}$ 的前 2022 项的和 $S_{2022}=252\times 9+8=2276$。

(2) 斐波那契数列通项公式的应用

斐波那契数列的通项公式为 $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$。

证明(数学归纳法)：

当 $n=1$ 时，$a_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=1$，成立。

假设当 $n=k$ 时，$a_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]$，成立。

当 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}=a_k+a_{k-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]+\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right]-\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]-\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\cdot\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\times\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right]$，成立。

所以，$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$。

【例 3】（）斐波那契数列的通项公式为 $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$。设 n 是不等式 $\log_{\sqrt{2}}[(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n]>2n+11$ 的正整数解，则 n 的最小值为（　　）。

A. 10　　B. 9　　C. 8　　D. 7

【答案】 C

【解析】 因为 n 是不等式 $\log_{\sqrt{2}}[(1+\sqrt{5})^x-(1-\sqrt{5})^x]>2x+11$ 的正整数解，则 $\log_{\sqrt{2}}[(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n]>2n+11$，则 $\log_{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]>11$，故 $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n>(\sqrt{2})^{11}$，即 $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]>\frac{(\sqrt{2})^{11}}{\sqrt{5}}$。令 $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$，则数列 $\{a_n\}$ 为斐波那契数列，故 $a_n>\frac{(\sqrt{2})^{11}}{\sqrt{5}}$，即 $a_n^2>\frac{2^{11}}{5}$。不难知道 $a_7=13$，$a_8=21$，$a_7^2<\frac{2^{11}}{5}$，$a_8^2>\frac{2^{11}}{5}$，则使得 $a_n^2>\frac{2^{11}}{5}$ 成立的 n 的最小值为 8，故 $\log_{\sqrt{2}}[(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n]>2n+11$ 成立的 n 的最小值为 8。故选 C。

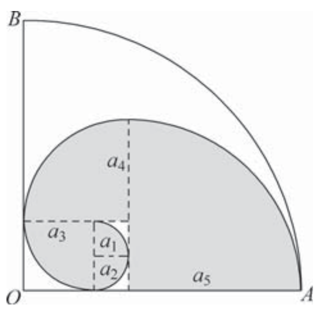
【变式】（）斐波那契数列的通项公式为 $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$，该通项公式又称为“比内公式”（法国数学家比内首先证明此公式），是用无理数表示有理数的一个范例。设 n 是不等式 $\log_2[(1+\sqrt{5})^x-(1-\sqrt{5})^x]>x+6$ 的正整数解，则 n 的最小值为________。

【答案】 9

【解析】 不等式 $\log_2[(1+\sqrt{5})^x-(1-\sqrt{5})^x]>x+6$ 可化为 $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x>2^6=64$，则 $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x>\frac{64}{\sqrt{5}}$，$\frac{64}{\sqrt{5}}\in(21,34)$。由数列 $\{a_n\}$：1，1，2，3，5，8，13，21，34，…，$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ 可得 $n>8$，因此 n 的最小值为 9。

(3) 斐波那契数列在几何图形中的应用

【例 4】( )满足 $a_1=a_2=1$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant 3)$的数列$\{a_n\}$称为斐波那契数列，又称黄金分割数列. 如图所示，依次以斐波那契数列$\{a_n\}$各项为边长作正方形，在每个正方形中取半径为该正方形边长、圆心角为90°的圆弧，依次连接圆弧端点所成的曲线被称为斐波那契螺旋线(也称“黄金螺旋”). 如图圆心角为90°的扇形OAB中的曲线是斐波那契螺旋线的一段，若在该扇形内任取一点，则该点在图中阴影部分的概率为(　　)。

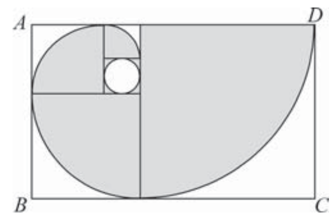


A. $\dfrac{3}{8}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{5}{8}$　　D. $\dfrac{7}{8}$

【答案】C

【解析】由题意知 $a_1=a_2=1$，$a_3=2$，$a_4=3$，$a_5=5$，则阴影部分面积为 $S_{阴影}=\dfrac{\pi}{4}(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2)=\dfrac{\pi}{4}(1^2+1^2+2^2+3^2+5^2)=10\pi$，扇形$OAB$的面积为 $S_{扇形}=\dfrac{\pi\times 8^2}{4}=16\pi$，所以在该扇形内任取一点，则该点在图中阴影部分的概率为 $p=\dfrac{10\pi}{16\pi}=\dfrac{5}{8}$。故选C。

【变式 1】( )斐波那契螺旋线，也称“黄金螺旋线”，是根据斐波那契数列1，1，2，3，5，画出来的螺旋曲线. 如图所示，白色小圆内切于边长为1的正方形，黑色曲线就是斐波那契螺旋线，它是依次在以1，2，3，5为边长的正方形中画一个圆心角为90°的扇形，将其圆弧连接起来得到的. 若在矩形$ABCD$内随机取一点，则此点取自阴影部分的概率是(　　)。

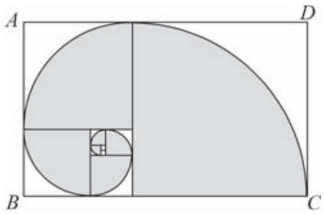


A. $\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\dfrac{39\pi}{160}$　　C. $\dfrac{19\pi+1}{80}$　　D. $\dfrac{19\pi+2}{80}$

【答案】D

【解析】由已知可得矩形$ABCD$的长为8，宽为5，即面积 $S_{矩}=8\times 5=40$，阴影部分的面积 $S_{阴}=\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{4\pi}{4}+\dfrac{9\pi}{4}+\dfrac{25\pi}{4}=\dfrac{19\pi}{2}+1$。设在矩形$ABCD$内随机取一点，此点取自阴影部分为事件$A$，则 $P(A)=\dfrac{S_{阴}}{S_{矩}}=\dfrac{\dfrac{19\pi}{2}+1}{40}=\dfrac{19\pi+2}{80}$。故选D。

【变式 2】( )如图所示，矩形$ABCD$是以斐波那契数为边长的正方形拼接而成的，在每个正方形中作一个圆心角为90°的圆弧，这些圆弧所连成的弧线就是斐波那契螺旋线的一部分. 在矩形$ABCD$内任取一点，该点取自阴影部分的概率为(　　)。

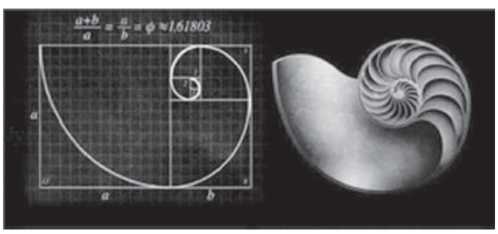


A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{\pi}{8}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{\pi}{4}$

【答案】D

【解析】由已知可得矩形 $ABCD$ 的面积为 $(3+5)\times(2+3+8)=104$，又阴影部分的面积为 $\frac{1}{4}\pi(1^2+1^2+2^2+3^2+5^2+8^2)=26\pi$，则点取自阴影部分的概率为 $\frac{26\pi}{104}=\frac{\pi}{4}$。故选 D。

【例 5】()斐波那契螺旋线也称“黄金螺旋”，是根据斐波那契数列 1，1，2，3，5，8，13，…作为正方形的边长拼成长方形后画出来的螺旋曲线（由圆弧拼接而成）。斐波那契螺旋线在自然界中很常见，比如海螺的外壳、花瓣、向日葵、台风、水中的漩涡、星系等所呈现的都是斐波那契螺旋，如图所示“黄金螺旋”的长度为（　　）。

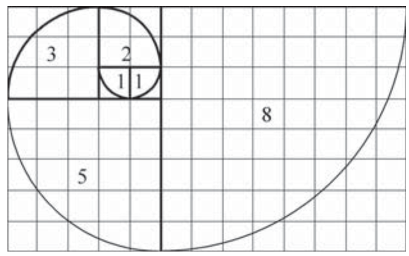


A. 6π B. $\frac{33}{2}\pi$ C. 10π D. 27π

【答案】B

【解析】根据图可知，螺旋曲线的每一段都是以这个正方形的边长为半径的 $\frac{1}{4}$ 圆弧构成的，故图中“黄金螺旋”的长度为 $\frac{1}{4}\times2\pi(1+1+2+3+5+8+13)=\frac{33\pi}{2}$。故选 B。

【变式 1】()斐波那契螺旋线被誉为自然界最完美的“黄金螺旋”，如图为该螺旋线的前一部分，若用接下来的一段圆弧所对应的扇形作圆锥的侧面，则该圆锥的母线与底面所形成角的余弦值为（　　）。

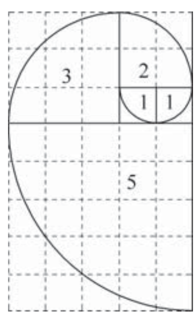


A. $\frac{2\sqrt{15}}{15}$ B. $\frac{\sqrt{15}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{15}}{15}$ D. $\frac{1}{4}$

【答案】D

【解析】由斐波那契螺旋数的规律可知，从第三项起，每一项都是前面两个数之和，即接下来的圆弧对应的圆面半径是 $5+8=13$，圆锥的母线长为 13，对应的弧长是 $2\pi\times13\times\frac{1}{4}=\frac{13\pi}{2}$，则该圆锥的母线与底面所形成角的余弦值为 $\frac{\frac{13}{4}}{13}=\frac{1}{4}$。故选 D。

【变式 2】()斐波那契螺旋线被誉为自然界最完美的“黄金螺旋”，如图所示为该螺旋线的前一部分，如果用接下来的一段圆弧所对应的扇形做圆锥的侧面，则该圆锥的高为（　　）。



A. $2\sqrt{15}$　　B. $4\sqrt{15}$

C. $5\sqrt{15}$　　D. $6\sqrt{15}$

【答案】A

【解析】由斐波那契数的规律知，从第三项起，每一个数都是前面两个数之和，所以接下来的圆弧对应的圆面半径是 $3+5=8$，对应的弧长是 $l=2\pi\times8\times\frac{1}{4}=4\pi$，设圆锥底面半径为 r，则 $2\pi r=4\pi$，解得 $r=2$，所以圆锥的高为 $h=\sqrt{8^2-2^2}=2\sqrt{15}$。故选 A。

【变式 3】(🔥🔥🔥🔥)若数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1$，$a_2=1$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant3,n\in\mathbf{N}^*)$，则称数列 $\{a_n\}$ 为斐波那契数列. 斐波那契螺旋线是根据斐波那契数列画出来的螺旋曲线，如图 1 中的实线部分(正方形内的数字与 a_n 为所在正方形的边长，每个正方形中的曲线与正方形的两边构成圆心角为 90°的扇形). 自然界中存在许多这样的图案，比如向日葵种子的排列、芦荟叶子的排列等(图 2)，若一母线长为 16 的圆锥的底面周长恰好等于图 1 的螺旋曲线的长度，则该圆锥的侧面积为________。

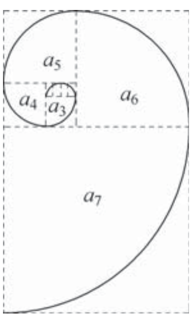


图 1

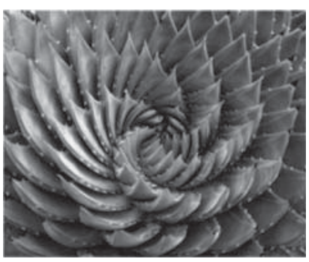


图 2

【答案】132π

【解析】由 $a_1=1,a_2=1,a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant3,n\in\mathbf{N}^*)$ 得 $a_3=2,a_4=3,a_5=5,a_6=8,a_7=13$，则图 1 中螺旋线的长度为 $\frac{2\pi}{4}(1+1+2+3+5+8+13)=\frac{33\pi}{2}$。设圆锥底面圆的半径为 r，母线长为 l，则 $2\pi r=\frac{33\pi}{2}$，$l=16$，故圆锥的侧面积为 $\frac{1}{2}\times2\pi r\times l=\frac{33\pi}{4}\times16=132\pi$。

(4) 斐波那契数列的性质及应用

性质 1：$S_n=a_{n+2}-1$。(S_n 为斐波那契数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和)

证明：因为 $a_1=1,a_2=1,a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant3,n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $a_{n-1}=a_n-a_{n-2}(n\geqslant3,n\in\mathbf{N}^*)$，所以有 $a_1=a_1,a_2=a_3-a_1,a_3=a_4-a_2,\cdots,a_{n-1}=a_n-a_{n-2},a_n=a_{n+1}-a_{n-1}$，累加可得 $a_1+a_2+\cdots+a_n=a_n+a_{n+1}-a_2=a_{n+2}-1$，所以 $S_n=a_{n+2}-1$。

【例 6】(🔥🔥🔥🔥)数列 $\{a_n\}$ 为斐波那契数列，记该数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则(　　)。

A. $a_{2022}=S_{2021}-1$　　B. $a_{2022}=S_{2020}+1$

C. $a_{2022}=S_{2020}+2$　　D. $a_{2022}=S_{2021}-2$

【答案】B

【解析】方法一：$\{a_n\}$ 为斐波那契数列，则 $a_3-a_2=a_1,a_4-a_3=a_2,\cdots,a_{2022}-a_{2021}=a_{2020}$，所以利用叠加法得 $a_{2022}-a_2=S_{2020}$，故 $a_{2022}=S_{2020}+1$。

方法二：由性质 1 得 $S_n=a_{n+2}-1$，所以 $a_{2022}=S_{2020}+1$。故选 B。

【变式 1】(🔥🔥🔥🔥)“斐波那契数列”又称“兔子”数列，是由意大利数学家里昂那多斐波那契发现的，该数列满足：$a_1=1,a_2=$

$1, a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant 3, n\in\mathbf{N}^*)$，若 $a_{2024}=G$，则其前 2022 项和为（　　）。

A. G　B. $G+1$　C. $-G$　D. $G-1$

【答案】D

【解析】方法一：由 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ 可得 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2023}=a_2+(a_4-a_2)+(a_6-a_4)+\cdots+(a_{2024}-a_{2022})=a_{2024}=G$①，$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2022}=(a_3-a_1)+(a_5-a_3)+(a_7-a_5)+\cdots+(a_{2023}-a_{2021})=a_{2023}-1$②，①+②得 $a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2022}+a_{2023}=G+a_{2023}-1$，化简得 $a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2022}=G-1$。

方法二：由性质 1 得 $S_n=a_{n+2}-1$，所以 $S_{2022}=a_{2024}-1=G-1$。故选 D。

【变式 2】（🌶🌶🌶🌶）若斐波那契数列第 30 项是 832040，请估计这个数列的前 30 项之和最接近（　　）（备注：$0.618^2\approx 0.38$，$1.618^2\approx 2.61$）。

A. 31 万　　B. 51 万

C. 217 万　　D. 317 万

【答案】C

【解析】根据题意得 $F_{30}=832040$，假设 $\{F_{30}\}$ 的前 n 项和为 S_n，由性质 1 得 $S_n=F_{n+2}-1$，则 $S_{28}=F_{30}-1=832039$。又因为随着 n 的增大，相邻两项之比越来越接近 0.618，所以 $F_{29}=832040\times 0.618\approx 514200$，故 $S_{30}=S_{28}+F_{29}+F_{30}\approx 2178279$。故选 C。

性质 2：(1) $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}=a_{2n}$；(2) $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}=a_{2n+1}-1$。

证明：(1) 因为 $a_1=a_2=1, a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant 3)$，所以 $a_{n-1}=a_n-a_{n-2}(n\geqslant 3)$，则 $a_1=a_2, a_3=a_4-a_2, a_5=a_6-a_4, \cdots, a_{2n-1}=a_{2n}-a_{2n-2}$，累加可得 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}=a_{2n}$。

(2) 因为 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant 3)$，所以 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}=a_2+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{2n-2}+a_{2n-1})=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n-1}$。由性质 1 可得 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n-1}=a_{2n+1}-1$，所以 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}=a_{2n+1}-1$。

【例 7】（🌶🌶🌶🌶）已知斐波那契数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1, a_2=1, a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，若 $a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}=a_k-a_2$，则 $k=$（　　）。

A. 12　　B. 13　　C. 89　　D. 144

【答案】A

【解析】方法一：因为 $a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}=a_k-a_2$，所以 $a_k=a_2+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}=a_4+a_5+a_7+a_9+a_{11}=a_6+a_7+a_9+a_{11}=a_8+a_9+a_{11}=a_{10}+a_{11}=a_{12}$，故 $k=12$。故选 A。

方法二：由性质 2 得 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}=a_{2n}$，因为 $a_k=a_2+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}$，又 $a_1=1, a_2=1$，所以 $a_k=a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}=a_{12}$，故 $k=12$。故选 A。

【变式 1】（🌶🌶🌶🌶）$\{a_n\}$ 为斐波那契数列，记 $a_{2022}=t$，则 $\sum\limits_{i=1}^{1011}a_{2i-1}=$（　　）。

A. t^2　　B. $t-1$　　C. t　　D. $t+1$

【答案】C

【解析】方法一：$\sum\limits_{i=1}^{1011}a_{2i-1}=a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{2021}$，由 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n\in\mathbf{N}^*)$ 得 $a_{2022}=a_{2021}+a_{2020}=a_{2021}+a_{2019}+a_{2018}=\cdots=a_{2021}+a_{2019}+\cdots+a_3+a_2=a_{2021}+a_{2019}+\cdots+a_3+a_1=t$。

没有等不到拂晓的夜晚，而只有醒着的人才能看到黎明，在下次见面之前，我会每天都更努力一点。（推荐人：@刘蕴涵（浙江））

方法二：由性质 2 得 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}=a_{2n}$，所以 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2021}=a_{2022}=t$。故选 C。

【变式 2】(🔥🔥🔥🔥)已知斐波那契数列$\{a_n\}$满足 $a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，若记 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2019}=M$，$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2020}=N$，则 $a_{2022}=$________。(用 M,N 表示)

【答案】$M+N+1$

【解析】方法一：因为 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2019}=M$，$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2020}=N$，所以 $S_{2020}=M+N$，则 $a_1+(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\cdots+(a_{2017}+a_{2018})=a_1+S_{2018}=M$，故 $S_{2018}=M-a_1=M$。因为 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2020}=N$，所以 $a_2+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{2018}+a_{2019})=-a_1+S_{2019}+a_2=S_{2019}+1=N$，则 $S_{2019}=N-1$，故 $a_{2020}=S_{2020}-S_{2019}=(M+N)-(N-1)=M+1$，$a_{2019}=S_{2019}-S_{2018}=(N-1)-M=N-M-1$，所以 $a_{2021}=a_{2019}+a_{2020}=N$，$a_{2022}=a_{2020}+a_{2021}=M+N+1$。

方法二：由性质 2 得 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}=a_{2n}$，$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}=a_{2n+1}-1$，所以 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2019}=a_{2020}=M$，$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2020}=a_{2021}-1=N$，由 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 得 $a_{2022}=a_{2021}+a_{2020}=(N+1)+M=M+N+1$。

【变式 3】(🔥🔥🔥🔥，多选题)若数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_2=1$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ $(n\geqslant 3,n\in\mathbf{N}_+)$，则称数列$\{a_n\}$为斐波那契数列，又称黄金分割数列. 在现代物理、准晶体结构，化学等领域，斐波那契数列都有直接的应用. 则下列结论成立的是(　　)。

A. $a_7=13$

B. $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2021}=a_{2022}$

C. $3a_n=a_{n-2}+a_{n+2}$ $(n\geqslant 3)$

D. $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2022}=a_{2023}$

【答案】ABC

【解析】方法一：A：因为 $a_1=1$，$a_2=1$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ $(n\geqslant 3,n\in\mathbf{N}_+)$，所以 $a_3=a_2+a_1=2$，$a_4=a_3+a_2=3$，$a_5=a_4+a_3=5$，$a_6=a_5+a_4=8$，$a_7=a_6+a_5=13$，所以 A 正确。

C：$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ $(n\geqslant 3,n\in\mathbf{N}_+)$，可得 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n=2a_n+a_{n-1}=3a_n-a_{n-2}$，即有 $3a_n=a_{n-2}+a_{n+2}$ $(n\geqslant 3)$，故 C 正确。

B：设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2019}=a_1+(a_2+a_1)+(a_4+a_3)+\cdots+(a_{2018}+a_{2017})=a_1+S_{2018}=1+S_{2018}$，又 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-1}+a_{n-2}=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}+a_{n-3}+a_{n-4}=\cdots=S_n+1$，所以 $a_{2020}=S_{2018}+1=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2019}$，所以 B 正确。

D：$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2020}=a_2+a_3+a_2+a_5+a_4+\cdots+a_{2019}+a_{2018}=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\cdots+a_{2019}=S_{2019}$，但 $S_{2019}+1=a_{2021}$，所以 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2020}\neq a_{2021}$，所以 D 不正确。

方法二：A，C 选项同上。

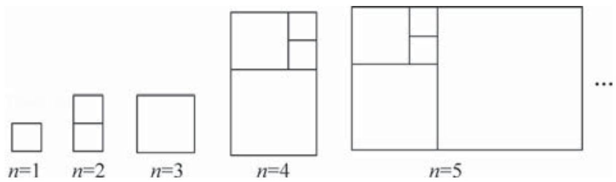
B，D：由性质 2 得 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}=a_{2n}$，$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}=a_{2n+1}-1$，所以 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2021}=a_{2022}$，$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2022}=a_{2023}-1$，所以 B 正确，D 不正确。故选 ABC。

性质 3：$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=a_na_{n+1}$。

证明：因为 $a_1=a_2=1$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ $(n\geqslant 3)$，所以 $a_{n-1}=a_n-a_{n-2}$ $(n\geqslant 3)$，两边同乘以

a_{n-1}，得 $a_{n-1}^2=a_na_{n-1}-a_{n-2}a_{n-1}(n\geqslant3)$，所以 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=a_1^2+(a_2a_3-a_1a_2)+(a_4a_3-a_3a_2)+\cdots+(a_{n+1}a_n-a_na_{n-1})=a_1^2+a_{n+1}a_n-a_1a_2=a_na_{n+1}$。

【例 8】（　）如图所示，在以斐波那契数为边长的正方形拼成的长方形中，利用下列各图中的面积关系可推出 $\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2021}^2}{a_{2021}}$ 是斐波那契数列的第（　　）项。



A. 2020　B. 2021　C. 2022　D. 2023

【答案】C

【解析】方法一：$a_{n+1}=a_{n+2}-a_n$，则 $a_{n+1}^2=a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=a_{n-2}a_{n+1}-a_{n+1}a_n$，又 $a_1=a_2=1$，所以 $a_1^2=a_2a_1$，$a_2^2=a_3a_2-a_2a_1$，$a_3^2=a_4a_3-a_3a_2$，…，$a_{2021}^2=a_{2022}a_{2021}-a_{2021}a_{2020}$，则 $T_{2021}=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2021}^2=a_{2022}a_{2021}$，故 $\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2021}^2}{a_{2021}}=\dfrac{T_{2021}}{a_{2021}}=a_{2022}$。

方法二：由性质 3 可得 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=a_na_{n+1}$，所以 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2021}^2=a_{2021}a_{2022}$，则 $\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2021}^2}{a_{2021}}=a_{2022}$。故选 C。

【变式 1】（　）斐波那契数列为 $\{a_n\}$，则 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2022}^2=$（　　）。

A. $a_{2020}a_{2021}$　　B. $a_{2020}a_{2022}$

C. $a_{2021}a_{2022}$　　D. $a_{2022}a_{2023}$

【答案】D

【解析】方法一：$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，则 $a_{n+1}=a_{n+2}-a_n(n\geqslant1)$，所以 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2022}^2=a_1^2+a_2(a_3-a_1)+a_3(a_4-a_2)+\cdots+a_{2022}(a_{2023}-a_{2021})=a_1^2+a_2a_3-a_2a_1+a_3a_4-a_3a_2+\cdots+a_{2022}a_{2023}-a_{2022}a_{2021}=a_{2022}a_{2023}+a_1^2-a_2a_1=a_{2022}a_{2023}$。

方法二：由性质 3 可得 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=a_n\cdot a_{n+1}$，所以 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2022}^2=a_{2022}a_{2023}$。故选 D。

【变式 2】（　）斐波那契数列 $\{a_n\}$ 可以用如下方法定义 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant3,n\in\mathbf{N}^*)$，$a_1=a_2=1$。则 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{2022}a_i^2}{a_{2022}}(i=1,2,\cdots,2022)$ 是数列 $\{a_n\}$ 的第几项？（　　）。

A. 2020　B. 2021　C. 2022　D. 2023

【答案】D

【解析】方法一：由题意可得 $a_1^2=a_2a_1$，$a_2^2=a_2(a_3-a_1)=a_2a_3-a_2a_1$，$a_3^2=a_3(a_4-a_2)=a_3a_4-a_3a_2$，…，$a_{2022}^2=a_{2022}(a_{2023}-a_{2021})=a_{2022}a_{2023}-a_{2023}a_{2021}$，累加得 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2022}^2=a_{2022}a_{2023}$，即 $\sum\limits_{i=1}^{2022}a_i^2=a_{2022}\cdot a_{2023}$，$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{2022}a_i^2}{a_{2022}}=a_{2023}$。

方法二：由性质 3 可得 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=a_na_{n+1}$，所以 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2022}^2=a_{2022}a_{2023}$，则 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{2022}a_i^2}{a_{2022}}=a_{2023}$。故选 D。

努力做一个积极的人。不埋怨谁，不嘲笑谁，也不羡慕谁，阳光下灿烂，风雨中奔跑，做自己的梦，走自己的路。（推荐人：@解翠薇（河北））

【变式 3】（难度4）斐波那契得到了其通项公式为 $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$，他发现这一数列的个位数是以 60 为周期变化的，故此数列称为斐波那契数列，今天，我们借助意大利数学家斐波那契对人类的此项贡献，求解 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{68}^2$ 的值的个位数为________。

【答案】4

【解析】方法一：根据题意可得此数列满足 $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}\Leftrightarrow a_{n+1}=a_{n+2}-a_n\Leftrightarrow a_{n+1}^2=a_{n+1}a_{n+2}-a_na_{n+1}$，$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{68}^2=a_1^2+a_2a_3-a_1a_2+a_3a_4-a_2a_3+\cdots+a_{68}a_{69}-a_{67}a_{68}=a_{68}a_{69}-a_1a_2+a_1^2=a_{68}a_{69}$。根据题意，$a_{68}$ 的个位数与 a_8 的个位数相同为 1，a_{69} 的个位数与 a_9 的个位数相同为 4，所以个位数为 4。

方法二：由性质 3 可得 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=a_na_{n+1}$，所以 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{68}^2=a_{68}a_{69}$，根据题意，$a_{68}$ 的个位数与 a_8 的个位数相同为 1，a_{69} 的个位数与 a_9 的个位数相同为 4，所以个位数为 4。

性质 4：$a_na_{n+2}-a_{n+1}^2=(-1)^{n+1}$。

证明：因为 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant 3,n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $a_na_{n+2}-a_{n+1}^2=a_n(a_n+a_{n+1})-(a_{n-1}+a_n)^2=a_na_{n+1}-a_{n-1}^2-2a_{n-1}a_n=a_n(a_{n+1}-a_{n-1})-a_{n-1}(a_{n-1}+a_n)=a_n^2-a_{n-1}a_{n+1}$。同理可得 $a_n^2-a_{n-1}a_{n+1}=a_{n-2}a_n-a_{n-1}^2$，所以 $a_na_{n+2}-a_{n+1}^2=a_n^2-a_{n-1}a_{n+1}=a_{n-2}a_n-a_{n-1}^2$，当 n 为偶数时，$a_na_{n+2}-a_{n+1}^2=a_2a_4-a_3^2=-1$；当 n 为奇数时，$a_na_{n+2}-a_{n+1}^2=a_2^2-a_1a_3=1$，所以 $a_na_{n+2}-a_{n+1}^2=(-1)^{n+1}$。

【例 9】（难度3）数列 $\{a_n\}$ 为“斐波那契数列”，则 $a_{2021}a_{2023}-(a_{2022})^2$ 等于（　　）。

A. 1　B. -1　C. 2022　D. -2022

【答案】A

【解析】方法一：当 $n\geqslant 4$ 时，有 $a_{n+1}=a_{n-1}+a_n$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，则 $a_{n-1}a_{n+1}-a_n^2=a_{n-1}(a_{n-1}+a_n)-a_n^2=a_{n-1}^2-a_na_{n-2}=a_{n-1}^2-(a_{n-1}+a_{n-2})a_{n-2}=a_{n-3}a_{n-1}-a_{n-2}^2$，故 $a_{2021}a_{2023}-(a_{2022})^2=a_{2020}a_{2022}-(a_{2021})^2=\cdots=a_3a_1-a_2^2=1$。

方法二：由性质 4 可得 $a_na_{n+2}-a_{n+1}^2=(-1)^{n+1}$，所以 $a_{2021}a_{2023}-(a_{2022})^2=(-1)^{2022}=1$。故选 A。

【变式 1】（难度4）斐波那契数列 $\{a_n\}$ 前两个数都是 1，从第三个数起，每一个数都等于它前面两个数的和. 若 $b_n=a_na_{n+2}-a_{n+1}^2$，则 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{2022}=$________。

【答案】0

【解析】方法一：根据题意，$b_1=a_1a_3-a_2^2=1\times 2-1=1$，$b_2=a_2a_4-a_3^2=1\times 3-2^2=-1$，$b_3=a_3a_5-a_4^2=2\times 5-3^2=1$，$b_4=a_4a_6-a_5^2=3\times 8-5^2=-1\cdots$ 所以 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{2022}=(a_1a_3-a_2^2)+(a_2a_4-a_3^2)+(a_3a_5-a_4^2)+\cdots+(a_{2022}a_{2024}-a_{2023}^2)=1011\times(1-1)=0$。

方法二：由性质 4 可得 $a_na_{n+2}-a_{n+1}^2=(-1)^{n+1}$，所以 $b_1=a_1a_3-a_2^2=(-1)^2=1$，$b_2=a_2a_4-a_3^2=(-1)^3=-1$，$b_3=a_3a_5-a_4^2=(-1)^4=1$，$b_4=a_4a_6-a_5^2=(-1)^5=$

$-1,\cdots$所以$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{2022}=(a_1a_3-a_2^2)+(a_2a_4-a_3^2)+(a_3a_5-a_4^2)+\cdots+(a_{2022}a_{2024}-a_{2023}^2)=1011\times(1-1)=0$。

【变式 2】（🌶🌶🌶🌶🌶）若$\{a_n\}$是“斐波那契数列”，则$(a_1a_3-a_2^2)(a_2a_4-a_3^2)(a_3a_5-a_4^2)\cdots(a_{2022}a_{2024}-a_{2023}^2)$的值为（　　）。

A. -1　B. 1　C. -2　D. 2

【答案】A

【解析】由题意可知$a_1a_3-a_2^2=1,a_2a_4-a_3^2=-1,a_3a_5-a_4^2=1,a_4a_6-a_5^2=-1,\cdots,a_{2019}a_{2021}-a_{2020}{}^2=1,a_{2022}a_{2024}-a_{2023^2}=-1$，则$(a_1a_3-a_2^2)(a_2a_4-a_3^2)(a_3a_5-a_4^2)\cdots(a_{2022}a_{2024}-a_{2023}^2)=(-1)^{1011}\times1^{1011}=-1$。故选 A。

(5) 斐波那契数列的综合应用

【例 10】（🌶🌶🌶🌶，多选题）有关斐波那契数列，下列说法正确的是（　　）。

A. $a_8=21$

B. $a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}+1(n\geqslant2)$

C. $\sum_{i=1}^{n}a_i^2=a_na_{n+1}$

D. $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=a_{12}-1$

【答案】ACD

【解析】方法一：A：斐波那契数列$\{a_n\}$：1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,…，所以$a_8=21$，故 A 正确。

B：当$n=2$时，$a_2^2\neq a_1a_3+1$，故 B 不正确。

C：$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，则$a_{n+1}=a_{n+2}-a_n(n\geqslant1)$，所以$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=a_1^2+a_2(a_3-a_1)+a_3(a_4-a_2)+\cdots+a_n(a_{n+1}-a_{n-1})=a_1^2+a_2a_3-a_2a_1+a_3a_4-a_3a_2+\cdots+a_na_{n+1}-a_na_{n-1}=a_na_{n+1}+a_1^2-a_2a_1=a_na_{n+1}$，故$\sum_{i=1}^{n}a_i^2=a_na_{n+1}$，故 C 正确。

D：将 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,…代入可得$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=a_{12}-1$成立，故 D 正确。

方法二：由性质 4 可排除 B，由性质 3 可知 C 正确，由性质 1 可知 A 正确。故选 ACD。

【变式 1】（🌶🌶🌶🌶，多选题）现将斐波那契数列记为$\{a_n\}$，$a_1=a_2=1$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant3)$，边长为斐波那契数$a_n$的正方形所对应扇形面积记为$b_n(n\in\mathbf{N}^*)$，则（　　）。

A. $3a_n=a_{n-2}+a_{n+2}(n\geqslant3)$

B. $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2019}=a_{2021}+1$

C. $\frac{\pi}{4}(b_{2020}-b_{2019})=a_{2018}\cdot a_{2021}$

D. $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{2020}=\frac{\pi}{4}a_{2020}\cdot a_{2021}$

【答案】AD

【解析】A：由递推公式$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant3)$可得$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n=2a_n+a_{n-1}$，$a_{n-2}=a_n-a_{n-1}$，所以$a_{n+2}+a_{n-2}=2a_n+a_{n-1}+a_n-a_{n-1}=3a_n(n\geqslant3)$，故 A 正确。

B：由递推公式可得$a_1=1,a_2=a_3-a_1,a_3=a_4-a_2$，类似的有$a_n=a_{n+1}-a_{n-1}(n\geqslant2)$，叠加可得$a_n+a_{n+1}-a_2=a_{n+2}-1$，故$a_1+$

$a_2+a_3+\cdots+a_{2019}=a_{2021}+1$ 错误，故 B 错误。

C：由题意可知扇形面积为 $b_n=\frac{\pi}{4}a_n^2$，故 $b_n-b_{n-1}=\frac{\pi}{4}a_{n+1}a_{n-2}$，则 $\frac{\pi}{4}(b_{2020}-b_{2019})=a_{2018}a_{2021}$ 错误，故 C 错误。

D：由 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant 3)$ 可得 $a_1^2=a_2a_1$，$a_2^2=a_3a_2-a_2a_1$，…，$a_n^2=a_{n+1}a_n-a_na_{n-1}$，叠加可得 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=a_{n+1}a_n$，又 $b_n=\frac{\pi}{4}a_n^2$，所以 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{2020}=\frac{\pi}{4}a_{2020}a_{2021}$，故选项 D 正确。故选 AD。

【变式 2】（，多选题）斐波那契数列，在数学上定义 $a_1=1,a_2=1,a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant 3,n\in\mathbf{N}_+)$，则下列选项正确的是（　　）。

A. $a_n^2=a_{n+1}a_n-a_na_{n-1}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}_+)$

B. $\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{2021}^2}{a_{2021}}=a_{2022}$

C. 设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_{2024}=m$，则 $S_{2022}=m-1$

D. $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}=a_{2n+1}(n\in\mathbf{N}_+)$

【答案】ABC

【解析】A：由斐波那契数列可得 $a_n=a_{n+1}-a_{n-1}$，所以 $a_n^2=a_na_{n+1}-a_na_{n-1}$，$n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*$，正确。

B：$a_n^2=a_na_{n+1}-a_na_{n-1}$，$n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*$，可得 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2021}^2=a_1^2+(a_2a_3-a_1a_2)+(a_3a_4-a_2a_3)+\cdots+a_{2021}a_{2022}-a_{2021}a_{2020}=a_{2021}a_{2022}$，因此正确。

C：$S_{2022}=a_1+a_2+\cdots+a_{2022}=a_3+a_5+\cdots+a_{2023}=(a_4-a_2)+(a_6-a_4)+\cdots+(a_{2024}-a_{2022})=a_{2024}-a_2=m-1$，因此正确。

D：$a_{2n+1}-(a_{2n}+a_{2n-2}+\cdots+a_4+a_2)=a_{2n-1}-a_{2n-2}-\cdots-a_4-a_2=a_3-a_2=a_1=1$，则 $a_{2n+1}=a_{2n}+a_{2n-2}+\cdots+a_4+a_2+1$，因此不正确。故选 ABC。

【变式 3】（，多选题）在数学上斐波那契数列 $\{a_n\}$ 一般以递推的方式被定义：$a_1=a_2=1,a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$，则（　　）。

A. $a_{10}=55$

B. $|a_na_{n+2}-a_{n+1}^2|=1$

C. $\left\{a_{n+1}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}a_n\right\}$ 是等比数列

D. 设 $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$，则 $|b_n-b_{n+1}|<|b_{n+1}-b_{n+2}|$

【答案】ABC

【解析】A：$a_1=a_2=1,a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$，则从 a_3 开始各项依次为 2，3，5，8，13，21，34，55，…，因此 $a_{10}=55$，A 正确。

B：由 $a_na_{n+2}-a_{n+1}^2=a_n(a_n+a_{n+1})-a_{n+1}^2=a_n^2-a_{n-1}a_{n+1}$。可得 $|a_na_{n+2}-a_{n+1}^2|=|a_{n-1}a_{n+1}-a_n^2|=\cdots=|a_1a_3-a_2^2|=|1\times 2-1^2|=1$，因此 B 正确。

C：$a_{n+2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}a_{n+1}=a_{n+1}+a_n+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot a_{n+1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}a_{n+1}+a_n=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\left(a_{n+1}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}a_n\right)$，$a_2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}a_1=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，则数列 $\left\{a_{n+2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}a_{n+1}\right\}$ 是等比数列，首项与公比

都为$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，因此 C 正确。

D：$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，则 $|b_n-b_{n+1}|=\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right|=\left|\dfrac{a_{n+1}^2-a_na_{n+2}}{a_na_{n+1}}\right|=\left|\dfrac{1}{a_na_{n+1}}\right|$，同理可得 $|b_{n+1}-b_{n+2}|=\left|\dfrac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}\right|$，由斐波那契数列的单调性可得 $a_{n+2}>a_n>0$，因此 $\left|\dfrac{1}{a_na_{n+1}}\right|>\left|\dfrac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}\right|$，故 D 不正确。故选 ABC。

【变式 4】（多选题）13 世纪初意大利数学家斐波那契从兔子繁殖问题引出的一个数列$\{F_n\}$：1，1，2，3，5，8，13，…，称之为斐波那契数列，满足 $F_0=1$，$F_1=1$，$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}(n\geqslant 1)$。19 世纪法国数学家卢卡斯提出数列$\{L_n\}$：2，1，3，4，7，11，18，…，称之为卢卡斯数列，满足 $L_0=2$，$L_1=1$，$L_{n+1}=L_n+L_{n-1}(n\geqslant 1)$。那么下列说法正确的有（　　）。

A. $L_n=2F_n-F_{n-1}(n\geqslant 1)$

B. $\{F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2\}$不是等比数列

C. $L_0+L_2+\cdots+L_{2n}=L_{2n+1}+1$

D. $L_n^2+L_{n+1}^2=5F_{2n+1}$

【答案】 AC

【解析】 A：当 $n=1$ 时，有 $L_1=1=2F_1-F_0$。假设 $n\leqslant k(k\geqslant 2)$时，有 $L_n=2F_n-F_{n-1}$，则当 $n=k+1$ 时，有 $L_{n+1}=L_n+L_{n-1}=2F_k-F_{k-1}+2F_{k-1}-F_{k-2}=F_k+2F_{k-1}=F_{k+1}+F_{k-1}=2F_{k+1}-F_k$ 成立，由数学归纳法可知 $L_n=2F_n-F_{n-1}(n\geqslant 1)$成立，故 A 正确。

B：$F_{n+2}F_n-F_{n+1}^2=(F_{n+1}+F_n)F_n-F_{n+1}^2=F_n^2-F_{n+1}(F_{n+1}-F_n)=F_n^2-F_{n+1}F_{n-1}$，所以 $\dfrac{F_{n+2}F_n-F_{n+1}^2}{F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2}=-1$，又 $F_2F_0-F_1^2=1$，则$\{F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2\}$是以 1 为首项、-1 为公比的等比数列，故 B 错误。

C：$L_{2k+1}-L_{2k-1}=L_{2k}$，则有 $\sum\limits_{k=0}^{n}L_{2k}=L_0+\sum\limits_{k=1}^{n}(L_{2k+1}-L_{2k-1})=L_{2n+1}-L_1+L_0=L_{2n+1}+1$，故 C 正确。

D：取 $n=1$，则 $5F_3=15$，$L_1^2+L_2^2=10$，有 $L_1^2+L_2^2\neq 5F_3$，故 D 错误。故选 AC。

专注地活在当下，是一种能力。在纷繁变化中保持一颗宁静的心，不因外界的喧嚣而浮躁，不因周围的评判而动摇。珍惜生命里的每一分钟，以坚定的态度做好每一件事，自能从中体会到生活的充实和有趣！（推荐人：@茅灵斐老师（河北））