

# 第8章 立体几何初步

## 8.1 基本立体图形

## 核心笔记

## 1. 棱柱、棱锥、棱台的概念

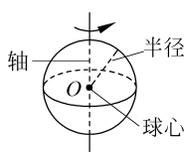
多面体	定义	图形及表示	相关概念
棱柱	有两个面互相平行,其余各面都是平行四边形,并且各相邻两个四边形的公共边都互相平行,由这些边所围成的多面体叫作棱柱	<p>如图可记作: 棱柱 <math>AC'</math> 或 <math>ABCD-A'B'C'D'</math></p>	底面(底): 两个相互平行的面; 侧面: 其余各面; 侧棱: 相邻侧面的公共边; 顶点: 侧面与底面的公共顶点
棱锥	有一个面是多边形,其余各面都是有一个公共顶点的三角形,由这些面所围成的多面体叫作棱锥	<p>如图可记作: 棱锥 <math>S-ABCD</math></p>	底面(底): 多边形面; 侧面: 有公共顶点的各个三角形; 侧棱: 相邻侧面的公共边; 顶点: 各侧面的公共顶点
棱台	用一个平行于底面的平面去截棱锥,底面与截面之间的部分叫作棱台	<p>如图可记作: 棱台 <math>ABCD-A'B'C'D'</math></p>	上底面: 原棱锥的截面; 下底面: 原棱锥的底面; 侧面: 其余各面; 侧棱: 相邻侧面的公共边; 顶点: 侧面与上(下)底面的公共顶点

## 2. 圆柱、圆锥、圆台的概念

旋转体	结构特征	图示	表示法
圆柱	以矩形的一边所在直线为旋转轴,其余三边旋转形成的面所围成的旋转体叫作圆柱。旋转轴叫作圆柱的轴;垂直于轴的边旋转而成的圆面叫作圆柱的底面;无论旋转到什么位置,不垂直于轴的边都叫作圆柱侧面的母线。圆柱和棱柱统称为柱体		圆柱用表示它的轴的字母表示,左图中圆柱表示为圆柱 $O'O$
圆锥	以直角三角形的一条直角边所在直线为旋转轴,其余两边旋转形成的面所围成的旋转体叫作圆锥。棱锥与圆锥统称为锥体		圆锥用表示它的轴的字母表示,左图中圆锥表示为圆锥 $SO$
圆台	用平行于圆锥底面的平面去截圆锥,底面与截面之间的部分叫作圆台。与圆柱和圆锥一样,圆台也有轴、底面、侧面、母线。棱台与圆台统称为台体		圆台用表示它的轴的字母表示,左图中圆台表示为圆台 $O'O$

## 核心笔记

## 3. 球的概念

旋转体	结构特征	图 示	表 示 法
球	以半圆的直径所在直线为旋转轴,半圆面旋转一周形成的旋转体叫作球体,简称球。半圆的圆心叫作球的球心;半圆的半径叫作球的半径;半圆的直径叫作球的直径		球常用表示球心的字母 $O$ 表示,左图中的球表示为球 $O$

## 4. 各几何体之间的关系

## (1) 特殊的四棱柱



## (2) 棱柱、棱锥、棱台之间的关系(图 8-1)

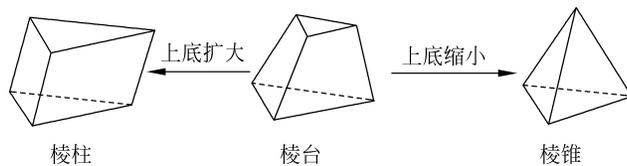


图 8-1

## (3) 圆柱、圆锥、圆台之间的关系(图 8-2)

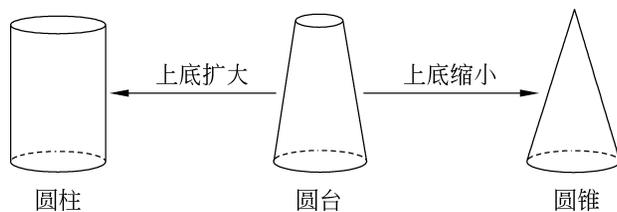


图 8-2

## 核心例题 1 空间几何体

( ) 在四面体  $P-ABC$  的四个面中,是直角三角形的面至多有( )。

- A. 0 个                      B. 1 个  
C. 3 个                      D. 4 个

【答案】D

【解析】如图 8-3 所示,

$PA \perp$  底面  $ABC$ ,  $\triangle ABC$  是  $\angle ABC$  为直角的直角

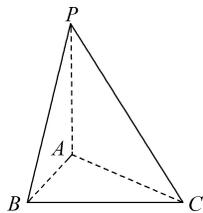


图 8-3

三角形,则四面体  $P-ABC$  的四个面中是直角三角形的面最多,有 4 个。故选 D。

### 解题必备

#### 1. 空间几何体

对于空间中的物体,如果我们只考虑其形状和大小,而不考虑其他因素,那么由这些物体抽象出来的空间图形就叫作空间几何体。例如,一个正方体形包装箱,占有的空间部分就是一个几何体,这个几何体就是我们熟悉的正方体。

#### 2. 多面体

(1) 多面体:一般地,我们把由若干个平面多边形围成的几何体叫作多面体。

(2) 多面体的面:围成多面体的各个多边形叫作多面体的面,如图 8-4 中面  $ABB'A'$ ,面  $BCC'B'$  等。

(3) 多面体的棱:相邻两个面的公共边叫作多面体的棱,如图 8-4 中棱  $AA'$ ,棱  $BB'$  等。

(4) 多面体的顶点:棱与棱的公共点叫作多面体的顶点,如图 8-4 中顶点  $A, B, C$  等。

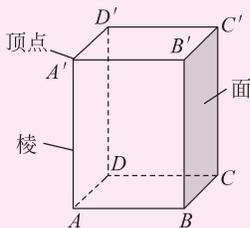


图 8-4

#### 3. 旋转体

(1) 旋转体:由一个平面图形绕它所在平面内的一条定直线旋转所形成的封闭几何体。如图 8-5 所示为一个旋转体,它可以看作由矩形  $OBB'O'$  绕其边  $OO'$  所在的直线旋转而形成。

(2) 旋转体的轴:平面图形旋转时所围绕的定直线。如图 8-5 中直线  $OO'$  是该旋转体的轴。

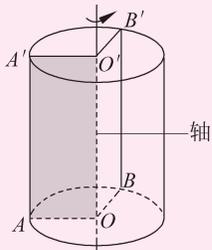


图 8-5

判断旋转体形状的关键是看平面图形绕哪条直线旋转,同一个平面图形绕不同的旋转轴旋转所形成的旋转体可能不同。

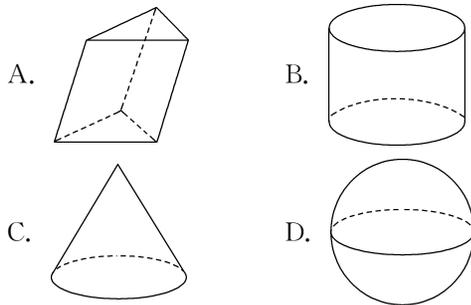


### 题型训练 · 练其形

1.1 ( ) 试从正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的八个顶点中任取若干个点,连接后构成以下空间几何体,并且用适当的符号表示出来。

- (1) 只有一个面是等边三角形的三棱锥;
- (2) 四个面都是等边三角形的三棱锥;
- (3) 三棱柱。

1.2 ( ) 下列几何体中,不是旋转体的是( )。



1.3 ( ) 下面关于空间几何体的定义或结构特征叙述错误的是( )。

- A. 空间中把一个平行四边形按某一方向平移所形成的几何体是四棱柱
- B. 有两个侧面都是矩形的三棱柱,它的侧棱垂直于底面
- C. 以直角三角形一直角边所在的直线为旋转轴,其余各边旋转而形成的曲面所围成的几何体是圆锥
- D. 底面是正多边形的棱锥的顶点在底面的射影一定是底面正多边形的中心



### 题型训练 · 悟其神

1.4 ( ) 从正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的 8 个顶点中任意取 4 个不同的顶点, 这 4 个顶点可能是:  
 ①矩形的 4 个顶点; ②每个面都是等边三角形的四面体的 4 个顶点; ③每个面都是直角三角形的四面体的 4 个顶点; ④有三个面是等腰直角三角形, 有一个面是等边三角形的四面体的 4 个顶点。其中正确结论的个数为\_\_\_\_\_。

1.5 ( ) 连接空间几何体上的某两点的直线, 如果把该几何体绕此直线旋转角  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 360^\circ$ ), 使该几何体与自身重合, 那么称这条直线为该几何体的旋转轴, 则正方体的旋转轴共有( )。  
 A. 7 条 B. 9 条 C. 13 条 D. 14 条

1.6 ( ) 如图 8-6 所示, 图①是正方体木块, 把它截去一块, 可能得到的几何体有②③④⑤的木块。

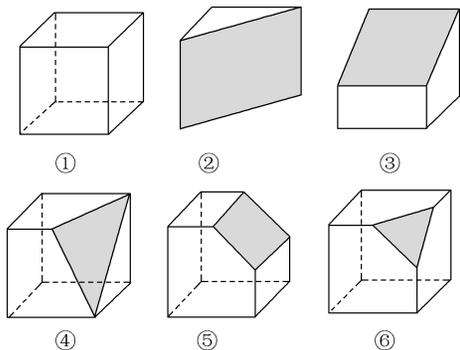


图 8-6

(1) 我们知道, 正方体木块有 8 个顶点、12 条棱、6 个面, 请你将图②③④⑤的木块的顶点数、棱数、面数填入下表:

图号	顶点数	棱数	面数
①	8	12	6
②			
③			
④			
⑤			

(2) 观察你填出的表格, 归纳出上述各种木块的顶点数  $V$ 、棱数  $E$ 、面数  $F$  之间的关系。

(3) 看图⑥中正方体的切法, 请验证你所得的数量关系是否正确?

### 核心例题 2 棱柱的结构特征

( ) 下列命题中,

- ① 有两个面互相平行, 其余各面都是四边形的几何体叫棱柱;
  - ② 棱柱中互相平行的两个面叫作棱柱的底面;
  - ③ 棱柱的侧面是平行四边形, 但底面不是平行四边形;
  - ④ 棱柱的侧棱都相等, 侧面是平行四边形。
- 其中错误的有\_\_\_\_\_。

【答案】①②③

【解析】由棱柱的定义可知, 只有④正确, 分别构造图形如下:

①: 图 8-7(1) 中平面  $ABCD$  与平面  $A_1B_1C_1D_1$  平行, 但四边形  $ABCD$  与  $A_1B_1C_1D_1$  不全等, ①错误。

②: 图 8-7(2) 中正六棱柱的相对侧面  $ABB_1A_1$  与  $EDD_1E_1$  平行, 但不是底面, ②错误。

③: 图 8-7(3) 中直四棱柱底面  $ABCD$  是平行四边形, ③错误。

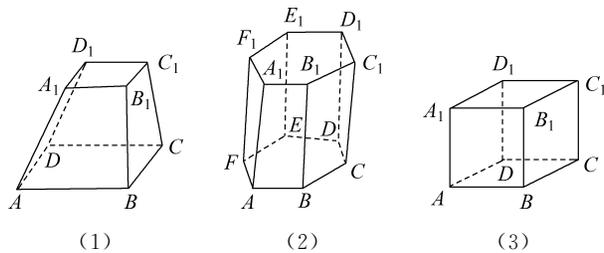
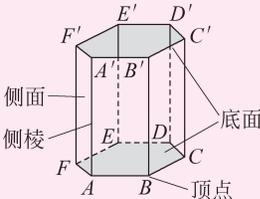
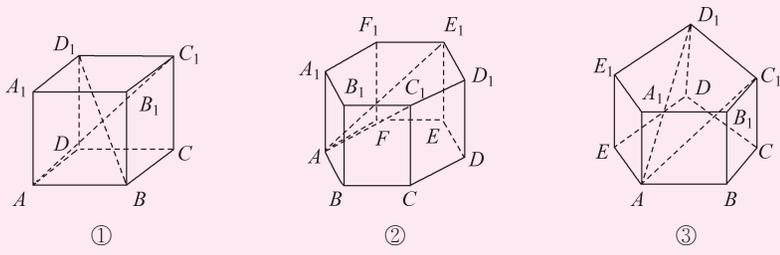
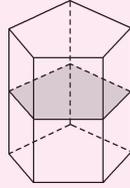
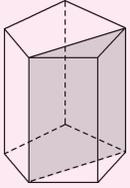


图 8-7

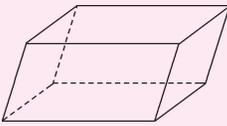
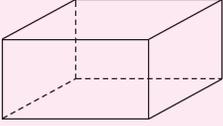
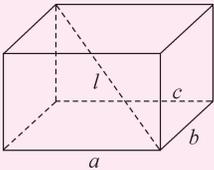
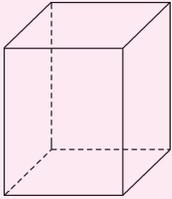
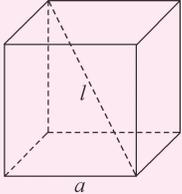
故答案为①②③。

## 解题必备

## 1. 棱柱的概念和性质

定义	一般地,有两个面互相平行,其余各面都是四边形,并且各相邻两个四边形的公共边都互相平行,由这些面所围成的多面体叫作棱柱(prism)
图形及表示	 <p>(1) 用表示底面的各顶点字母来表示棱柱。如图所示的六棱柱可以表示为棱柱 <math>ABCDEF-A'B'C'D'E'F'</math>;</p> <p>(2) 用棱柱的对角线表示棱柱。如图所示,①可表示为四棱柱 <math>AC_1</math> 或四棱柱 <math>BD_1</math> 等;②可表示为六棱柱 <math>AD_1</math> 或六棱柱 <math>AE_1</math> 等;③可表示为五棱柱 <math>AC_1</math> 或五棱柱 <math>AD_1</math> 等。这种记法要说明棱柱是几棱柱</p> 
相关概念	<p>(1) 棱柱的底面: 棱柱中,两个互相平行的面叫作棱柱的底面,简称底;</p> <p>(2) 棱柱的侧面: 除底面外,其余各面叫作棱柱的侧面;</p> <p>(3) 棱柱的侧棱: 相邻侧面的公共边叫作棱柱的侧棱;</p> <p>(4) 棱柱的顶点: 侧面与底面的公共顶点叫作棱柱的顶点</p>
结构特征	<p>(1) 侧棱互相平行且相等,侧面都是平行四边形;</p> <p>(2) 两个底面与平行于底面的截面是全等的多边形,如图①所示;</p>   <p>(3) 过不相邻的两条侧棱的截面是平行四边形,如图②所示</p>
分类	<p>(1) 棱柱可以按底面的边数进行分类,底面是三角形、四边形、五边形……的棱柱分别叫作三棱柱、四棱柱、五棱柱……即棱柱的底面是几边形,这样的棱柱就叫作几棱柱;</p> <p>(2) 按侧棱与底面是否垂直分类,可分为斜棱柱和直棱柱。侧棱与底面不垂直的棱柱叫作斜棱柱,侧棱垂直于底面的棱柱叫作直棱柱。特别地,底面是正多边形的直棱柱叫作正棱柱</p>

## 2. 特殊的棱柱

名称	定义	图形	性质
平行六面体	底面是平行四边形的四棱柱		(1) 相对的面是全等的平行四边形; (2) 对角面是平行四边形
直平行六面体	侧棱垂直于底的平行六面体		(1) 侧面、对角面都是矩形; (2) 底面是平行四边形
长方体	底面是矩形的直平行六面体		(1) 六个面、对角面都是矩形; (2) $l^2 = a^2 + b^2 + c^2$ ; (3) $S_{\text{全}} = 2(ab + bc + ca)$
正四棱柱	底面是正方形的长方体		(1) 侧面、对角面都是矩形; (2) 底面是正方形
正方体	长、宽、高相等的长方体		(1) 六个面都是全等的正方形; (2) $l = \sqrt{3}a, S_{\text{全}} = 6a^2$



## 题型训练 · 练其形

2.1 ( ) 下列命题正确的是( )。

- A. 棱柱的每个面都是平行四边形
- B. 一个棱柱至少有五个面
- C. 棱柱有且只有两个面互相平行
- D. 棱柱的侧面都是矩形

2.2 ( ) 下列说法中正确的是( )。

- A. 棱柱的面中,至少有两个面互相平行
- B. 棱柱中两个互相平行的平面一定是棱柱的底面

C. 棱柱中各条棱长都相等

D. 棱柱的侧面是平行四边形,但它的底面一定不是平行四边形

2.3 ( ) 下列说法中正确的是( )。

- A. 棱柱的一条侧棱长叫作棱柱的高
- B. 棱柱的面中,至少有两个面互相平行
- C. 棱柱的两个互相平行的面一定是棱柱的底面
- D. 棱柱的侧面是平行四边形,但它的底面一定不是平行四边形

## 题型训练 · 悟其神

- 2.4 ( ) 一个棱柱为正四棱柱的条件是( )。
- A. 底面是正方形,有两个侧面垂直于底面  
B. 底面是正方形,有两个侧面是矩形  
C. 底面是菱形,且有一个顶点处的三条棱两两垂直  
D. 各个侧面是全等的矩形
- 2.5 ( ) 下列说法中正确的是( )。
- A. 直四棱柱是直平行六面体  
B. 直平行六面体是长方体  
C. 六个面都是矩形的四棱柱是长方体  
D. 底面是正方形的四棱柱是正四棱柱
- 2.6 ( ) 下列关于棱柱的说法正确的个数是( )。
- ① 四棱柱是平行六面体;  
② 有两个面平行,其余各面都是平行四边形的几何体是棱柱;  
③ 有两个面平行,其余各面都是四边形,并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行的几何体是棱柱;  
④ 底面是正多边形的棱柱是正棱柱。
- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

### 核心例题 3 棱锥的结构特征

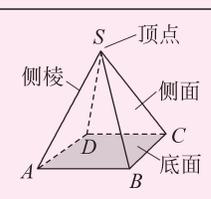
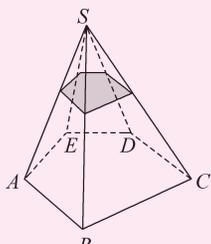
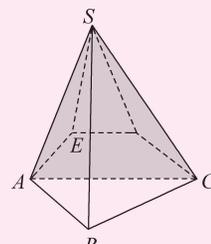
- ( ) 下面描述中,不是棱锥的结构特征的为( )。
- A. 三棱锥有四个面是三角形  
B. 棱锥都是有二个面是互相平行的多边形  
C. 棱锥的侧面都是三角形  
D. 棱锥的侧棱相交于一点

【答案】B

【解析】棱锥的特征:(1)有一个面是多边形;(2)其余的各面是有一个公共顶点的三角形。故选B。

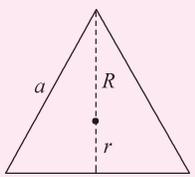
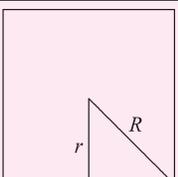
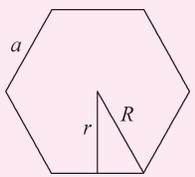
### 解题必备

#### 1. 棱锥的概念和性质

定义	一般地,有一个面是多边形,其余各面都是有一个公共顶点的三角形,由这些面所围成的多面体叫作棱锥(pyramid)
图形及表示	 <p>(1) 用顶点和底面各顶点的字母表示棱锥。如图所示的四棱锥可表示为棱锥 <math>S-ABCD</math>; (2) 用顶点和底面多边形的一条对角线的相应字母表示棱锥(三棱锥除外)。如图所示的棱锥可记为四棱锥 <math>S-AC</math></p>
相关概念	<p>(1) 棱锥的底面: 在棱锥中,这个多边形面叫作棱锥的底面或底; (2) 棱锥的侧面: 有公共顶点的各个三角形面叫作棱锥的侧面; (3) 棱锥的顶点: 各侧面的公共顶点叫作棱锥的顶点; (4) 棱锥的侧棱: 相邻侧面的公共边叫作棱锥的侧棱; (5) 正棱锥: 如果一个棱锥的底面是正多边形,且顶点在底面的射影是底面的中心,则这样的棱锥叫作正棱锥</p>
结构特征	<p>(1) 侧棱有公共点,即棱锥的顶点;侧面都是三角形; (2) 底面与平行于底面的截面是相似多边形,如图①所示;</p>   <p>(3) 过不相邻的两条侧棱的截面是三角形,如图②所示</p>
分类	按底面的边数进行分类: 底面是三角形、四边形、五边形……的棱锥分别叫作三棱锥、四棱锥、五棱锥……其中,三棱锥又称为四面体。 注意: 三棱锥的所有面都是三角形,所以四个面都可以看作底

## 2. 特殊的棱锥

在解正棱锥问题时,如果能够记住正多边形的边长  $a$  与外接圆半径  $R$ 、内切圆半径  $r$  和面积  $S$  之间的关系,将会给计算带来很大的便利,如下表所示:

	图 形	$R$	$r$	$S$
正三角形		$\frac{\sqrt{3}}{3}a$	$\frac{\sqrt{3}}{6}a$	$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$
正方形		$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	$\frac{a}{2}$	$a^2$
正六边形		$a$	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$

## 题型训练 · 练其形

- 3.1 ( ) 一个棱锥的各棱长都相等,那么这个棱锥一定不是( )。
- A. 三棱锥                      B. 四棱锥  
C. 五棱锥                      D. 六棱锥

- 3.2 ( ) 给出下列命题:

- ① 棱柱的侧棱都相等,侧面都是全等的平行四边形;
- ② 若三棱锥的三条侧棱两两垂直,则其三个侧面也两两垂直;
- ③ 在四棱柱中,若两个过相对侧棱的截面都垂直于底面,则该四棱柱为正四棱柱;
- ④ 存在每个面都是直角三角形的四面体。

其中正确命题的序号是\_\_\_\_\_。

- 3.3 ( ) 以下关于正棱锥的叙述不正确的是( )。

- A. 正棱锥的高与底面的交点是底面的中心  
B. 正四棱锥的各侧面都是锐角三角形  
C. 正棱锥的各侧面都是等腰三角形  
D. 底面是正多边形且各侧面都是等腰三角形的棱锥是正棱锥

## 题型训练 · 悟其神

- 3.4 ( ) 所有棱长都相等的三棱锥叫作正四面体,正四面体  $ABCD$  的棱长为  $a$ ,  $M, N$  分别为棱  $BC, AD$  的中点,则  $MN$  的长度为( )。

- A.  $a$                       B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}a$                       C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}a$                       D.  $\frac{\sqrt{3}}{3}a$

- 3.5 ( ) 攒尖是古代中国建筑中屋顶的一种结构形式,依其平面有圆形攒尖、三角攒尖、四角攒尖、六角攒尖等,多见于亭阁式建筑。如图 8-8 所示,某园林建筑为六角攒尖,它的主要部分的轮廓可近似看作一个正六棱锥,设正六棱锥的侧面等腰三角形的顶角为  $2\theta$ ,则侧棱与底面内切圆半径的比为( )。

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{3\sin\theta}$   
B.  $\frac{\sqrt{3}}{3\cos\theta}$   
C.  $\frac{1}{2\sin\theta}$   
D.  $\frac{1}{2\cos\theta}$

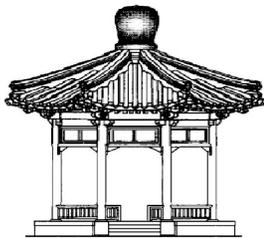


图 8-8

- 3.6 ( ) 一个四棱锥和一个三棱锥恰好可以拼接成一个三棱柱。这个四棱锥的底面为正方

形,且底面边长与各侧棱长相等,这个三棱锥的底面边长与各侧棱长也都相等。设四棱锥、三棱锥、三棱柱的高分别为  $h_1, h_2, h$ , 则  $h_1 : h_2 : h = ( \quad )$ 。

- A.  $\sqrt{3} : 1 : 1$                       B.  $\sqrt{3} : 2 : 2$   
C.  $\sqrt{3} : 2 : \sqrt{2}$                       D.  $\sqrt{3} : 2 : \sqrt{3}$

### 核心例题 4 棱台的结构特征

( ) 下列命题中正确的是( )。

- A. 棱台的侧面可以是平行四边形  
B. 两个底面平行且相似,其余各面都是梯形的多面体是棱台  
C. 棱台的底面是两个相似的正方形  
D. 棱台的侧棱延长后必交于一点

**【答案】** D

**【解析】** A: 棱台的侧面是梯形,错误。

B: 两个底面平行且相似,其余各面都是梯形的多面体,若侧棱的延长线不能交于一点,则该几何体不是棱台,错误。

C: 棱台的底面是两个相似的多边形,错误。

D: 由棱台的性质得棱台的侧棱延长后必交于一点,正确。

故选 D。

### 解题必备

定义	用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥,底面与截面之间的部分叫作棱台 (frustum of a pyramid)
图形及表示	<p>用表示底面各顶点的字母表示棱台。如图所示的四棱台可以表示为棱台 <math>ABCD-A'B'C'D'</math></p>

续表

相关概念	<p>(1) 棱台的下底面、上底面: 原棱锥的底面和截面分别叫作棱台的下底面和上底面,如上图所示,面 <math>A'B'C'D'</math> 为棱台的上底面,面 <math>ABCD</math> 为棱台的下底面;</p> <p>(2) 棱台的侧面: 除上、下底面之外的其他各面叫作棱台的侧面,如上图所示,面 <math>ABB'A'</math>、面 <math>BCC'B'</math>、面 <math>CDD'C'</math>、面 <math>ADD'A'</math> 都是棱台的侧面;</p> <p>(3) 棱台的侧棱: 相邻侧面的公共边叫作棱台的侧棱,如上图所示,棱 <math>AA'</math>、棱 <math>BB'</math>、棱 <math>CC'</math>、棱 <math>DD'</math> 都是棱台的侧棱;</p> <p>(4) 棱台的顶点: 棱台的侧面与底面的公共顶点叫作棱台的顶点,如上图所示,点 <math>A, B, C, D, A', B', C', D'</math> 都是棱台的顶点;</p> <p>(5) 棱台的高: 棱台上下两个底面的距离叫作棱台的高</p>
结构特征	<p>(1) 侧棱延长后交于一点; 侧面是梯形;</p> <p>(2) 两个底面与平行于底面的截面是相似多边形,如图①所示;</p> <p>(3) 过不相邻的两条侧棱的截面是梯形,如图②所示</p> <p>①                      ②</p>
分类	<p>由三棱锥、四棱锥、五棱锥……截得的棱台分别叫作三棱台、四棱台、五棱台……</p> <p>注意: 由正棱锥截得的棱台叫作正棱台。</p> <p>(1) 正棱台的侧棱相等,侧面是全等的等腰梯形。各等腰梯形的高相等,它叫作正棱台的斜高。</p> <p>(2) 正棱台的两底面以及平行于底面的截面是相似正多边形。</p> <p>(3) 正棱台的两底面中心连线、相应的边心距和斜高组成一个直角梯形; 两底面中心连线、侧棱和两底面相应的半径也组成一个直角梯形</p>