第 3 章 电 阻 网 络

CHAPTER 3

科学研究是一种精雕细琢的工作，因此要求精密和准确。

——恩里科·费米

电路模型是由基本电路元件和理想导线构成的通路。电路中的电压和电流在电路拓扑约束下遵循某些特定规律，这便是本章首先要讲述的基尔霍夫定律（Kirchhoff's Laws）。在介绍基尔霍夫定律的基础上，本章还会以电阻和电源构成的直流电路为研究对象探讨串联、并联、电源变换、单口网络、等效电阻和输入电阻等概念。串联和并联是电路拓扑中基本的连接关系。电源变换是电压源和电流源这两种基本电源对称性的体现，也是简化分析混联电路的有效手段。单口网络是对电路做层级分析的基础概念，而输入电阻则是无源单口网络外部特性的抽象结果。

3.1 基尔霍夫定律

电路元件的电压和电流之间的关系由元件特性决定。电路中不同元件电压之间的关系、不同元件之间电流的关系，由电路的基本定律决定。

电路的基本定律包含基尔霍夫电流定律（Kirchhoff's Current Law，KCL）和基尔霍夫电压定律（Kirchhoff's Voltage Law，KVL）。为了便于叙述，首先介绍电路中的基本术语，再详述基尔霍夫定律。

3.1.1 电路术语

支路（branch）：电路中通过同一电流的分支。在实际的电路分析、设计和仿真工作中，通常将每个二端元件定义为一条支路。

节点（node）：三条或三条以上支路的连接点称为节点。在实际中，通常将元件之间的连接点称为节点。

回路（loop）：由支路组成的闭合路径。

网孔（mesh）：对平面电路，其内部不含任何支路的回路称网孔。需要注意的是，网孔是回路，但回路不一定是网孔。

观察图 3-1 所示电路，可以得到，支路数量 $b=5$，节点数量 $n=3$，网孔数量 $m=3$，对于

任何平面电路，满足网孔数＝支路数－节点数＋1，即 $m=b-n+1$。

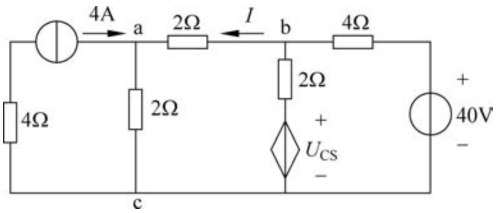


图 3-1　电路术语解释

3.1.2　基尔霍夫电流定律

基尔霍夫电流定律指的是在集总参数电路中，对任意节点，在任意时刻流出（或流入）该节点的电流的代数和等于零，即

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0 \tag{3-1}$$

图 3-2 中，如果定义电流流出节点方向为"正"，电流流进节点的方向为"负"，可以列写 KCL 方程为

$$-i_1-i_2+i_3+i_4+i_5=0 \tag{3-2}$$

式(3-2)也可以写成

$$i_1+i_2=i_3+i_4+i_5 \tag{3-3}$$

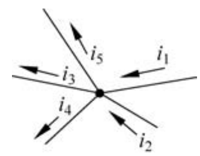


图 3-2　KCL 示例

也就是流进节点的电流等于流出节点的电流，因此 KCL 方程也可以写成

$$\sum i_{入} = \sum i_{出} \tag{3-4}$$

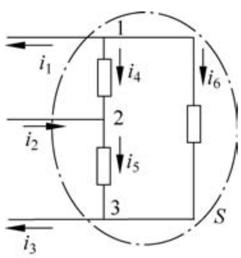


图 3-3　例 3-1 图

【例 3-1】　在图 3-3 中，列写节点 1、2、3 的 KCL 方程。

解：节点 1 的 KCL 方程为 $i_1+i_4+i_6=0$，节点 2 的 KCL 方程为 $-i_2-i_4+i_5=0$，节点 3 的 KCL 方程为 $i_3-i_5-i_6=0$。将以上三个方程相加，可以得到 $i_1-i_2+i_3=0$。因此，在电路分析中，可以将包围多个节点的任何闭合面 S 称为广义节点。

这里需要注意，KCL 是对节点处支路电流加的约束，与支路上接的是什么元件无关，与电路是线性还是非线性无关；KCL 方程是按电流参考方向列写的，与电流实际方向无关。

用方程计算电路时，所列写的方程必须是独立的，有 n 个节点的电路，可以列写 $n-1$ 个独立的 KCL 方程。

3.1.3　基尔霍夫电压定律

基尔霍夫电压定律指的是在集总参数电路中，对任意回路，在任意时刻，所有支路电压的代数和恒等于零，即

$$\sum_{k=1}^{b} u_k = 0 \tag{3-5}$$

对于任何电路，列写 KVL 方程的基本步骤如下。

(1) 标定各元件电压参考方向。

(2) 选定回路绕行方向是顺时针还是逆时针。

(3) 列写 KVL 方程。

【例 3-2】 电路如图 3-4 所示，试列写网孔的 KVL 方程。

解：(1) 标定各元件电压参考方向，如图 3-5 所示。

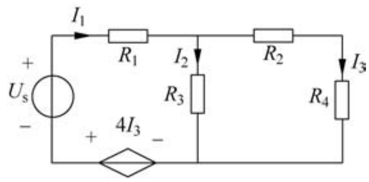


图 3-4　例 3-2 电路

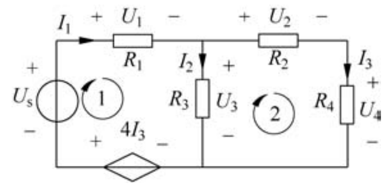


图 3-5　例 3-2 电路电压极性标注

(2) 选定网孔的顺时针的绕行方向，如图 3-5 所示。

(3) 列写网孔 1 和网孔 2 的 KVL 方程。

网孔 1：$U_1+U_3-4I_3-U_s=0$

网孔 2：$U_2+U_4-U_3=0$

应用欧姆定律，可以将电阻元件两端的电压用其流过的电流表示，得到

网孔 1：$I_1R_1+I_2R_3-4I_3-U_s=0$

网孔 2：$I_3R_2+I_3R_4-I_2R_3=0$

KVL 是对回路中的支路电压施加约束，与回路各支路连接的是什么元件无关，与电路是线性还是非线性无关。KVL 方程是按电压参考方向列写，与电压实际方向无关。同样，n 个节点，b 条支路的电路，KVL 独立方程的个数为 $b-n+1$。

【例 3-3】 电路如图 3-6 所示，试求电流 I。

解：首先，标注图 3-6 所示电路中 10V 电压源和 10Ω 电阻串联支路的电流 I_1，如图 3-7 所示。

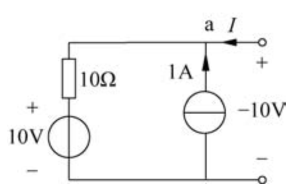


图 3-6　例 3-3 电路

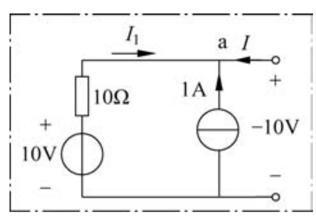


图 3-7　例 3-3 电路参考方向标注

对图 3-7 所示虚线的大回路按照顺时针方向列写 KVL 方程，有 $-10+10I_1+(-10)=0$，解得 $I_1=2\text{A}$，对节点 a 列写 KCL 方程，有 $I_1+1+I=0$，得到 $I=-1-I_1=-3(\text{A})$。

3.2 简单电阻电路

由电阻、受控源和独立源构成的电路称为电阻电路。前面已经介绍了基尔霍夫定律和欧姆定律，下面介绍电阻的串联、并联和混联等简单电路。

3.2.1　电阻的串联

图 3-8(a)为 n 个线性电阻串联，流过所有电阻电流相等，均为 i。通常将这样的网络称为单端口或者二端子网络，而将图 3-8(b)所示的单端口网络称为图 3-8(a)的等效电路。如果两个单端口电路的端口具有相同的电压、电流关系，则称它们是等效电路。等效变换的目的是将相对复杂的电路等效简化。

应用 KVL 和欧姆定律，可以得到图 3-8(a)电路端口的 u-i 关系为

$$u=\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=1}^{n}R_k i=\left(\sum_{k=1}^{n}R_k\right)i \tag{3-6}$$

如果有

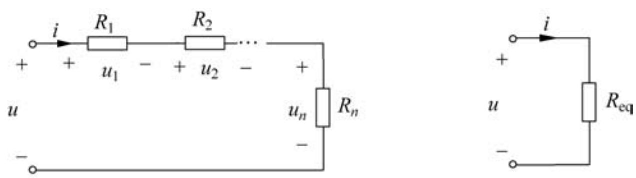
$$R_{\mathrm{eq}}=\sum_{k=1}^{b}R_k \tag{3-7}$$

则图 3-8(a)和图 3-8(b)端口 u-i 关系相同，称二者互为等效电路，因此 R_{eq} 为图 3-8(a)n 个电阻串联的等效电阻。

图 3-9 为两个线性电阻的串联，则有

$$R_{\mathrm{eq}}=R_1+R_2,\quad u_1=\frac{R_1}{R_1+R_2}u,\quad u_2=\frac{R_2}{R_1+R_2}u$$

称为串联电阻的分压关系。



(a) n个电阻串联　　(b) 等效电阻

图 3-8　线性电阻串联

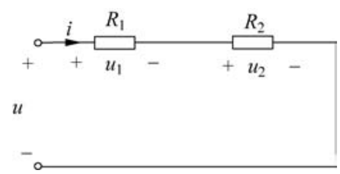


图 3-9　两个线性电阻串联

3.2.2　电阻的并联

图 3-10 为 n 个线性电阻并联，所有电阻两端的电压均相等，均为 u，应用 KCL 和欧姆定律，可以得到电路端口的 u-i 关系为

$$i=\sum_{k=1}^{n}i_k=\sum_{k=1}^{b}\left(\frac{u}{R_k}\right)=\left(\sum_{k=1}^{b}\frac{1}{R_k}\right)u=\left(\sum_{k=1}^{b}G_k\right)u \tag{3-8}$$

如果有

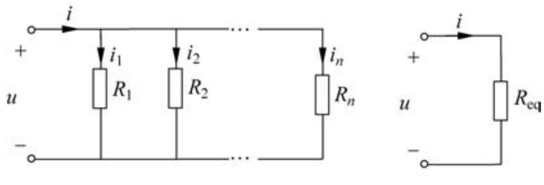
$$\frac{1}{R_{\mathrm{eq}}}=\sum_{k=1}^{b}\frac{1}{R_k}\quad 或\quad G_{\mathrm{eq}}=\sum_{k=1}^{b}G_k \tag{3-9}$$

则图 3-10(a)和图 3-10(b)端口 u-i 关系相同，称二者互为等效电路，因此 R_{eq} 为图 3-9(a) n 个电阻并联的等效电阻，或者说 G_{eq} 是 n 个电阻并联的等效电导。

图 3-11 为两个线性电阻的并联，则有

$$\frac{1}{R_{\mathrm{eq}}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{R_1+R_2}{R_1R_2},\quad i_1=\frac{R_2}{R_1+R_2}i,\quad i_2=\frac{R_1}{R_1+R_2}i$$

称为并联电阻的分流关系。



(a) n个电阻并联　(b) 等效电阻

图 3-10　线性电阻并联

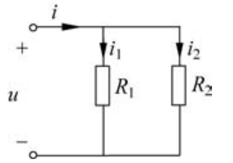


图 3-11　两个线性电阻并联

3.2.3 电阻的混联

当电阻的连接既有串联又有并联时，称为电阻的串/并联或简称为混联。

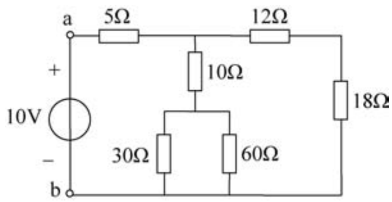


图 3-12　电阻的混联

【例 3-4】 混联电路如图 3-12 所示，试求图中 10V 电压源提供的功率。

解：首先通过电阻的串/并联等效，求出该电阻网络的等效电阻 R_{eq}，如图 3-13(a)所示，再计算独立源提供的功率。

图 3-13(a)中 30Ω 和 60Ω 的电阻并联，其等效电阻为 30//60＝20(Ω)，电路简化为图 3-13(b)。

10Ω 和 20Ω 的电阻串联，其等效电阻为 10＋20＝30(Ω)，同样 12Ω 和 18Ω 的电阻串联，其等效电阻为 30Ω，电路简化为图 3-13(c)。

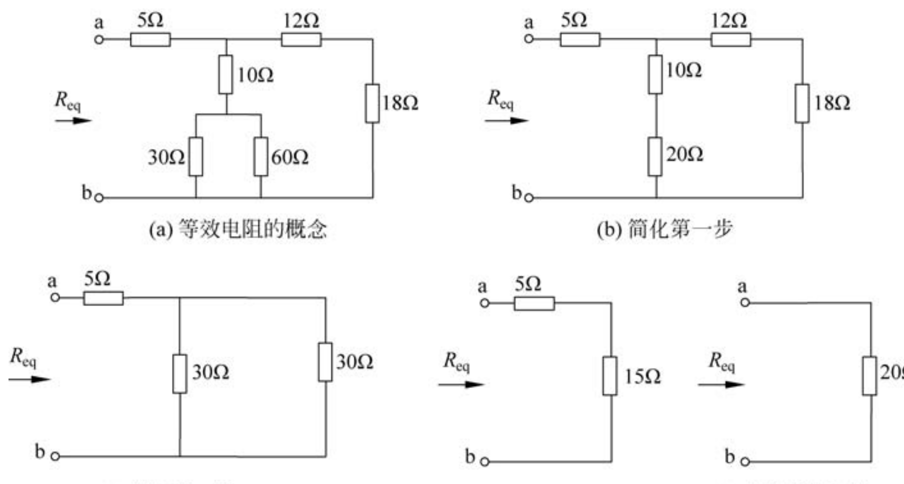
30Ω 和 30Ω 的电阻并联，其等效电阻为 30//30＝15(Ω)，电路简化为图 3-13(d)。

5Ω 和 15Ω 的电阻串联，其等效电阻为 20Ω，电路最终简化为图 3-13(e)，应用欧姆定律，可以得到

$$i=\frac{10}{R_{eq}}=\frac{10}{20}=0.5(\mathrm{A})$$

因此 10V 电压源提供的功率为

$$p=ui=10\times0.5=5(\mathrm{W})$$



(a) 等效电阻的概念　(b) 简化第一步

(c) 简化第二步　(d) 简化第三步　(e) 最终简化电路

图 3-13　电路的简化

3.3　电源变换

如果电路仅仅包含线性电阻，通过电阻串、并联的简化，总可以将端口等效为电阻 R_{eq}。但是对于含源网络，还需要应用电源变换，才能确定单端口网络的等效电路。

3.3.1　独立电源变换

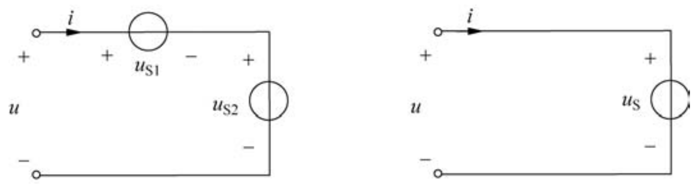
1. 理想独立电源的串联与并联

图 3-14(a)为两个理想电压源的串联，流过所有电阻电流相等，均为 i。

应用 KVL 方程，可以得到图 3-14(a)电路端口的 u-i 关系，等效为图 3-13(b)，其中

$$u = u_{S1} + u_{S2} = u_S \tag{3-10}$$

同样，图 3-15(a)为两个理想电流源的并联，其端电压相等，均为 u。



(a) 理想电压源串联　　(b) 等效电源

图 3-14　电压源串联

应用 KCL 方程，可以得到图 3-15(a)电路端口的 u-i 关系，等效为图 3-15(b)，其中

$$i = i_{S1} + i_{S2} = i_S \tag{3-11}$$

(a) 理想电流源并联　　(b) 等效电源

图 3-15　电流源并联

需要特别注意的是，如果理想电压源 u_S 与同样的电压源、电阻、电流源或者任意单端口网络并联时，端口的 u-i 关系均为 $u = u_S$，如图 3-16 所示。

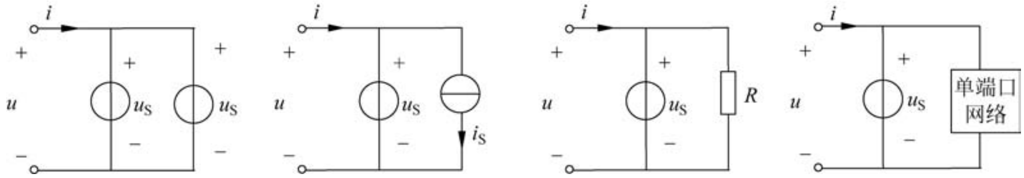


图 3-16　电压源与其他元件并联

同样，如果理想电流源 i_S 与同样的电流源、电阻、电压源或者任意单端口网络串联时，

端口的 u-i 关系均为 $i=i_S$，如图 3-17 所示。

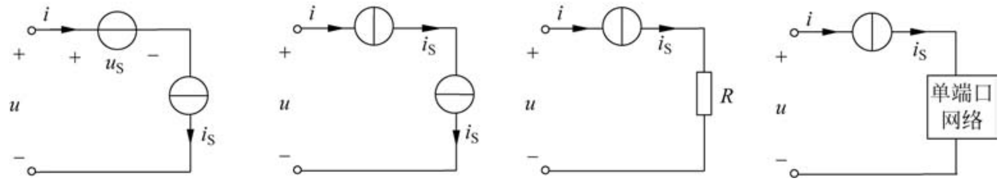
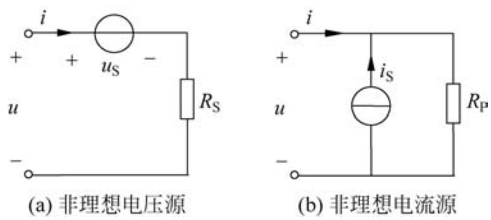


图 3-17 电流源与其他元件并联

2. 独立电源变换

在 u-i 平面上，独立电压源的 u-i 关系是平行于 i 轴的直线，独立电流源是平行于 u 轴的直线，两者在 u-i 平面上相互垂直，不可能重合，因此独立电压源不能和独立电流源互相等效变换。

但是，当独立的电压源和电阻串联时，构成非理想的电压源，同样，独立的电流源与电阻并联，构成非理想的电流源，如图 3-18 所示。



(a) 非理想电压源　(b) 非理想电流源

图 3-18 非理想电压源和电流源

对于图 3-18(a)的电路，利用 KVL 方程和欧姆定律，可以写出端口的 u-i 关系为

$$u=u_S+iR_S \tag{3-12}$$

对于图 3-18(b)的电路，利用 KCL 方程和欧姆定律，也可以写出端口的 u-i 关系为

$$u=(i+i_S)R_P \tag{3-13}$$

当式(3-12)和式(3-13)相同时，两个电路具有相同的端口特性，对外电路而言，可以互相等效，此时满足

$$R_S=R_P \tag{3-14}$$

$$u_S=i_SR_P \tag{3-15}$$

称为电源变换。可以得到结论，非理想电压源和非理想电流源互相等效变换时：

(1) 两个支路的电阻相等。

(2) 电压源、电阻和电流源三者的值满足类似欧姆定律的关系。

(3) 电压源与电流源的方向类似于非关联的参考方向。

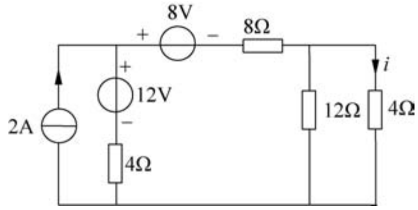


图 3-19 例 3-5 电路

【例 3-5】 电路如图 3-19 所示，试求图中的电流 i。

解：可以利用电源变换的方法简化电路求得电流 i，但需要注意的是，变换过程中，要保持 i 所在支路不参与变换，也就是仅对图 3-20(a)中虚线框内部

的电路进行电源变换。

第 1 步：将 12V 电压源和 4Ω 电阻串联的支路变换为电流源和电阻的并联，变换后电阻还是 4Ω，电流为 12/4＝3(A)，电流方向从 12V 电源的负端流向正端，如图 3-20(b)所示。

第 2 步：2A 与 3A 的电流源并联，得到 5A 的电流源，如图 3-20(c)所示。

第 3 步：将 5A 电流源与 4Ω 电阻并联的支路，变换为电压源与电阻的串联，电压源的电压为 5×4＝20(V)，电阻依然为 4Ω，如图 3-20(d)所示。

第 4 步：将 20V 和 8V 的电源串联为 12V，4Ω 与 8Ω 电阻串联为 12Ω 电阻，得到图 3-20(e)。

第 5 步：将 12V 电压源和 12Ω 电阻串联支路变换为 1A 电流源和 12Ω 电阻的并联，如图 3-20(f)所示。

第 6 步：将两个 12Ω 电阻并联为 6Ω 电阻，如图 3-20(g)所示。

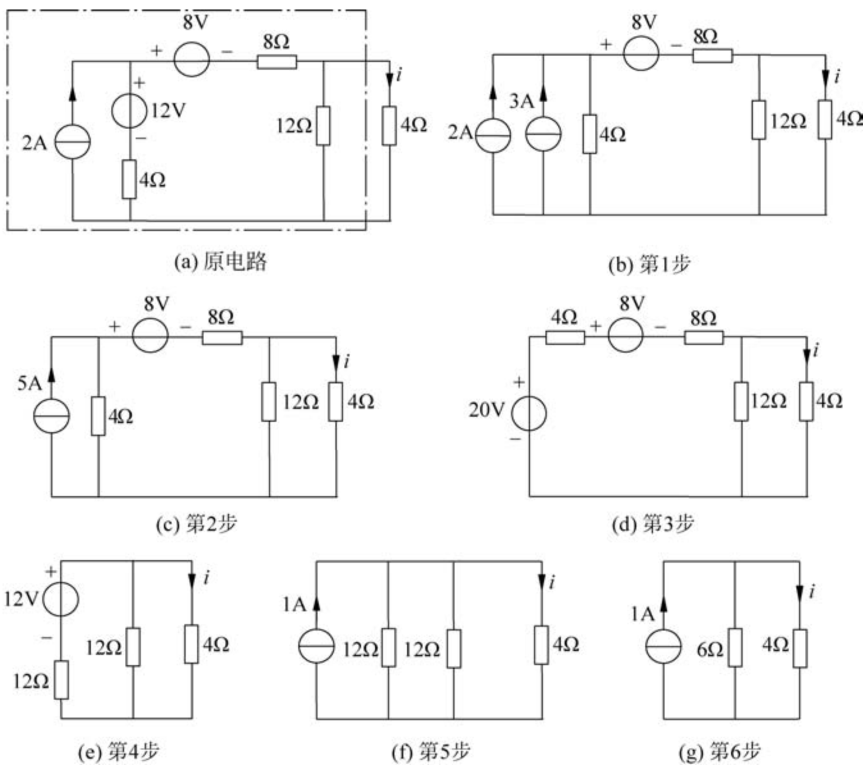


图 3-20　例 3-5 变换求解过程

应用电阻并联分流关系，可得

$$i=\frac{6}{6+4}\times 1=0.6(\mathrm{A})$$

变换过程中需要注意的是：电流 i 的支路始终未参与变换，然后需要注意变换过程中电压源的正负极性和电流源的电流参考方向。

3.3.2 受控电源变换

受控电源的变换和独立电源类似，也就是说受控电压源和电阻的串联可以等效变换为受控电流源与电阻的并联，电阻依然不变，受控电压源与受控电流源的参考方向依然满足非

关联关系。但是需要特别注意的是，由于受控源的电压或者电流会受到电路中某个电压或者电流的控制，变换过程中，不要丢失了控制量。下面通过实例说明。

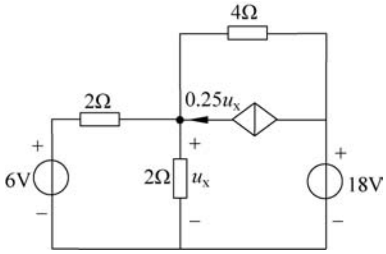


图 3-21 例 3-6 电路

【例 3-6】 电路如图 3-21 所示，试求图中的电压 u_x 的值。

解：对图 3-20 所示电路进行电源变换。

第 1 步：将图 3-20 中 6V 的电压源与 2Ω 电阻串联的支路变换为 3A 电流源与 2Ω 电阻的并联，如图 3-22(a)所示。

第 2 步：将图 3-22(a)中 2Ω 与 2Ω 电阻的并联成 1Ω 电阻，此时控制量 u_x 维持不变，如图 3-22(b)所示。

第 3 步：将图 3-22(b)中 4Ω 电阻与 $0.25u_x$ 的电压控制电流源变换为电压源和电阻的串联，电压源电压为 $0.25u_x \times 4 = u_x$，如图 3-22(c)所示。

第 4 步：将图 3-22(c)中 1Ω 电阻与 3A 的电流源的并联转换为 3V 的电压源和 1Ω 电阻的串联，控制量依然位于电路中的原位置，如图 3-22(d)所示，假设流进 18V 电压源的电流方向如图所示，电流大小为 i。对图中的大回路列写 KVL 方程，可得

$$1 \times i + u_x + 4 \times i + 18 - 3 = 0$$

再对左边 3V 电压源、1Ω 电阻和控制量 u_x 构成的小回路，列写 KVL 方程，有

$$1 \times i + u_x - 3 = 0$$

联立上述方程，解得 $i = -4.5\text{A}$，$u_x = 7.5\text{V}$。

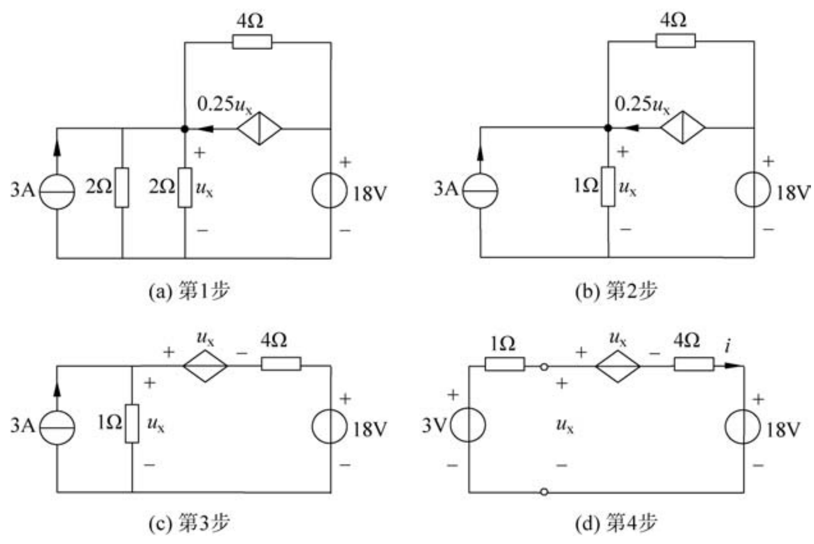


图 3-22 例 3-6 变换求解过程

3.4 输入电阻

3.4.1 输入电阻和输出电阻的概念

前面已经建立了电路中单端口网络的概念，对于电路中任何一个单端口网络，从它的一

个端子流入的电流一定等于从另一个端子流出的电流。可以用图 3-23 表示任意的单端口网络。

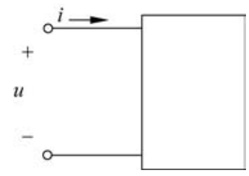


图 3-23　单端口网络

如果一个单端口网络内部只有电阻，通过电阻串/并联简化方法，可以求出其等效电阻。如果该单端口网络内部还含有受控源，但是不含有任何独立源，可以证明，不论内部如何复杂，端口电压和端口电流成正比。因此，定义这样的单端口网络的输入电阻 R_{i} 为

$$R_{\mathrm{i}}=\frac{u}{i} \tag{3-16}$$

在电路工程实践中，输入电阻是很有用的概念。例如分析或设计一个放大器，首先就会把这个放大器的输入端口设想为一个单端口网络，并求出输入电阻，这样才能进一步分析信号源接入该放大器时输入端电压和电流的关系。

与输入电阻对应的还有输出电阻。一个线性电路的输出端口，可以看成一个含有独立源的单口网络。后面学到戴维南定理和诺顿定理时，可以知道这样一个含源单口网络可以被等效为一个独立电源与一个电阻的组合。这个电阻就是该网络的输出电阻。

3.4.2　输入电阻的求解

从本质上来说，端口的输入电阻其实就是该端口的等效电阻。如果单端口网络内部含有受控源，求解输入电阻一般采用加压求流，或者是加流求压的方法。

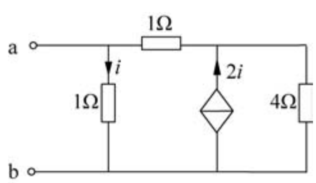


图 3-24　例 3-7 电路

【例 3-7】 电路如图 3-24 所示，试求端口等效电阻。

解：观察电路可知，端口 a、b 之间的电压为 $u=1\times i=i$，电压极性为 a 正 b 负，下面通过电源变换法求解端口流入电流与端口电压之间的关系。

将 $2i$ 的电流控制电流源与 4Ω 电阻的并联，转换为电压源与电阻的串联，如图 3-25(a)所示。

1Ω 电阻与 4Ω 电阻串联后得到 5Ω 电阻，电路转换为图 3-25(b)所示。

再将 $8i$ 的电流控制电压源与 5Ω 电阻的串联转换为电流源与电阻的并联，如图 3-25(c)所示。由于端口电压为 i，因此 5Ω 电阻的电流为 $i_{5\Omega}=i/5$，对端口输入端列写 KCL 方程，有 $i_{\mathrm{x}}+8i/5-i-i/5=0$，因此 $i_{\mathrm{x}}=-2i/5$，根据输入电阻的定义，得到输入电阻为 $Ri=i/(-2i/5)=-2.5(\Omega)$。

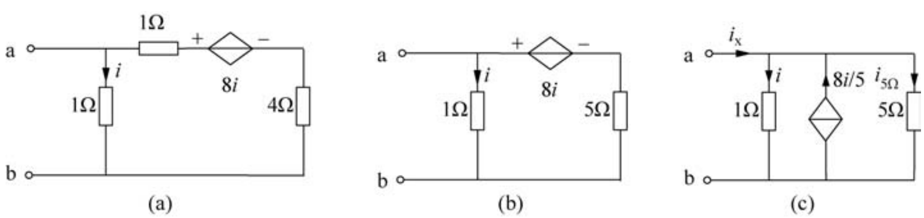


图 3-25　例 3-7 电路求解过程

这里需要注意的是，因为端口内部含有受控源，因此计算得到的输入电阻为负值。

小结

本章首先介绍了基尔霍夫电压定律和基尔霍夫电流定律，然后介绍了电阻电路的基本特点、电阻的串联和并联电路的分析方法，接着详细地阐述了电源变换的基本方法并举例说明变换过程，最后介绍了单端口网络输入电阻的定义和求解方法。

习题

3.1 电路如图 3-26 所示，求端口等效电阻 R_{ab}。

3.2 电路如图 3-27 所示，求电流 i 的值。

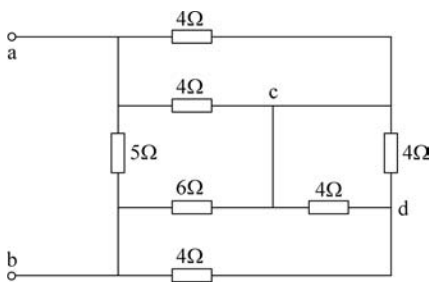


图 3-26 题 3.1 图

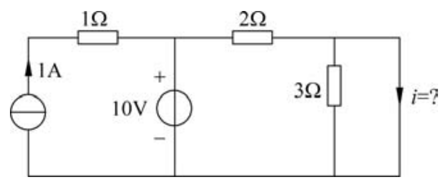


图 3-27 题 3.2 图

3.3 电路如图 3-28 所示，若 30V 电压源提供的功率为 150W，求图中电阻 R 的值。

3.4 电路如图 3-29 所示，求图中电流 I 的值。

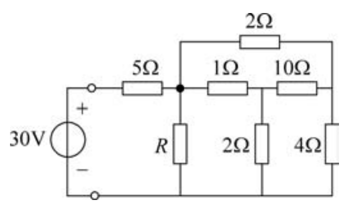


图 3-28 题 3.3 图

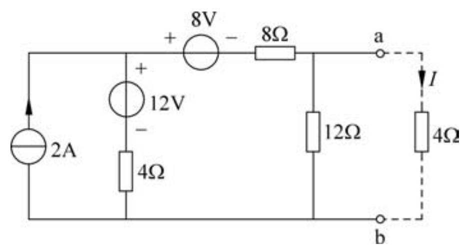


图 3-29 题 3.4 图

3.5 电路如图 3-30 所示，求图中所有电路端口输入电阻的表达式。

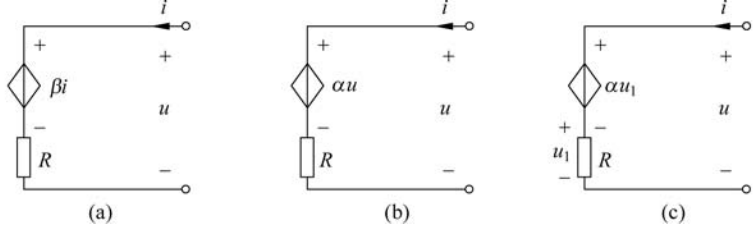


图 3-30 题 3.5 图

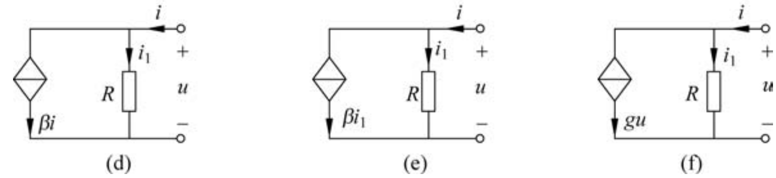


图 3-30 （续）

3.6　电路如图 3-31 所示，求端口等效电阻 R_{ab}。

3.7　电路如图 3-32 所示，试将电路变换为电压源和电阻的串联，并求电压源和电阻的值。

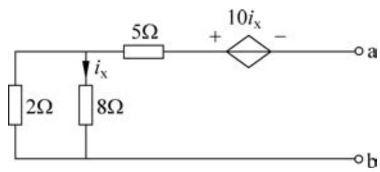


图 3-31　题 3.6 图

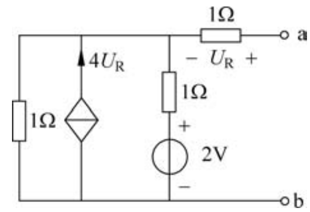


图 3-32　题 3.7 图

3.8　电路如图 3-33 所示，试求输入电阻 R_i 的表达式。

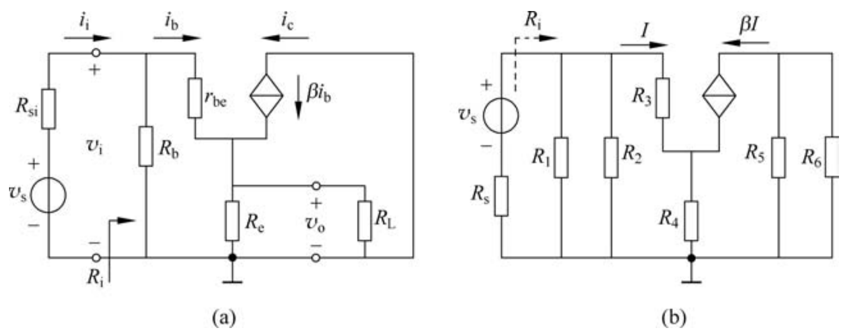


图 3-33　题 3.8 图

3.9　电路如图 3-34 所示，试求各个独立源提供的功率。

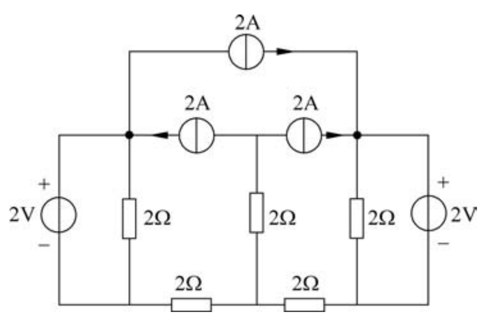


图 3-34　题 3.9 图

3.10　电路如图 3-35 所示，试求独立源提供的功率。

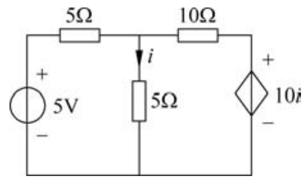


图 3-35　题 3.10 图