第 1 章

线性方程组和矩阵

求解线性方程组是数学中最重要的问题之一，许多复杂的实际问题通常都可以转化为线性方程组的求解问题。线性方程组广泛应用于商业、经济学、社会学、生态学、人口统计学、遗传学、电子学、工程学以及物理学等领域。将线性方程组表示为矩阵形式后，研究起来会更加方便、直观。另外，矩阵的理论和方法广泛应用于现代科学技术的各个领域。本章从讨论求解线性方程组开始, 进而引入矩阵的概念并介绍矩阵的运算、初等矩阵和分块矩阵等。

1.1 线性方程组

含有 n 个未知量 m 个方程的线性方程组定义为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，a_{ij} 是第 i 个方程第 j 个未知量的系数，b_i 是第 i 个方程的常数项，$i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$。式 (1.1) 称为 $m\times n$ 的线性方程组。当常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 不全为零时，线性方程组 (1.1) 称为 n 元非齐次线性方程组。当常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 全为零时，式 (1.1) 为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

式 (1.2) 称为 n 元齐次线性方程组。n 元线性方程组通常简称为线性方程组或方程组。下面是几个线性方程组的例子：

$$
\text{(a)}\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 = 8 \end{cases} \qquad \text{(b)}\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \end{cases} \qquad \text{(c)}\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 \qquad = 4 \end{cases}
$$

方程组 (a) 称为 2×2 方程组，方程组 (b) 称为 2×3 方程组，方程组 (c) 称为 3×2 方程组。

若有序 n 元数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 满足 $m \times n$ 方程组中所有的方程，则称其为 $m \times n$ 方程组的解。例如，有序数对 $(1, 2)$ 为方程组 (a) 的唯一解; 有序三元组 $(2, 0, 0)$ 为方程组 (b) 的解。事实上，对任意的实数 α，有序三元组 $(2, \alpha, \alpha)$ 均为方程组 (b) 的解，因此，方程组 (b) 有无穷多个解；但是，方程组 (c) 无解。由方程组 (c) 的第三个方程可知，$x_1 = 4$，将其代入前两个方程，则

$$
\begin{cases} 4 + x_2 = 2 \\ 4 - x_2 = 1 \end{cases}
$$

由于不存在实数 x_2 能同时满足上述两个方程，故方程组 (c) 无解。如果线性方程组无解，则称该方程组是不相容的。如果线性方程组至少存在一个解，则称该方程组是相容的。由此，方程组 (c) 是不相容的，方程组 (a) 和 (b) 均为相容的。

线性方程组的所有解的集合称为方程组的解集。如果线性方程组不相容，则其解集为空集。相容的线性方程组的解集必非空，此时方程组只能有且只有一个解，或有无穷多个解。因此，求解线性方程组，就是寻找其解集。也就是说，对于线性方程组需要讨论以下问题：

(1) 方程组是否有解?

(2) 有解时，其解是否唯一?

(3) 如果有多个解，如何求出其所有的解?

为了解决这些问题，首先引入等价方程组的概念。

定义 1.1.1 若两个含有相同变量的方程组具有相同的解集，则称它们是等价的。

显然，交换方程组中任意两个方程的位置，不会影响方程组的解集。重新排列后的方程组等价于原方程组。例如，方程组

$$
\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 3x_1 - x_2 = 2 \\ 4x_1 + x_2 = 6 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} 4x_1 + x_2 = 6 \\ 3x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}
$$

含有 3 个相同的方程，因此，它们必有相同的解集。

若将方程组中的某一方程两端同乘一个非零常数，则方程组的解集不变，并且新方程组等价于原方程组。例如，方程组

$$
\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}
$$

是等价的。

若将方程组中某一方程的倍数加到另一方程上，新的方程组将与原方程组等价。由此可得，n 元数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 满足两个方程

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \end{cases}$$

的充要条件是，它满足方程

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ (a_{j1} + \alpha a_{i1})x_1 + (a_{j2}\alpha a_{i2})x_2 + \cdots + (a_{jn} + \alpha a_{in})x_n = b_j + \alpha b_i \end{cases}$$

综上所述，有 3 种运算可以得到等价的方程组：

(1) 交换任意两个方程的顺序；

(2) 用一个非零常数乘以一个方程；

(3) 把一个方程的倍数加到另一个方程上。

其实，这种方法就是中学阶段学过的消元法求解线性方程组。只不过中学时所求解的方程组中未知变量的个数与方程的个数相等，且个数较少，而今后要求解的方程组是一般的 m 个方程、n 个未知量的情形，其中 m 与 n 可能不相等，且个数较多。下面举例说明。

例 1.1.1　解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \tag{1.3}$$

解: 方程组 (1.3) 的第二式减去第一式的 3 倍，可得

$$-7x_2 - 6x_3 = -10$$

第三式减去第一式的 2 倍，可得

$$-x_2 - x_3 = -2$$

若将方程组 (1.3) 中的第二式和第三式分别用上面两个新方程替换后，则得到等价的方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ -7x_2 - 6x_3 = -10 \\ -x_2 - x_3 = -2 \end{cases} \tag{1.4}$$

若方程组 (1.4) 的第三个方程替换为它与第二个方程的 $-1/7$ 倍的和，得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ -7x_2 - 6x_3 = -10 \\ -\dfrac{1}{7}x_3 = -\dfrac{4}{7} \end{cases} \tag{1.5}$$

形如 (1.5) 的方程组称为严格三角形方程组。由方程组 (1.5) 的第三个方程可得 $x_3 = 4$。将其代入第二个方程，有 $x_2 = -2$。将 $x_2 = -2, x_3 = 4$ 代入第一个方程，可得 $x_1 = 3$。由于方程组 (1.3) 与方程组 (1.5) 是等价的，因此，方程组 (1.3) 的解为 $(3, -2, 4)$。

定义 1.1.2 若方程组中第 k 个方程的前 $k-1$ 个变量的系数均为零，且 $x_k(k = 1, 2, \cdots, n)$ 的系数不为零，则称该方程组为严格三角形方程组。

任何 $n \times n$ 的严格三角形方程组均可采用和上例相同的求解方法求解。首先，从第 n 个方程解得 x_n，将其代入第 $n-1$ 个方程解得 x_{n-1}，将 x_n 和 x_{n-1} 代入第 $n-2$ 个方程得 x_{n-2}，以此类推。称这种求解严格三角形方程组的方法为回代法。

回顾上例中的方程组。可以把方程组与一个以 x_i 的系数构成的 3×3 的数字阵列联系起来。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

这个阵列称为方程组的系数矩阵。简单地说，矩阵就是一个矩形的数字阵列。一个 m 行 n 列的矩阵称为 $m \times n$ 矩阵。如果矩阵的行数和列数相等，则称该矩阵为方阵。

如果在系数矩阵右侧添加一列方程组的右端项，则可得到一个新的矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

这个矩阵称为方程组的增广矩阵。一般地，当 $m \times r$ 的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 采用上述方法附加到一个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 上时，相应的增广矩阵记为 $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$。若

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

则

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{array}\right]$$

每一方程组均对应于一个增广矩阵，形如

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

方程组的求解可以通过对增广矩阵的运算得到。未知量 x_i 作为位置标识符，在计算结束前可以省略。用于得到等价方程组的 3 个运算，可对应于下列增广矩阵的行运算。

定义 1.1.3　下面 3 种运算称为矩阵的初等行运算:

(1) 交换矩阵的两行 (对换 i, j 两行，记作 $i \leftrightarrow j$);

(2) 以非零实数 k 乘以某行 (第 i 行乘 k，记为 kr_i);

(3) 将某一行所有元素的 k 倍加到另一行对应的元素上 (第 j 行的 k 倍加到第 i 行上，记作 $r_i + kr_j$)。

方程组 (1.3) 的增广矩阵为

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

该方程组可以转化为对 $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ 进行相应的初等行变换：

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) \xrightarrow[-2r_1+r_3]{-3r_1+r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -6 & -10 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right] \tag{1.6}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{7}r_2+r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{7} & -\dfrac{4}{7} \end{array}\right] \tag{1.7}$$

矩阵 (1.7) 就是与原方程组等价的严格三角形方程组的增广矩阵。使用回代法容易得到此方程组的解。

例 1.1.2　求解线性方程组:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases}$$

解: 方程组的增广矩阵为

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) &= \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{array}\right] \\
&\xrightarrow[\frac{1}{2}r_3]{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{array}\right] \\
&\xrightarrow[r_4 - 3r_1]{r_2 - 2r_1, r_3 - 2r_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{array}\right] \\
&\xrightarrow[r_4 + r_2]{r_3 - \frac{5}{3}r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{4}{3} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -9 \end{array}\right] \\
&\xrightarrow[r_4 - 3r_3]{\left(-\frac{3}{4}\right)r_3, \left(-\frac{1}{3}\right)r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \dfrac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad (1.8) \\
&\xrightarrow[r_1 - r_3]{r_2 - \frac{1}{3}r_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\
&\xrightarrow{r_1 - r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad (1.9)
\end{aligned}
$$

其中，形如式 (1.8) 的矩阵称为行阶梯形，对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + \dfrac{1}{3}x_4 = 2 \\ x_4 = -3 \end{cases} \tag{1.10}$$

增广矩阵每一行的第一个非零元对应的变量称为首变量。因此，x_1、x_2、x_4 为首变量。化简过程中跳过的列对应的变量称为自由变量。因此，x_3 为自由变量。如果将式 (1.10) 中的自由变量移到等式右端，得到方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 4 + 2x_3 \\ x_2 + \dfrac{1}{3}x_4 = 2 + x_3 \\ x_4 = -3 \end{cases} \tag{1.11}$$

方程组 (1.11) 即为未知量 x_1、x_2、x_4 的严格三角形方程组。因此，对任意给定的变量 x_3，均存在唯一解。令 $x_3 = \alpha$，α 为任意实数，则得到原方程组的解为: $x_1 = 4 + \alpha, x_2 = 3 + \alpha, x_3 = \alpha, x_4 = -3$。

形如 (1.9) 的矩阵称为行最简形，对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 4 \\ x_2 - x_3 = 3 \\ x_4 = -3 \end{cases} \tag{1.12}$$

通常，矩阵 (1.8) 对应的方程组可以继续进行消元过程，直到各方程的首变量之前的所有项均被消去，得到的结果矩阵 (1.9) 为行最简形的。

定义 1.1.4 若一个矩阵满足:

(1) 每一非零行中第一个非零元为 1;

(2) 每个非零行的第一个非零元素位于上一行第一个非零元素的右边;

(3) 没有一个非零行位于零行之下;

则称其为行阶梯形矩阵。

例 1.1.3 下列矩阵为行阶梯形矩阵:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

例 1.1.4 下列矩阵不是行阶梯形矩阵:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

定义 1.1.5 若一个矩阵满足:

(1) 矩阵是行阶梯形矩阵;

(2) 每一行的第一个非零元是该列唯一的非零元;

则称该矩阵为行最简形。

下列矩阵为行最简形:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

定义 1.1.6 利用初等行运算将线性方程组的增广矩阵化为行最简形的过程称为高斯消元法。

例 1.1.5 用高斯消元法解方程组

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

解:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \text{(行阶梯形)}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \text{(行最简形)}$$

若令 x_4 为任意实数 a，则 $x_1 = a, x_2 = -a, x_3 = a$。因此，所有形如 $(a, -a, a, a)$ 的四元组均为方程组的解。

如果线性方程组的右端项全为 0，则称其为齐次的。齐次方程组总是相容的，求其一个解并不难，只要令所有未知量为 0，即可满足方程组。因此，如果 $m \times n$ 方程组有唯一解，则必然是其平凡解 $(0, 0, \cdots, 0)$。例 1.1.5 即为相容的齐次方程组，其中含有 $m = 3$ 个方程和 $n = 4$ 个未知量。当 $n > m$ 时，总是存在自由变量，因此方程组存在非平凡解。事实上，有如下定理。

定理 1.1.1 若 $n > m$，则 $m \times n$ 的齐次线性方程组有非平凡解。

证明: 齐次方程组总是相容的。因为其增广矩阵的行阶梯形最多有 m 个非零行，故至多有 m 个首变量。又由于变量个数 n 满足 $n > m$，故必存在自由变量。而自由变量可任意取值，对自由变量的任一组值，均可得到方程组的一组解。

1.2 矩阵的定义

首先引入矩阵的定义。

定义 1.2.1 由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$ 按一定次序排成 m 行 n 列的数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 $m \times n$ 矩阵，通常用大写字母 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \cdots$ 表示。这 $m \times n$ 个数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素，简称为元。数 a_{ij} 位于矩阵的第 i 行第 j 列，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 (i, j) 元。以数 a_{ij} 为 (i, j) 元的矩阵可简记为 (a_{ij}) 或 $(a_{ij})_{m\times n}$。$m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$。

元素为实数的矩阵称为实矩阵，元素为复数的矩阵称为复矩阵，本书中的矩阵除特别说明外，都指实矩阵。

行数与列数都等于 n 的矩阵称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵，这时 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 所在的位置称为主对角线，另一条对角线称为次对角线。元素都为零的矩阵称为零矩阵，记作 $\boldsymbol{O}$。

称由实数组成的 n 元数组为向量。如果将 n 元数组表示为 $1 \times n$ 矩阵，则称为行向量。若将 n 元数组表示为 $n \times 1$ 矩阵，则称为列向量。在使用矩阵方程时，通常用列向量（n 的矩阵）表示方程的解。所有的 $n \times 1$ 的实矩阵构成的集合称为 n 维欧几里得空间，记作 $\mathbb{R}^n$。由于本书大部分使用列向量，因此一般省略“列”字，并简称为 $\mathbb{R}^n$ 中的向量。列向量的标准记号采用黑斜体小写字母。

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

行向量通常没有标准的记号。本书中，为区分行向量和列向量，在字母上面加上水平箭头表示行向量。例如：

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \quad , \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

分别表示 4 项的行向量和列向量。

给定 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，经常会使用它的特定行或列。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 个列向量的标准记号为 $\boldsymbol{a}_j$。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个行向量没有通用的标准记号。本书中，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个行向量记为 $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_i$。

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的行向量为

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}), \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

列向量为

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以用它的列向量或者行向量表示。

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \quad \text{或} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{a}}_1 \\ \overrightarrow{\boldsymbol{a}}_2 \\ \vdots \\ \overrightarrow{\boldsymbol{a}}_m \end{bmatrix}$$

定义 1.2.2 行数和列数分别相等的矩阵称为同型矩阵 。

定义 1.2.3 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵, 且它们的对应元素相等, 即

$$a_{ij} = b_{ij}, (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$。

下面介绍几种重要的特殊矩阵。

1. 对角矩阵

若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ 中的元素满足 $a_{ij} = 0 (i \neq j; i, j = 1, 2, \cdots, n)$，即

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$