第一章

期货与期权定价

本章学习目标

本章内容分成两部分。第一部分在介绍期货定价理论与定价模型的基础上，从持有成本模型入手，分别介绍了商品期货和金融期货各个大类品种的定价公式，最后介绍了放松条件下的期货理论价格区间。第二部分包括期权的二叉树定价模型、B-S-M定价模型以及期权风险度量参数三个方面的内容。

本章难点是对无套利定价原理和持有成本理论的理解，期货和期权的定价理论、定价模型的理解与应用。本章是期货、期权价格分析的基础，要求掌握。

本章重点是期货和期权的定价理论、定价模型的理解与应用。本章内容是全书的重点，要求认真理解和灵活掌握。

第一节　期货定价

一、无套利定价原理

衍生品价格应该处在一个和标的资产价格相对合理的位置，否则就偏离了合理价格。如果衍生品价格对合理价格的偏离超过了相应的套利成本，则市场投资者就可以通过标的资产和衍生品之间的买卖进行套利，即通过买入（或卖出）相对定价过低的资产、卖出（或买入）相对定价过高（或过低）的衍生品来获利。市场价格必然由于套利行为作出相应的调整，相对定价过低的资产或衍生品价格会因买入者较多而回升，而相对定价过高的资产或衍生品价格则会因为卖出者较多而下降，因而回到合理的价位即均衡状态，套利者即可以因此获利。在市场价格回到均衡状态之后，就不再存在套利机会，从而形成无套利条件下衍生品的合理价格。这就是衍生品的无套利定价原理。

在有效市场中，包括衍生品在内，任何资产定价都应当使得该资产不存在套利机会。否则，如果存在资产价格高估或者低估，投资者可以通过“高价卖出，待价格下跌后买入”或“低价买入，待价格上涨后卖出”的策略获取无风险套利收益。这样，资产价格必然由于套利者参与而向均衡价格回归，直到资产价格变成无套利机会的公平价格或均衡价格，即得到资产理论价格，我们可以由此得到期货理论价格。

基于无套利定价原理，期货定价模型主要有两大类。一是持有成本模型，即期货价格取决于标的资产的现货价格以及从当前储存该标的资产直到期货合约交割日这段期间内的总成本，主要适用于可持有性资产。二是预期模型，即当前期货价格等于市场预期的该

合约标的资产在合约交割日的现货价格，主要适用于不可持有性资产。

二、持有成本模型

持有成本理论认为，现货价格和期货价格的价差，即为持有成本。持有成本主要由持有标的现货至期货合约到期期间的资金占用成本、仓储费(含保险费)和持有收益组成。当然，标的资产在持有期间产生的持有收益要在持有成本中扣除。该理论以商品持有成本为基础，分析期货市场的机制和商品期货理论价格，后运用到对金融期货定价。

期货标的资产一般分成两类，一类为投资类资产，一类为消费类资产。

投资类资产主要指贵金属和金融资产。如黄金、白银等贵金属，持有期不产生持有收益，其持有成本主要是资金占用成本和仓储费(含保险费)；对于权益类、利率类和汇率类金融资产，计算持有成本时，仓储成本可以忽略不计，持有成本主要是资金占用成本，同时要扣除持有期间的资产收益。

消费类商品库存和现货的持有者主要目的是其消费价值，而非投资价值。因而，消费类资产的期货价格模型要考虑持有商品库存和现货带来的便利收益。便利收益反映了市场对将来能够购买该商品可能性的期望，商品短缺的可能性越大，便利收益就越高。

基于持有成本理论的期货价格模型，需要满足以下假设。

(1) 市场不存在摩擦，即没有交易成本和做空限制。

(2) 市场是完全竞争的。

(3) 市场不存在套利机会。

(4) 市场参与者均能够以无风险利率借贷资金。

(5) 投资者是理性人，且不承担对手违约风险。

(一) 商品期货定价

(1) 对于持有期内不产生收益的投资类商品，比如黄金、白银，其期货定价公式可以表示为

$$F = Se^{cT} = Se^{(r+u)T} \tag{1-1}$$

其中，F 为期货价格；S 为标的资产现货价格；c 为持有成本率；r 为无风险利率；u 为仓储费(含保险费)率；T 为期货合约期限(以年为单位)。

(2) 对于消费类商品，考虑到持有商品现货的便利收益，其期货定价公式可以表示为

$$F = Se^{cT} = Se^{(r+u-y)T} \tag{1-2}$$

其中，F 为期货价格；S 为标的资产现货价格；c 为持有成本率；r 为无风险利率；u 为仓储费(含保险费)率；y 为便利收益率；T 为期货合约的期限(以年为单位)。

(二) 金融期货定价

金融期货主要包括股票股指期货、利率期货、外汇期货等，其标的为投资类资产，金融类资产的仓储费(含保险费)率为零，但计算其理论价格，要考虑持有收益。

1. 股指期货定价

在股指期货定价中，股票指数可以被看作是支付一定股息的投资资产。股指期货价

格可以表示为

$$F = S\mathrm{e}^{cT} = S\mathrm{e}^{(r-q)T} \tag{1-3}$$

其中，F 为股指期货价格；S 为股票现货指数；c 为持有成本率；r 为无风险利率；q 为股息率；T 为期货合约的期限(以年为单位)。

【例 1-1】 若股票指数为 3 000 点，无风险利率为 4%，指数年股息率为 2%，则 3 个月后到期的该股指期货价格理论价格为多少？

根据式(1-3)，3 个月后到期的该股指期货理论价格为

$$F = 3\,000 \times \mathrm{e}^{(4\%-2\%)3/12} \approx 3\,015$$

2. 国债期货定价

(1) 短期国债标的资产是零息债券，没有持有收益，持有成本是购买国债的资金占用成本。短期国债期货定价公式为

$$F = S\mathrm{e}^{cT} = S\mathrm{e}^{rT} \tag{1-4}$$

其中，F 为国债期货价格；S 为国债现货价格；c 为持有成本率；r 为无风险利率。

(2) 中长期国债期货交易标的是特定期限和票面利率的标准虚拟国债，并以此对应国债现货市场一篮子可交割国债、多券种、可替代的实物交割制度设计。可交割国债卖方应该获得其持有期间的应计利息收入。假设可交割国债在合约到期前没有利息支付，理论上，国债期货定价公式为

$$F = (S - I)\mathrm{e}^{cT}/C_{\mathrm{f}} = (S - I)\mathrm{e}^{rT}/C_{\mathrm{f}} \tag{1-5}$$

其中，F 为国债期货价格；S 为可交割国债现货价格；c 为持有成本率；r 为无风险利率；I 为可交割国债现货持有期间利息收入的现值；T 为期货合约期限(以年为单位)；C_{f} 为可交割国债转换因子。

式(1-5)中，国债期货价格为按复利计算的，短期看其计算结果与按单利计算的结果基本一致，为简便起见，实践中经常按单利计算，下面以中国金融期货交易所国债期货为例进行讨论。

$$\begin{aligned}\text{国债期货理论价格} &= \text{国债现货价格} + \text{国债持有成本}\\ &= \text{国债现货价格} + (\text{持有国债资金占用成本} - \text{持有国债期间利息收入})\end{aligned}$$

实践中，用最便宜可交割国债(CTD)净价代替国债现货价格，假定 CTD 券至交割日期间没有券息支付，则国债期货理论价格为

$$\begin{aligned}\text{国债期货理论价格} =&(\text{最便宜可交割国债全价} + \text{持有国债资金占用成本}\\ &- \text{上一付息日至交割日持有国债期间利息收入})/\text{转换因子}\\ =&(\text{最便宜可交割国债净价} + \text{持有国债资金占用成本}\\ &- \text{国债购买日至交割日持有国债期间利息收入})/\text{转换因子}\end{aligned}$$

式中，持有国债资金占用成本按可交割国债全价计算。

【例 1-2】 2021 年 7 月 6 日，T2109 期货价格为 98.300，其最便宜可交割国债“20 附息国债 06”现货净价为 96.253，转换因子为 0.975 7。“20 附息国债 06”发行日为 2020 年 5 月 21 日，到期日为 2030 年 5 月 21 日，票面利率为 2.68%，一年付息两次，付息日为每年的 5 月 21 日和 11 月 21 日。假设市场利率 $r=3\%$，计算 T2109 的理论价格。

第一步，计算购买价格，即债券全价。上次付息日 5 月 21 日至计算日 7 月 6 日，应计

利息天数是 46 天，应计利息为 1.34×46/184。

购买价格(债券全价)＝96.253＋1.34×46/184＝96.588

第二步，计算持有国债期间资金占用成本。“20 附息国债 06”自购买日(7 月 6 日)至第二交割日 70 天，在第二交割日之前没有利息支付，持有“20 附息国债 06”的资金占用成本为

资金占用成本＝ 96.588×(70/365)×0.03＝0.555 711 8

第三步，计算持有国债期间应计利息收入。“20 附息国债 06”自购买日(7 月 6 日)至交割日(中金所按第二交割日计算)70 天，在第二交割日之前没有利息支付，持有“20 附息国债 06”期间应计利息收入为

应计利息＝1.34×70/184＝0.509 782 6

第四步，计算 7 月 6 日 T2109 合约的理论价格。

T2109 的理论价格＝(96.253＋0.555 711 8－0.509 782 6)/0.975 7＝98.697 3

3. 外汇期货定价

以本国投资者的角度来考虑外汇期货合约，则期货价格定价公式为

$$F = S\mathrm{e}^{cT} = S\mathrm{e}^{(r-r_f)T} \tag{1-6}$$

其中，F 为外汇期货价格；S 为即期汇率；c 为持有成本率；r 为本币无风险利率；r_f 为外币无风险利率；T 为期货合约期限(以年为单位)。

【例 1-3】 假定欧元和美元的无风险利率分别为 1%和 2%，且欧元兑美元即期汇率为 1.037 6，则 3 个月期的欧元期货价格为

$$F = S\mathrm{e}^{cT} = S\mathrm{e}^{(r-r_f)T} = 1.037\,6\mathrm{e}^{(2\%-1\%)\times 3/12} = 1.040\,2$$

(三) 非完全市场情况下的期货定价

以上结论都是建立在完全市场假设条件下的。实践中，由于市场的不完全性，根据持有成本模型计算的期货价格应该是一个区间。

以持有期间无收益的金融资产，如股票为例：

(1) 存在交易成本时，假定每一笔交易的费率为 Y，期货价格就不再是确定的值，而是下面的区间：

$$[S(1-Y)\mathrm{e}^{r(T-t)}, S(1+Y)\mathrm{e}^{r(T-t)}]$$

(2) 借贷存在利差时，如果用 r_b 表示借入利率，用 r_l 表示借出利率，对非银行的机构和个人，一般是 $r_b > r_l$。这时，期货价格区间为

$$[S\mathrm{e}^{r_l(T-t)}, S\mathrm{e}^{r_b(T-t)}]$$

(3) 存在卖空限制时，假设卖空保证金比率为 X，那么期货价格区间应该是

$$[(1-X)S\mathrm{e}^{r(T-t)}, S\mathrm{e}^{r(T-t)}]$$

如果上述三种情况同时存在，期货价格区间应该是

$$[(1-X)S(1-Y)\mathrm{e}^{r_l T}, S(1+Y)\mathrm{e}^{r_b T}]$$

三、预期模型

对于标的资产为不易保存的商品或根本不存在可交割的标的资产的期货品种，以及

产生持续供给进入交割环节的商品，持有成本很难计算，持有成本模型的应用存在局限性。为了解释和寻找期货理论价格，出现了预期模型。根据预期模型，期货价格应等于未来现货价格的预期，即 $F=E(S_T)$。否则，就会存在无风险套利交易机会。

例如，市场预期螺纹钢未来 3 个月的现货市场价格为 3 000 元/吨，而当前市场上 3 个月到期的期货价格为 3 200 元/吨。

假设市场预期是准确的，则投资者可以卖出螺纹钢期货，等合约到期时再从现货市场上买入螺纹钢进行实物交割，从而获得 200 元/吨的套利利润。相反，如果当前市场上螺纹钢期货价格为 2 800 元/吨，则投资者可以通过买入螺纹钢期货，待合约到期时参与实物交割，再到现货市场上去卖出现货，从而获得 200 元/吨的利润。无论是哪种情况，众多投资者参与的结果，必然会使得期货价格逐渐趋近于市场未来现货价格的预期。

第二节　期 权 定 价

一、二叉树定价

二叉树(binomial tree)方法，又称二项式模型，是期权定价领域中比较简单，却又非常实用的一种方法。它是由约翰・考克斯(John C. Cox)、斯蒂芬・罗斯(Stephen A. Ross)和马克・鲁宾斯坦(Mark Rubinstein)等人提出的期权定价模型。该模型推导比较简单，非常适合说明期权定价的基本概念和思想，既可以用来对典型的不支付红利的欧式期权进行公平定价，也可以将该模型修改后对美式期权及支付红利的期权进行定价。

二叉树模型建立在一个基本假定的基础上，即在给定的时间间隔内，标的资产的价格运动只有两个可能的方向：上涨和下跌。模型的主要思想是，在无市场摩擦、无信用风险、无套利机会、无利率风险及投资者可以以无风险利率借入或贷出资金等理想的市场情形假设下，通过构造无风险的交易组合，使得这一组合在期权到期时的价值无不确定性，由此得到这组交易组合的成本，进而得出期权价格。由于可以把一个给定的时间段细分为更小的时间单位，因而二项式期权定价模型适用于处理更为复杂的期权。

简单的二叉树模型为离散时间二叉树模型，其中最基本的是单步二叉树，即仅考虑在单位时间间隔内，标的资产的价格从当前价格开始，至期权到期时，价格变化只有两种可能。进一步地，我们还可以将模型推广到两步乃至多步二叉树。

(一) 单步二叉树

首先我们通过一个简单的例子来介绍单步二叉树模型。假定一只 IBM 股票在 0 时刻的价格(当前价格)为 S_0，考虑以此股票为标的资产、到期日为 T、执行价格为 K 的看涨期权的当前价格。我们已知在 T 时刻，股票的价格变化只有两种可能：上涨到 $uS_0(u>1)$，此时期权价值为 $C_u=\max(0,uS_0-K)$；下跌到 $dS_0(d<1)$，对应的期权价值为 $C_d=\max(0,dS_0-K)$。这些情形如图 1-1 所示。

现在，我们考虑这样一个组合，它由 Δ 只 IBM 股票的多头和一份看涨期权的空头组成(其中 Δ 也叫作套保比例)，则它的初始成本为 ΔS_0-C。如果股票价格上涨，则在期权到期时该交易组合的价值为

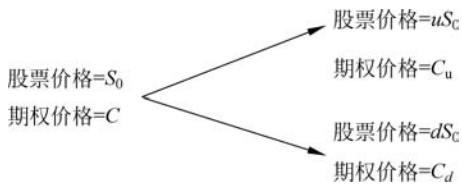

图 1-1　股票价格变动的单步二叉树模型(步长为 T)

$$uS_0\Delta - C_u$$

如果股票价格下跌,则在期权到期时该交易组合的价值为

$$dS_0\Delta - C_d$$

当两种情况下组合的价值相等,即组合价值不受股票价格波动的影响时,说明组合是无风险的,此时应该有

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{uS_0 - dS_0}$$

同样,由交易组合的无风险性知其收益率一定等于无风险利率(记为 r),故它在 T 个月时的贴现值等于其初始成本。这里,我们考虑连续复利,则有

$$(uS_0\Delta - C_u)\mathrm{e}^{-rT} = S_0\Delta - C$$

将 Δ 值代入上式,化简可知:

$$C = \mathrm{e}^{-rT}[pC_u + (1-p)C_d] \tag{1-7}$$

其中

$$p = \frac{\mathrm{e}^{rT} - d}{u - d}$$

当股票价格由一步二叉树给出时,我们可以用上式来方便地对看涨期权进行定价。

【例 1-4】 标的资产为不支付红利的股票,当前价格为每股 20 美元,已知一年后的价格或者为 25 美元,或者为 15 美元。计算对应的 1 年期、执行价格为 18 美元的欧式看涨期权的价格。设无风险年利率为 4%,考虑连续复利。则

$$uS_0 = 25(\text{美元})$$
$$dS_0 = 15(\text{美元})$$
$$T = 1(\text{年})$$

进而,我们有

$$u = \frac{25}{20} = 1.25$$
$$d = \frac{15}{20} = 0.75$$
$$C_u = \max(0, S_{T,u} - K) = 7(\text{美元})$$
$$C_d = \max(0, S_{T,d} - K) = 0(\text{美元})$$
$$\mathrm{e}^{rT} = \mathrm{e}^{0.04\times 1} = 1.0408$$

计算得

$$p=\frac{1.0408-0.75}{1.25-0.75}=0.5816$$

因此，期权价格为

$$C=\frac{0.5816\times 7}{1.0408}=3.91(\text{美元})$$

（二）两步二叉树

我们可以将以上的分析推广到两步二叉树的情形，即将总时间段分为两个时间间隔。我们继续考虑(一)中的简单例子，期权期限变为 $2T$，在第一个时间间隔末 T 时刻，股票价格仍以 u 或 d 的比例上涨或下跌。如果其他条件不变，则在 $2T$ 时刻，股票有三种可能的价格。价格演变情况如图 1-2 所示。

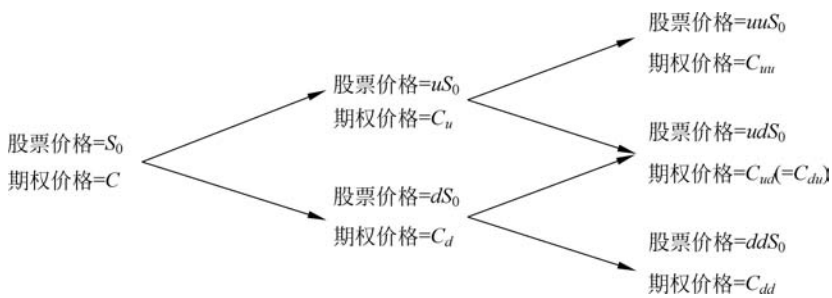

图 1-2　股票价格变动的两步二叉树模型(步长为 T)

为了求得 0 时刻的期权价格，我们使用倒推的方法，重复利用单步二叉树的原理：由于 T 时刻的价值来自 $2T$，故我们有

$$C_u=\mathrm{e}^{-rT}[pC_{uu}+(1-p)C_{ud}], \tag{1-8}$$

$$C_d=\mathrm{e}^{-rT}[pC_{ud}+(1-p)C_{dd}], \tag{1-9}$$

其中

$$p=\frac{\mathrm{e}^{rT}-d}{u-d}$$

再利用单步二叉树的期权公式，即可得出期权价格 C。

【例 1-5】　接【例 1-4】，假设期权的期限变为 2 年，我们用两步二叉树法求解期权的价格。我们已经求得 $u=1.25$，$d=0.75$，则

$$uuS_0=1.25\times 1.25\times 20=31.25(\text{美元})$$

$$udS_0=1.25\times 0.75\times 20=18.75(\text{美元})$$

$$ddS_0=0.75\times 0.75\times 20=11.25(\text{美元})$$

故第 2 年期权的价格为

$$C_{uu}=\max(0,uuS_0-K)=13.25(\text{美元})$$

$$C_{ud}=\max(0,udS_0-K)=0.75(\text{美元})$$

$$C_{dd}=\max(0,ddS_0-K)=0(\text{美元})$$

T 时刻期权的价值为

$$C_u = \frac{[0.5816 \times 13.25 + (1-0.5816) \times 0.75]}{1.0408} = 7.71(\text{美元})$$

$$C_d = \frac{0.5816 \times 0.75}{1.0408} = 0.42(\text{美元})$$

因此期权的价格为

$$C = \frac{[0.5816 \times 7.71 + (1-0.5816) \times 0.42]}{1.0408} = 4.48(\text{美元})$$

多步二叉树法与两步二叉树法操作步骤完全相同，这里不再赘述。容易知道，当步数为 n 时，nT 时刻股票价格共有 $n+1$ 种可能，故步数比较大时，二叉树法更加接近现实的情形。

二、B-S-M 定价模型

20 世纪 70 年代初，由美国经济学家迈伦·斯科尔斯(Myron Scholes)与费雪·布莱克(Fisher Black)最先提出并由罗伯特·默顿(Robert Merton)完善的“布莱克-斯科尔斯-默顿(Black-Scholes-Merton)”模型(简称 B-S-M 模型)，成为期权定价领域的一项重大突破，迈伦·斯科尔斯和罗伯特·默顿也凭借此模型获得了 1997 年的诺贝尔经济学奖。B-S-M 模型提供了计算选择权价值的基本概念，并且已经成为全球金融市场的标准模型。

前面介绍的二叉树定价模型和 B-S-M 定价模型，是两种相互补充的方法，前者虽然过于简单，但是随着要考虑的价格变动数目的增加，二叉树模型的分布函数越来越趋向于正态分布，使得二叉树期权定价模型和 B-S-M 期权定价模型相一致。

我们主要介绍基本的 B-S-M 欧式期权定价模型，再给出 B-S-M 定价公式的拓展。

（一）基本的 B-S-M 欧式期权定价模型

1. 模型假设

B-S-M 定价模型有以下七个基本假设。

(1) 股票价格服从连续时间随机过程，其中 μ 和 δ 为常数。

(2) 可以卖空证券，并且可以完全使用所得收入。

(3) 无交易费用和税收，所有证券均可无限分割。

(4) 在期权期限内，股票不支付股息。

(5) 不存在无风险套利机会。

(6) 证券交易为连续进行。

(7) 短期无风险利率为常数，并对所有期限都是相同的。

B-S-M 定价模型的主要思想与二叉树模型类似，在无套利机会的条件下，构造一个由期权与股票所组成的无风险交易组合，这一组合的收益率必定为无风险利率 r，由此得出期权价格满足的微分方程，进而求出期权价格。

2. 风险中性定价原理

下面我们阐述对 B-S-M 定价模型十分重要的原理：风险中性定价原理(risk neutral pricing theory)。

风险中性定价原理，是由约翰·考克斯和斯蒂芬·罗斯于1976年推导期权定价公式时建立的，它表达了这样一个结论：在市场不存在任何套利可能性的条件下，如果衍生产品的价格只依赖于可交易的标的资产，那么这个衍生产品的价格是与投资者的风险态度无关的，即主观偏好不影响衍生品价格。

由于风险偏好决定预期收益率 μ，所以在风险中性世界里，所有证券的预期收益率 μ 都等于无风险利率 r，即投资者不要求任何的风险补偿或风险报酬。同样地，所有现金流也都可以通过无风险利率进行贴现求得现值。故根据上面的原理，我们可以预测，B-S-M定价公式中不会体现出投资者的风险厌恶，即不会出现 μ，而只可能含有无风险利率 r。

在单步二叉树的例子中，股票价格会以一定的概率上涨或下跌，而通过定价公式我们知道，期权价格与此概率无关，但这并不意味着股票上涨或下跌的可能性可以随便给定。事实上，只要预期收益率 μ 给定，股票上升或下跌的概率也就确定了。比如，假设在现实世界中预期收益率为10%，则股票上升概率 p 可以由下式得出

$$20 = e^{-0.1\times 1}[p25 + (1-p)15]$$

$$p = 71.03\%$$

然而无论投资者的风险厌恶程度如何，从而无论股票上升或下降的概率如何，该期权的价值都为4.307 3美元。这个例子，可以帮助我们更好地理解风险中性定价原理。

3. B-S-M欧式期权定价公式

在上面的假设和思想的基础上，Black和Scholes得到了如下适用于无红利标的资产（如无分红股票）欧式看涨期权的定价公式：

$$C = SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \tag{1-10}$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + [r + (\sigma^2/2)]T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + [r - (\sigma^2/2)]T}{\sigma\sqrt{T}}$$

式中，S 为无收益标的资产的当前价格；σ 为无收益标的资产的价格波动率；K 为欧式看涨期权的执行价格；T 为欧式看涨期权的到期时间；C 为欧式看涨期权的价格；$N(.)$为标准正态概率值(具体值可以查正态概率值表)。

正如我们先前的预测，体现投资者风险偏好的预期收益率 μ 没有出现在定价公式中，代替它的是表达风险中性的无风险利率 r，这验证了风险中性定价原理的合理性。另外，从B-S-M公式自身的求解过程来看，$N(d_2)$实际上是在风险中性世界中 S_T（标的资产在 T 时刻的价格）大于 K 的概率，或者说是欧式看涨期权被执行的概率，因此 $Ke^{-rT}N(d_2)$是 K 的风险中性期望值的现值，或者说可以看成期权可能带来的收入现值；而 $SN(d_1) = S_T e^{-rT}N(d_1)$是 S_T 的风险中性期望值的现值，可以看成是期权持有者将来可能支付的价格的现值，因此，整个公式可以被看作期权未来期望回报的现值。此外，$N(d_1)$是看涨期权价格对资产价格的导数，它反映了很短时间内期权价格变动与其标的资产价格变动的比率，所以说，如果要抵消标的资产价格变化给期权价格带来的影响，一个单位的看涨期权多头就需要 $N(d_1)$单位的标的资产的空头加以保值。

B-S-M 公式中有 5 个输入变量，除了资产的价格波动率 σ 外，其他 4 个变量都可以从市场信息中直接得到。价格波动率用于度量资产所提供收益的不确定性，我们可以用资产价格的历史数据来估计它。

（二）B-S-M 期权定价公式的拓展

1. 无红利资产欧式看跌期权的定价公式

B-S-M 期权定价模型给出的是无红利资产欧式看涨期权的定价公式，根据欧式看涨期权和看跌期权的平价关系，我们可以得到无红利资产欧式看跌期权的定价公式：

$$P = Ke^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1) \tag{1-11}$$

2. 无红利资产美式期权的定价公式

在标的资产无红利的情况下，美式看涨期权等同于欧式看涨期权，因此上式也给出了无红利资产美式看涨期权的价格。

由于美式看跌期权与美式看涨期权之间不存在严格的平价关系，所以美式看跌期权的定价还没有得到一个精确的表达式，我们可以采用数值方法或者解析近似法给出它的价格。

3. 有红利资产期权的定价公式

到现在为止，我们一直假设期权的标的资产没有红利，即没有现金收益，那么对于有红利资产，其期权定价公式是什么呢？实际上，如果红利是可以准确预测到的，那么有红利资产的欧式期权定价并不复杂。

以股票为例，假设红利（收益率）为年率 g，它使得股票价格的增长率比不支付红利时减少了 g。如果连续支付红利的股票价格从现在的 S 增加到 T 时刻的 S_T，则没有红利支付时股票价格从现在的 S 增加到 T 时刻的 $S_T e^{-gT}$（考虑连续复利），这也可以看作是有红利支付时的股票价格从 t 时刻的 $S_T e^{-gT}$ 增加到 T 时刻的 S_T。

因此，我们只需做一个简单的替换：将基本 B-S-M 公式中的 S 改为 Se^{-gT}，我们即可得到有红利资产欧式看涨期权公式：

$$C = Se^{-gT}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \tag{1-12}$$

其中，

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + [r - g + (\sigma^2/2)]T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + [r - g - (\sigma^2/2)]T}{\sigma\sqrt{T}}$$

同样地，对有红利资产欧式看跌期权，我们有

$$P = Ke^{-rT}N(-d_2) - Se^{-gT}N(-d_1) \tag{1-13}$$

d_1 和 d_2 的定义同上。

【例 1-6】 假设 IBM 股票（不支付红利）的市场价格为 50 美元，无风险利率为 4%，股票的年波动率为 10%，求执行价格为 50 美元、期限为 1 年的欧式看涨期权和看跌期权的价格。

我们已知

$$S=50(\text{美元})$$
$$K=50(\text{美元})$$
$$T=1(\text{年})$$
$$r=0.04$$
$$\sigma=0.1$$

则

$$d_1=\frac{\ln\left(\frac{50}{50}\right)+[0.04+(0.01)/2]\times 1}{0.1\times\sqrt{1}}=0.45$$

$$d_2=\frac{\ln\left(\frac{50}{50}\right)+[0.04-(0.01)/2]\times 1}{0.1\times\sqrt{1}}=0.35$$

故有

$$N(d_1)=0.673\,6$$
$$N(d_2)=0.636\,8$$

如此，欧式看涨期权和看跌期权的价格分别为

$$C=50\times 0.673\,6-50\times 0.636\,8\mathrm{e}^{-0.04\times 1}=3.09$$
$$P=50\times(1-0.636\,8)\mathrm{e}^{-0.04\times 1}-50\times(1-0.673\,6)=1.13$$

三、期权风险度量参数

观察前面讲述的 B-S-M 定价公式中出现的参数因素，我们可能深入地了解各个因素对期权价格的影响程度，或称之为期权价格对这些因素的敏感性，即当这些因素发生变化时，会引起期权价格的变化程度。了解期权风险度量参数，有助于我们把握期权价格变动，并可以建立适当数量的证券头寸组成套期保值组合来消除风险。通常，我们用希腊字母来表示期权风险度量参数，它们包括 Delta、Theta、Gamma、Vega 和 Rho 等。

（一）Delta

期权的 Delta(Δ)，是衡量期权对期权标的资产价格变动所面临的风险程度的指标，定义为在其他条件不变时，期权价格变动与其标的资产价格变化曲线的切线斜率。比如，某期权的 Delta 为 0.7，这意味着当股票价格变化一个很小的数量时，相应期权价值变化大约等于股票价值变化的 70%。一般来讲有

$$\Delta=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}S} \tag{1-14}$$

式中，f 为期权的价格；S 为股票价格，上式右边是期权价格对股票价格求导数。

Delta 的取值范围在 −1 与 1 之间，看涨期权的 Delta 是正值，范围从 0 到 1，看跌期权的 Delta 是负值，范围从 −1 到 0。

证券组合的 Delta 值可以由证券组合内各个单一期权的 Delta 来计算。如果一个交

易组合由数量为 w_i 的期权 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 来组成,那么证券组合的 Delta 值为

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n} w_i \Delta_i \tag{1-15}$$

式中,Δ_i 为第 i 个期权的 Delta。该式可以用来计算标的资产的头寸或标的资产期货的头寸,以使得证券组合的 Delta 为 0。当 Delta 为 0 时,我们称证券组合为 Delta 中性。

Delta 值对套保者非常重要,譬如对上面的无红利资产的欧式看涨期权的多头需要由标的资产的空头来对冲;对看跌期权的多头需要由标的资产的多头来对冲。

【例 1-7】 假定一个金融机构持有以下 3 个关于某标的股票的头寸:

(1) 100 000 份看涨期权的多头头寸,行使价格为 55 美元,期限为 3 个月,每份期权的 Delta 为 0.533。

(2) 200 000 份看涨期权的空头头寸,行使价格为 56 美元,期限为 5 个月,每份期权的 Delta 为 0.468。

(3) 50 000 份看跌期权的空头头寸,行使价格为 56 美元,期限为 2 个月,每份期权的 Delta 为 −0.508。

这时整个股票组合的 Delta 为

$$100\,000\times 0.533-200\,000\times 0.468-50\,000\times(-0.508)=-14\,900$$

这意味着金融机构可以买入 14 900 股股票使得该股票组合为 Delta 中性。

(二) Theta

期权的 Theta(Θ),是衡量时间变化的风险度量指标,定义为在其他条件不变时,期权价格变化与时间变化的比率,是期权价格对时间的导数。公式为

$$\Theta=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \tag{1-16}$$

随着到期日的临近,期权价格(看涨和看跌)会不断下降,因此 Theta 值有时又被称为时间损耗(time decay)。

期权多头的 Theta 通常为负值,这是因为在其他条件不变的情况下,随着期限的缩短,期权价值会降低;而期权空头的 Theta 通常为正值,即对期权的卖方来说,每天都在坐享时间价值的收入。在其他条件一定时,Theta 的大小与标的资产价格波动率有关系。一般来说,波动率越小,Theta 的绝对值也越小;波动率越大,Theta 的绝对值也越大。

作为对冲参数,Theta 与 Delta 属于不同类型。这是因为未来标的资产的价格有很大的不定性,但时间走向却没有不定性。通过对冲来消除交易组合关于标的资产的风险很有意义,但通过对冲来消除交易组合对于时间的不定性就毫无意义了。在期权交易中,尤其是在差期交易中,由于 Theta 值的大小反映了期权购买者随时间推移所损失的价值,因而无论对于避险者、套利者还是对于投资者而言,Theta 值都是一个重要的指标。

(三) Gamma

期权的 Gamma(Γ),是衡量 Delta 相对标的资产价格变动的敏感性指标,定义为期权 Delta 的变化与标的资产价格变化的比率,是期权价格对标的资产价格的二阶导数。公

式为

$$\Gamma=\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}S^2} \tag{1-17}$$

当 Gamma 很小时，Delta 变化缓慢；当 Gamma 的绝对值很大时，Delta 对标的资产价格变动就变得相当敏感。

关于 Gamma，有三点比较重要的性质。

(1) 标的资产、到期期限以及执行价格相同的看涨期权与看跌期权具有相同的 Gamma。

(2) 看涨期权多头或看跌期权多头的 Gamma 值大于零。

(3) 当期权处于平价状态时，Gamma 最大。当期权处于深度实值或虚值状态时，Gamma 趋于零。

（四）Vega

期权的 Vega(V)，是衡量期权标的资产价格波动对期权价格影响的指标，定义为在其他条件不变时，期权价格对标的资产价格波动率(σ)的导数。公式为

$$V=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\sigma} \tag{1-18}$$

如果期权的 Vega 绝对值很大，则期权价格会对标的资产波动率变化非常敏感；如果 Vega 绝对值较小，则资产波动率对期权价格的影响也会很小。

一般来说，波动率对看涨期权和看跌期权多头的影响都是正向的，波动率越大，期权价格越高；相对于其他合约内容相同的期权，平值期权的 Vega 大于实值期权或者虚值期权。

【例 1-8】 假如某一交易组合为 Delta 中性，组合的 Gamma 为 6 000，Vega 为 9 000。假设期权 A 的 Gamma 为 0.8，Vega 为 2.2，Delta 为 0.9。期权 B 的 Gamma 为 1.0，Vega 为 1.6，Delta 为 0.6。如何调整期权头寸，才能使组合同时处于 Gamma 中性和 Vega 中性状态？

为了保证组合同时处于 Gamma 中性和 Vega 中性，需在组合中引入期权 A 和期权 B，用 w_{1t} 和 w_{2t} 代表组合中两个期权头寸的数量，要求：

$$6\,000+0.8w_{1t}+1.0w_{2t}=0$$

$$9\,000+2.2w_{1t}+1.6w_{2t}=0$$

以上两式求解得，$w_{1t}\approx-6\,522$，$w_{2t}\approx-653$。因此，分别加入 6 522 份期权 A 的空头和 653 份期权 B 的空头才能使该交易组合为 Gamma 中性和 Vega 中性。

加入这两种期权后，新组合的 Delta 变为：$-6\,522\times0.9-653\times0.6=-6\,261.6$，因此需卖出 6 262 份标的资产才能使该组合为 Delta 中性。

（五）Rho

期权的 Rho(ρ)，是衡量期权理论价值对利率变化的敏感性指标，定义为在其他条件不变时，期权价格对利率(r)的导数。公式为

$$\rho=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} \tag{1-19}$$

一般来说，实值期权的 Rho 大于平值期权的 Rho，而后者又大于虚值期权的 Rho；对于深度虚值期权来说，Rho 值接近于 0。

即测即练