

电阻电路建立的电路方程是用代数方程描述的。如果外加激励为直流电源,那么在激励作用到电路的瞬间,电路响应立即为一常量而使电路处于稳定状态(简称稳态)。这就是说,在任一时刻的响应只与同一时刻的激励有关,因此称电阻电路具有“即时性”或“无记忆性”特点。但当电路中含有电感元件或电容元件时,则不然。例如,当 RC 串联电路与恒压源接通后,电容元件被充电,其电压逐渐增长,要经过一个暂态过程才能达到稳定值。这种现象是由电感元件或电容元件的性质决定的,因为这类元件的电压、电流关系涉及对电流、电压的微分或积分,称为动态元件。含动态元件的电路称为动态电路。

由于动态元件压流关系为微积分关系,建立的电路方程将用微分方程描述,这就决定了动态电路在任一时刻的响应与激励的全部过去历史有关,并且将使电路产生暂态过程或过渡过程。例如,一个动态电路,尽管已不再作用,但仍有输出,因为输入曾经作用过,这种特点,称电路具有“记忆性”特点。

本章主要利用两类约束研究暂态过程或过渡过程中响应随时间而变化的规律。首先介绍两个动态元件,随后主要介绍直流一阶电路的零输入响应、零状态响应和全响应,以及一阶电路的三要素法,最后简要介绍阶跃响应及正弦激励下一阶电路分析、直流二阶电路分析等。

研究暂态过程的目的是认识和掌握这种客观存在的物理现象和规律,既要充分利用暂态过程的特性,同时也必须预防它所产生的危害。例如,在工程应用中常利用电路中的暂态过程现象来改善波形和产生特定波形;但某些电路在与电源接通或断开的暂态过程中,会产生过电压或过电流,从而使电气设备或器件遭受损坏。

3.1 动态元件

3.1.1 电容元件

电容器是最常用的电能储存器件。用介质(如云母、绝缘纸、电解质等)把两块金属极板隔开就可构成一个电容器,如图 3-1 所示。

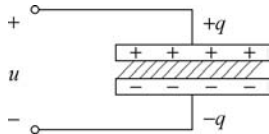


图 3-1

在电容器两端加上电源,两块极板能分别聚集等量的异性电荷,在介质中建立电场,并储存电场能量。电源移去后,这些电荷由于电场力的作用而互相吸引,但被介质所绝缘而不能中和,因

而极板上电荷能长久地储存起来,所以电容器是一种能够储存电场能量的实际器件。

应用电荷、电压关系 $q-u$ 表征电容器的外特性,经理想化处理,可建立电容元件的模型。

一个二端元件,在任意时刻,其电荷 q 、电压 u 关系能用 $q-u$ 平面上的曲线确定,则称此二端元件为电容元件,简称电容。

若电容元件在 $q-u$ 平面上的曲线是通过原点的一条直线,且不随时间变化,则称为线性时不变电容元件,即电荷 q 与其两端电压 u 的关系为

$$q = Cu \quad (3.1-1)$$

其中, C 称为电容量,单位为法拉(F),简称法,另常用 μF (10^{-6}F) 和 pF (10^{-12}F) 等单位。其电路模型及库伏特性曲线如图 3-2 所示。本书主要讨论线性时不变电容元件。

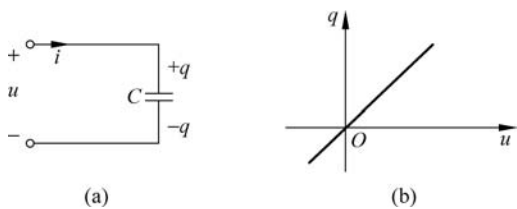


图 3-2

在电路分析中,更关注的是电容元件的伏安关系和储能公式等。当电容电压 u 发生变化时,聚集在电容极板上的电荷也相应地发生变化,从而形成电容电流,在电压和电流关联参考方向下,线性电容的伏安关系为

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} \quad (3.1-2)$$

写成积分形式

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\xi) d\xi \quad (3.1-3)$$

如果只对某一任意选定的初始时刻 t_0 以后电容电压的情况感兴趣,便可将积分形式写为

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(\xi) d\xi + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\xi) d\xi \\ &= u(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (3.1-4)$$

上式表明如果知道了由初始时刻 t_0 开始作用的电流 $i(t)$ 以及电容的初始电压 $u(t_0)$, 就能确定 $t \geq t_0$ 时的电容电压 $u(t)$ 。

由以上线性电容的伏安关系可得到以下重要结论:

(1) 任何时刻,线性电容的电流与该时刻电压的变化率成正比。如果电容电压不变,即 du/dt 为零,此时电容上虽有电压,但电容电流为零,这时的电容相当于开路,故电容有隔断直流的作用。

(2) 如果在任何时刻,通过电容的电流是有限值,则 du/dt 必须是有限值,这就意味着电容电压不可能发生跃变,而只能是连续变化的。

(3) 积分形式表明:在某一时刻 t ,电容电压的数值并不仅取决于该时刻的电流值,而是取决于从 $-\infty$ 到 t 所有时刻的电流值,即与电流全部过去历史有关。所以,电容电压具有

“记忆”电流的性质,电容是一种“记忆元件”。

在电压和电流关联参考方向下,线性电容吸收的瞬时功率为

$$p = ui = Cu \frac{du}{dt} \quad (3.1-5)$$

若 $p > 0$, 表示电容被充电而吸收能量; 若 $p < 0$, 表示电容放电而释放能量。从 $-\infty$ 到 t 时刻, 电容吸收的能量为

$$\begin{aligned} w_c(t) &= \int_{-\infty}^t p d\xi = \int_{-\infty}^t Cu(\xi) \frac{du(\xi)}{d\xi} d\xi = \int_{u(-\infty)}^{u(t)} Cu(\xi) du(\xi) \\ &= \frac{1}{2} Cu^2(t) - \frac{1}{2} Cu^2(-\infty) \end{aligned}$$

设 $u(-\infty) = 0$, 则意味着电容在任一时刻储存的能量等于它吸收的能量, 即电容有储能公式为

$$w_c(t) = \frac{1}{2} Cu^2(t) \quad (3.1-6)$$

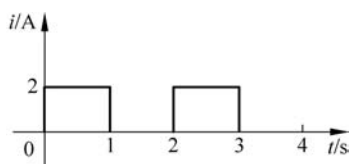
式(3.1-6)表明, 电容在任何时刻的储能只与该时刻的电压有关, 而与通过的电流大小无关。只要电压存在, 即使没有电流(例如, 断开与它相连接的电路)也有储能。因此电容元件是储能元件, 电容吸收的能量以电场能量形式储存在元件的电场中。

在电容电流是有限值时, 电容电压不能跃变, 实质上也就是电容的储能不能跃变的反映。如果电容储能跃变, 则功率将是无限大, 当电容电流是有限值时, 这种情况实际是不可能的。

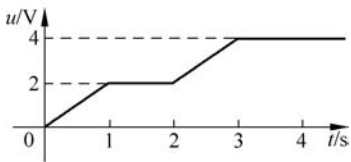
例 3-1 电容元件如图 3-2(a) 所示, 已知 $C = 1\text{F}$, $t = 0$ 以前无初始储能。若其电流 i 为如图 3-3(a) 所示的波形, 试作出其电压 u 的波形图。

解: 由图 3-3(a) 所示波形可知, 电流 i 的表达式为

$$i(t) = \begin{cases} 2\text{A}, & 0 < t < 1\text{s}, \quad 2\text{s} < t < 3\text{s} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



(a)



(b)

图 3-3

$t = 0$ 以前无初始储能。故根据电容元件伏安关系积分形式, 有

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{C} \int_0^t i(\xi) d\xi = \int_0^t i(\xi) d\xi \\ &= \begin{cases} \int_0^t 2 d\xi = 2t \text{ V}, & 0 \leq t \leq 1\text{s} \\ u(1) + \int_1^t 0 \times d\xi = 2\text{ V}, & 1\text{s} \leq t \leq 2\text{s} \\ u(2) + \int_2^t 2 d\xi = 2t - 2\text{ V}, & 2\text{s} \leq t \leq 3\text{s} \\ u(3) = 4\text{ V}, & t \geq 3\text{s} \end{cases} \end{aligned}$$

据此, 可画出电压波形图如图 3-3(b) 所示。

实际的电容器除了有储能作用外, 还会消耗一部分电能。这主要是由于介质不可能是理想的, 其中多少存在一些漏电流。由于电容器消耗的功率与所加电压直接相关, 因此可用电容与电阻的并联电路模型来表示实际电容器,

如图 3-4 所示。

另外,每个电容器所能承受的电压是有限度的,电压过高,介质就会被击穿,从而丧失电容器的功能。因此,一个实际的电容器除了要标明它的电容量外,还要标明它的额定工作电压,使用电容器不应高于它的额定工作电压。

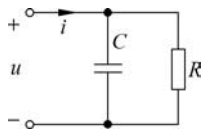


图 3-4

3.1.2 电感元件

用导线绕制成空芯或具有铁芯的线圈就可构成一个电感器或电感线圈。线圈中通以电流 i 后将产生磁通 Φ_L ,在线圈周围建立磁场,并储存磁场能量,所以电感线圈是一种能够储存磁场能量的实际器件。

如果磁通 Φ_L 与线圈的 N 匝都交链,则磁链 $\Psi_L = N\Phi_L$,如图 3-5 所示。 Φ_L 和 Ψ_L 都是由线圈本身的电流产生的,称为自感磁通和自感磁链。

应用磁链、电流关系 Ψ_L-i 表征电感器的外特性,经理想化处理,可建立电感元件的模型。

一个二端元件,在任意时刻,其磁链 Ψ_L 、电流 i 关系能用 Ψ_L-i 平面上的曲线确定,则称此二端元件为电感元件。

若电感元件 Ψ_L-i 平面上的曲线是通过原点的一条直线,且不随时间变化,则称为线性时不变电感元件。设电感上磁通 Φ_L 的参考方向与电流 i 的参考方向之间满足右手螺旋定则,则任何时刻线性电感的自感磁链 Ψ_L 与其中电流 i 的关系为

$$\Psi_L = Li \quad (3.1-7)$$

其中, L 称为电感量,单位为亨利(H),简称亨,另常用 $\text{mH}(10^{-3}\text{H})$ 和 $\mu\text{H}(10^{-6}\text{H})$ 等单位。其电路模型及磁链-电流特性如图 3-6 所示。本书主要讨论线性时不变电感元件。

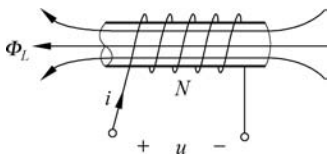
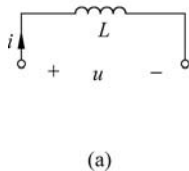
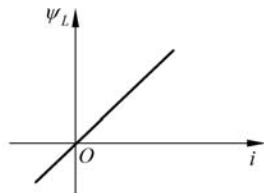


图 3-5



(a)



(b)

图 3-6

在电路分析中,同样更关注的是电感元件的伏安关系和储能情况等。当电感电流发生变化时,自感磁链也相应地发生变化,于是该电感上将出现感应电压 u 。根据电磁感应定律,在电感电流与自感磁链的参考方向符合右手螺旋定则、电压和电流参考方向关联时,有

$$u = \frac{d\Psi_L}{dt} = L \frac{di}{dt} \quad (3.1-8)$$

写成积分形式

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi \quad (3.1-9)$$

如果只对某一任意选定的初始时刻 t_0 以后电感电流的情况感兴趣,便可将积分形式

写为

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} u(\xi) d\xi + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\xi) d\xi \\ &= i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (3.1-10)$$

上式表明如果知道了由初始时刻 t_0 开始作用的电压 $u(t)$ 以及电感的初始电流 $i(t_0)$, 就能确定 $t \geq t_0$ 时的电感电流 $i(t)$ 。

由以上线性电感的伏安关系可得到以下重要结论:

(1) 任何时刻, 线性电感的电压与该时刻电流的变化率成正比。如果电感电流不变, 即 di/dt 为零, 则此时电感中虽有电流但电感电压为零, 这时的电感相当于短路。

(2) 如果在任何时刻, 电感的电压是有限值, 则 di/dt 就必须是有限值, 这就意味着电感电流不可能发生跃变, 而只能是连续变化的。

(3) 积分形式表明, 在某一时刻 t 电感电流的数值并不仅取决于该时刻的电压值, 而是取决于从 $-\infty$ 到 t 所有时刻的电压值, 即与电压全部过去历史有关。所以, 电感电流具有“记忆”电压的性质, 电感也是一种“记忆元件”。

在电压和电流关联参考方向下, 线性电感吸收的瞬时功率为

$$p = ui = Li \frac{di}{dt} \quad (3.1-11)$$

若 $p > 0$, 表示电感吸收能量; 若 $p < 0$, 表示电感释放能量。从 $-\infty$ 到 t 时刻, 电感吸收的能量为

$$\begin{aligned} w_L(t) &= \int_{-\infty}^t p d\xi = \int_{-\infty}^t Li(\xi) \frac{di(\xi)}{d\xi} d\xi = \int_{i(-\infty)}^{i(t)} Li(\xi) di(\xi) \\ &= \frac{1}{2} Li^2(t) - \frac{1}{2} Li^2(-\infty) \end{aligned}$$

设 $i(-\infty) = 0$, 则意味着电感在任一时刻储存的能量等于它吸收的能量, 即电感有储能公式为

$$w_L(t) = \frac{1}{2} Li^2(t) \quad (3.1-12)$$

此式表明, 电感在任何时刻的储能只与该时刻通过的电流有关, 而与其电压大小无关。只要电流存在, 即使没有电压也有储能。因此电感元件是储能元件, 电感吸收的能量以磁场能量形式储存在元件的磁场中。

当电感电压是有限值时, 电感电流不能跃变, 实质上也就是电感的储能不能跃变的反映, 如果电感储能跃变, 则功率将是无限大, 当电感电压是有限值时, 这种情况是不可能的。

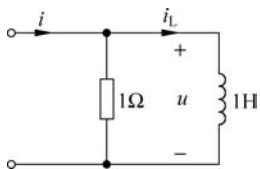


图 3-7

例 3-2 电路如图 3-7 所示, 已知 $i_L(t) = 3e^{-2t} \text{ A}$ ($t \geq 0$), 求 $t \geq 0$ 时的端口电流 $i(t)$ 。

解: 设电感电压 $u(t)$, 参考方向与 i_L 关联。

根据电感元件伏安关系得

$$u(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = 1 \times (-2) \times 3e^{-2t} = -6e^{-2t} \text{ V}$$

由 KCL, 端口电流 i 应为电阻电流和电感电流之和, 即

$$i(t) = \frac{u(t)}{1} + i_L(t) = -6e^{-2t} + 3e^{-2t} = -3e^{-2t} \text{ A}$$

实际的电感器除了有储能作用外,还会消耗一部分电能。这主要是由于构成电感的线圈导线多少存在一些电阻的缘故。由于电感器消耗的功率与流过它的电流直接相关,因此可用电感与电阻的串联电路作为实际电感器的电路模型,如图 3-8 所示。

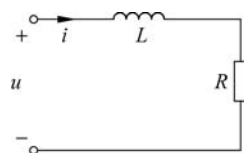


图 3-8

另外,每个电感器所能承受的电流是有限的,流过电流过大,会使线圈过热或使线圈受到过大电磁力的作用而发生机械形变,甚至烧毁线圈。因此,一个实际的电感器除了要标明它的电感量外,还要标明它的额定工作电流,使用电感器不应高于它的额定工作电流。

3.1.3 电感、电容的串联和并联

工程实际中,常会遇到单个电容器的电容量或电感线圈的电感量不能满足电路的要求,须将几个电容器或几个电感线圈适当地连接起来,组成电容器组或电感线圈组。电容器或电感线圈的连接形式与电阻相同,可采用串联、并联、混联方式,利用等效概念最终可以证明等效为一个电感或电容。以下主要讨论电感、电容的串联和并联后的等效。

1. 电感的串联

电感的串联如图 3-9(a)所示,可等效为一个电感如图 3-9(b)所示。

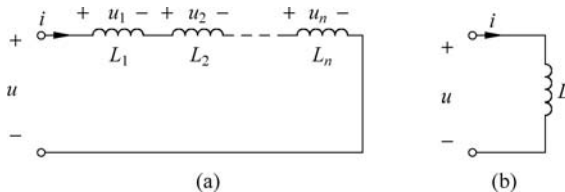


图 3-9

图中, $L = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$ 。利用等效概念可以说明二者是等效的。在图 3-9(a)中,流过各电感的电流是同一电流 i , 根据 KVL 和电感元件的端口伏安关系, 端口压流关系有

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \cdots + L_n \frac{di}{dt} \\ &= (L_1 + L_2 + \cdots + L_n) \frac{di}{dt} \end{aligned}$$

若图 3-9(b)中的电感 $L = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$, 两个电路端口具有相同的伏安关系, 故二者是等效的。

2. 电感的并联

电感的并联如图 3-10(a)所示,可等效为一个电感,如图 3-10(b)所示。

图中, $\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}$ 。

可见,电感线圈串联和并联等效电感的计算方式和电阻串、并联等效电阻的计算方式

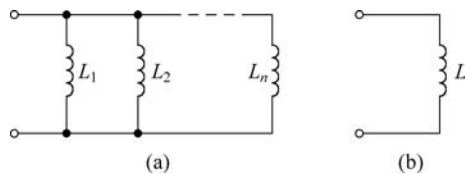


图 3-10

相同。

电感线圈串联后的额定电流是其中最小的额定电流值。电感量相同的电感线圈并联后的额定电流是各线圈额定电流值之和。因此,串联使用电感线圈可以提高电感量,并联使用电感线圈可以增大额定电流。实际使用各种线圈时,除了考虑电感量的大小外,还要注意使正常工作时通过线圈的电流小于线圈的额定电流值,否则会烧坏线圈绕组。

3. 电容的串联

电容的串联如图 3-11(a)所示,可等效为一个电容,如图 3-11(b)所示。

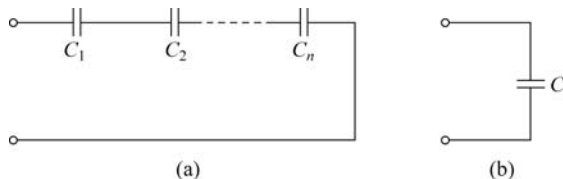


图 3-11

图中, $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$ 。

4. 电容的并联

电容的并联如图 3-12(a)所示,可等效为一个电容,如图 3-12(b)所示。

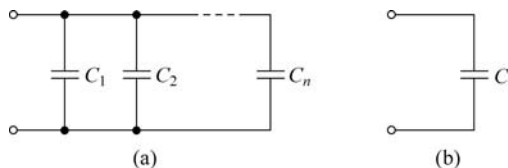


图 3-12

图中, $C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$ 。

可见,电容器串联与并联等效电容的计算方式和电阻串、并联等效电阻的计算方式正好相反。

电容器串联后的等效电容量比每一个电容器的电容量都小。电容器串联时,由于静电感应的作用,每一个电容器上所带的电量是相同的,所以各电容器上所分得的电压与其电容量成反比,电容量大的分配的电压低,电容量小的分配的电压高。具体使用时必须根据上述关系慎重考虑各电容器的耐压情况。

若所需的电容量大于单个电容器的电容量时,可以采用电容器的并联组合,同时也应考虑耐压问题。并联电容器组中的任何一个电容器的耐压值都不能低于外加电压,否则该电容器就会被击穿。

电容器和电感线圈还可混联使用,以获得合适的电容量及耐压、电感量及额定电流。

思考和练习

3.1-1 若 LC 元件端口电压、电流参考方向非关联,则它们的端口伏安关系应改写为何种形式?

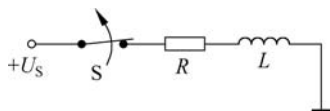
3.1-2 判断下列命题是否正确,并说明理由。

- (1) 电感电压为有限值时,电感电流不能跃变。
- (2) 电感电流为有限值时,电感电压不能跃变。
- (3) 电容电压为有限值时,电容电流可以跃变。
- (4) 电容电流为有限值时,电容电压可以跃变。
- (5) 由于电阻、电感、电容元件都能从外部电路吸收功率,所以它们都是耗能元件。

3.1-3 如果一个电感元件两端的电压为零,其储能是否也一定等于零? 如果一个电容元件中电流为零,其储能是否也一定等于零?

3.1-4 电感元件通过恒定电流时可视为短路,是否此时电感 L 为零? 电容元件两端加恒定电压时可视为开路,是否此时电容 C 为无穷大?

3.1-5 一电感 $L=1\text{H}$,某时刻电感电流为 2A ,问该时刻电感两端的电压和储能是否可能都等于零? 为什么? 一电容 $C=1\text{F}$,某时刻电容两端的电压为 2V ,问该时刻通过电容的电流和电容储能是否可能都等于零? 为什么?



练习题 3.1-6 图

3.1-6 试标出练习题 3.1-6 图所示电路中开关 S 打开瞬间,电感两端电压的极性。

3.2 动态电路方程的建立及其解

3.2.1 动态电路方程的建立

分析电路,首先要选择变量建立电路方程。基本依据是基尔霍夫定律和元件的伏安关系。由于动态元件的伏安关系是微积分关系,因此根据两类约束所建立的动态电路方程是以电流、电压为变量的微分-积分方程,一般可归为微分方程。如果电路中只有一个独立的动态元件,则描述该电路的是一阶微分方程,相应的电路称为一阶电路。如果电路中有 n 个独立动态元件,那么描述该电路的将是 n 阶微分方程,则相应的电路称为 n 阶电路。

动态电路中的暂态过程是由换路动作引起的,通常把电路中开关的接通、断开或者元件参数的突然变化等统称为换路。换路前后,电路结构或者元件参数不同,原有的工作状态经过过渡过程到达一个新的稳定工作状态。常设 $t=0$ 时换路, $t=0_-$ 表示换路前的终了时刻,

$t=0_+$ 表示换路后的初始时刻。动态电路建立的方程就是指换路后的电路方程。

在动态电路的许多电压变量和电流变量中,电容电压和电感电流具有特别重要的地位,它们确定了电路储能的状态,常称电容电压 $u_C(t)$ 和电感电流 $i_L(t)$ 为状态变量。如果选择状态变量建立电路方程,则可以通过状态变量很方便地求出其他变量。以下对一些典型电路讨论其建立电路方程的过程。

1. 一阶 RC 电路

图 3-13 所示一阶 RC 电路中,以电容电压 $u_C(t)$ 为变量。对 $t>0$ 时电路,根据 KVL,得

$$u_R + u_C = u_S$$

把元件的伏安关系 $u_R = Ri$, $i(t) = C \frac{du_C}{dt}$ 等代入上式,得以 $u_C(t)$ 为变量的一阶微分方程

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u_S$$

可将上述方程进一步化为

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{1}{RC}u_S \quad (3.2-1)$$

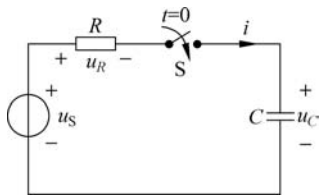


图 3-13

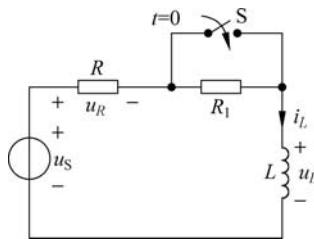


图 3-14

2. 一阶 RL 电路

图 3-14 所示一阶 RL 电路中,以电感电流 $i_L(t)$ 为变量。对 $t>0$ 时电路,根据 KVL,得

$$u_R + u_L = u_S$$

把元件的伏安关系 $u_R = Ri_L$, $u_L(t) = L \frac{di_L}{dt}$ 等代入上式,得以 $i_L(t)$ 为变量的一阶微分方程

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = u_S$$

可将上述方程进一步化为

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L}i_L = \frac{1}{L}u_S \quad (3.2-2)$$

3. RLC 串联电路

图 3-15 所示 RLC 串联电路中,仍以电容电压 $u_C(t)$ 为变量。对 $t>0$ 时电路,根据

KVL,得

$$u_R + u_C + u_L = u_S$$

把元件的伏安关系 $u_R = Ri, i(t) = C \frac{du_C}{dt}, u_L = L \frac{di}{dt}$ 等

代入上式,得以 $u_C(t)$ 为变量的二阶微分方程

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = \frac{1}{LC} u_S \tag{3.2-3}$$

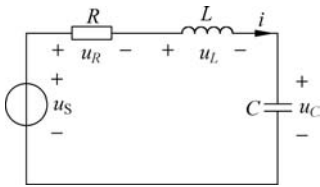


图 3-15

综上所述,建立动态电路方程的步骤可归纳如下:

- (1) 根据电路建立 KCL 和 KVL 方程,写出各元件的伏安关系。
- (2) 在以上方程中消去中间变量,得到所需变量的微分方程。

3.2.2 动态方程的解

对于一阶电路的时域分析,考虑类似式(3.2-1)和式(3.2-2)典型一阶电路的方程为线性常系数微分方程,其一般形式可归为

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} y(t) = bf(t) \tag{3.2-4}$$

其中, $f(t)$ 表示激励源, $y(t)$ 表示任意的电压或电流(而不一定限于电容电压、电感电流)。求解微分方程时,须已知或确定该方程成立之时的初始值。现设 $t = 0$ 时换路,并已知响应的初始值为 $y(0_+)$ 。

线性常系数微分方程的解由两部分组成,即

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

其中, $y_h(t)$ 是齐次方程 $\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} y(t) = 0$ 的通解(齐次解),解的形式为 $y_h(t) = Ae^{pt}$ 。 p

由特征方程 $p + \frac{1}{\tau} = 0$ 确定,即 $p = -\frac{1}{\tau}$,故通解为 $y_h(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ 。 $y_p(t)$ 一般具有与激励形式相同的函数形式。常见的激励函数 $f(t)$ 及相应的特解 $y_p(t)$ 列于表 3-1 中。

表 3-1 常见激励函数 $f(t)$ 相应的特解

激励 $f(t)$	特解 $y_p(t)$
直流	K
t^n	$K_n t^n + K_{n-1} t^{n-1} + \cdots + K_0$
$e^{\alpha t}$	$K e^{\alpha t}$ (当 α 不是特征根时) $(K_1 t + K_0) e^{\alpha t}$ (当 α 是单特征根时) $(K_2 t^2 + K_1 t + K_0) e^{\alpha t}$ (当 α 是二重特征根时)
$\cos \beta t$ 或 $\sin \beta t$	$K_1 \cos \beta t + K_2 \sin \beta t$

注:表中 $K, K_0, K_1, \cdots, K_n$ 均为待定常数。

故完全响应为

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ae^{pt} + y_p(t)$$

其中, A 可由初始值确定

$$\begin{aligned} y(0_+) &= A + y_p(0_+) \\ A &= y(0_+) - y_p(0_+) \end{aligned}$$

故得一阶电路方程的解为

$$y(t) = y_p(t) + [y(0_+) - y_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.2-5)$$

3.2.3 初始值计算

描述动态电路的方程是常系数微分方程。由式(3.2-5)可知,在求解常系数微分方程时,需要根据初始值 $y(0_+)$ 确定待定系数。下面讨论任意电压、电流初始值的计算方法。

在 3.1 节介绍动态元件时曾有这样的结论: 电容电流 $i_C(t)$ 和电感电压 $u_L(t)$ 为有限值, 则电容电压和电感电流不发生跃变。动态电路在换路期间也有相应的结论, 并可总结为换路定律。

如果在换路期间, 电容电流 $i_C(t)$ 和电感电压 $u_L(t)$ 为有限值, 则电容电压和电感电流不发生跃变, 称为换路定律。设 $t=0$ 时换路, 则有

$$\begin{cases} u_C(0_+) = u_C(0_-) \\ i_L(0_+) = i_L(0_-) \end{cases} \quad (3.2-6)$$

由动态元件伏安关系的积分形式也可说明换路定律。设 $t=0$ 时换路, 换路经历时间为 0_- 到 0_+ , 当 $t=0_+$ 时, 电容电压和电感电流分别为

$$\begin{cases} u_C(0_+) = u_C(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} i_C(\xi) d\xi \\ i_L(0_+) = i_L(0_-) + \frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} u_L(\xi) d\xi \end{cases} \quad (3.2-7)$$

如果在换路期间, 电容电流 $i_C(t)$ 和电感电压 $u_L(t)$ 为有限值, 则上两式中等号右方积分项将为零。此时电容电压和电感电流不发生跃变。

换路定律还可以从能量的角度来理解。已经知道, 电容和电感的储能分别为

$$w_C = \frac{1}{2} C u^2(t), \quad w_L = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

如果电容电压或电感电流发生跃变, 那么电容和电感的储能也发生跃变。而能量的跃变意味着瞬时功率为无限大, 这在实际电路中是不可能的。

由换路定律可见, 关于电容电压、电感电流 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$, 一般可由 $t=0_-$ 时的 $u_C(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$ 来确定。求解的步骤如下:

(1) 求 $u_C(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$ 。可画出 $t=0_-$ 时的电路: 对于激励源为直流的电路, 若原电路已处稳态, 电容可视为开路, 电感可视为短路, 然后求出 $u_C(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$ 。

(2) 用换路定律求出独立初始值: $u_C(0_+) = u_C(0_-)$ 、 $i_L(0_+) = i_L(0_-)$ 。

那么, 如何求取其他任意变量的初始值呢? 在求得电容电压、电感电流的初始 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 后, 关键是寻求 $t=0_+$ 时的等效电路。

设电路图 3-16(a) 中 N 为含源电阻网络, 设该网络在 $t=0$ 时换路, 则由换路定律可得

$$u_C(0_+) = u_C(0_-), \quad i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

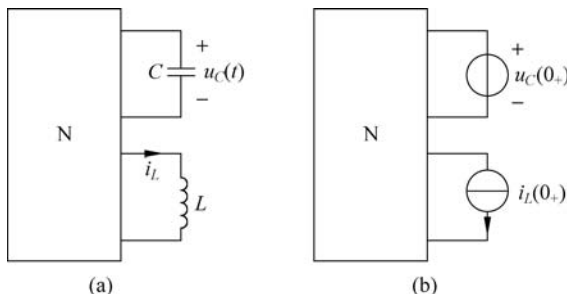


图 3-16

由于所求的是任意支路的电压、电流在换路后 $t=0_+$ 时刻的值,一般无“连续性”。根据替代定理,此时电容支路可用电压源 $u_C(0_+)$ 替代,电感支路可用电流源 $i_L(0_+)$ 替代,于是得到图 3-16(b)所示的等效电路。此时电路已转化为直流电阻电路,由此可运用直流电阻电路中各种分析方法确定任意变量的初始值。其基本步骤如下:

(1) 由 $t=0_-$ 时电路求出 $u_C(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$ 。

(2) 由换路定律作出 $t=0_+$ 时的等效电路,此时电容可用大小和方向同 $u_C(0_+)$ 的电压源替代,电感可用大小和方向同 $i_L(0_+)$ 的电流源替代。

(3) 运用电阻电路分析方法计算初始值。

需要注意的是,上述换路定律仅在电容电流和电感电压为有限值的情况下才成立。在某些理想情况下,电容电流和电感电压可以为无限大,这时电容电压和电感电流将发生跃变,换路定律不再适用。此时,可根据电荷守恒和磁链守恒原理确定独立初始值。

例 3-3 求图 3-17(a) 电路在换路后的初始值 $i(0_+)$ 和 $u(0_+)$ 。

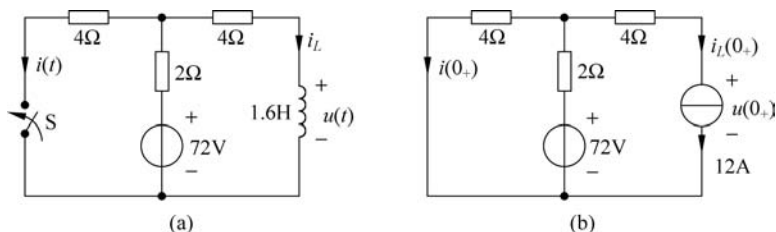


图 3-17

解: 求 $i_L(0_-)$ 时, L 相当于短路, $i_L(0_-) = \frac{72}{2+4} = 12\text{A}$ 。

由换路定律知, $i_L(0_+) = i_L(0_-)$, 作出 $t=0_+$ 时的等效电路如图 3-17(b) 所示。

以 $i(0_+)$ 为变量, 列出该等效电路中左网孔的 KVL 方程为

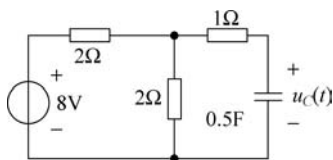
$$4i(0_+) + 2[12 + i(0_+)] = 72$$

解得 $i(0_+) = 8\text{A}$, 由此可得

$$u(0_+) = -4 \times 12 + 4 \times 8 = -16\text{V}$$

思考和练习

3.2-1 电路如练习题 3.2-1 图所示, 列出关于 $u_C(t)$ 的微分方程。



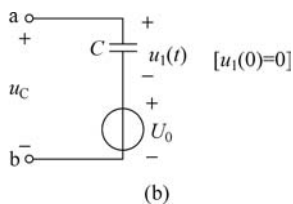
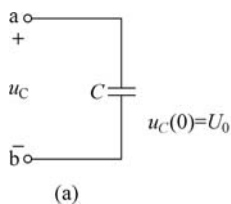
练习题 3.2-1 图

3.2-2 “在电感电压为有限值时,电感电流不能跃变,实质上也就是电感的储能不能跃变的反映。”你认为这种说法正确吗?为什么?

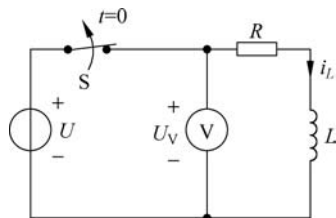
3.2-3 “在电容电流为有限值时,电容电压不能跃变,实质上也就是电容的储能不能跃变的反映。”你认为这种说法正确吗?为什么?

3.2-4 如练习题 3.2-4 图所示,利用等效概念,证明具有初始电压的电容图(a)可等效为图(b)的电路。

3.2-5 如练习题 3.2-5 图所示电路,已知 $R=2\Omega$,电压表的内阻为 $2.5k\Omega$,电源电压 $U=4V$ 。电路已处于稳态,试求开关 S 断开瞬间电压表两端的电压,分析其结果,并考虑采取何种措施来防止这种后果的发生。



练习题 3.2-4 图



练习题 3.2-5 图

3.3 直流一阶动态电路的响应

动态电路的响应是指换路后过渡过程中的电压、电流随时间变化的规律。电路的响应可能仅仅取决于动态元件的初始储能,或仅仅取决于外加激励源,或由初始储能和外加激励源共同作用而产生。因而引出了零输入响应、零状态响应和全响应的概念及计算问题。本课程主要研究在直流电源作用下一阶动态电路(称直流一阶电路)的响应问题,简要介绍二阶直流电路问题的分析。

3.3.1 零输入响应

换路后外加激励为零,仅由电路初始储能作用产生的响应,称为零输入响应。

显然,当外加激励为零时,由式(3.2-5)可知一阶电路方程的特解 $y_p(t)=0$, $y_p(0_+)=0$,于是得到零输入响应的一般形式为

$$y(t) = y(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.3-1)$$

式中, $\tau=RC$ (RC 电路) 或 $\tau=\frac{L}{R}$ (RL 电路),是由微分方程特征根决定的。

可见,求解零输入响应关键是确定初始值 $y(0_+)$ 及方程中的 τ 值。

下面结合电路方程的建立与求解,首先研究一阶 RC 电路的零输入响应。图 3-18(a)所示电路原已处于稳定。 $t=0$ 时换路,开关 S 由 1 侧闭合于 2 侧。现分析求解 $t>0$ 时电路中

的变量 u_C 、 u_R 和 i 。

换路后的电路如图 3-18(b), 电路中无外加激励作用, 所有响应取决于电容的初始储能, 因此所求变量 u_C 、 u_R 和 i 均为零输入响应。电容初始储能通过电阻 R 放电, 逐渐被电阻消耗, 电路零输入响应则从初始值开始逐渐衰减为零。

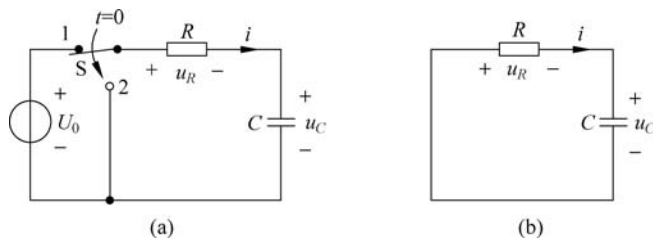


图 3-18

$t < 0$ 时, 开关 S 一直闭合于 1 侧。电容 C 被电压源 U_0 充电到电压 U_0 , 即 $u_C(0_-) = U_0$ 。由换路定律可知, $u_C(0_+) = U_0$ 。

由两类约束, 建立以 u_C 为变量的电路方程为

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = 0$$

对应一般形式, $\tau = RC$, 方程特征根 $p = -\frac{1}{\tau}$, 故零输入响应量 u_C 为

$$u_C(t) = u_C(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}} = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t > 0$$

由 KVL 方程 $u_C + u_R = 0$ 得

$$u_R(t) = -u_C(t) = -u_C(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}} = -U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

由欧姆定律得

$$i(t) = \frac{u_R(t)}{R} = \frac{-u_C(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}}}{R} = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

u_C 、 u_R 和 i 随时间变化的曲线如图 3-19 所示。可见, u_C 、 u_R 和 i 都按同样指数规律变化。由于方程特征根 $p = -1/\tau$ 为负值, 所以 u_C 、 u_R 和 i 都按指数规律不断衰减, 最后当 $t \rightarrow \infty$ 时, 它们都趋于零。

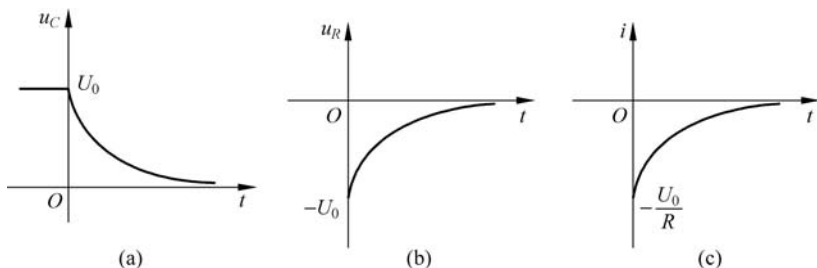


图 3-19

注意: 在 $t=0$ 时, $u_C(t)$ 是连续的, 没有跃变, 而 u_R 和 i 分别由零跃为 $-U_0$ 和 $-U_0/R$, 发生跃变, 这正是由电容电压不能跃变所决定的。

$\tau = RC$ 称为电路的时间常数。如果 R 的单位为 Ω (欧)、 C 的单位为 F(法), 则 τ 的单位为 s(秒)。

τ 的大小反映此一阶电路过渡过程的变化速度。 τ 越小, 过渡过程变化越快, 反之, 则越慢。 τ 是反映过渡过程特性的一个重要参量。

以电容电压为例, 当 $t = \tau$ 时, $u_C(\tau) = U_0 e^{-1} = 0.368 U_0$; 当 $t = 3\tau$ 时, $u_C(3\tau) = U_0 e^{-3} = 0.05 U_0$; 当 $t = 5\tau$ 时, $u_C(5\tau) = 0.007 U_0$ 。

一般可认为换路后时间经 $3\tau \sim 5\tau$ 后电压、电流已衰减到零(从理论上讲 $t \rightarrow \infty$ 时才衰减到零), 电路已达到新的稳定状态。

一阶 RL 电路的零输入响应, 分析过程同一阶 RC 电路相同。

设图 3-20(a) 所示电路原已处于稳定。 $t = 0$ 时换路, 开关 S 由 1 侧闭合于 2 侧。现分析求解 $t > 0$ 时电路中的变量 i_L 、 u_L 和 u_R 。

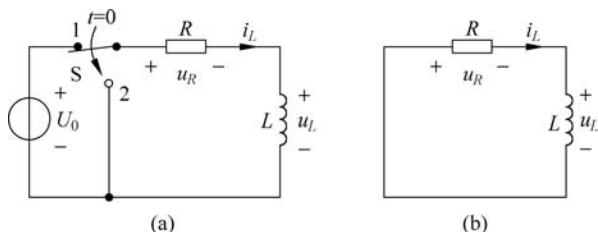


图 3-20

当 $t < 0$ 时, 开关 S 一直合于 1 侧, 电感电流为 $i_L(0_-) = \frac{U_0}{R} = I_0$ 。在 $t > 0$ 时, 原电路转化为如图 3-20(b) 所示, $i_L(0_+) = i_L(0_-) = I_0$ 。根据 KVL, 可得电路方程

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = 0, \quad t > 0$$

即为

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L}i_L = 0$$

对应一般形式, $\tau = \frac{L}{R}$, 故零输入响应量 i_L 为

$$i_L(t) = i_L(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}}, \quad t > 0$$

由此, 即可求得其余两个变量为

$$u_R(t) = Ri_L(t) = I_0 R e^{-\frac{Rt}{L}}, \quad t > 0$$

$$u_L(t) = -u_R(t) = -Ri_L(t) = -I_0 R e^{-\frac{Rt}{L}}, \quad t > 0$$

同样, $\tau = L/R$ 称为电路的时间常数。如果 R 的单位为 Ω (欧), L 的单位为 H(亨), 则 τ 的单位为 s(秒)。

i_L 、 u_R 和 u_L 随时间变化的曲线如图 3-21 所示, 它们都是随时间衰减的指数曲线。

注意: RL 串联电路中, 时间常数 τ 与电阻 R 成反比, R 越大, τ 越小; 而在 RC 串联电路中, τ 与 R 成正比, R 越大, τ 越大。

例 3-4 图 3-22 所示电路原已处于稳态。 $t = 0$ 时将开关 S 打开。求 $t > 0$ 时电压 u_R 和

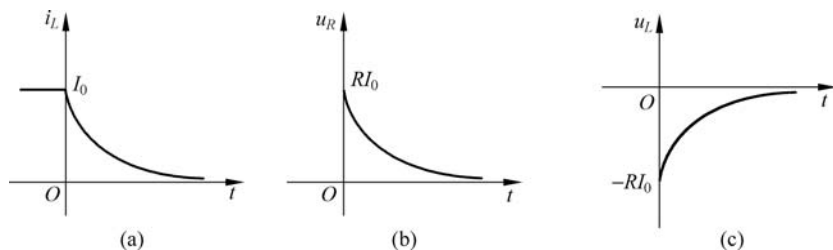


图 3-21

电流 i 。

解：换路前原电路已处稳态，电容相当于开路，故有

$$u_C(0_-) = \frac{2}{3+2} \times 15 = 6\text{V}$$

根据换路定律，得电容电压的初始值 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 6\text{V}$ 。

电路时间常数

$$\tau = 1 \times (1+2) = 3\text{s}$$

则换路后，由零输入响应的一般形式及两类约束得

$$u_C(t) = u_C(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 6e^{-\frac{t}{3}}\text{V}, \quad t > 0$$

$$i(t) = -\frac{u_C}{1+2} = -2e^{-\frac{t}{3}}\text{A}, \quad t > 0$$

$$u_R(t) = -2i(t) = \frac{2}{1+2}u_C(t) = 4e^{-\frac{t}{3}}\text{V}, \quad t > 0$$

例 3-5 图 3-23 所示电路原已处于稳态。 $t=0$ 时将开关 S 打开。求 $t>0$ 时电流 i_L 和电压 u_L 。

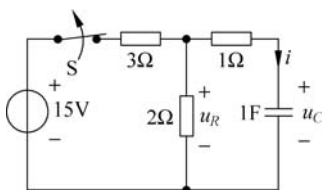


图 3-22

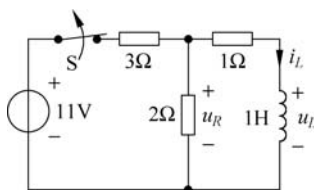


图 3-23

解：换路前原电路已处稳态，电感相当于短路，故有

$$i_L(0_-) = \frac{11}{3 + \frac{2}{1+2}} \times \frac{2}{1+2} = 2\text{A}$$

根据换路定律，得电感电流的初始值 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 2\text{A}$ 。

电路时间常数

$$\tau = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}\text{s}$$

则换路后，由零输入响应的一般形式及两类约束得

$$i_L(t) = i_L(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 2e^{-3t}\text{A}, \quad t > 0$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = 1 \times 2 \times (-3)e^{-3t} = -6e^{-3t} \text{ V}, \quad t > 0$$

或

$$u_L(t) = -i_L(t) \times (1+2) = -6e^{-3t} \text{ V}, \quad t > 0$$

由以上分析和举例可得到以下重要结论:

(1) 一阶电路中任意变量的响应具有相同的时间常数。其公式中的 R 值为电容或电感元件以外电路的戴维南等效电阻。

(2) 任何零输入响应均正比于独立初始值,称此为线性。

3.3.2 零状态响应

初始储能为零,换路后仅由外加激励作用产生的响应,称为零状态响应。

当外加激励为直流电源时,响应的特解为常数。由式(3.2-5)可知 $y_p(t) = y_p(0_+) = K$ (常数),于是得到零状态响应的一般形式为

$$y(t) = y_p(t) + [y(0_+) - y_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}} = K + [y(0_+) - K]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.3-2)$$

显然, $y(\infty) = K$, 即电路达到新的稳定状态时对应的稳态值。

当初始储能为零时,即 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0, i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$, 但非状态变量 $y(0_+)$ 不一定为零(它取决于外加激励),故可先考虑计算状态变量的零状态响应(通过状态变量再求其他响应),并得如下通式:

$$\begin{cases} u_C(t) = u_C(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \\ i_L(t) = i_L(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \end{cases} \quad (3.3-3)$$

可见,求解零状态响应的关键是确定状态变量稳态值 $y(\infty)$ 及方程中的 τ 值,利用以上通式求得状态变量后可方便地求出其他变量。

以下结合电路方程的建立与求解,说明零状态响应的求解问题。

直流一阶 RC 电路如图 3-24(a)所示,原已处于稳定。 $t=0$ 时换路,开关 S 由 1 侧闭合于 2 侧。现分析与求解 $t>0$ 时电容电压 u_C 和电流 i 。

换路后的电路如图 3-24(b)所示,电路中电容无初始储能,所有响应均取决于外加激励作用,因此所求变量 u_C 和 i 均为零状态响应。换路后电路中的电容元件的电压将逐渐增大直至稳定,零状态响应 u_C 的建立过程就是 RC 电路的充电过程。

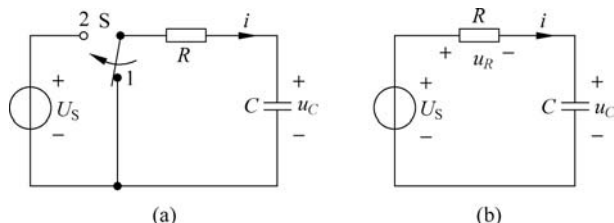


图 3-24

在如图 3-24(b)中,以 u_C 为变量,建立 $t>0$ 时的电路方程为

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_s$$

进一步化为

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{1}{RC}U_s$$

显然,时间常数 $\tau=RC$,而响应 u_C 则由微分方程的解确定为

$$u_C(t) = u_C(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = U_s(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad t > 0$$

由电容元件的端口伏安关系,得

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_s}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t > 0$$

或由 KVL 方程 $Ri + u_C = U_s$ 求得电流 i 为

$$i(t) = \frac{U_s - u_C}{R} = \frac{U_s}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t > 0$$

由以上分析和举例,同样可得到重要结论:任何零状态响应均正比于外加激励值,称此为零状态线性。

例 3-6 图 3-25 所示电路原已处于稳态。 $t=0$ 时开关 S 闭合。求 $t>0$ 时电压 u_R 和电流 i 。

解: 换路前原电路已处稳态,即换路时电容已无初始储能,故 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$,则

$$u_C(\infty) = \frac{6}{3+6} \times 15 = 10\text{V}$$

电路时间常数

$$\tau = 1 \times (1 + 3 // 6) = 3\text{s}$$

则换路后

$$u_C(t) = u_C(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 10(1 - e^{-\frac{t}{3}})\text{V}, \quad t > 0$$

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = 1 \times 10 \times \frac{1}{3} e^{-\frac{t}{3}} = \frac{10}{3} e^{-\frac{t}{3}}\text{A}, \quad t > 0$$

$$u_R(t) = 1 \times i(t) + u_C(t) = -\frac{10}{3} e^{-\frac{t}{3}} + 10(1 - e^{-\frac{t}{3}}) = 10 - \frac{40}{3} e^{-\frac{t}{3}}\text{V}, \quad t > 0$$

例 3-7 图 3-26 所示电路原已处于稳态。 $t=0$ 时开关 S 闭合。求 $t>0$ 时电流 i_L 和电压 u_L 。

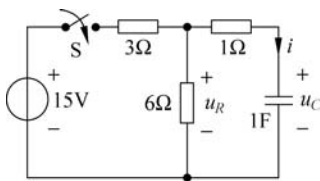


图 3-25

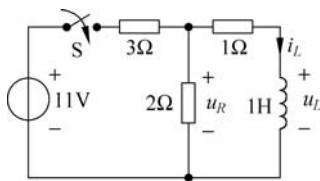


图 3-26

解: 换路前原电路已处稳态,即换路时电容已无初始储能,故 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$,则

$$i_L(\infty) = \frac{11}{3 + \frac{2}{1+2}} \times \frac{2}{1+2} = 2\text{A}$$

电路时间常数为

$$\tau = \frac{1}{1 + \frac{6}{5}} = \frac{5}{11} \text{ s}$$

则换路后

$$i_L(t) = i_L(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 2(1 - e^{-2.2t}) \text{ A}, \quad t > 0$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = 1 \times 2 \times 2.2e^{-2.2t} = -4.4e^{-2.2t} \text{ V}, \quad t > 0$$

另一解题思路,由戴维南定理, $t > 0$ 时的电路可等效为典型的 RC 或 RL 电路,再利用有关结论先求状态变量,再求其他响应。

3.3.3 全响应

电路换路后既有初始储能作用,又有外加激励作用所产生的响应,称为全响应。

在激励为直流电源时,全响应即为微分方程全解,即有

$$\begin{aligned} y(t) &= y_p(t) + y_h(t) = y_p(t) + [y(0_+) - y_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= \underbrace{K}_{\substack{\text{强迫响应} \\ \text{(稳态响应)}}} + \underbrace{[y(0_+) - K]e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\substack{\text{固有响应} \\ \text{(暂态响应)}}} \end{aligned} \quad (3.3-4)$$

式中第 1 项(即特解)与激励具有相同的函数形式,称为强迫响应;它又是响应中随时间的增长稳定存在的分量,故又称为稳态响应。式中第 2 项(即齐次解)的函数形式仅由电路方程的特征根确定,而与激励的函数形式无关(它的系数与激励有关),称为固有响应;它又是响应中随时间的增长最终衰减为零的分量,故又称为暂态响应。

如果除独立电源外,视动态元件的初始储能为电路的另一种激励,那么根据线性电路的叠加性质,电路响应是两种激励各自作用所产生的响应的叠加。也就是说,根据响应引起原因的不同,可将全响应分解为零输入响应(由初始储能产生)和零状态响应(由独立电源产生)两种分量:全响应=零输入响应+零状态响应,即

$$y(t) = \underbrace{y_x(t)}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{y_f(t)}_{\text{零状态响应}} \quad (3.3-5)$$

基于以上不同观点,电路全响应的几种分解方式有

$$\begin{aligned} \text{全响应} &= \text{强迫响应} + \text{固有响应} \\ &= \text{稳态响应} + \text{暂态响应} \\ &= \text{零输入响应} + \text{零状态响应} \end{aligned}$$

以下对 RC 电路问题从列解电路微分方程和零输入响应、零状态响应叠加的观点做一

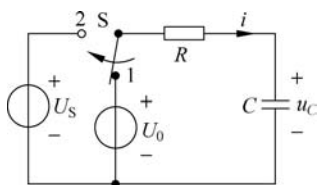


图 3-27

对比讨论。

如图 3-27 所示电路原已处于稳定, $t=0$ 时换路,求换路后电容电压 u_C 和电流 i 。

(1) 经典法(列解电路微分方程)求解全响应。

换路前电路稳定,则

$$u_C(0_-) = U_0$$

由换路定律得

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$$

$t > 0$ 时关于 u_C 电路方程为

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_S$$

其特解 $u_{Cp}(t) = K = u_{Cp}(0_+) = u_C(\infty) = U_S$ 。

方程特征根为 $p = -\frac{1}{\tau}$, $\tau = RC$, 故全响应形式为

$$u_C(t) = U_S + A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

其中, 系数 A 由初始值确定

$$u_C(0_+) = U_S + A = U_0$$

$$A = U_0 - U_S$$

最后得全响应

$$u_C(t) = U_S + (U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{\tau}} = \underbrace{U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}_{\text{零状态响应}}$$

$$i(t) = \frac{U_S - u_C}{R} = \frac{U_S - U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = \underbrace{-\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{零状态响应}}$$

(2) 利用叠加原理求全响应。

原电路及对应的分解图如图 3-28 所示。

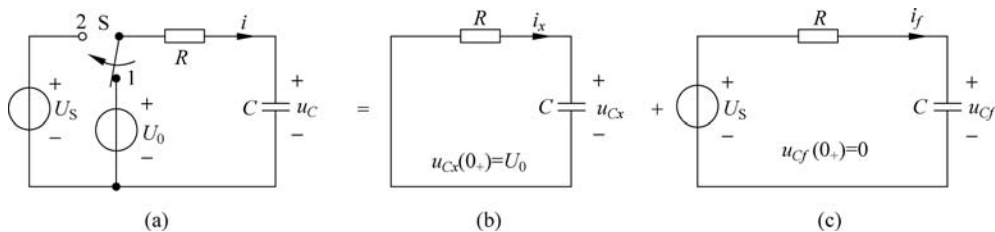


图 3-28

零输入响应为

$$u_{Cx}(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad i_x(t) = C \frac{du_{Cx}}{dt} = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

零状态响应为

$$u_{Cf}(t) = U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad i_f(t) = C \frac{du_{Cf}}{dt} = \frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

故全响应为

$$u_C(t) = u_{Cx}(t) + u_{Cf}(t) = U_S + (U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i(t) = i_x(t) + i_f(t) = \frac{U_S - U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

可见,两种观点的结论完全一致。

强调: 零输入响应正比于状态变量初始值,零状态响应正比于外加激励。

例 3-8 如图 3-29 所示电路原已处于稳定, $t=0$ 时将开关 S 合上,求 $t>0$ 时的 $i(t)$ 和 $u(t)$ 。

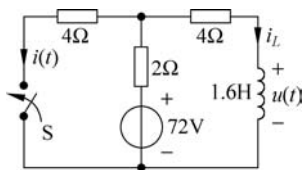


图 3-29

解: 换路后电路初始状态不为零,又有外加电源作用,故电路中的所有响应都为完全响应。可先用叠加法求状态变量 $i_L(t)$,再求 $i(t)$ 和 $u(t)$ 。

换路后 $i_L(t)$ 的初始值为

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{72}{2+4} = 12\text{A}$$

故关于 $i_L(t)$ 的零输入响应为

$$i_L'(t) = 12e^{-\frac{t}{\tau}}\text{A} \quad (\text{用状态变量零输入响应通式})$$

其中, $\tau = \frac{L}{R}$, $L = 1.6\text{H}$, $R = 4 + 4 // 2 = \frac{16}{3}\Omega$, 即 $\tau = 0.3\text{s}$ 。

换路后电感支路的稳态电流 $i_L(\infty)$ 为

$$i_L(\infty) = \frac{72}{2+4 // 4} \times \frac{1}{2} = 9\text{A}$$

故关于 $i_L(t)$ 的零状态响应为

$$i_L''(t) = 9(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\text{A} \quad (\text{用状态变量零状态响应通式})$$

应用叠加定理,状态变量 $i_L(t)$ 的完全响应为

$$i_L(t) = i_L'(t) + i_L''(t) = 9 + 3e^{-\frac{t}{\tau}} = 9 + 3e^{-\frac{10}{3}t}\text{A}, \quad t > 0$$

由 $i_L(t)$ 求 $i(t)$ 和 $u(t)$ 的完全响应为

$$u(t) = 1.6 \frac{di_L}{dt} = 1.6 \times 3 \times \left(-\frac{10}{3}\right) e^{-\frac{10}{3}t} = -16e^{-\frac{10}{3}t}\text{V}, \quad t > 0$$

$$i(t) = \frac{4i_L + u(t)}{4} = \frac{4(9 + 3e^{-\frac{10}{3}t}) - 16e^{-\frac{10}{3}t}}{4} = 9 - e^{-\frac{10}{3}t}\text{A}, \quad t > 0$$

思考和练习

3.3-1 试证明零输入响应 u_C 曲线在 $t=0$ 处的切线交时间轴于 τ ,这一结果说明什么?

3.3-2 “电路的全响应为零输入响应和零状态响应的叠加。若电路的初始状态或输入有所变化时,只需对有关的零输入响应分量或零状态响应分量作出相应变更即可。”你认为这种说法正确吗?为什么?

3.3-3 置换定理可用于动态电路分析:首先求出状态变量,然后利用置换定理,将动态电路变为电阻电路,便可求得电路中的任一非状态变量。试举一例说明该分析过程。

3.3-4 常用万用表“ $R \times 1000$ ”挡来检查电容器(电容量较大)的质量好坏。如在检查时发现下列现象,试解释之,并说明电容器的好坏:(1)指针满偏转;(2)指针不动;(3)指针很快偏转后又返回原刻度处;(4)指针偏转后不能返回原刻度处;(5)指针偏转后返回速度很慢。

3.3-5 试证明电容元件 C 通过电阻 R 放电,当电容电压降到初始值的一半时所需的时间约为 0.7τ 。

3.4 直流一阶电路的三要素法

在前面求解电路响应时,依据两类约束,一般以电容电压、电感电流这两个状态变量建立电路方程进行求解。由于它们均有可直接利用的通式,因此也可避开建立微分方程而先求取状态变量,再求其他响应。

现在要问:在直流激励条件下,如果对电路中的任意变量 $y(t)$ (状态和非状态变量)均感兴趣,能否选取该变量 $y(t)$ 来列解方程而得到一个通式呢? 回答是肯定的。这就是下面要介绍的三要素法。

仔细观察一下,典型的 RC 电路和 RL 电路的状态变量完全响应表达式为

$$u_C(t) = u_C(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} + u_C(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i_L(t) = i_L(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} + i_L(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = i_L(\infty) + [i_L(0_+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

这似乎给出了一个启示:只要确定了初始值、稳态值、时间常数这 3 个要素,即可得出有关变量的表达式,三要素法的名称正是由此而来。

设 $y(t)$ 为直流一阶有耗电路中的任意变量(电流或电压), $t=0$ 时换路,则 $t>0$ 时 $y(t)$ 的表达式为

$$y(t) = y(\infty) + [y(0_+) - y(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t > 0 \quad (3.4-1)$$

其中, $y(0_+)$ 为换路后 $y(t)$ 相应的初始值。

$y(\infty)$ 为换路后电路达稳态时 $y(t)$ 相应的稳态值。

τ 为换路后电路的时间常数。对 RC 电路, $\tau=RC$; 对 RL 电路, $\tau=\frac{L}{R}$ 。

在任一直流一阶电路中,时间常数对于任意变量均相同。这是因为对任意变量建立的电路微分方程均有相同的特征根。从前面所举例子中也可看出,由状态变量确定其他任意变量时,无非是对指数函数的加减、微积分,其指数规律根本不会发生变化。

三要素法的背景是:一阶电路的响应是按指数规律变化的,都有它的初始值和稳态值(平衡值),其变化过程的快慢由时间常数决定。利用这 3 个要素就可迅速正确地分析有关电路,如作出输出波形曲线等,这也是工程技术分析中的实际需要。

对三要素法公式,可作如下简要的证明。

一阶动态电路 $t>0$ 时方程及其解为

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}y(t) = bf(t) \quad (\text{一阶动态电路方程})$$

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = y_p(t) + [y(0_+) - y_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\text{完全解})$$

当外加激励为直流电源时, $y_p(t) = y_p(0_+) = K$ (常数),于是得到全响应的一般形式为

$$y(t) = y_p(t) + [y(0_+) - y_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}} = K + [y(0_+) - K]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

其中, $K = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y(\infty)$ 。

于是得三要素法公式为

$$y(t) = y(\infty) + [y(0_+) - y(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t > 0 \quad (3.4-2)$$

若电路换路时刻为 $t = t_0$, 则三要素法公式可改写为

$$y(t) = y(\infty) + [y(t_{0+}) - y(\infty)]e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}, \quad t > t_0 \quad (3.4-3)$$

根据三要素法公式的含义, 用三要素法分析电路的步骤可归纳如下几点:

(1) 确定电压、电流初始值 $y(0_+)$ 。其中关键是利用 L 、 C 元件的换路定律, 作出 $t = 0_+$ 时的等效电路。

(2) 确定换路后电路达到稳态时的 $y(\infty)$ 。其中关键是电路达稳态时, 电感元件相当于短路, 电容元件相当于开路。

(3) 确定时间常数 τ 值。其中关键是求等效电阻 R 值。而 R 的含义是动态元件两端以外令其独立源置零时的等效电阻, 具体方法即为戴维南定理和诺顿定理中求内部电阻的方法。

(4) 代入公式得 $y(t) = y(\infty) + [y(0_+) - y(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}, t > 0$ 。

例 3-9 用三要素法求解例 3-8 题中的相同变量。

解: 第 1 步, 求初始值。该题求解初始值问题同例 3-3。即有

$$i(0_+) = 8\text{A}, \quad u(0_+) = -16\text{V}$$

第 2 步, 求稳态值。作出 $t = \infty$ 时的等效电路如图 3-30 所示(稳态时 L 相当于短路)。

显然有 $u(\infty) = 0$, 则

$$i(\infty) = \frac{1}{2} \times \frac{72}{2 + 4 // 4} = 9\text{A}$$

第 3 步, 求时间常数 τ 值。令电压源短路, 则电感以外的等效电阻可由图 3-31 所示的电路求取。

$$L = 1.6\text{H}, \quad \tau = \frac{L}{R} = 0.3\text{s}$$

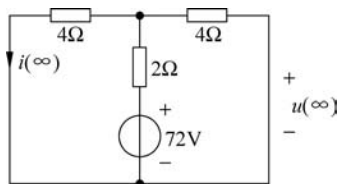


图 3-30

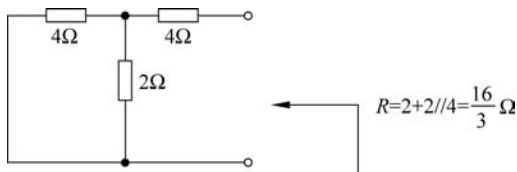


图 3-31

第 4 步, 代入公式得

$$i(t) = 9 - (8 - 9)e^{-\frac{10}{3}t} = 9 - e^{-\frac{10}{3}t} \text{A}, \quad t > 0$$

$$u(t) = 0 + (-16 - 0)e^{-\frac{10}{3}t} = -16e^{-\frac{10}{3}t} \text{V}, \quad t > 0$$

例 3-10 $t = 0$ 时换路后的电路如图 3-32 所示, 已知电容初始储能为零, 用三要素法求 $t > 0$ 时的 $i_1(t)$ 。

解: (1) 求初始值。电容的初始储能为零, 即有 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$ 。

作出 $t=0_+$ 时的等效电路如图 3-33 所示。

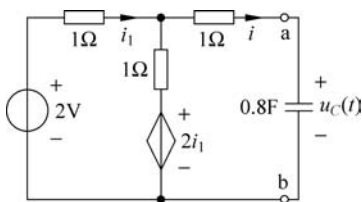


图 3-32

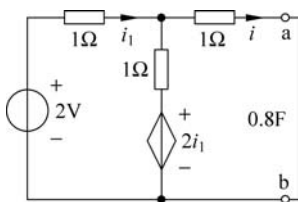


图 3-33

列出左右网孔的 KVL 方程(以 i_1 、 i 为变量)为

$$1 \times i_1 + 1 \times (i_1 - i) + 2i_1 = 2$$

$$1 \times (i_1 - i) + 2i_1 = 1 \times i$$

联立解得

$$i_1(0_+) = 0.8\text{A}, \quad i(0_+) = 1.2\text{A}$$

注意: $i(0_+)$ 正好是 ab 端的短路电流,在求 ab 端以左二端网络等效电阻时有用。

(2) 求稳态值。稳态时电容 C 相当于开路,列出 KVL 方程为

$$1 \times i_1 + 1 \times i_1 + 2i_1 = 2$$

解得 $i_1(\infty) = 0.5\text{A}$ 。则 ab 端口开路电压为

$$u_C(\infty) = 1 \times i_1(\infty) + 2i_1(\infty) = 1.5\text{V}$$

(3) 求时间常数。

$$R = \frac{u_C(\infty)}{i(0_+)} = \frac{1.5}{1.2} = 1.25\Omega$$

$$\tau = RC = 1.25 \times 0.8 = 1\text{s}$$

(4) 代入公式得

$$i(t) = 0.5 + (0.8 - 0.5)e^{-t} = 0.5 + 0.3e^{-t}\text{A}, \quad t > 0$$

另一解题思路,可先将电容左边二端网络等效为戴维南等效电路,用简化的电路求电容电压 $u_C(t)$,然后回到原电路求 $i_1(t)$ 。

需要注意的是,三要素法只适用于一阶电路。但一些特殊的二阶电路,当它们可以化解两个一阶电路时,仍然可引用三要素法对相应的一阶电路求解,最后求出有关变量。

例 3-11 如图 3-34 所示电路原已处于稳定, $t=0$ 时 S 合上,求 $t>0$ 时的 $i(t)$ 。

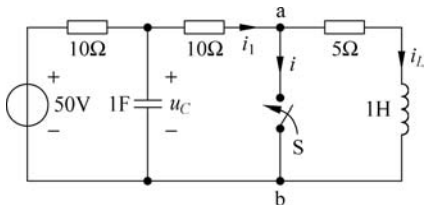


图 3-34

解: 开关 S 所在支路电流为二阶电路变量,不能用三要素法。但可按以下思路分析求解。

由 a 节点 KCL 方程 $i(t) = i_1(t) - i_L(t) \rightarrow$ ab 两节点缩成一点, ab 左右为两个一阶电

路→三要素法求两个一阶电路中的 $u_C(t)$ (进而求出 $i_1(t)$!) 和 $i_L(t)$ 。

开关 S 闭合前电路稳定, 两个状态变量为

$$i_L(0_-) = \frac{50}{10+10+5} = 2\text{A}, \quad u_C(0_-) = (10+5)i_L(0_-) = 30\text{V}$$

由换路定律得

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 2\text{A}, \quad u_C(0_+) = u_C(0_-) = 30\text{V}$$

当 $t > 0$ 时, 先求出电路中的 $i_1(t)$ 和 $i_L(t)$ 。为求这两个变量, 原电路可化为两个一阶电路, 如图 3-35 和图 3-36 所示。

$$u_C(\infty) = 25\text{V}, \quad \tau_C = (10 // 10) \times 1 = 5\text{s}$$

$$u_C(t) = 25 + (30 - 25)e^{-\frac{t}{5}} = 25 + 5e^{-\frac{t}{5}} \text{V}$$

$$i_1(t) = \frac{u_C(t)}{10} = 2.5 + 0.5e^{-\frac{t}{5}} \text{A}$$

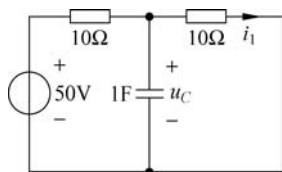


图 3-35

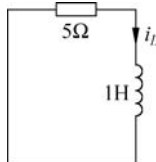


图 3-36

于是, 由 a 节点 KCL 方程得

$$i_L(\infty) = 0, \quad \tau_L = (1/5) \times 1 = 0.2\text{s}$$

$$i_L(t) = 0 + (2 - 0)e^{-5t} = 2e^{-5t} \text{A}$$

$$i(t) = i_1(t) - i_L(t) = 2.5 + 0.5e^{-\frac{t}{5}} - 2e^{-5t} \text{A}, \quad t > 0$$

思考和练习

3.4-1 直流一阶电路的完全响应可以用三要素法求解, 那么零输入响应和零状态响应能否用三要素法来求解? 如果能, 怎样求?

3.4-2 在三要素法公式中, 如按下式拆分为零输入响应和零状态响应分量, 对不对?

$$y(t) = \underbrace{y(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{y(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}_{\text{零状态响应}}$$

3.5 阶跃函数和阶跃响应

在前面的讨论中, 了解到直流一阶电路中的各种开关, 可以起到将直流电压源和电流源接入电路或脱离电路的作用, 这种作用可以描述为分段恒定信号对电路的激励。随着电路规模的增大和计算工作量的增加, 有必要引入阶跃函数来描述这些物理现象, 以便更好地建立电路的物理模型和数学模型, 有利于用计算机分析和设计电路。

3.5.1 阶跃函数

单位阶跃函数定义为

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (3.5-1)$$

其波形如图 3-37 所示。它在 $(0_-, 0_+)$ 时域内发生单位阶跃, 故称单位阶跃函数。

一般阶跃函数 $A\varepsilon(t - t_0)$ 可表示为

$$A\varepsilon(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ A, & t > t_0 \end{cases} \quad (3.5-2)$$

其中, A 为阶跃幅度或阶跃量; t_0 为任一起始时刻, $\varepsilon(t - t_0)$ 可视为 $\varepsilon(t)$ 在时间轴上向右移动 t_0 的结果, 其波形如图 3-38 所示。

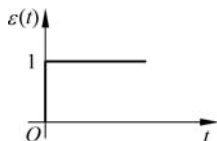


图 3-37

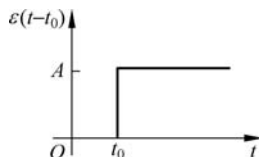
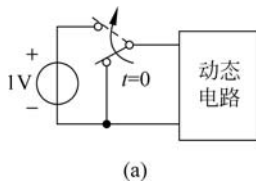


图 3-38

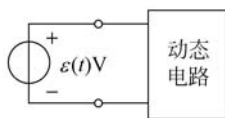
阶跃函数可以用来描述动态电路中接通或断开直流电压源或电流源的开关动作。如图 3-39(a) 所示电路中, 直流电压源在 $t=0$ 时施加于电路, 可以用开关来表示, 而引入阶跃函数后, 同一问题可用图 3-39(b) 来表示。

阶跃函数还可以用来表示时间上分段恒定的电压或电流信号。对图 3-40 所示的幅度为 A 的矩形脉冲波, 其表达式可写为

$$f(t) = A[\varepsilon(t) - \varepsilon(t - t_0)]$$



(a)



(b)

图 3-39

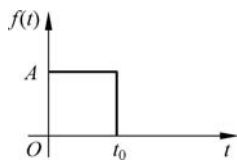


图 3-40

对于线性电路来说, 这种表示方法的好处在于可以应用叠加定理来计算电路的零状态响应。在此基础上, 采用积分的方法还可以求出电路在任意波形激励时的零状态响应。

此外, 阶跃函数可用来表示任意函数 $f(t)$ 作用的区间。

$$f(t)\varepsilon(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ f(t), & t > t_0 \end{cases} \quad (3.5-3)$$

3.5.2 阶跃响应

电路在单位阶跃函数激励下产生的零状态响应称为单位阶跃响应, 简称为阶跃响应, 一

般用 $g(t)$ 表示。

当电路的激励为阶跃函数 $\epsilon(t)$ V 或 $\epsilon(t)$ A 时相当于单位直流源(1V 或 1A)在 $t=0$ 时接入电路。因此,对于一阶电路的阶跃响应可用三要素法求解。

利用阶跃函数和阶跃响应,可以根据线性电路的线性性质和时不变电路的时延特性,分析任意激励作用下电路的零状态响应。在线性时不变动态电路中,零状态响应与激励之间的关系满足线性和时不变性质。即激励与响应之间有以下基本对应关系:

$$\begin{aligned}\text{激励 } \epsilon(t) &\rightarrow \text{响应 } g(t) \\ \text{激励 } A\epsilon(t) &\rightarrow \text{响应 } Ag(t) \\ \text{激励 } \epsilon(t-t_0) &\rightarrow \text{响应 } g(t-t_0)\end{aligned}$$

因此,如果分段常量信号作用于动态电路,则可将该信号看成若干个阶跃激励共同作用于电路,则其零状态响应等于各个激励单独作用时产生的零状态响应的叠加。

例 3-12 电路如图 3-41(a) 所示。已知 $R=1\Omega$, $L=1\text{H}$, u_s 的波形如图 3-41(b) 所示,求电流 i , 并画出 i 随时间变化的曲线。

解法 1: 应用阶跃响应和电路性质求解。把 $u_s(t)$ 看作是二个阶跃电压之和,即

$$u_s = 2\epsilon(t) - 2\epsilon(t-2)\text{V}$$

在 $\epsilon(t)$ 作用下的阶跃响应 $g(t)$ 可用三要素法求得

$$g(t) = (1 - e^{-t})\epsilon(t)\text{A}$$

根据电路的线性时不变性质,其零状态响应为

$$i(t) = 2g(t) - 2g(t-2) = 2(1 - e^{-t})\epsilon(t) - 2(1 - e^{-(t-2)})\epsilon(t-2)\text{A}$$

i 随时间变化的曲线如图 3-42 实线所示,电流用一个表达式就能表示了。

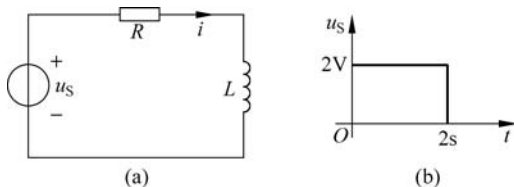


图 3-41

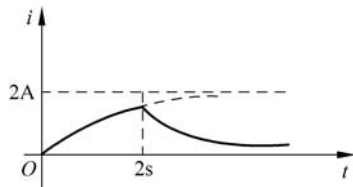


图 3-42

解法 2: 三要素法求解。

当 $0 < t < 2\text{s}$ 时,电路相当于在 1V 直流电压的作用下,所以零状态响应为

$$i(t) = \frac{2}{R}(1 - e^{-t}) = 2(1 - e^{-t})\text{A}$$

当 $t=2\text{s}$ 时,则

$$i(2) = 2(1 - e^{-2}) = 2(1 - e^{-2}) = 1.73\text{A}$$

当 $t > 2\text{s}$ 时,电压源相当于被短路,电路在初始值为 $i(2)$ 的作用下产生零输入响应,所以

$$i(t) = 1.73e^{-(t-2)}\text{A}$$

故在电压源的作用下,回路电流 i (电感电流)为

$$i(t) = \begin{cases} 2(1 - e^{-t})\text{A}, & 0 < t < 2\text{s} \\ 1.73e^{-(t-2)}\text{A}, & t > 2\text{s} \end{cases}$$

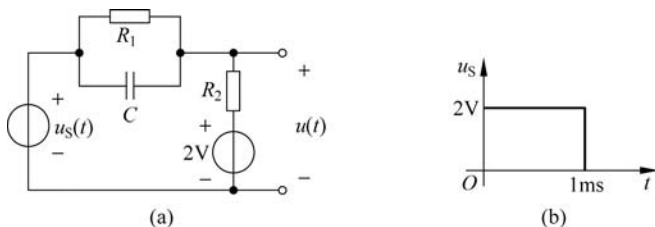
据此可画出 i 随时间变化的曲线如图 3-42 实线所示。

思考和练习

3.5-1 画出用阶跃函数表示 1A 电流源在 $t=0$ 时作用于动态网络的电路图。

3.5-2 阶跃响应为何在零状态条件下定义?

3.5-3 练习题 3.5-3(a)图所示电路中, $C=0.01\mu\text{F}$, $R_1=2\text{k}\Omega$, $R_2=8\text{k}\Omega$, 电压源 $u_s(t)$ 如练习题 3.5-3(b)图所示, 试求 $t>0$ 时变量 $u(t)$ 。设 $t<0$ 时电路处于稳定状态。



练习题 3.5-3 图

3.6 二阶电路分析

二阶电路包含两个独立的动态元件, 描述二阶电路的方程为二阶微分方程。求解二阶微分方程需要给定两个独立的初始条件, 由两个独立的动态元件的初始状态值决定。与一阶电路不同的是, 二阶电路的响应可能出现振荡形式。下面以 RLC 串联电路为例, 讨论二阶电路的零输入响应和单位阶跃响应。

典型的 RLC 串联电路如图 3-43 所示, 以 u_C 为变量建立的电路方程为

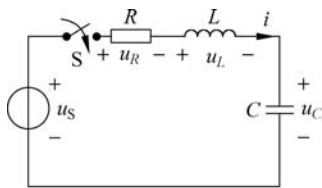


图 3-43

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = \frac{1}{LC} u_s \quad (3.6-1)$$

令

$$\begin{cases} \alpha = \frac{R}{2L} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases}$$

其中, α 称为衰减常数, ω_0 为谐振角频率。考虑式(3.6-1)为二阶微分方程, 求解需要两个初始条件, 可把电路方程(3.6-1)和初始条件表示为

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2\alpha \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 u_s \\ u_C(0_+), \quad \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{i(0_+)}{C} \end{cases} \quad (3.6-2)$$

式(3.6-1)中 $u_C(t)$ 的齐次解, 取决于特征方程的两个根 S_1 和 S_2 , 如表 3-2 所示; $u_C(t)$ 的特解可根据 3.2 节表 3-1, 选择与激励源相同的函数表达式代入微分方程确定。

表 3-2 二阶电路的通解(齐次解)

特 征 根	齐次解 $u_C(t)$
$S_1 \neq S_2$ 不等实根	$K_1 e^{S_1 t} + K_2 e^{S_2 t}$
$S_1 = S_2 = S$ 相等实根	$(K_1 + K_2 t) e^{S t}$
$S_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$ 共轭复根	$e^{-\alpha t} (K_1 \cos \beta t + K_2 \sin \beta t)$
$S_{1,2} = \pm j\beta$ 共轭虚根	$K_1 \cos \beta t + K_2 \sin \beta t$

注: 表中 K_1, K_2 为待定常数。

3.6.1 零输入响应

由零输入响应定义, 令式(3.6-1)中 $u_s = 0$, 为简化计算, 设 $u_C(0_+) = U_0, i(0_+) = 0$, 则

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2\alpha \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0 \\ u_C(0_+) = U_0, \quad \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{i(0_+)}{C} = 0 \end{cases} \quad (3.6-3)$$

可见, 零输入响应即为微分方程的齐次解。式(3.6-3)的特征方程为

$$S^2 + 2\alpha S + \omega_0^2 = 0$$

其特征根为

$$S_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (3.6-4)$$

特征根 $S_{1,2}$ 与电路结构和元件参数有关, 而与外加激励和电路初始储能无关, 一般称为电路的固有频率。当 R, L, C 取不同值时, 电路的固有频率和相应的零输入响应存在 4 种不同情况, 下面分别讨论。

(1) 当 $\alpha > \omega_0$ 时, 即 $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, 为过阻尼情况。

此时, $S_{1,2}$ 为两个不相等的负实数, 令

$$\begin{cases} S_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha_1 \\ S_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha_2 \end{cases}$$

由表 3-2 得式(3.6-3)的解为

$$u_C(t) = K_1 e^{-\alpha_1 t} + K_2 e^{-\alpha_2 t}$$

代入初始条件, 得

$$\begin{cases} u_C(0_+) = K_1 + K_2 = U_0 \\ \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{i(0_+)}{C} = -K_1 \alpha_1 - K_2 \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

可得

$$K_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} U_0, \quad K_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} U_0$$

故

$$u_C(t) = \frac{U_0}{\alpha_2 - \alpha_1} (\alpha_2 e^{-\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{-\alpha_2 t}), \quad t \geq 0 \quad (3.6-5)$$

回路中电流为

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{C\alpha_1\alpha_2 U_0}{\alpha_2 - \alpha_1} (e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}), \quad t > 0 \quad (3.6-6)$$

画出 u_C 和 i 的波形如图 3-44 所示。由图可见,电路在初始储能作用下产生的零输入响应 u_C 波形单调下降,表明电容不断释放电场能量,一直处于放电状态。在 $0 < t < t_s$ 期间, u_C 的加速下降使得放电电流逐渐增大,电感储能不断增加,同时,电阻 R 还消耗掉电容所释放的一部分能量。在 $t = t_s$ 时,电感储能达到最大。当 $t > t_s$ 时, u_C 的下降趋缓,回路电流开始减小,电容和电感同时释放所储存的能量,均被电阻 R 所消耗,直到 $t \rightarrow \infty$ 时,放电结束, $u_C(\infty) = i(\infty) = 0$ 。因此,过阻尼情况由于电阻 R 较大,消耗能量大,电路中的电压和电流无法形成振荡,是一种非振荡放电过程。

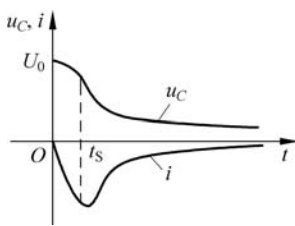


图 3-44

(2) 当 $\alpha = \omega_0$ 时,即 $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时,为临界阻尼情况。

此时, $S_{1,2}$ 为相等的负实数,即 $S_1 = S_2 = -\alpha$ 。

由表 3-2 得 u_C 的通解为

$$u_C(t) = (K_1 + K_2 t)e^{-\alpha t}$$

代入初始条件,得

$$\begin{cases} u_C(0_+) = K_1 = U_0 \\ \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{i(0_+)}{C} = -K_1\alpha - K_2 = 0 \end{cases}$$

可得

$$K_1 = U_0, \quad K_2 = \alpha U_0$$

故有

$$u_C(t) = U_0(1 + \alpha t)e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0 \quad (3.6-7)$$

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = -CU_0\alpha^2 t e^{-\alpha t}, \quad t > 0 \quad (3.6-8)$$

可见,零输入响应 u_C 和 i 的物理过程与过阻尼情况类似,也是一种非振荡的放电过程。

(3) 当 $\alpha < \omega_0$ 时,即 $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时,为欠阻尼情况。

此时, $S_{1,2}$ 为一对共轭复数,即 $S_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm j\beta$ 。其中, $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ 。

由表 3-2 得 u_C 的通解为

$$u_C(t) = K e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \varphi)$$

代入初始条件,得

$$\begin{cases} u_C(0_+) = K \cos \varphi = U_0 \\ \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{i(0_+)}{C} = -\alpha K \cos \varphi + K\beta \sin \varphi = 0 \end{cases}$$

可得

$$K = \frac{\omega_0}{\beta} U_0, \quad \varphi = \arctan \frac{\alpha}{\beta}$$

故有

$$u_C(t) = \frac{\omega_0}{\beta} U_0 e^{-\alpha t} \cos\left(\beta t - \arctan \frac{\alpha}{\beta}\right), \quad t \geq 0 \quad (3.6-9)$$

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = CU_0 \frac{\omega_0^2}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t, \quad t > 0 \quad (3.6-10)$$

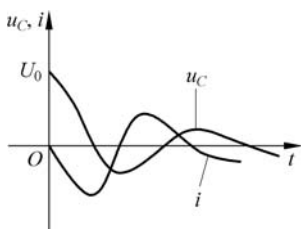


图 3-45

画出 u_C 和 i 的波形如图 3-45 所示。由图可见, u_C 和 i 的波形为衰减振荡。这是因为电阻 R 较小, 电容放电时, 只有一小部分能量被电阻消耗掉, 大部分转换为磁场能量储存于电感中。当 u_C 为零时, 电容储能为零, 但电感处于释放磁场能量过程中, 电容被反向充电。当 i 为零时, 电感储能为零, 但电容又处于放电过程中, 电感又开始储存磁场能量。这样, 循环往复, 使 u_C 和 i 呈现振荡波形, 由于每振荡一次, 电阻 R 都要消耗一部分能量, 致使 u_C 和 i 的振幅越来越小, 形成了衰减振荡, 振荡角频率为 β 。衰减的程度取决于衰减常数 α 。

(4) $\alpha = 0, \omega_0 \neq 0$, 为等幅振荡情况。

此时, 电阻 $R = 0$, 电路无损耗, $S_{1,2}$ 为共轭虚数, 即 $S_{1,2} = \pm j\omega_0$ 。

由表 3-2 得 u_C 的通解为

$$u_C(t) = K_1 \cos \omega_0 t + K_2 \sin \omega_0 t$$

代入初始条件, 得

$$\begin{cases} u_C(0_+) = K_1 = U_0 \\ \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{i(0_+)}{C} = \omega_0 K_2 = 0 \end{cases}$$

可得

$$K_1 = U_0, \quad K_2 = 0$$

故

$$u_C(t) = U_0 \cos \omega_0 t, \quad t \geq 0 \quad (3.6-11)$$

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = -U_0 \omega_0 C \sin \omega_0 t, \quad t > 0 \quad (3.6-12)$$

可见, 电容和电感之间周期性的能量交换将一直持续下去, 电路的响应呈等幅振荡形式, 其振荡角频率为 ω_0 。

3.6.2 单位阶跃响应

单位阶跃响应为单位阶跃信号 $\varepsilon(t)$ 激励下电路的零状态响应。令式 (3.6-1) 中 $u_s = \varepsilon(t)$, 则有

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2\alpha \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 \epsilon(t) \\ u_C(0_+) = 0, \quad \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{i(0_+)}{C} = 0 \end{cases} \quad (3.6-13)$$

上式为非齐次线性常系数微分方程,其阶跃响应的解为

$$g(t) = u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t)$$

其中, u_{Ch} 为齐次解, u_{Cp} 为特解。考虑到式(3.6-13)与零输入响应求解方程式(3.6-1)具有相同的特征方程,故齐次解有与零输入响应完全相同的 4 种函数形式。特解 u_{Cp} 为常数,代入式(3.6-13)可得 $u_{Cp}(t) = 1$ 。

以特征根 $S_{1,2}$ 为两个不相等的负实数为例,同样设 $S_1 = -\alpha_1, S_2 = -\alpha_2$,则单位阶跃响应为

$$g(t) = K_1 e^{-\alpha_1 t} + K_2 e^{-\alpha_2 t} + 1$$

代入初始条件

$$\begin{cases} g(0_+) = K_1 + K_2 + 1 = 0 \\ \left. \frac{dg}{dt} \right|_{t=0_+} = -\alpha_1 K_1 - \alpha_2 K_2 = 0 \end{cases}$$

解得

$$K_1 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}, \quad K_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

所以

$$g(t) = 1 - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} (\alpha_2 e^{-\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{-\alpha_2 t}), \quad t \geq 0 \quad (3.6-14)$$

同样,另外 3 种特征根情况所对应的单位阶跃响应也可以求出来,不再赘述。另外,典型的 GCL 并联电路分析,与 RLC 串联分析方法类同,有兴趣的读者可参阅其他有关书籍。

3.7 正弦激励下一阶电路响应

在实际电路中,除直流电源外,另一类典型的激励是随着时间按正弦(或余弦)规律变化的电源。当这种正弦激励作用于一阶电路时,其响应也为稳态分量和暂态分量之和。对于有损耗的动态电路,一般来说,稳态分量是与正弦激励同频率的正弦量,以 $y_p(t) = Y_p \cos(\omega t + \theta)$ 表示(即为关于 $y(t)$ 方程的特解),可直接代入方程比较系数求得(后面介绍的相量法更容易求得)。若响应的初始值为 $y(0_+)$,则根据式(3.4-1)可得一阶电路在正弦激励下全响应的形式为

$$\begin{aligned} y(t) &= y_p(t) + [y(0_+) - y_p(0_+)] e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= Y_p \cos(\omega t + \theta) + [y(0_+) - Y_p \cos \theta] e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (3.7-1)$$

例 3-13 $t=0$ 时换路的电路如图 3-46 所示,电感电流初始值为 $i_L(0_+) = I_0$,写出 $t > 0$ 时电感电流 i_L 的全响应表达式。其中, $u_s(t) = U_{sm} \cos(\omega t + \theta_u)$ 。

解: 列出 $t > 0$ 时电路的 KVL 方程为

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = u_S = U_{Sm} \cos(\omega t + \theta_u)$$

设电感电流特解为

$$i_{Lp}(t) = I_{Lm} \cos(\omega t + \theta_i)$$

其中, I_{Lm} 和 θ_i 为待定常数, 将特解代入上述 KVL 方程, 得

$$-\omega L I_{Lm} \sin(\omega t + \theta_i) + R I_{Lm} \cos(\omega t + \theta_i) = U_{Sm} \cos(\omega t + \theta_u)$$

则利用三角公式, 上述 KVL 可进一步化为

$$\sqrt{(\omega L I_{Lm})^2 + (R I_{Lm})^2} \cos\left(\omega t + \theta_i + \arctan \frac{\omega L}{R}\right) = U_{Sm} \cos(\omega t + \theta_u)$$

通过比较系数即可求得

$$I_{Lm} = \frac{U_{Sm}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

$$\theta_i = \theta_u - \arctan \frac{\omega L}{R}$$

故

$$i_{Lp}(0_+) = I_{Lm} \cos \theta_i$$

$$i_L(t) = I_{Lm} \cos(\omega t + \theta) + [I_0 - I_{Lm} \cos \theta] e^{-\frac{t}{\tau}}$$

其中, $\tau = \frac{L}{R}$ 。据此可画出电感电流 i_L 的波形如图 3-47 所示。

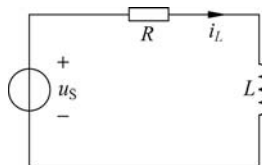


图 3-46

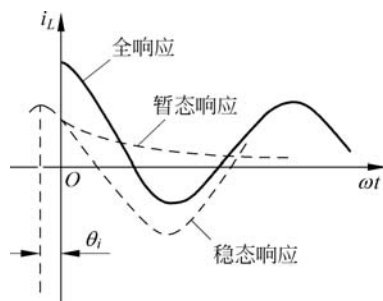


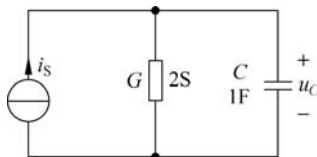
图 3-47

工程上, 一般认为电路的暂态过程经历 $(3 \sim 5)\tau$ 的时间, 有时可能是很短暂的。而许多电子设备工作在正弦稳态的情况下, 如正弦振荡器, 电力系统的交流发电机、照明电路等, 故这些电路更关注的是稳态分量部分(称正弦稳态响应)。同时这种正弦稳态分析也是线性时不变电路频率域分析的基础, 因此研究电路的正弦稳态响应具有十分重要的意义。由上述讨论可知, 正弦稳态响应是正弦电源激励下电路微分方程的特解, 是与激励源具有相同频率的正弦函数, 但当电路较复杂时, 求解微分方程的特解将变得十分烦琐。因此, 有必要寻找一种分析和计算正弦稳态响应的实用方法, 这就是第 4 章将要介绍的相量法。

思考和练习

3.7-1 正弦激励下一阶动态电路达到稳态时, 稳态响应具有什么特点?

3.7-2 练习题 3.7-2 图所示电路,已知 $i_s = 2\sqrt{2} \cos 2t \text{ A}$,求 u_C 的零状态响应。



练习题 3.7-2 图

3.8 实用电路介绍

3.8.1 触摸开关电路

电容式接近开关,在电梯、楼道照明等场合应用很广,当人体手指触摸这类开关按钮时,电容量发生变化,从而引起输出电压变化,形成开关作用。

触摸开关按钮图 3-48(a)内部有个凹环,这个凹环是由一个金属环电极和一个圆盘电极构成的,它们之间用绝缘材料隔离,防止直接接触,可以将它模拟为一个电容 C_1 ,如图 3-48(b)所示,和大多数电容不同,它允许在电极之间插入一个物体,如一个手指触点。由于手指触点比电极周围的绝缘材料更容易传导电荷,电路等效为增加了一个连到地的另一个电极,如图 3-48(c)所示,用电容 C_2 和 C_3 模拟。

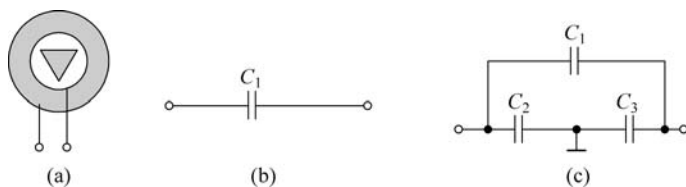


图 3-48

图 3-49(a)为电容式触摸开关电路, C 是一个固定电容。图 3-49(b)和图 3-49(c)中电容的实际值为 $10 \sim 50 \text{ pF}$,它取决于开关的精确形状、手指如何触碰、人是否戴手套等。为了分析方便,假设所有电容的值都是 25 pF 。当手指没有触碰按钮时,其等效电路如图 3-49(b)所示,写出节点电流方程式为

$$C_1 \frac{d(u - u_s)}{dt} + C \frac{du}{dt} = 0$$

整理上式,得到输出电压 u 的微分方程为

$$\frac{du}{dt} = \frac{C_1}{C_1 + C} \frac{du_s}{dt}$$

积分后得到输出电压为

$$u = \frac{C_1}{C_1 + C} u_s + u(0)$$

结果表明,这个电路中串联的电容电路与串联电阻电路相同,构成了一个分压电路。考虑 $C_1 = C = 25 \text{ pF}$,输出电压 $u = 0.5 u_s + u(0)$,式中的 $u(0)$ 为电容的初始电压。由于检测输

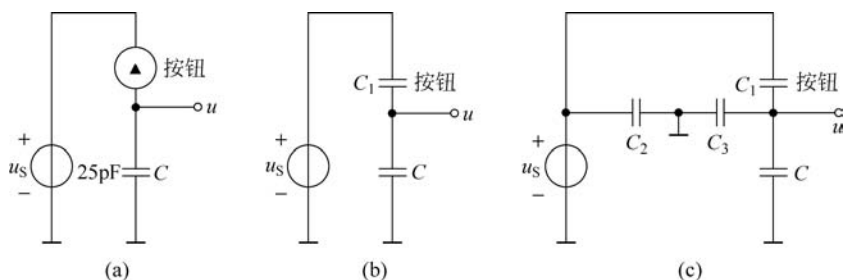


图 3-49

出电压的电路消除了电容的初始电压,所以可以假设 $u(0)=0\text{V}$ 。因此,检测到的输出电压为

$$u = 0.5u_s$$

当手指触碰按钮时,其等效电路如图 3-49(c)所示,写出节点电流方程式为

$$C_1 \frac{d(u - u_s)}{dt} + C_3 \frac{du}{dt} + C_2 \frac{du}{dt} = 0$$

整理得

$$\frac{du}{dt} = \frac{C_1}{C_1 + C_2 + C_3} \frac{du_s}{dt}$$

解微分方程得

$$u = \frac{C_1}{C_1 + C_2 + C_3} u_s + u(0)$$

同理,可得输出电压

$$u = 0.333u_s$$

比较两个结果,当按钮被按下时,输出电压是电源电压的三分之一;当按钮未按时,输出电压是电源电压的一半。后续检测电路可根据检测到输出电压的大小,判定触摸按钮是否按下,并作相应的操作。

3.8.2 测子弹速度电路

图 3-50 电路为一测子弹速度的设备示意图。子弹到达前开关 S_1 和 S_2 闭合已久,电源

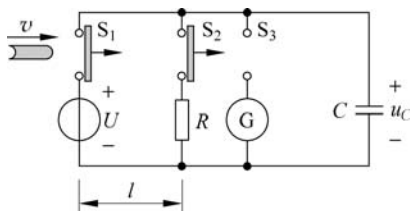


图 3-50

对电容充电已达稳态,子弹先将开关 S_1 打开,经过一段路程 l 飞至 S_2-S_3 连锁开关,将 S_2 打开的同时闭合 S_3 ,使电容器 C 和电荷测定计 G 连上,根据此时电荷测定计 G 的示数,便可推算出子弹的速度。

例如,当 $U=100\text{V}$, $R=6\text{k}\Omega$, $C=0.1\mu\text{F}$, $l=3\text{m}$ 时,射击完成后电荷测定计 G 的示数为

$3.45\mu\text{C}$,那么,推算子弹速度过程如下:

子弹打开开关 S_1 之前,电容两端电压为 $u_C(0)=U=100\text{V}$ 。

子弹打开开关 S_1 之后经过一段路程 l 飞至 S_2-S_3 连锁开关之前,电容通过电阻 R 放电,为零输入响应,直到子弹将 S_2 打开的同时闭合 S_3 之后,电容放电结束,此时电容电压为

$$u_C(t_1) = \frac{Q_1}{C} = \frac{3.45}{0.1} = 34.5 \text{ V}$$

而零输入响应为 $u_C(t_1) = Ue^{-\frac{t_1}{RC}} = 100e^{-\frac{t_1}{6 \times 10^{-4}}}$ 。

所以子弹经过路程 l 花费的时间为

$$t_1 = -6 \times 10^{-4} \ln(0.345) = 6.385 \times 10^{-4} \text{ s}$$

子弹的速度为

$$v = \frac{l}{t_1} = \frac{3}{6.385 \times 10^{-4}} = 4698.5 \text{ (m/s)}$$

3.8.3 汽车点火电路

电感阻止其电流快速变化的特性可用于电弧或火花发生器中,汽车点火电路就利用了这一特性。

图 3-51(a)所示为汽车点火装置, L 是点火线圈,火花塞是一对间隔一定的空气隙电极。当开关动作时,瞬变电流在点火线圈上产生高压(一般为 $20 \sim 40 \text{ kV}$),这一高压在火花塞处产生火花而点燃气缸中的汽油混合物,从而发动汽车。

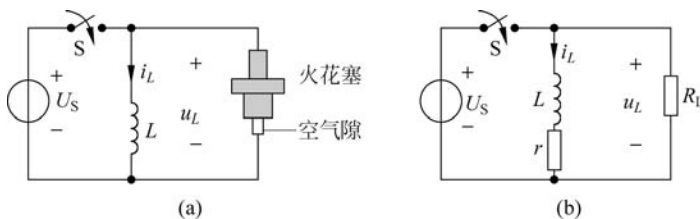


图 3-51

图 3-51(b)所示为汽车点火装置的电路模型,点火线圈 $L = 4 \text{ mH}$,其内阻 $r = 6 \Omega$,火花塞等效为一个电阻, $R_L = 20 \text{ k}\Omega$ 。若供电电池电压 $U_S = 12 \text{ V}$,开关 S 在 $t = 0$ 时闭合,经 $t_0 = 1 \text{ ms}$ 后又打开,下面分析 $t > t_0$ 时,火花塞 R_L 上的电压 $u_L(t)$ 变化规律。

当开关 S 在 $t = 0$ 时闭合时,时间常数

$$\tau_0 = \frac{L}{r} = \frac{4 \times 10^{-3}}{6} = \frac{2}{3} \text{ ms}$$

当 $t_0 = 1 \text{ ms}$ 时, $i_L(t_{0-}) = \frac{U_S}{r}(1 - e^{-\frac{t_0}{\tau_0}}) = 2(1 - e^{-\frac{3}{2}}) \approx 1.6 \text{ A}$; 当 $t_0 = 1 \text{ ms}$ 时开关 S 又打开,此时 $i_L(t_{0+}) = i_L(t_{0-}) = 1.6 \text{ A}$,则

$$u_L(t_{0+}) = -R_L i_L(t_{0+}) = -32 \text{ kV}, \quad u_L(\infty) = 0$$

$$\tau_1 = \frac{L}{r + R_L} = \frac{4 \times 10^{-3}}{6 + 20 \times 10^3} \approx 2 \times 10^{-7} \text{ s}$$

由三要素公式,得

$$u_L(t) = -32e^{-5 \times 10^6(t-t_0)} \text{ kV}, \quad t > t_0$$

可见,火花塞上的最高电压可以达到 32 kV ,该电压足以使火花塞点火。开关的闭合和打开可以采用脉冲宽度为 1 ms 的脉冲电子开关控制。

3.8.4 闪光灯电路

电容阻止其电压快速变化的特性可用于产生瞬间的大电流脉冲。电子闪光灯电路、电子点焊机等都是利用这一特性实现的。

图 3-52 所示是电子闪光灯电路,由一个直流电压源 U_S 、一个限流电阻 R 和一个与闪光灯并联的电容 C 等组成,闪光灯可等效为一个电阻 r ,其电阻值较小。

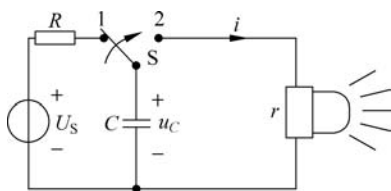


图 3-52

电路工作过程: 开关 S 处于位置 1 时,电压源对电容充电,等到电容充满电,电容电压等于电压源电压,此时开关 S 如果由位置 1 打向位置 2,闪光灯便开始工作,由于闪光灯电阻较小,电容在很短时间内放电完毕,放电时间近似为 $5rC$,从而达到闪光的效果。电容放电时会产生短时间的大电流脉冲。

3.8.5 矩形波发生器

矩形波电压常用于数字电路中作为信号源。图 3-53(a)所示是一种矩形波发生器的电路。运算放大器作为电压比较器,利用电容充放电过程实现输出矩形波信号(如图 3-53(b)所示)。

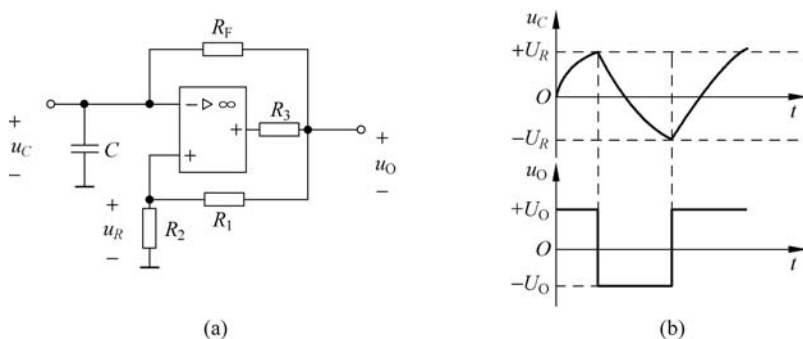


图 3-53

工作过程: 假设该电路加电前电容电压为 0,则比较器反相输入端电位为 0,由于 R_1 和 R_2 分压作用,使得比较器输出端立即输出饱和电压 U_O , U_O 一方面通过 R_F 对电容充电,使得电容电压按指数规律增加;另一方面通过电阻 R_1 和 R_2 分压作用在比较器同相输入端保持一个电位为

$$U_R = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_O$$

当电容电压增加到等于 U_R 时,比较器将反转,输出电压为 $-U_O$,此时, $-U_O$ 同样一方

面使得电容通过 R_F 放电；另一方面通过电阻 R_1 和 R_2 分压作用在比较器同相输入端保持一个电位为

$$-U_R = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} U_O$$

当电容电压减小到等于 $-U_R$ 时,比较器再次反转,输出电压为 U_O ,此时又回到了与初始状态相同的情况。这样反复下去,比较器便输出矩形波信号。

3.8.6 微分电路和积分电路

简单的 RC 电路,选择电路的时间常数和输出端的不同,可以得到输出与输入之间的微分或积分关系,前者称为微分电路,后者称为积分电路。这两种电路在实际工程中有着广泛的应用,尤其在电子技术的脉冲数字电路和自动控制中具有重要地位。电路在输入矩形电压及一定条件下,利用三要素法很快可以确定其输出波形。

微分电路如图 3-54(a)所示。设定条件:(1)时间常数 τ 远小于脉冲宽度 t_p ; (2)从电阻两端输出。可以证明,输出电压 u_2 与输入电压 u_1 近似于微分关系,这种输出尖脉冲反映了输入矩形脉冲的跃变部分,是对矩形脉冲微分的结果,故称微分电路其电压随时间变化波形如图 3-54(b)、(c)所示。电子技术中常把微分电路变换得到的尖脉冲电压用作触发信号。

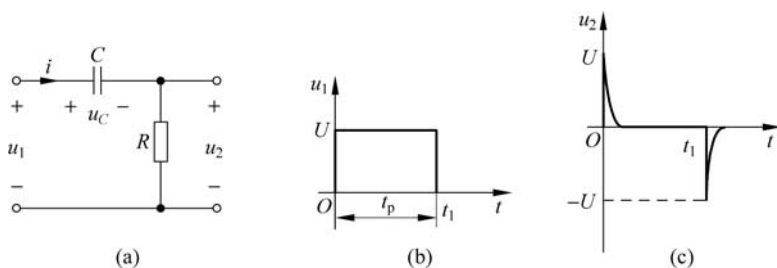


图 3-54

积分电路如图 3-55(a)所示。设定条件:(1)时间常数 τ 远大于脉冲宽度 t_p ; (2)从电容器两端输出。

可以证明,输出电压 u_2 与输入电压 u_1 近于成积分关系(如图 3-55(b)所示),故称积分电路。时间常数 τ 越大,充放电越缓慢,所得锯齿波电压的线性也就越好。电子技术中常把积分电路变换得到的锯齿波电压用作扫描信号。

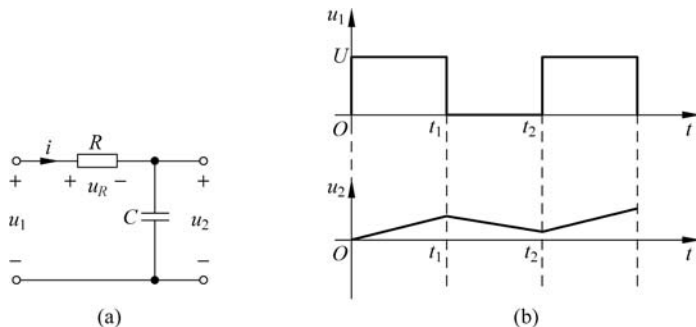


图 3-55

习题 3

3-1 选择合适的答案填入括号内,只需填入 A、B、C 或 D。

(1) 题 3-1(a)图所示电路, $i_L = e^{-2t}$ A, 则其端口电压 $u_{ab} = (\quad)$ 。

- A. $3e^{-2t}$ V B. $2e^{-2t}$ V C. e^{-2t} V D. $-2e^{-2t}$ V

(2) 题 3-1(b)图所示电路原已处于稳定, $u_C(0_-) = 3$ V, $t = 0$ 时开关 S 合上, 则 $i_C(0_+) = (\quad)$ 。

- A. 0 B. -0.3 A C. 0.7 A D. 0.5 A

(3) 题 3-1(c)图所示电路在 $t = 0$ 时换路, 其电容电压 u_C 的零状态响应为 $(\quad)$ 。

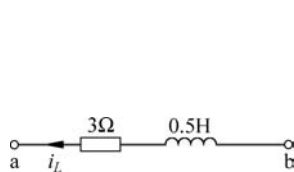
- A. $1 - e^{-t}$ V B. $1 - e^{-4t}$ V C. e^{-t} V D. 1 V

(4) 题 3-1(d)图所示电路原已处于稳定, $t = 0$ 时 S 闭合, 则 $t > 0$ 时电流 $i = (\quad)$ 。

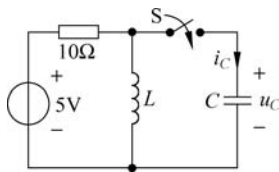
- A. 0 B. e^{-2t} A
C. $e^{-0.5t}$ A D. $1.5 - e^{-2t}$ A

(5) 题 3-1(e)图所示电路中, 灯 A 和灯 B 规格相同, 当开关 S 闭合后, 则 $(\quad)$ 。

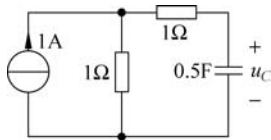
- A. A、B 两灯同时亮 B. A 灯先亮, B 灯后亮
C. B 灯先亮, A 灯后亮 D. A 灯灭, B 灯亮



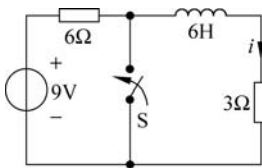
(a)



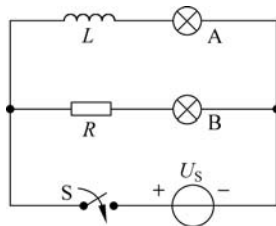
(b)



(c)



(d)



(e)

题 3-1 图

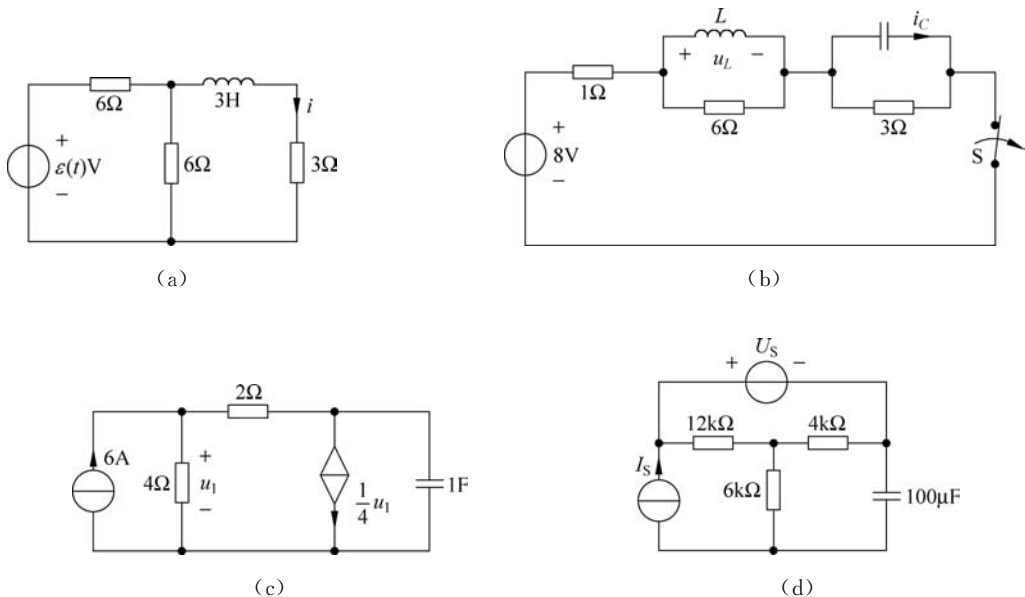
3-2 将合适的答案填入空格内。

(1) 题 3-2(a)图所示电路, 电流 i 的阶跃响应为 $i(t) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 题 3-2(b)图所示电路原已处于稳态, $t = 0$ 时开关 S 打开, 则 $u_L(0_+) = \underline{\hspace{2cm}}$, $i_C(0_+) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) 题 3-2(c)图所示电路在 $t = 0$ 时换路, 其 $u_1(\infty) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(4) 换路后的电路如题 3-2(d)图所示, 其时间常数 $\tau = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

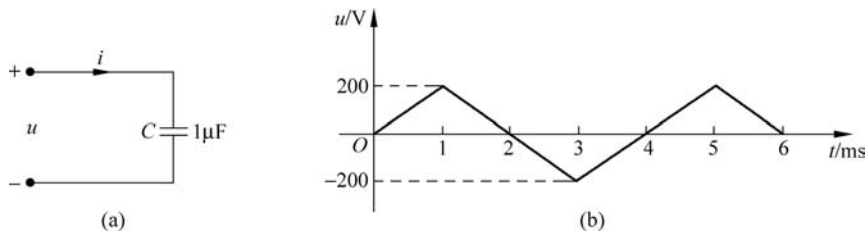


题 3-2 图

(5) 在 $t=0$ 时换路的一阶 RC 电路中, 电容电压为 $u_C(t) = 5 - 10e^{-4t} \text{ V}, t > 0$ 。则其零输入响应分量为_____, 零状态响应分量为_____。

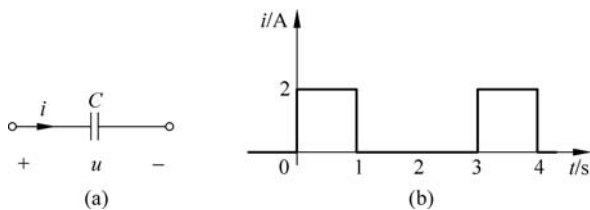
3-3 一电容 $C = 0.5 \text{ F}$, 其电流、电压为关联参考方向。如其端电压 $u = 4(1 - e^{-t}) \text{ V}, t \geq 0$, 求 $t \geq 0$ 时的电流 i , 粗略画出其电压和电流的波形。电容的最大储能是多少?

3-4 题 3-4(a) 图所示电路, 电容电压随时间按三角波方式变化如题 3-4(b) 图所示。试画电容电流波形。



题 3-4 图

3-5 一电容 $C = 0.2 \text{ F}$, 其电流如题 3-5 图(b) 所示, 若已知在 $t=0$ 时, 电容电压 $u(0) = 0$, 求其端电压 u , 并画出波形。

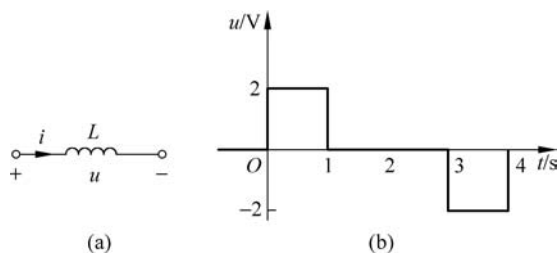


题 3-5 图

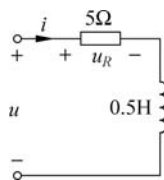
3-6 一电感 $L=0.2\text{H}$, 其电流、电压为关联参考方向。如通过它的电流 $i=5(1-\text{e}^{-2t})\text{A}$, $t\geq 0$, 求 $t\geq 0$ 时的端电压, 并粗略画出其波形。电感的最大储能是多少?

3-7 一电感 $L=4\text{H}$, 其端电压的波形如题 3-7 图(b)所示, 已知 $i(0)=0$, 求其电流, 并画出其波形。

3-8 如题 3-8 图所示电路, 已知电阻端电压 $u_R=5(1-\text{e}^{-10t})\text{V}$, $t\geq 0$, 求 $t\geq 0$ 时的电压 u 。



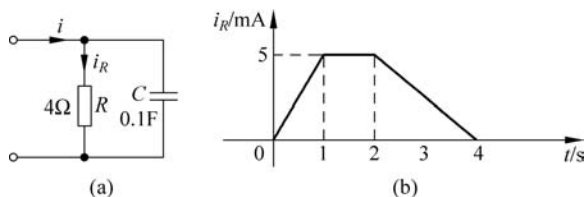
题 3-7 图



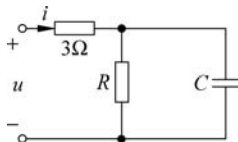
题 3-8 图

3-9 如题 3-9 图(a)所示电路, 已知电阻中的电流 i_R 的波形如(b)图所示, 求总电流 i 。

3-10 电路如题 3-10 图所示, 已知 $u=5+2\text{e}^{-2t}\text{V}$, $t\geq 0$; $i=1+2\text{e}^{-2t}\text{A}$, $t\geq 0$ 。求电阻 R 和电容 C 。



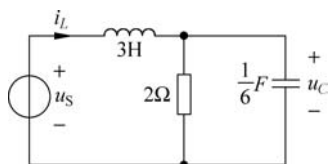
题 3-9 图



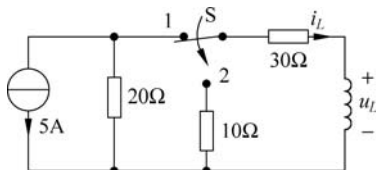
题 3-10 图

3-11 列写题 3-11 图所示电路 u_C 的微分方程和 i_L 的微分方程。

3-12 如题 3-12 图所示电路, 在 $t<0$ 时开关 S 位于“1”, 已处于稳态, 当 $t=0$ 时开关 S 由“1”闭合到“2”, 求初始值 $i_L(0_+)$ 和 $u_L(0_+)$ 。



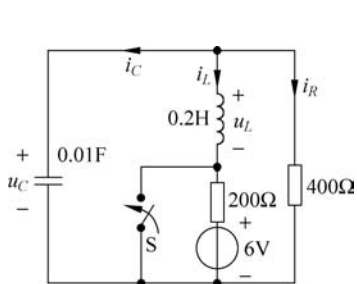
题 3-11 图



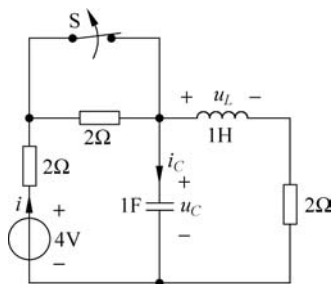
题 3-12 图

3-13 如题 3-13 图所示电路, 开关 S 原是断开的, 电路已处于稳态, $t=0$ 时开关闭合, 求初始值 $u_C(0_+)$ 、 $i_L(0_+)$ 、 $i_C(0_+)$ 和 $i_R(0_+)$ 。

3-14 如题 3-14 图所示电路, 开关 S 原是闭合的, 电路已处于稳态, $t=0$ 时开关断开, 求初始值 $u_L(0_+)$ 、 $i(0_+)$ 和 $i_C(0_+)$ 。



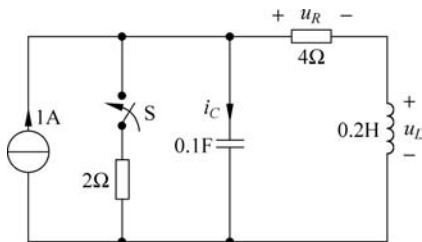
题 3-13 图



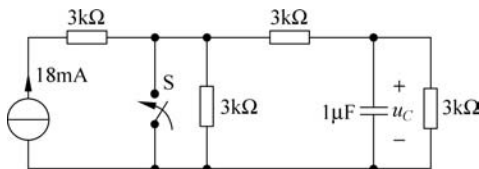
题 3-14 图

3-15 如题 3-15 图所示电路,在 $t < 0$ 时开关 S 断开时电路已处于稳态,当 $t = 0$ 时开关闭合,求初始值 $u_R(0_+)$ 、 $i_C(0_+)$ 和 $u_L(0_+)$ 。

3-16 如题 3-16 图所示电路, $t = 0$ 时开关闭合,闭合前电路处于稳态,求 $t \geq 0$ 时的 $u_C(t)$,并画出其波形。



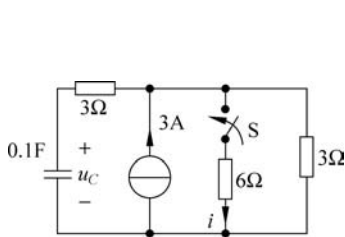
题 3-15 图



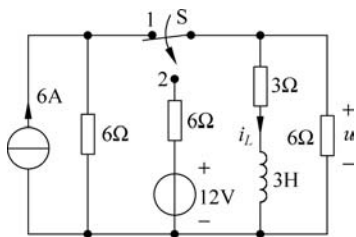
题 3-16 图

3-17 如题 3-17 图所示电路,当 $t < 0$ 时开关 S 是断开的,电路已处于稳态。当 $t = 0$ 时开关闭合,求 $t \geq 0$ 时的电压 u_C 、电流 i 的零输入响应和零状态响应,并画出其波形。

3-18 如题 3-18 图所示电路,当 $t = 0$ 时开关 S 位于“1”,电路已处于稳态。当 $t = 0$ 时开关闭合到“2”,求 i_L 和 u 的零输入响应和零状态响应,并画出其波形。



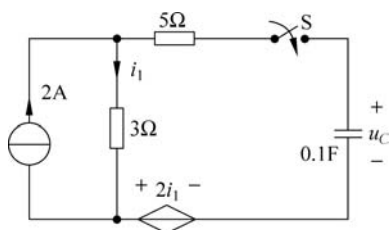
题 3-17 图



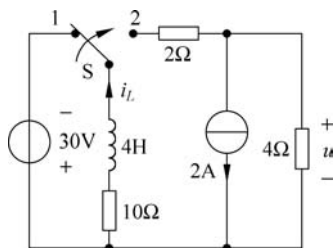
题 3-18 图

3-19 如题 3-19 图所示电路,电容初始储能为 0, $t = 0$ 时开关 S 闭合,求 $t \geq 0$ 时的电压 u_C 。

3-20 如题 3-20 图所示电路,当 $t < 0$ 时开关 S 位于“1”,电路已处于稳态。当 $t = 0$ 时开关由“1”闭合到“2”,求 $t \geq 0$ 时的 i_L 和 u 。



题 3-19 图



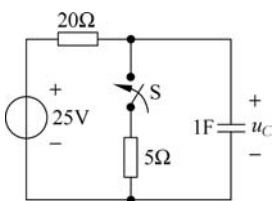
题 3-20 图

3-21 如题 3-21 图所示电路,当 $t < 0$ 时电路已处于稳态,当 $t = 0$ 时开关 S 闭合,闭合后经过 10s 后,开关又断开,求 $t \geq 0$ 时的 u_C ,并画出其波形。

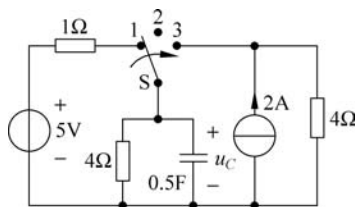
3-22 如题 3-22 图所示电路,当 $t < 0$ 时开关 S 位于“1”,电路已处于稳态,当 $t = 0$ 时开关由“1”闭合到“2”,经过 2s 后,开关又由“2”闭合到“3”。

(1) 求 $t \geq 0$ 时的电压 u_C ,并画出其波形。

(2) 求电压 u_C 恰好等于 3V 的时刻 t 的值。

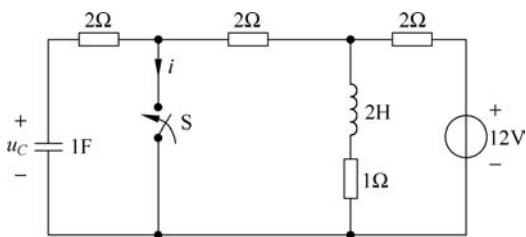


题 3-21 图



题 3-22 图

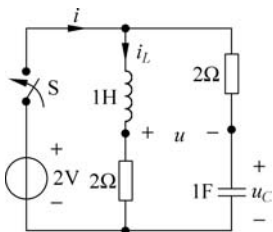
3-23 如题 3-23 图所示电路,在 $t < 0$ 时开关 S 是断开的,电路已处于稳态, $t = 0$ 时开关 S 闭合,求 $t \geq 0$ 时的电流 i 。



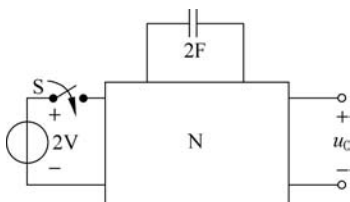
题 3-23 图

3-24 如题 3-24 图所示电路,已知 $u_C(0_-) = 0$, $i_L(0_-) = 0$,当 $t = 0$ 时开关 S 闭合,求 $t \geq 0$ 时的电流 i 和电压 u 。

3-25 如题 3-25 图所示电路,N 中不含储能元件,当 $t = 0$ 时开关 S 闭合,输出电压的零状态响应为 $u_o(t) = 1 + e^{-\frac{t}{4}}$ (V), $t \geq 0$ 。如果将 2F 的电容换为 2H 的电感,求输出电压的零状态响应 $u_o(t)$ 。



题 3-24 图

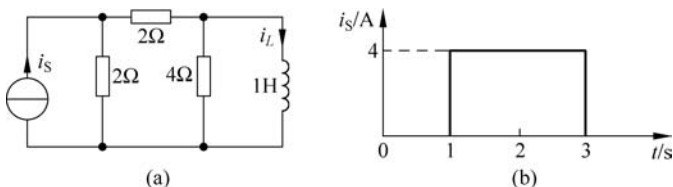


题 3-25 图

3-26 如题 3-26 图所示电路,如以 i_L 为输出。

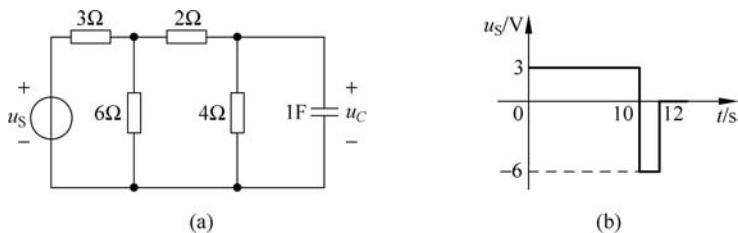
(1) 求阶跃响应。

(2) 如输入信号 i_s 的波形如图(b)所示,求 i_L 的零状态响应。



题 3-26 图

3-27 如题 3-27 图所示电路,若输入电压 u_s 如图(b)所示,求 u_C 的零状态响应。



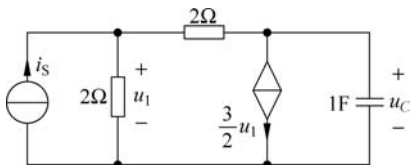
题 3-27 图

3-28 如题 3-28 图所示电路,若以 u_C 为输出,求其阶跃响应。

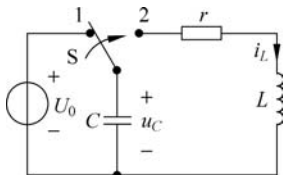
3-29 在受控热核研究中,需要的强大脉冲磁场是靠强大的脉冲电流产生的。如题 3-29 图所示电路中 $C=2000\mu\text{F}$, $L=4\text{nH}$, $r=0.4\text{m}\Omega$, 直流电压 $U_0=15\text{kV}$, 如在 $t<0$ 时,开关 S 位于“1”,电路已处于稳态,当 $t=0$ 时,开关由“1”闭合到“2”。

(1) 求衰减常数 α 、谐振角频率 ω_0 和 $t\geq 0$ 时的 $i_L(t)$ 。

(2) 求 i_L 达到极大值的时间,并求出 $i_{L\max}$ 。



题 3-28 图



题 3-29 图

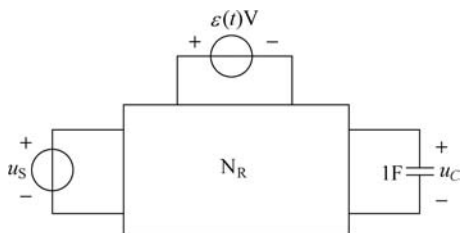
3-30 如题 3-30 图所示电路, N_R 只含电阻, 电容的初始状态不详, $\epsilon(t)$ 为单位阶跃电压, 已知当 $u_S(t) = 2\cos t \epsilon(t)$ V 时, 全响应为

$$u_C(t) = 1 - 3e^{-t} + \sqrt{2} \cos(t - 45^\circ) \text{ (V)} \quad t \geq 0$$

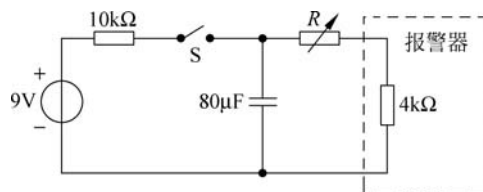
(1) 求在同样初始条件下, $u_S(t) = 0$ 时的 $u_C(t)$ 。

(2) 求在同样初始条件下, 若两个电源均为零时的 $u_C(t)$ 。

3-31 如题 3-31 图所示的 RC 电路是用于报警的, 当流过报警器的电流超过 $120\mu\text{A}$ 时就报警。若 $0 \leq R \leq 6\text{k}\Omega$, 求 $t=0$ 时开关 S 闭合后, 电路产生的报警时间延迟范围。



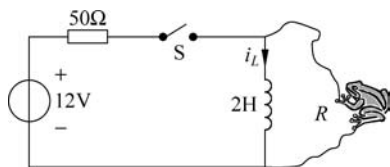
题 3-30 图



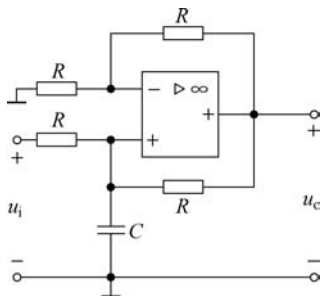
题 3-31 图

3-32 如题 3-32 图所示的电路用于生物课中让学生观察“青蛙的跳动”。学生注意到, 当开关闭合时, 青蛙只动一动, 而当开关断开时, 青蛙很剧烈地跳动了 5s, 将青蛙的模型视为一电阻, 计算该电阻值。(假设青蛙激烈跳动需要 10mA 的电流。)

3-33 如题 3-33 图的电路是一同相积分器, 请推导出输出电压 u_o 与输入电压 u_i 之间的关系。

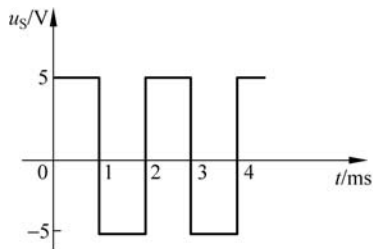


题 3-32 图

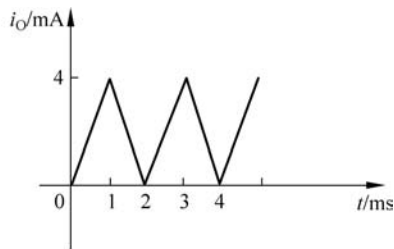


题 3-33 图

3-34 一个方波发生器产生的电压波形如题 3-34 图(a)所示, 设计一个运放电路将此电压波形转换为题 3-34 图(b)所示的三角波电流波形。设电路的初始状态为 0。



(a)



(b)

题 3-34 图