

第1章

不确定性分析的需求

建模与仿真技术已广泛应用于核能开发、海洋系统、航空航天等众多领域。然而,在建模与仿真的具体实践中,不可避免地存在不确定性,同时还会引入新的不确定性和误差。这些不确定性与误差随着建模与仿真过程不断地传播,使得最终仿真结果存在一定的不确定性。因此,需要清晰鉴定建模与仿真过程的主要不确定性源及误差,明确不确定性的传播途径与方法,开展不确定性分析,以定量地评估所有不确定性因素对目标仿真计算结果不确定性的影响与贡献。

核反应堆系统是一个多物理、多模块、多尺度耦合的复杂系统,而建模与仿真技术一直是核反应堆系统设计、研发、优化和安全分析的重要研究手段。在核反应堆建模与仿真的各个环节,其模型、计算方法、输入参数等都存在不确定性,从而导致计算结果存在一定的不确定性。基于现代建模与仿真技术的发展需求,需要开展不确定性分析,以传播和量化核反应堆系统建模与仿真过程的不确定性。更为重要的是,核反应堆系统的安全性和经济性分析也要求核反应堆关键参数的不确定性必须被鉴定出来并且被量化。因此,开展不确定性分析对于保证核反应堆系统安全性和提高经济性具有十分重要的意义,不确定性分析已经成为现代核反应堆建模与仿真的重要环节。

1.1 建模与仿真

1.1.1 建模与仿真技术概述

建模与仿真技术是一门通用性强、跨学科、与计算机技术紧密结合且应用面广的综合性技术,已成功应用于核能开发、海洋系统、航空航天、地震工程、材料、军事、社会、经济等众多领域。广义而言,仿真就是采用建模的方法建立现实客观物

理现象的概念模型和数学模型,即对现实客观物理现象进行抽象、映射、描述及复现,进而应用计算机技术、软件技术及信息技术,将概念模型转换为计算机仿真模型,以模拟现实客观物理现象,如图 1-1 所示。

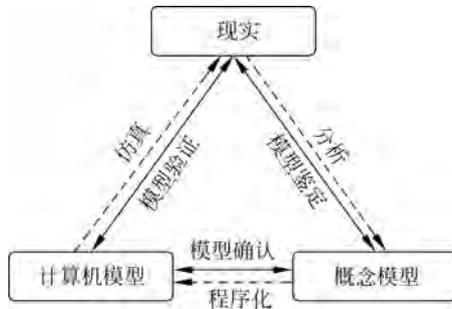


图 1-1 建模与仿真的三个基本元素及相互关系^[1]

但由于系统和环境(边界条件及初始条件)、人与系统交互作用等存在不确定性,系统仿真无法精确预测物理现象。因此,实际应用建模与仿真技术时,必须充分考虑系统和环境等的不确定性特征,开展不确定性分析,量化系统和环境的不确定性对不同系统响应预测值不确定性的贡献。图 1-1 虽然清晰地反映了建模与仿真的两个关键技术之间及与现实客观物理现象之间的关系,也包括了模型鉴定、模型验证与模型确认环节,但未涉及详细的数学模型建立与求解、计算机模型建立与程序实现、不确定性评估等环节,上述内容将在 1.1.2 节详细介绍。

目前,随着计算机技术的迅猛发展,尤其是网络技术的快速发展,建模与仿真技术正在向数字化、智能化、网络化、虚拟化及协同化快速发展。

1.1.2 建模与仿真的主要任务

针对复杂大系统,实际应用建模与仿真技术时,首先需要认真分析现实客观物理现象及明确建模目的,以建立物理系统的概念模型,进而建立数学模型并评估其可行性,并指定求解该数学模型的一个或多个可行的数值方法;而在计算机仿真阶段,需要将不同的数值方法程序化实现,并对代码进行调试,且所有的建模过程均需要模型的验证与确认,并明确各个阶段的不确定性来源与信息传递过程。因此,实际应用建模与仿真技术需要清晰地定义不同阶段及相互关系,如图 1-2 所示,该图显示了大规模仿真分析中所需的主要任务,其中实线表示不同任务间的信息和数据传递方向,虚线反映了各个任务之间的反馈作用,文献[2]中详细描述了各个任务。

物理系统的概念建模: 首先,对现实物理系统和环境要有明确的定义,并明确建模与仿真的需求。进而,基于建模与仿真的需求分析及物理系统响应对物理事件、物理过程及物理系统和环境的敏感性分析,确定需要分析的物理事件、事件序

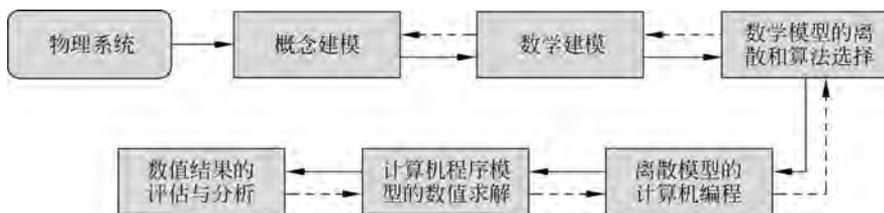


图 1-2 建模与仿真的主要任务及相互关系

列、不同物理过程的耦合关系。建立物理系统的概念模型,重点在于确定影响建模与仿真需求的所有可能因素,而确定可能的物理事件序列类似于核反应堆概率安全分析中建立故障树的过程。同时,概念建模阶段不需要建立任何数学方程式,但要明确各个可能的物理事件和物理过程的基本假设条件。在物理系统的概念模型建立阶段,还需识别出物理系统和环境的所有不确定因素,按照偶然或认知不确定性分类。但是,该阶段并不考虑这些不确定性因素的数学表征及传播方式。

概念模型的数学建模: 针对已确立的概念模型,开发其详细且精确的数学模型,包括精确地描述不同物理事件或过程的数学方程式(如偏微分方程)、辅助方程式、边界条件及初始条件。实际上,任何一个复杂物理系统或物理过程的数学模型均由若干个数学子模型组成,数学模型的复杂性取决于如下因素:物理事件的复杂性、物理事件的数量及不同物理过程的耦合程度。同时,要为建立概念模型时识别出的偶然和系统不确定性选择适当的数学表达式和模型。

另外,需要强调的是,数学模型的预测能力取决于其准确识别物理系统的主要控制因素及其影响的能力,而不取决于模型的复杂性。随着计算能力的迅猛发展,采用更为复杂、精细模型的趋势越来越明显,但经典有效的简单模型仍然发挥着重要作用。任何数学模型,无论其物理描述多么详细,依旧是对现实物理系统的一种简化和近似,所谓的“全物理仿真”只能被视为一种营销术语罢了。

数学模型的离散和算法选择: 将数学模型转换为可通过计算求解的形式。第一,将连续的数学模型转换为离散模型或数值模型,简而言之,将数学模型从微积分问题映射到算术问题。离散化的重点是将数学模型的连续数学形式转换为离散数学形式,而不是物理的连续和离散模型,比如欧拉模型和拉格朗日模型。离散化过程要解决如下问题:离散方程与连续方程(如偏微分方程)的一致性、数值方法的稳定性、连续和离散几何体影响的差异及数学奇异值的近似等。第二,指定不确定性量化与传播的方法。例如,可以选择蒙特卡罗方法或响应面方法传播不确定性。同时,该阶段还包括计算机数值试验方案的设计。

离散模型的计算机编程: 采用相应的编程语言将上一阶段中定义的算法和求解方案开发成计算机程序或软件,具体包括:输入准备、模块设计及编程、编译和链接。其中,输入准备具体指软件工程师将数学模型和离散模型中的元素转换为程序代码可用的等效数据元素。同时,还需对程序进行调试与验证,以确认仿真程

序正确反映了输入和输出数据。

计算机程序模型的数值求解：运行计算机仿真程序，计算得到一系列数值解，也就是具有有限精度的离散值和离散解。例如，具有特定空间分布和时间步长的数值解。同时，计算机仿真的数值解需要进行不确定性量化，因为之前所有阶段存在的以及新引入的不确定性因素和误差因素均会传播至最终的数值解，使其具有一定的不确定性。而计算机程序模型的数值求解过程同样会引入误差，如时空收敛标准、迭代收敛标准、不确定性传播收敛标准及截断误差积累。

数值结果的评估与分析：建模和仿真的最后阶段是对仿真数值解的评估和分析，基于物理系统原型的有效数据、模型与仿真的验证标准及专家经验，确认建模与仿真正确表示了现实物理系统，进而基于仿真数值结果进行分析，得出结论。其中仿真数值解包括不同的过程解及系统的最终解，不同受众对数值解有不同的兴趣与需求，比如决策者通常使用系统的最终解，而工程师、物理学家及数值分析师更关注不同物理过程解，因为过程解可提供相关物理问题的详细信息，比如采用某种数值方法计算偏微分方程准确解的可信度、系统对不同边界条件和初始条件的响应等。

1.2 不确定性与误差

1.2.1 基础数据的不确定性与误差

实验测量数据是建模与仿真的基本输入，但由于没有完美的测量方法，建模与仿真过程中各个环节所需的基础数据均包含一定的不准确性，且因素众多。充分理解这些不准确性的来源与评估方法，对于建模与仿真过程非常重要。

考虑建模与仿真过程中的一个稳定输入变量 X ，其真实值为 $X_{\text{真值}}$ 。但该输入变量的测量值受众多基本误差因素影响，如用于测量仪器校准的标准误差或不完善的校准过程，测量环境的温度、湿度、压力、振动及电磁效应变化等引入的误差，测量仪器或传感器安装不正确等引入的误差，观测者的操作和观察能力所引入的误差等。例如，采用某测量系统连续测量得到 N 个变量 X 的测量值，其中假定该测量系统有 6 个显著的误差来源，如图 1-3 所示。

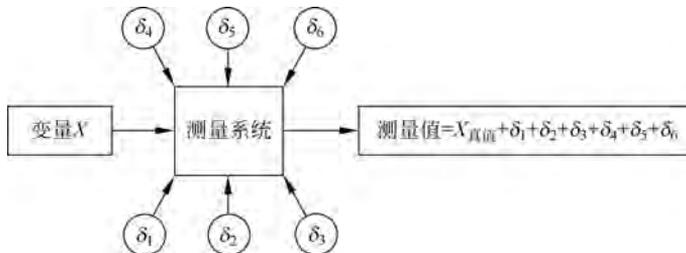


图 1-3 变量 X 的测量及主要误差来源

变量 X 的 N 个测量值可以表示为

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= X_{\text{真值}} + (\delta_1)_1 + (\delta_2)_1 + (\delta_3)_1 + (\delta_4)_1 + (\delta_5)_1 + (\delta_6)_1 \\ X_2 &= X_{\text{真值}} + (\delta_1)_2 + (\delta_2)_2 + (\delta_3)_2 + (\delta_4)_2 + (\delta_5)_2 + (\delta_6)_2 \\ &\vdots \\ X_N &= X_{\text{真值}} + (\delta_1)_N + (\delta_2)_N + (\delta_3)_N + (\delta_4)_N + (\delta_5)_N + (\delta_6)_N \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

其中, δ_i 表示第 i 个误差源引入的误差。

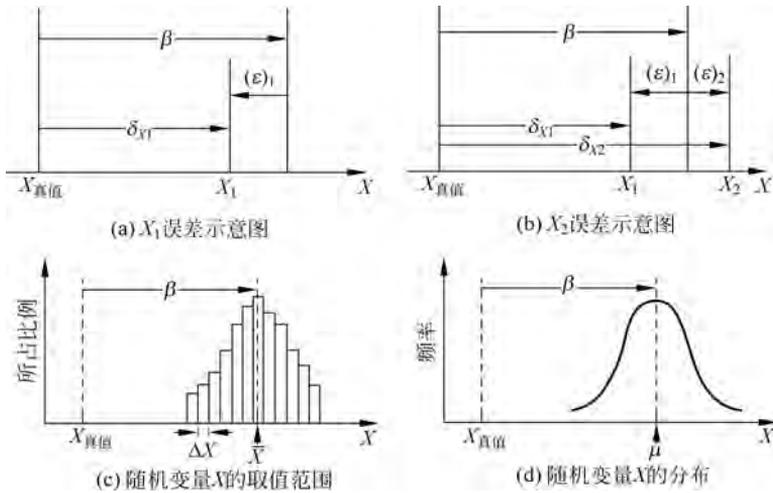
上述误差来源不同,对测量的影响也不同,总体可分为两类:一类是由系统效应引起的,该类效应是由固定不变的或按照确定规律变化的因素造成的,系统效应使得测量值恒定地向某一方向偏移,重复连续测量时,此偏移的大小和方向不变;另一类是由随机效应引起的,该类效应由未预料到的变化或影响量随时间、空间等变化所致,它使得测量值每次都不相同。基于传统命名经验,用 β 表示由系统效应引入的不随测量过程而变化的误差, ϵ 表示由随机效应引入的随测量过程而不断变化的误差。其中,系统误差由于人类认识的不足,不能确切知道其数值,因此无法完全清除,但通常可以减小。同时,部分系统误差是可以识别的,有些是未知的,对于可识别且能量化的系统误差,可使用估计的修正值或修正因子加以修正或消减。但随机误差不能借助修正进行补偿,可通过多次测量而减小,其期望值为零。假设上述误差源中 1,2 和 3 由系统效应引起,4,5 和 6 由随机效应引起,则

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= X_{\text{真值}} + \beta + (\epsilon)_1 \\ X_2 &= X_{\text{真值}} + \beta + (\epsilon)_2 \\ &\vdots \\ X_N &= X_{\text{真值}} + \beta + (\epsilon)_N \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

其中, $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$, $\epsilon = \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6$ 。

对变量 X 的连续测量过程如图 1-4 所示。第一个测量值 X_1 如图 1-4(a) 所示,测量值与真实值之间的差别是总的误差 δ_{X1} ,它是系统误差 β 与随机误差 ϵ 的和。图 1-4(b) 展示了第二个测量值 X_2 ,其总误差 δ_{X2} 势必与 δ_{X1} 不同,因为每次测量的随机误差并不相同。如果继续测量获取变量 X 的其他测量值,则可绘制概率直方图,其值表示测量值介于 X 和 $X + \Delta X$, $X + \Delta X$ 和 $X + 2\Delta X$, $X + 2\Delta X$ 和 $X + 3\Delta X$ 等的概率,其中 ΔX 是任意选定宽度,如图 1-4(c) 所示,这样清晰地展示了 N 个变量 X 测量值的分布。于是, N 个测量值的均值可以计算获得,而标准差 σ 表示 X 测量值分布的宽度,也就是由随机误差引起的测量值的离散程度。随着测量次数趋于无穷大,可获得测量值的“真实”分布,如图 1-4(d) 所示,其中均值 μ 相对于真实值 $X_{\text{真值}}$ 偏离 β ,也就是所有系统误差的总和。

事实上,变量 X 的真实值往往是未知的,我们可基于上述测量所得的数据样本,指定某一范围($X_{\text{最佳}} \pm \sigma_X$),认为变量 X 的真实值落在该范围。通常,变量 X 的最佳值 $X_{\text{最佳}}$ 等于 N 个测量值的均值。而 σ_X 表示不确定性,是区间($\pm \sigma_X$)大小的估计,该区间包含了可能影响测量值的所有误差。总体来说,误差 δ 是具有特

图 1-4 误差对变量 X 的不同测量值的影响

定符号(可能为正,也可能为负)和大小的量,某一误差 δ_i 是由第 i 误差源引起的测量值或模拟值与其真实值之间的差。通常,假定系统误差中已消除了可识别且能量化的误差,即符号和大小已知的系统误差已被修正或消除,而剩余误差(包括部分系统误差和全部随机误差)都是未知其符号和大小的,于是采用区间($\pm\sigma$)评估所有剩余误差及评定误差的范围。因此,不确定性是测量值或模拟值可能出现的范围的一个估计; $(X_{\text{最佳}} \pm \sigma_X)$ 是一个区间估计,以确保具有一定误差 δ 的真实值(实际上是未知的)以一定的概率落入该区间。显然,该区间越窄,即不确定性越小,用测量值或模拟值表示真值的可靠性就越高。如图 1-5 所示,不确定性区间($\pm\sigma_d$)包含了未知符号和大小的误差 δ_d 。

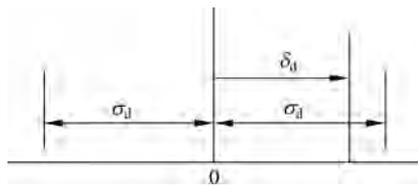


图 1-5 不确定性区间包含了未知符号和大小的误差

不确定性可定义为一系列具有特定误差的测量值或模拟值的标准偏差估计。以变量 X 的测量值为例,要将不确定性与 X 的测量值相关联,需要对所有基本误差源进行基本不确定性估计。也就是说,不确定性 σ_1 定义了一个区间($\pm\sigma_1$),误差 β_1 以一定概率落入该区间;不确定性 σ_3 定义了另一区间($\pm\sigma_3$),误差 ϵ_3 同样以一定概率落入该区间。基于标准偏差的传递公式, X 的测量值的不确定性可表示为

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2 + \sigma_5^2} \quad (1-3)$$

对于变量 X 的 N 个测量值, 样本数据的标准偏差可由下式计算得到:

$$s_X = \left[\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1-4)$$

其中, 均值计算公式如下:

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad (1-5)$$

事实上, s_X 只包含随机误差的贡献, 并不包括系统误差的贡献, 因为系统误差不随测量过程而变化。于是, 针对变量 X , s_X 只反映了随机误差源 3, 4 和 5 的贡献, 于是式(1-3)改写为

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + s_X^2} \quad (1-6)$$

其中, 系统误差的不确定性可以用多种方法估算, 如基于已有经验、制造商规格、校准数据、分析模型的结果等, 细节可参考相关文献[1], 本书不再赘述。

1.2.2 置信度与置信区间

从 1.2.1 节引入标准不确定性的概念可知, 我们希望能从一系列数据样本中获取信息以确定某个范围 ($X_{\text{最佳}} \pm \sigma_X$), 认为变量 X 的真实值落在该范围。但是 1.2.1 节定义的 σ_X 是标准不确定性, σ_X 表征不确定性区间时并没有与之对应的概率或置信度。因此, 我们需要一个新的不确定性估计 u_X , 以表征变量 X 的真实值落在不确定性区间 ($X_{\text{最佳}} \pm u_X$) 具有 $C\%$ 的置信度。通常假设 $X_{\text{最佳}}$ 是 N 次测量的平均值 (如果 $N=1$, 则为单次测量的值), u_X 是变量 X 的不确定性, 具有 $C\%$ 的置信度, 也就是说总误差 (系统误差和随机误差的总体影响) 落在不确定性区间 ($\pm u_X$) 内的概率是 $C\%$ 。例如, 假设不确定性 u_X 具有 95% 的置信度, 重复测量 100 次, 则变量 X 的真实值落在不确定性区间 ($X_{\text{最佳}} \pm u_X$) 的次数约为 95。

定义不确定性的置信度是非常必要的, 因为量化数据的不确定性时我们已经做了合理的估计。比如, 我们 100% 确信变量的真实值会落入正、负无穷大之间, 但是将 u_X 指定为无穷大并不会为任何人提供有价值的信息。因此, 给出一定的置信度并量化该置信度下的置信区间对于建模与仿真过程分析更有意义。

通常情况下, 系统误差和随机误差引起的总误差服从正态分布。因此, 下面以正态分布为例, 介绍确定具有一定置信度的置信区间的基本思路与方法。

正态分布数学表达式如下:

$$f(X) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(X-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad (1-7)$$

其中, $f(X)dX$ 表示变量 X 的值位于区间 ($X, X+dX$) 之间的概率, μ 是均值, 定义为

$$\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad (1-8)$$

σ 是标准偏差, 定义为

$$\sigma = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1-9)$$

式(1-7)的归一化形式为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(X) dX = 1.0 \quad (1-10)$$

式(1-10)直观地显示: 变量 X 的值位于区间 $(-\infty, \infty)$ 的概率等于 1。

变量 X 的值落入某一区间 $(\mu - \Delta X, \mu + \Delta X)$ 的概率可表示为

$$\text{Prob}(\Delta X) = \int_{\mu - \Delta X}^{\mu + \Delta X} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X - \mu)^2}{2\sigma^2}} dX \quad (1-11)$$

定义归一化偏差:

$$\tau = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (1-12)$$

则式(1-11)改写为

$$\text{Prob}(\tau_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau_1}^{\tau_1} e^{-\tau^2/2} d\tau \quad (1-13)$$

其中, $\tau_1 = \Delta X / \sigma$ 。

$\text{Prob}(\tau_1)$ 的值对应于 $-\tau_1$ 和 τ_1 之间的高斯曲线下的面积, 如图 1-6 所示, 正态分布的负尾和正尾部分都包括在积分中, $\text{Prob}(\tau_1)$ 称为两尾概率。由于正态分布的对称性, 无量纲值落在 0 和 τ_1 之间或 $-\tau_1$ 和 0 之间的概率相等, 均为 $\frac{1}{2} \text{Prob}(\tau_1)$, 称为单尾概率。表 1-1 给出了 τ 在 $(0, 0, 5.0)$ 变化时 $\text{Prob}(\tau)$ 的值。

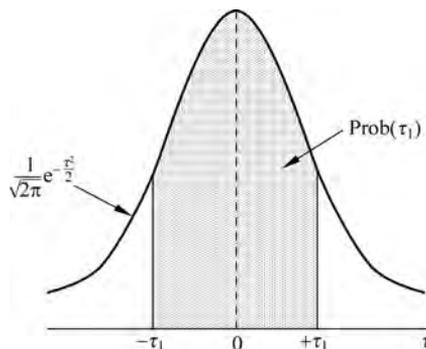


图 1-6 概率 $\text{Prob}(\tau_1)$ 的图示

由表 1-1 中所列出的概率可知: 50% 的服从正态分布的值落在区间 $(\mu \pm 0.675\sigma)$ 内, 68.3% 的值落在 $(\mu \pm 1.0\sigma)$ 内, 95% 的值落入 $(\mu \pm 1.96\sigma)$ 内, 99.7% 的值位于 $(\mu \pm 3.0\sigma)$, 99.99% 的值位于 $(\mu \pm 4.0\sigma)$ 。

表 1-1 正态分布概率表

τ	Prob(τ)								
0.00	0.0000	0.80	0.5763	1.60	0.8904	2.40	0.9836	3.50	0.9995347
0.02	0.0160	0.82	0.5878	1.62	0.8948	2.42	0.9845	3.55	0.9996147
0.04	0.0319	0.84	0.5991	1.64	0.8990	2.44	0.9853	3.60	0.9996817
0.06	0.0478	0.86	0.6102	1.66	0.9031	2.46	0.9861	3.65	0.9997377
0.08	0.0638	0.88	0.6211	1.68	0.9070	2.48	0.9869	3.70	0.9997843
0.10	0.0797	0.90	0.6319	1.70	0.9109	2.50	0.9876	3.75	0.9998231
0.12	0.0955	0.92	0.6424	1.72	0.9146	2.52	0.9883	3.80	0.9998552
0.14	0.1113	0.94	0.6528	1.74	0.9181	2.54	0.9889	3.85	0.9998818
0.16	0.1271	0.96	0.6629	1.76	0.9216	2.56	0.9895	3.90	0.9999037
0.18	0.1428	0.98	0.6729	1.78	0.9249	2.58	0.9901	3.95	0.9999218
0.20	0.1585	1.00	0.6827	1.80	0.9281	2.60	0.9907	4.00	0.9999366
0.22	0.1741	1.02	0.6923	1.82	0.9312	2.62	0.9912	4.05	0.9999487
0.24	0.1897	1.04	0.7017	1.84	0.9342	2.64	0.9917	4.10	0.9999586
0.26	0.2051	1.06	0.7109	1.86	0.9371	2.66	0.9922	4.15	0.9999667
0.28	0.2205	1.08	0.7199	1.88	0.9399	2.68	0.9926	4.20	0.9999732
0.30	0.2358	1.10	0.7287	1.90	0.9426	2.70	0.9931	4.25	0.9999786
0.32	0.2510	1.12	0.7373	1.92	0.9451	2.72	0.9935	4.30	0.9999829
0.34	0.2661	1.14	0.7457	1.94	0.9476	2.74	0.9939	4.35	0.9999863
0.36	0.2812	1.16	0.7540	1.96	0.9500	2.76	0.9942	4.40	0.9999891
0.38	0.2961	1.18	0.7620	1.98	0.9523	2.78	0.9946	4.45	0.9999911
0.40	0.3108	1.20	0.7699	2.00	0.9545	2.80	0.9949	4.50	0.9999931
0.42	0.3255	1.22	0.7775	2.02	0.9566	2.82	0.9952	4.55	0.9999946
0.44	0.3401	1.24	0.7850	2.04	0.9586	2.84	0.9955	4.60	0.9999957
0.46	0.3545	1.26	0.7923	2.06	0.9606	2.86	0.9958	4.65	0.9999966
0.48	0.3688	1.28	0.7995	2.08	0.9625	2.88	0.9960	4.70	0.9999973
0.50	0.3829	1.30	0.8064	2.10	0.9643	2.90	0.9963	4.75	0.9999979
0.52	0.3969	1.32	0.8132	2.12	0.9660	2.92	0.9965	4.80	0.9999984
0.54	0.4108	1.34	0.8198	2.14	0.9676	2.94	0.9967	4.85	0.9999987
0.56	0.4245	1.36	0.8262	2.16	0.9692	2.96	0.9969	4.90	0.9999990
0.58	0.4381	1.38	0.8324	2.18	0.9707	2.98	0.9971	4.95	0.9999992
0.60	0.4515	1.40	0.8385	2.20	0.9722	3.00	0.9973	5.00	0.9999994
0.62	0.4647	1.42	0.8444	2.22	0.9736	3.05	0.9977		
0.64	0.4778	1.44	0.8501	2.24	0.9749	3.10	0.9980		
0.66	0.4907	1.46	0.8557	2.26	0.9762	3.15	0.9983		
0.68	0.5035	1.48	0.8611	2.28	0.9774	3.20	0.9986		
0.70	0.5161	1.50	0.8664	2.30	0.9786	3.25	0.9988		
0.72	0.5285	1.52	0.8715	2.32	0.9797	3.30	0.9990		
0.74	0.5407	1.54	0.8764	2.34	0.9807	3.35	0.9991		
0.76	0.5527	1.56	0.8812	2.36	0.9817	3.40	0.9993		
0.78	0.5646	1.58	0.8859	2.38	0.9827	3.45	0.9994		

随之,我们提出一个新的问题:假设变量 X 服从正态分布,其均值为 μ ,标准偏差为 σ 。如果对变量 X 进行测量或模拟,我们该如何确定一个区间估计,以保证任何测量值或模拟值 X_i 落入该区间具有 95% 的置信度。实施如下:

基于式(1-12),定义 X_i 相对于均值 μ 的归一化偏差:

$$\tau = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \quad (1-14)$$

从表 1-1 可知,如果 $\text{Prob}(\tau) = 0.95$,则 $\tau = 1.96$ 。此时,概率表达式可以写成如下形式:

$$\text{Prob}\left(-1.96 \leq \frac{X_i - \mu}{\sigma} \leq 1.96\right) = 0.95 \quad (1-15)$$

将括号中每项乘以标准偏差 σ ,然后各项再加均值 μ 可得如下表达式:

$$\text{Prob}(\mu - 1.96\sigma \leq X_i \leq \mu + 1.96\sigma) = 0.95 \quad (1-16)$$

基于上述分析可知:95%的测量值或模拟值位于区间 $(\mu \pm 1.96\sigma)$,相当于有 95%的置信度保证任何测量值或模拟值 X_i 落入区间 $(\mu \pm 1.96\sigma)$ 内。换言之, $+1.96\sigma$ 和 -1.96σ 是变量 X 测量值或模拟值的 95% 置信区间的上限和下限。事实上,置信区间是不确定性分析的另一重要基础概念。

我们又引入另外一个问题:如何确定某一特定测量值或模拟值的一个区间估计,以保证分布的均值落入该区间具有 95% 的置信度。

将式(1-16)中 X_i 与 μ 重新排列,我们发现:

$$\text{Prob}(X_i - 1.96\sigma \leq \mu \leq X_i + 1.96\sigma) = 0.95 \quad (1-17)$$

因此,如图 1-7 所示,均值 μ 落入 $(X_i \pm 1.96\sigma)$ 区间具有 95% 的置信度,原因是 95% 的测量值或模拟值将落入 $(\mu \pm 1.96\sigma)$ 区间内。实际测量或模拟过程中,通常无法获得变量 X 的母本总体平均值 μ 。因此,95% 置信区间帮助我们确定一个区间估计,以保证总体平均值 μ 位于该区间。

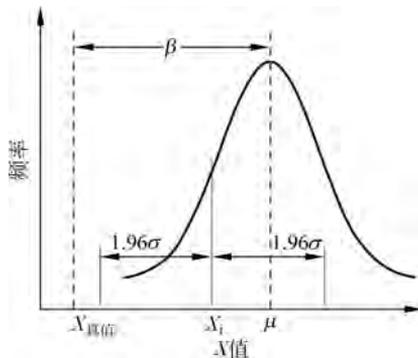


图 1-7 服从正态分布的某一测量值或模拟值的 95% 置信区间