

第 1 章 绪 论

本章首先以连续时间信号为例介绍信号的分类、常用信号、信号的基本运算,然后讨论系统的相关概念,最后介绍信号分析及系统分析的基本思路。这些内容是学习“信号与系统”课程的重要基础,是展开后续课程学习的前提,应熟练掌握基本概念及运算,应清晰地理解信号分析及系统分析的基本思路。

1.1 信号的概念

信号的概念很早就存在于人们的日常生活中。在中国古代,当人们看见万里长城的烽火台升起浓烟时,就知道有敌人入侵了,其中包含的信息是敌人入侵,这一信息的载体是烽烟。而当渔船遇险发出求救信号时,其中的信息是渔船遇险请求救援,信息的载体是无线电波。本书讨论的信号是指包含信息的电压或电流信号。

1.1.1 信号的分类

根据信号的不同属性可以对信号进行不同的分类,各种分类方法是互不相关的。本书只讨论如下 7 种分类方法。

1. 确定性信号与随机信号

确定性信号是指可以用时间函数来描述的信号,例如,信号 $f(t) = \sin 2t$; 而随机信号是指不能用确定的时间函数描述的信号,将在专门的后续课程中讨论。

本书只研究确定性信号,因此,全书信号与函数这两个名词在使用中为同一概念。由于确定性信号是可以用函数来描述的,所以具有时间特性,能作出随时间变化的波形图; 具有能量(功率)特性,可求出信号的能量(功率); 具有频率特性,由一定的频率分量组成。

2. 连续时间信号与离散时间信号

设 t_0 是时间变量 t 的一个任意值, t_0 为实数。

定义 比时间 t_0 小无穷小的时间为 t_0^- , 即

$$t_0^- = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} (t_0 - \epsilon) \quad (1.1.1)$$

定义 比时间 t_0 大无穷小的时间为 t_0^+ , 即

$$t_0^+ = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} (t_0 + \epsilon) \quad (1.1.2)$$

在高等数学中定义过函数的第一类间断点。若 t_0 (t_0 为实数) 是函数 $f(t)$ 的第一类间断点, 则存在函数的左极限 $f(t_0^-)$ 和右极限 $f(t_0^+)$, 且 $f(t_0^-) = f(t_0^+)$, 但函数在 $t=t_0$ 时刻的函数值 $f(t_0)$ 无定义, 或者 $f(t_0^-) \neq f(t_0^+)$ 。例如图 1.1.1 所示信号 $f(t)$, $f(0)$ 无定义, 左极限 $f(0^-) = 0$, 右极限 $f(0^+) = 1$, 所以 $t=0$ 是信号 $f(t)$ 的第一类间断点。

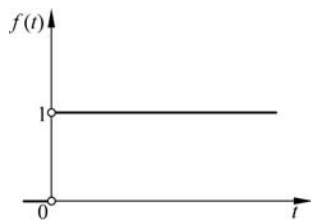


图 1.1.1 函数的第一类间断点例图

若信号 $f(t)$ 对于自变量 t 除第一类间断点外处处有定义, 就称信号 $f(t)$ 为连续时间信号, 如图 1.1.2(a) 所示。离散时间信号是指只在离散的时间点上有定义, 其余时间无定义的信号, 如图 1.1.2(b) 所示。

第 1 章至第 4 章学习连续时间信号与系统分析, 第 5 章、第 6 章讨论离散时间信号与系统分析。

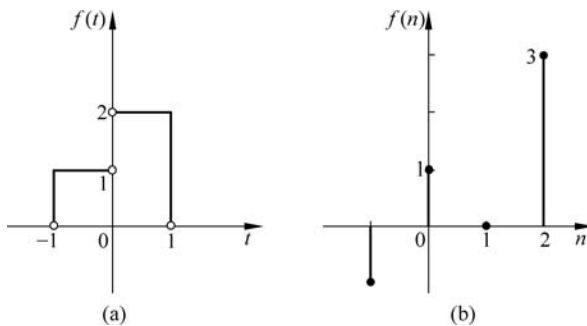


图 1.1.2 连续时间信号、离散时间信号波形例图

为了区分这两类信号, 用 t 表示连续时间信号的自变量, 用圆括号把自变量括在里面, 即 (t) , 例如连续时间信号 $f(t)$ 。而用 n 表示离散时间信号的自变量, 用方括号把自变量括在里面, 即 $[n]$, 例如离散时间信号 $f[n]$ 。

3. 周期信号与非周期信号

周期信号 $f(t)$ 的周期为 T (s, 秒), 角频率 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ (rad/s, 弧度/秒), 频率 $f = \frac{1}{T}$ (Hz, 赫兹), 满足关系式

$$f(t) = f(t - T) \quad (1.1.3)$$

周期信号的波形以 T 为周期周期性重复。图 1.1.3 所示即为周期 $T=2$ 的周期信号。

不满足式 (1.1.3) 的信号不具有周期性, 称为非周期信号, 例如图 1.1.2(a) 所示信号即为非周期信号。

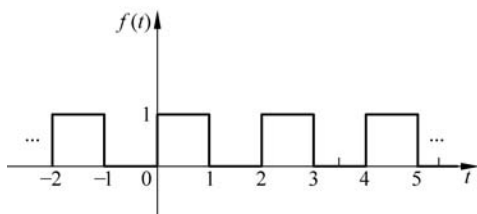


图 1.1.3 周期信号波形例图

4. 对称信号与非对称信号

本书只介绍两种对称信号：

满足 $f(t) = -f(-t)$ 的信号称为奇信号，波形对称于原点，如图 1.1.4(a) 所示；

满足 $f(t) = f(-t)$ 的信号称为偶信号，波形对称于纵轴，如图 1.1.4(b) 所示。

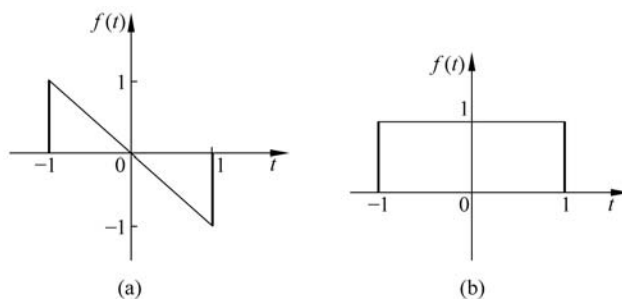


图 1.1.4 奇信号、偶信号波形例图

5. 实信号与复信号

用实函数描述的信号称为实信号，可以作出随时间变化的波形图；用复函数描述的信号称为复信号，只能分别作出其实部及虚部的波形图。例如，信号 $f(t) = 2t - 1$ 是实信号，而信号 $y(t) = e^{j\omega t}$ 是复信号。

一切物理可实现的信号均为实信号。为了建立一些有用的概念或为了简化运算常使用复变函数，于是出现了复信号。例如，运用欧拉公式[式(1.1.4)、式(1.1.5)]可以将实余弦信号或实正弦信号表示成一对复信号的叠加。

$$\cos at = \frac{1}{2}(e^{jat} + e^{-jat}) \quad (1.1.4)$$

$$\sin at = \frac{1}{2j}(e^{jat} - e^{-jat}) \quad (1.1.5)$$

6. 能量信号与功率信号

将信号 $f(t)$ 看作电压或电流，其通过 1Ω 电阻时所消耗的能量 E 或功率 P 称为信号 $f(t)$ 的能量或功率。按照电路分析课程的概念，可得出：

信号 $f(t)$ 的能量的定义为

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt \quad (1.1.6)$$

信号 $f(t)$ 的功率的定义为

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f^2(t) dt \quad (1.1.7)$$

若信号 $f(t)$ 的能量有限就称信号 $f(t)$ 为能量信号, 功率当然等于零。即 $E < +\infty$, $P = 0$ 。

若信号的功率有限就称信号 $f(t)$ 为功率信号, 功率信号的能量为无穷大。即 $E \rightarrow +\infty$, $P < +\infty$ 。

例如, 图 1.1.2(a) 所示信号 $f(t)$ 的能量为 $E = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \int_{-1}^0 dt + \int_0^1 4 dt = 5$, 信号 $f(t)$ 的功率为 $P = 0$, 因此图 1.1.2(a) 所示信号为能量信号。

而图 1.1.3 所示信号 $f(t)$ 的功率为 $P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 dt = \frac{1}{2}$, 能量 $E \rightarrow +\infty$ 。所以, 图 1.1.3 所示信号为功率信号。

7. 信号按所占时间范围分类

按照信号所占时间范围可以对信号作如下 4 种分类。

(1) 有始信号(又称为右边信号)。若信号 $f(t)$ 满足条件: 当 $t < t_1$ (t_1 为实常数) 时, $f(t) \equiv 0$, 则称 $f(t)$ 为有始信号, 如图 1.1.5(a) 所示。

若 $t_1 = 0$, 即 $t < 0$ 时 $f(t) \equiv 0$, 又称信号 $f(t)$ 为因果信号, 如图 1.1.5(b) 所示。

(2) 有终信号(又称为左边信号)。若信号 $f(t)$ 满足条件: 当 $t > t_2$ (t_2 为实常数) 时, $f(t) \equiv 0$, 则称信号 $f(t)$ 为有终信号, 如图 1.1.5(c) 所示。

若 $t_2 = 0$, 即 $t > 0$ 时 $f(t) \equiv 0$, 又称 $f(t)$ 为逆因果信号(亦称为反因果信号), 如

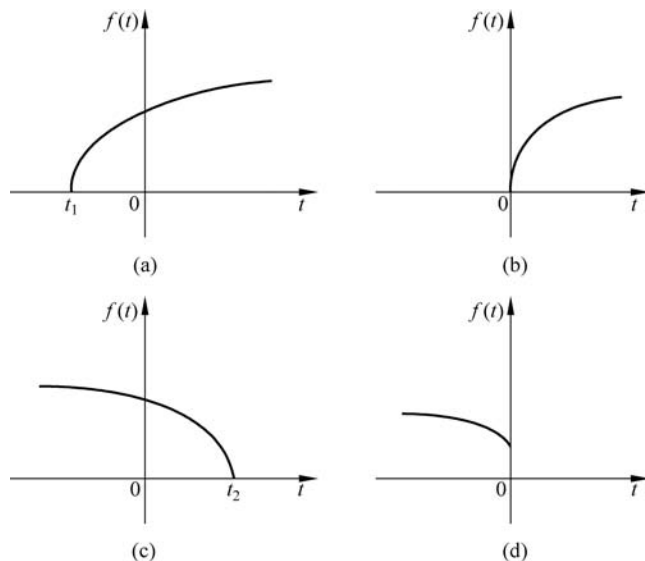


图 1.1.5 信号按所占时间范围分类示意图

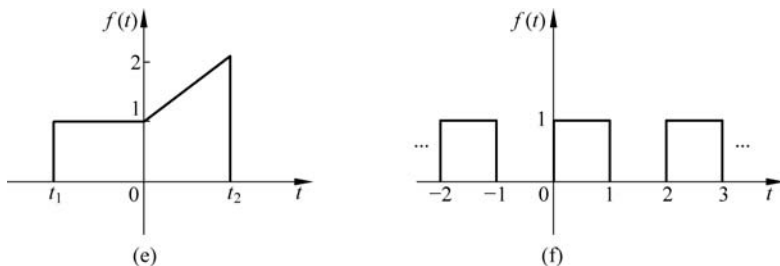


图 1.1.5 (续)

图 1.1.5(d)所示。

(3) 时限信号。若信号 $f(t)$ 满足条件：当 $t < t_1$ 和 $t > t_2$ ($t_2 > t_1$, t_1, t_2 均为实常数) 时 $f(t) \equiv 0$, 则称 $f(t)$ 为时限信号, 如图 1.1.5(e) 所示。

(4) 无时限信号。若信号 $f(t)$ 的自变量 t 在 $(-\infty, +\infty)$ 都有取值, 则称信号 $f(t)$ 为无时限信号, 如图 1.1.5(f) 所示的信号。一切周期信号均为无时限信号。

1.1.2 连续时间信号的基本运算

1. 连续时间信号的加、乘运算

连续时间信号 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 的加(代数加)信号 $y_1(t) = f_1(t) + f_2(t)$, 乘信号 $y_2(t) = f_1(t)f_2(t)$, 在 $t = t_0$ 时刻 (t_0 为实数) 的函数值, 等于信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 在该瞬时 ($t = t_0$) 的函数值之和、积, 即

$$y_1(t_0) = f_1(t_0) + f_2(t_0) \quad (1.1.8)$$

$$y_2(t_0) = f_1(t_0)f_2(t_0) \quad (1.1.9)$$

例如, 运用信号加、乘运算的定义式(1.1.8)、式(1.1.9)计算图 1.1.6(a)、(b) 所示信号 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 的和信号及乘积信号分别如图 1.1.6(c)、(d) 所示。

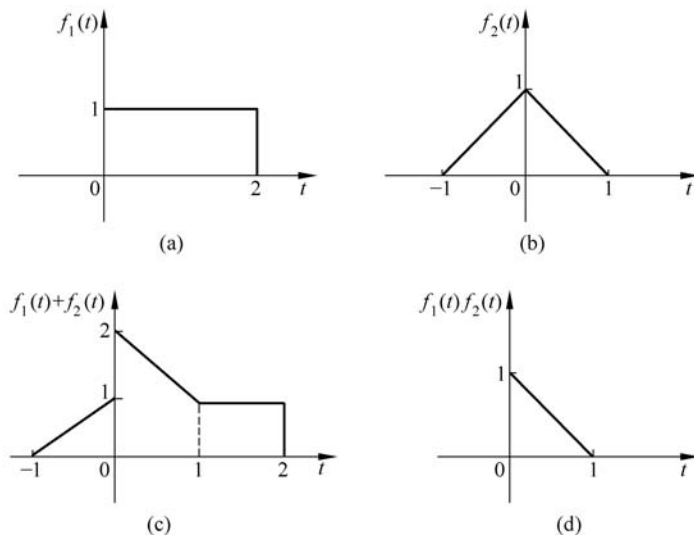


图 1.1.6 连续时间信号的加、乘运算例图



视频链接

2. 连续时间信号的反转运算

用 $-t$ 代替信号 $f(t)$ 中的独立变量 t , 得到信号 $f(t)$ 的反转信号 $f(-t)$, 反转信号 $f(-t)$ 的波形图与原信号 $f(t)$ 的波形图对称于纵轴。

例如, 若信号 $f(t)$ 如图 1.1.7(a) 所示, 则 $f(t)$ 的反转信号 $f(-t)$ 的波形图如图 1.1.7(b) 所示。

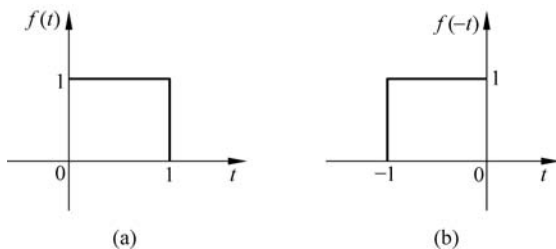


图 1.1.7 连续时间信号的反转运算波形例图

3. 连续时间信号的时移运算

用 $t-t_0$ (t_0 为实数) 代替信号 $f(t)$ 中的独立变量 t 得到信号 $f(t)$ 的时移信号 $f(t-t_0)$ 。当 $t_0 > 0$ 时, 信号 $f(t-t_0)$ 的波形图是信号 $f(t)$ 的波形图沿 t 轴右移 t_0 的结果; 当 $t_0 < 0$ 时, 信号 $f(t-t_0)$ 的波形图是信号 $f(t)$ 的波形图沿 t 轴左移 $|t_0|$ 的结果。

例如, 若信号 $f(t)$ 如图 1.1.8(a) 所示, 根据信号时移运算的定义可作出信号 $f(t-1.5)$ 、 $f(t+1)$ 的波形图分别如图 1.1.8(b)、(c) 所示。

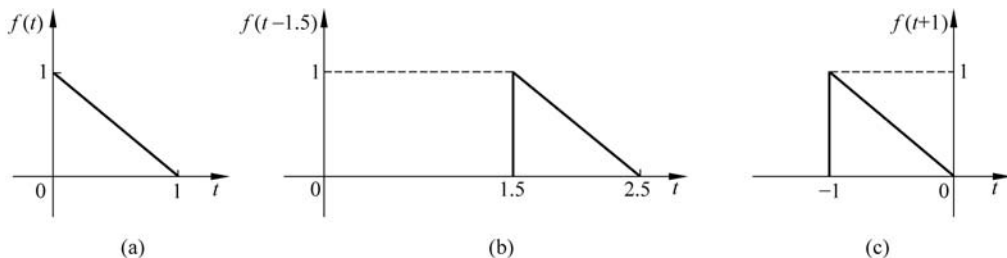


图 1.1.8 连续时间信号的时移运算波形例图

例 1.1.1 信号 $f(t)$ 如图 1.1.9(a) 所示, 试作出信号 $f(1-t)$ 的波形图。

显然, 此题需要用到反转、时移两种运算, 本例题将两种不同的运算顺序都表示出来, 希望可以帮助读者加深对独立变量 t 这一概念的理解。

解 1 先时移运算。用 $t+1$ 代替信号 $f(t)$ 中的独立变量 t , 得到时移信号 $f(t+1)$, 其波形图如图 1.1.9(b) 所示。

再反转运算。用 $-t$ 代替时移信号 $f(t+1)$ 中的独立变量 t 得到信号 $f(1-t)$, $f(1-t)$ 的波形图如图 1.1.9(c) 所示。

解 2 先反转运算。用 $-t$ 代替信号 $f(t)$ 中的独立变量 t , 得到反转信号 $f(-t)$, $f(-t)$ 的波形图如图 1.1.9(d) 所示。

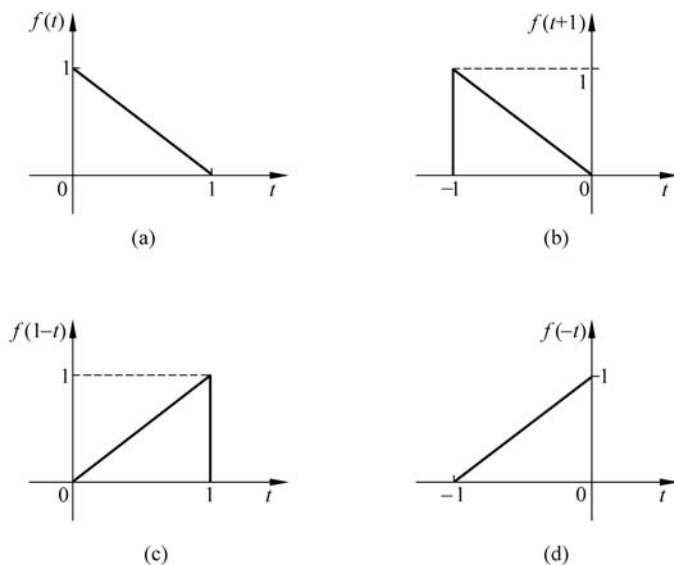


图 1.1.9 例 1.1.1 图

再时移运算。用 $t-1$ 代替反转信号 $f(-t)$ 中的独立变量 t , 得到信号 $f(1-t)$ 。 $f(1-t)$ 的波形图是 $f(-t)$ 波形图沿 t 轴右移 1 的结果, $f(1-t)$ 的波形图仍然如图 1.1.9(c) 所示。

4. 连续时间信号的尺度变换运算

用 at (a 为实常数, $a \neq 0$) 代替信号 $f(t)$ 中的独立变量 t , 得到信号 $f(t)$ 的尺度变换信号 $f(at)$ 。当 $a > 1$ 时, 信号 $f(at)$ 的波形图是信号 $f(t)$ 的波形图沿 t 轴压缩到 $\frac{1}{a}$ 的结果, 纵坐标不变; 当 $0 < a < 1$ 时, 信号 $f(at)$ 的波形图是信号 $f(t)$ 的波形图沿 t 轴扩展到 $\frac{1}{a}$ 的结果, 纵坐标不变。

例如, 已知信号 $f(t)$ 的波形图如图 1.1.10(a) 所示, 根据信号的尺度变换运算定义, 可得信号 $f\left(\frac{t}{2}\right)$ 、 $f(3t)$ 的波形图分别如图 1.1.10(b)、(c) 所示。

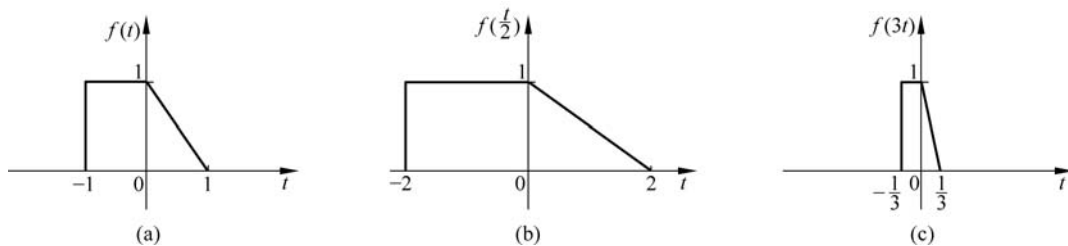


图 1.1.10 连续时间信号的尺度变换运算波形例图

例 1.1.2 信号 $f(t)$ 的波形图如图 1.1.11(a) 所示, 试作信号 $f(1-2t)$ 的波形图。

此题用到了反转、时移、尺度变换三种运算,可以经六种运算顺序得出 $f(1-2t)$ 的波形图。为简便起见,本书只给出了两种运算顺序,其余四种运算顺序可同理得出。

解 1 先用 $t+1$ 代替信号 $f(t)$ 中的独立变量 t ,得到信号 $f(t+1)$,波形图如图 1.1.11(b)所示。再用 $-t$ 代替信号 $f(t+1)$ 中的独立变量 t ,得到信号 $f(1-t)$,波形图如图 1.1.11(c)所示。最后用 $2t$ 代替信号 $f(1-t)$ 中的独立变量 t ,得到信号 $f(1-2t)$,信号 $f(1-2t)$ 的波形图如图 1.1.11(d)所示。

解 2 先用 $-t$ 代替信号 $f(t)$ 中的独立变量 t ,得到信号 $f(-t)$,波形图如图 1.1.11(e)所示。再用 $2t$ 代替 $f(-t)$ 中的独立变量 t ,得到信号 $f(-2t)$,波形图如图 1.1.11(f)所示。最后用 $t-\frac{1}{2}$ 代替信号 $f(-2t)$ 中的独立变量 t ,得到信号 $f(1-2t)$ 。作出 $f(1-2t)$ 的波形图仍然如图 1.1.11(d)所示。

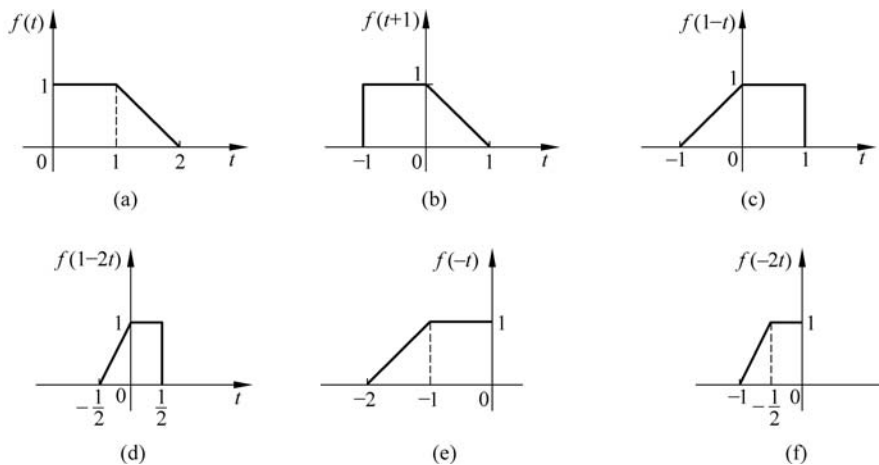


图 1.1.11 例 1.1.2 图

5. 信号的微分、积分运算

本书只讨论可以用函数描述的确定性信号,所以书中的信号与函数表示同一概念,其微积分运算的定义与高等数学相同,而且在后续章节中还会阐述阶跃信号及单位冲激信号的微积分。

定义符号

$$f^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \quad (1.1.10)$$

例如,信号 $f(t)$ 如图 1.1.12(a)所示,根据高等数学函数的微分运算的定义,可求得 $f'(t)$ 的波形图如图 1.1.12(b)所示。

1.1.3 常用连续时间信号

1. 连续时间单位阶跃信号 $u(t)$

定义连续时间单位阶跃信号

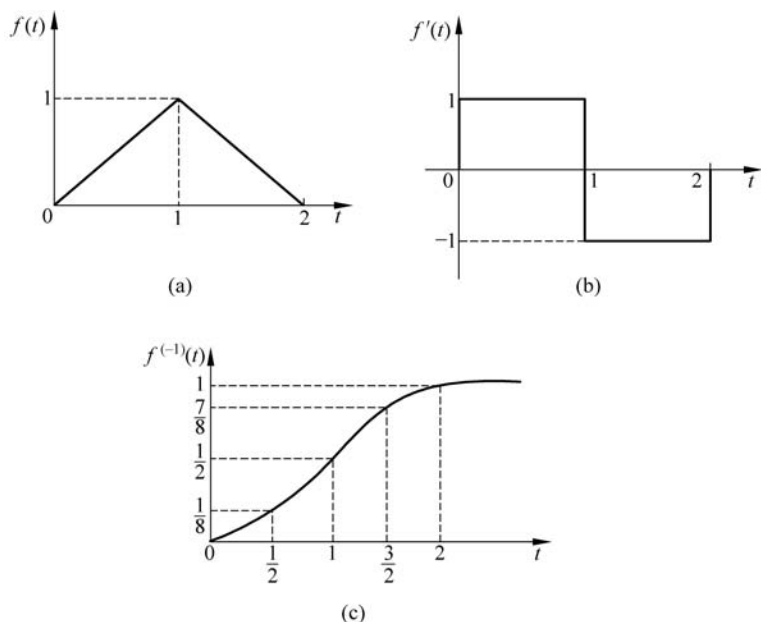
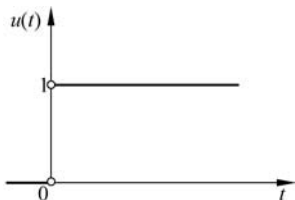


图 1.1.12 连续时间信号的微分运算例图

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1.1.11)$$

其波形图如图 1.1.13 所示。

图 1.1.13 连续时间单位阶跃信号 $u(t)$ 的波形图

例 1.1.3 信号 $f(t)$ 如图 1.1.14(a) 所示, 试分别作出信号 $f(t)u(t)$ 、 $f(t)u(t-1)$ 、 $f(t)u(-t)$ 、 $f(t)u(1-t)$ 的波形图。

解 单位阶跃信号 $u(t)$ 的波形图如图 1.1.14(b) 所示, 作信号的反转运算 $u(-t)$ 的波形图如图 1.1.14(c) 所示, 进行时移运算得 $u(t-1)$ 、 $u(1-t)$ 波形图分别如图 1.1.14(d)、(e) 所示。根据信号相乘的定义式 (1.1.9), 可得 $f(t)u(t)$ 、 $f(t)u(t-1)$ 、 $f(t)u(-t)$ 、 $f(t)u(1-t)$ 各波形图分别如图 1.1.14(f)~(i) 所示。

例 1.1.4 信号 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 如图 1.1.15 所示, 试分别写出用阶跃信号表示的信号 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 的表达式。

解 图 1.1.15(a) 所示信号除可以表示为 $f_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 外, 还可以用阶跃信号写为 $f_1(t) = u(t) - u(t-1)$ 。

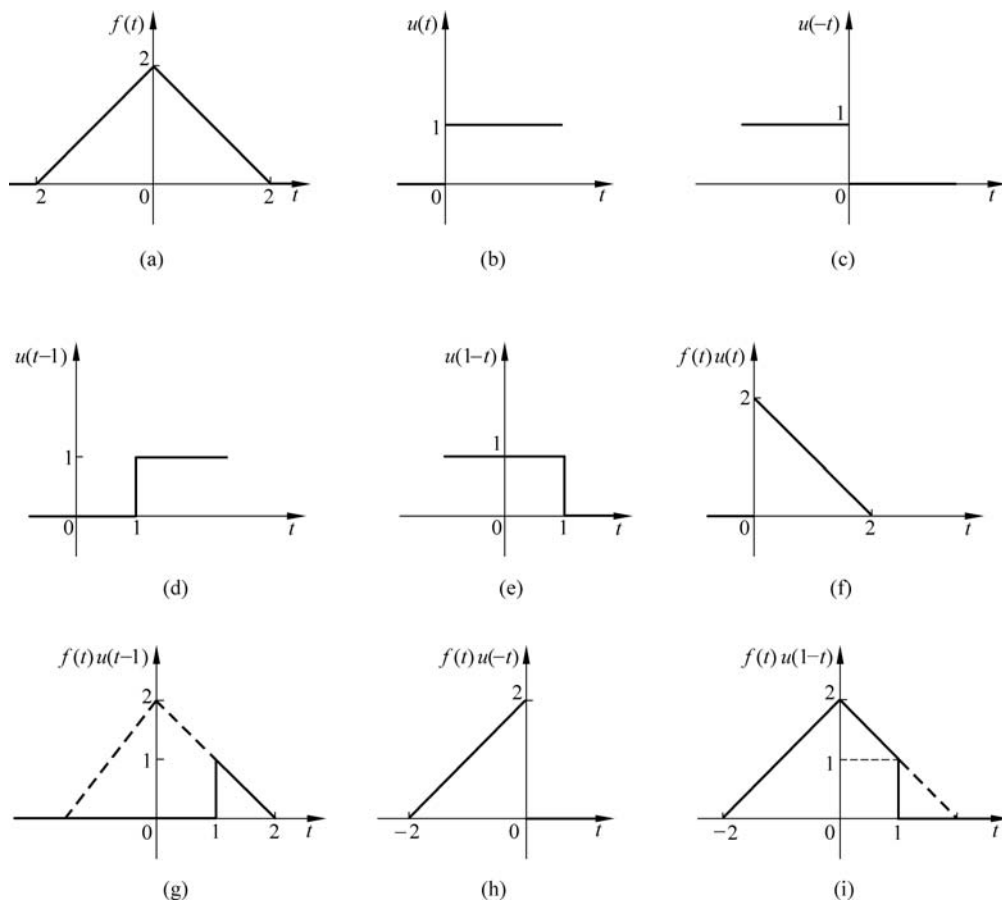


图 1.1.14 例 1.1.3 图

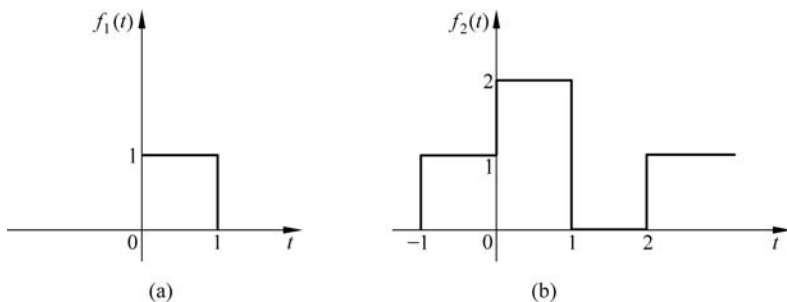


图 1.1.15 例 1.1.4 图

图 1.1.15(b)所示信号为

$$f_2(t) = u(t+1) + u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)$$

2. 门信号 $Ag_\tau(t-t_0)$

符号 $Ag_\tau(t-t_0)$ 表示门信号, 其中门高为 A , 门宽为 τ , 门的中心位置为 t_0 。例如门信号 $g_2(t)$, 门高为 1, 门宽是 2, 门的中心位置在 0。 $g_2(t) = u(t+1) - u(t-1)$, 波形图如