

“十四五”时期国家重点出版物出版专项规划·重大出版工程规划项目



变革性光科学与技术丛书

Polarized Light and Optical Systems (I)

偏振光和光学系统 (第一卷)

[美] 罗素·奇普曼 (Russell A. Chipman)

[美] 慧梓—蒂凡尼·林 (Wai-Sze Tiffany Lam) 著

[美] 嘉兰·杨 (Garam Young)

侯俊峰 张旭升 王东光 译

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是有关偏振光学及光学系统偏振设计和分析方面的一本系统性论著,讨论了偏振光基本理论和测量方法、偏振光线追迹和偏振像差理论,以及偏振像差理论在常用偏振元件和系统中的应用。全书共 27 章,分为两卷,其中第一卷为第 1~13 章,介绍光的偏振特性及其表征方法、偏振光干涉、琼斯矩阵、米勒矩阵、偏振测量术、菲涅耳公式、偏振光线追迹、光学光线追迹、琼斯光瞳和局部坐标系、菲涅耳像差、薄膜等内容;第二卷为第 14~27 章,介绍基于泡利矩阵的琼斯矩阵解析、近轴偏振像差、偏振像差对成像的影响、平移和延迟计算、倾斜像差、双折射光线追迹、基于偏振光线追迹矩阵的光束组合、单轴材料和元件、晶体偏振器、衍射光学元件、液晶盒、应力双折射、多阶延迟器及其延迟的不连续性等。本书内容非常丰富、翔实,特别是关于光学系统的偏振光线追迹、偏振像差分析及应用泡利矩阵进行偏振特性解析等部分内容,是作者对于偏振光学研究的最新成果。

本书可供从事光学工程、天文观测、空间遥感、材料科学、微纳结构科学、生物医学等领域的科研和工程技术人员参考阅读,也可作为相关专业的高年级本科生、研究生的教学参考书。

北京市版权局著作权合同登记号 图字:01-2022-0604

Polarized Light and Optical Systems/by Russell A. Chipman, Wai-Sze Tiffany Lam, Garam Young / ISBN: 978-1-4987-0056-6

Copyright© 2019 by CRC Press, Taylor & Francis Group

Authorized translation from English language edition published Routledge, a member of the Taylor & Francis Group. ; All rights reserved. 本书原版由 Taylor & Francis 出版集团旗下, Routledge 出版公司出版,并经其授权翻译出版。版权所有,侵权必究。

本书封面贴有 Taylor & Francis 公司防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。举报:010-62782989, beiqinquan@tup.tsinghua.edu.cn。

图书在版编目(CIP)数据

偏振光和光学系统. 第一卷/(美)罗素·奇普曼(Russell A. Chipman), (美)慧梓·蒂凡尼·林(Wai-Sze Tiffany Lam), (美)嘉兰·杨(Garam Young)著;侯俊峰,张旭升,王东光译. —北京:清华大学出版社,2023.6

(变革性光科学与技术丛书)

书名原文: Polarized Light and Optical Systems

ISBN 978-7-302-63378-5

I. ①偏… II. ①罗… ②慧… ③嘉… ④侯… ⑤张… ⑥王… III. ①偏振光—光学系统 IV. ①O436.3

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 068446 号

责任编辑:鲁永芳

封面设计:意匠文化·丁奔亮

责任校对:薄军霞

责任印制:宋 林

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

邮 编:100084

社 总 机:010-83470000

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:三河市龙大印装有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:29.75

字 数:724 千字

版 次:2023 年 8 月第 1 版

印 次:2023 年 8 月第 1 次印刷

定 价:189.00 元

产品编号:093817-01

丛书编委会

主 编

罗先刚 中国工程院院士,中国科学院光电技术研究所

编 委

周炳琨 中国科学院院士,清华大学

许祖彦 中国工程院院士,中国科学院理化技术研究所

杨国桢 中国科学院院士,中国科学院物理研究所

吕跃广 中国工程院院士,中国北方电子设备研究所

顾 敏 澳大利亚科学院院士、澳大利亚技术科学与工程院院士、
中国工程院外籍院士,皇家墨尔本理工大学

洪明辉 新加坡工程院院士,新加坡国立大学

谭小地 教授,北京理工大学、福建师范大学

段宣明 研究员,中国科学院重庆绿色智能技术研究院

蒲明博 研究员,中国科学院光电技术研究所

丛书序

光是生命能量的重要来源,也是现代信息社会的基础。早在几千年前人类便已开始了对光的研究,然而,真正的光学技术直到 400 年前才诞生,斯涅耳、牛顿、费马、惠更斯、菲涅耳、麦克斯韦、爱因斯坦等学者相继从不同角度研究了光的本性。从基础理论的角度看,光学经历了几何光学、波动光学、电磁光学、量子光学等阶段,每一阶段的变革都极大地促进了科学技术的发展。例如,波动光学的出现使得调制光的手段不再限于折射和反射,利用光栅、菲涅耳波带片等简单的衍射型微结构即可实现分光、聚焦等功能;电磁光学的出现,促进了微波和光波技术的融合,催生了微波光子学等新的学科;量子光学则为新型光源和探测器的出现奠定了基础。

伴随着理论突破,20 世纪见证了诸多变革性光学技术的诞生和发展,它们在一定程度上使得过去 100 年成为人类历史长河中发展最为迅速、变革最为剧烈的一个阶段。典型的变革性光学技术包括激光技术、光纤通信技术、CCD 成像技术、LED 照明技术、全息显示技术等。激光作为美国 20 世纪的四大发明之一(另外三项为原子能、计算机和半导体),是光学技术上的重大里程碑。由于其极高的亮度、相干性和单色性,激光在光通信、先进制造、生物医疗、精密测量、激光武器乃至激光核聚变等技术中均发挥了至关重要的作用。

光通信技术是近年来另一项快速发展的光学技术,与微波无线通信一起极大地改变了世界的格局,使“地球村”成为现实。光学通信的变革起源于 20 世纪 60 年代,高琨提出用光代替电流,用玻璃纤维代替金属导线实现信号传输的设想。1970 年,美国康宁公司研制出损耗为 20 dB/km 的光纤,使光纤中的远距离光传输成为可能,高琨也因此获得了 2009 年的诺贝尔物理学奖。

除了激光和光纤之外,光学技术还改变了沿用数百年的照明、成像等技术。以最常见的照明技术为例,自 1879 年爱迪生发明白炽灯以来,钨丝的热辐射一直是最常见的照明光源。然而,受制于其极低的能量转化效率,替代性的照明技术一直是人们不断追求的目标。从水银灯的发明到荧光灯的广泛使用,再到获得 2014 年诺贝尔物理学奖的蓝光 LED,新型节能光源已经使得地球上的夜晚不再黑暗。另外,CCD 的出现为便携式相机的推广打通了最后一个障碍,使得信息社会更加丰富多彩。

20 世纪末以来,光学技术虽然仍在快速发展,但其速度已经大幅减慢,以至于很多学者认为光学技术已经发展到瓶颈期。以大口径望远镜为例,虽然早在 1993 年美国就建造出 10 m 口径的“凯克望远镜”,但迄今为止望远镜的口径仍然没有得到大幅增加。美国的 30 m 望远镜仍在规划之中,而欧洲的 OWL 百米望远镜则由于经费不足而取消。在光学光刻方面,受到衍射极限的限制,光刻分辨率取决于波长和数值孔径,导致传统 i 线(波长为 365 nm)光刻机单次曝光分辨率在 200 nm 以上,而每台高精度的 193 光刻机成本达到数亿元人民币,且单次曝光分辨率也仅为 38 nm。

在上述所有光学技术中,光波调制的物理基础都在于光与物质(包括增益介质、透镜、反射镜、光刻胶等)的相互作用。随着光学技术从宏观走向微观,近年来的研究表明:在小于波长的尺度上(即亚波长尺度),规则排列的微结构可作为人造“原子”和“分子”,分别对入射光波的电场和磁场产生响应。在这些微观结构中,光与物质的相互作用变得比传统理论中预言的更强,从而突破了诸多理论上的瓶颈难题,包括折反射定律、衍射极限、吸收厚度-带宽极限等,在大口径望远镜、超分辨成像、太阳能、隐身和反隐身等技术中具有重要应用前景。譬如,基于梯度渐变的表面微结构,人们研制了多种平面的光学透镜,能够将几乎全部入射光波聚集到焦点,且焦斑的尺寸可突破经典的瑞利衍射极限,这一技术为新型大口径、多功能成像透镜的研制奠定了基础。

此外,具有潜在变革性的光学技术还包括量子保密通信、太赫兹技术、涡旋光束、纳米激光器、单光子和单像元成像技术、超快成像、多维度光学存储、柔性光学、三维彩色显示技术等。它们从时间、空间、量子态等不同维度对光波进行操控,形成了覆盖光源、传输模式、探测器的全链条创新技术格局。

值此技术变革的肇始期,清华大学出版社组织出版“变革性光科学与技术丛书”,是本领域的一大幸事。本丛书的作者均为长期活跃在科研第一线,对相关科学和技术的历史、现状和发展趋势具有深刻理解的国内外知名学者。相信通过本丛书的出版,将会更为系统地梳理本领域的技术发展脉络,促进相关技术的更快速发展,为高校教师、学生以及科学爱好者提供沟通和交流平台。

是为序。

罗先刚

2018年7月



目 录

作者简介	15
致谢	16
前言	17
这本书是怎么产生的	19
建议的课程	21
章节导览	23
学习特征	37
缩略语表	39

第 1 章

引言和概述	1
1.1 偏振光	1
1.2 偏振态和庞加莱球	3
1.3 偏振元件和偏振特性	5
1.4 偏振测量术和椭偏测量术	6
1.5 各向异性材料	9
1.6 光学系统中的典型偏振问题	10
1.6.1 偏振器的角度相关性	10
1.6.2 延迟器的波长和角度相关性	10
1.6.3 透镜中的应力双折射	12
1.6.4 液晶显示器和投影仪	13
1.7 光学设计	14
1.7.1 偏振光线追迹	18

1.7.2	透镜的偏振像差	19
1.7.3	高数值孔径波前	21
1.8	历史发展回顾	23
1.9	偏振光学参考书籍	23
1.10	习题集	24
1.11	参考文献	25

第2章

偏振光	26
2.1 偏振光的描述	26
2.2 偏振矢量	27
2.3 偏振矢量的性质	28
2.4 在各向同性介质中传播	30
2.5 磁场、光通量和偏振光通量	30
2.6 琼斯矢量	31
2.7 总相位的演化	34
2.8 琼斯矢量的旋转	35
2.9 线偏振光	35
2.10 圆偏振光	36
2.11 椭圆偏振光	37
2.12 正交琼斯矢量	39
2.13 基矢量的改变	40
2.14 琼斯矢量的相加	41
2.15 偏振光通量分量	41
2.16 偏振矢量转换为琼斯矢量	42
2.17 递减相位符号规则	44
2.18 递增相位符号规则	45
2.19 光源的偏振态	45
2.20 习题集	48
2.21 参考文献	50

第3章

斯托克斯参量和庞加莱球	51
3.1 多色光的描述	51
3.2 斯托克斯参量的唯象定义	52
3.3 非偏振光	53
3.4 部分偏振光和偏振度	53
3.5 光谱带宽	57

3.6	偏振椭圆的旋转	58
3.7	线偏振斯托克斯参量	59
3.8	椭圆偏振参量	60
3.9	正交偏振态	60
3.10	斯托克斯参量和琼斯矢量的符号规则	61
3.11	偏振光通量及斯托克斯参量和琼斯矢量之间的变换	61
3.12	斯托克斯参量的非正交坐标系	64
3.13	庞加莱球	65
3.14	庞加莱球的平面展开	68
3.15	总结和结论	69
3.16	习题集	70
3.17	参考文献	72

第 4 章

偏振光干涉	74
4.1 引言	74
4.2 光波的叠加	75
4.3 干涉仪	76
4.4 近似平行单色平面波的干涉	77
4.5 大角度平面波干涉	81
4.6 全息术中的偏振考虑	82
4.7 偏振光束的叠加	83
4.7.1 两束不同频率的偏振光叠加	83
4.7.2 多色光束的叠加	85
4.7.3 一个高斯波包的例子	88
4.8 总结	92
4.9 习题集	92
4.10 参考文献	95

第 5 章

琼斯矩阵及偏振特性	96
5.1 引言	96
5.2 二向色性和双折射材料	97
5.3 二向衰减和延迟	97
5.3.1 二向衰减	97
5.3.2 延迟	99
5.4 琼斯矩阵	101
5.4.1 本征偏振	102

5.4.2	琼斯矩阵标记法	104
5.4.3	琼斯矩阵的旋转	104
5.5	偏振器和二向衰减器的琼斯矩阵	105
5.5.1	偏振器的琼斯矩阵	105
5.5.2	线性二向衰减器琼斯矩阵	106
5.6	延迟器的琼斯矩阵	108
5.6.1	线性延迟器的琼斯矩阵	108
5.6.2	圆延迟器的琼斯矩阵	111
5.6.3	涡旋延迟器	112
5.7	广义二向衰减器和延迟器	113
5.7.1	线性二向衰减器	114
5.7.2	椭圆二向衰减器	114
5.7.3	椭圆延迟器	115
5.8	非偏振琼斯矩阵的振幅和相位变化	117
5.9	琼斯矩阵的矩阵性质	117
5.9.1	厄米矩阵: 二向衰减	117
5.9.2	酉矩阵和酉变换: 延迟器	118
5.9.3	极分解法: 将延迟和二向衰减分开	121
5.10	递增相位符号约定	124
5.11	总结	124
5.12	习题集	127
5.13	参考文献	131

第 6 章

米勒矩阵	133
6.1 引言	133
6.2 米勒矩阵	133
6.3 偏振元件序列	134
6.4 非偏振的米勒矩阵	135
6.5 偏振元件绕光束方向的旋转	135
6.6 延迟器的米勒矩阵	137
6.7 偏振器和二向衰减器的米勒矩阵	143
6.7.1 基本的偏振器	143
6.7.2 透过率和二向衰减	146
6.7.3 偏振度	148
6.7.4 二向衰减器	149
6.8 庞加莱球的操作	151
6.8.1 延迟器在庞加莱球面上的操作	151

6.8.2	旋转线性延迟器的操作	154
6.8.3	偏振器和二向衰减器的操作	154
6.8.4	偏振特性的表示	155
6.9	弱偏振元件	157
6.10	非退偏的米勒矩阵	158
6.11	退偏	159
6.11.1	退偏指数和平均偏振度	161
6.11.2	偏振度面和偏振度图	162
6.11.3	米勒矩阵的物理可实现性测试	164
6.11.4	弱退偏元件	165
6.11.5	米勒矩阵相加	166
6.12	琼斯矩阵和米勒矩阵的关联	167
6.12.1	使用张量积将琼斯矩阵转换为米勒矩阵	167
6.12.2	使用泡利矩阵将琼斯矩阵转换为米勒矩阵	170
6.12.3	将米勒矩阵转换为琼斯矩阵	171
6.13	用米勒矩阵实现光线追迹	173
6.13.1	折射的米勒矩阵	174
6.13.2	反射的米勒矩阵	174
6.14	米勒矩阵的起源	175
6.15	习题集	176
6.16	参考文献	179

第 7 章

偏振测量术	181
7.1 引言	181
7.2 偏振测量仪能看到什么?	182
7.3 偏振测量仪	182
7.3.1 光测量偏振测量仪	183
7.3.2 样品测量偏振测量仪	183
7.3.3 完全的和不完全的偏振测量仪	183
7.3.4 偏振发生器和偏振分析器	183
7.4 偏振测量和数据约简的数学方法	184
7.4.1 斯托克斯偏振测量术	184
7.4.2 米勒矩阵元素的测量	186
7.4.3 米勒数据约简矩阵	187
7.4.4 零空间与伪逆	190
7.5 偏振测量仪的分类	198
7.5.1 时序偏振测量仪	198

7.5.2	调制偏振测量仪	198
7.5.3	分振幅	199
7.5.4	分孔径	199
7.5.5	成像偏振测量仪	199
7.6	斯托克斯偏振测量仪配置	200
7.6.1	同时偏振测量	200
7.6.2	旋转元件偏振测量术	205
7.6.3	可变延迟器和固定偏振器组合的偏振测量仪	209
7.6.4	光弹调制器偏振测量仪	210
7.6.5	MSPI 和 MAIA 成像偏振测量仪	212
7.6.6	实例: 大气偏振图像	214
7.7	样品测量偏振测量仪	217
7.7.1	偏光镜	217
7.7.2	米勒偏振测量术配置	225
7.8	解读米勒矩阵图像	228
7.9	校准偏振测量仪	231
7.10	偏振图像中的伪影	232
7.10.1	像素未对齐	233
7.11	优化偏振测量仪	234
7.12	习题集	236
7.13	致谢	242
7.14	参考文献	242

第 8 章

菲涅耳公式	246
8.1 引言	246
8.2 光的传播	247
8.2.1 平面波和光线	247
8.2.2 入射面	247
8.2.3 均匀各向同性界面	247
8.2.4 介质中的光传播	248
8.3 菲涅耳公式	249
8.3.1 s 偏振分量和 p 偏振分量	249
8.3.2 振幅系数	250
8.3.3 菲涅耳公式	250
8.3.4 强度系数	251
8.3.5 正入射	253
8.3.6 布儒斯特角	255

8.3.7	临界角	256
8.3.8	强度和相位随入射角的变化	256
8.3.9	具有菲涅耳系数的琼斯矩阵	257
8.4	菲涅耳折射和反射	257
8.4.1	介电折射	257
8.4.2	外反射	258
8.4.3	内反射	259
8.4.4	金属反射	261
8.5	菲涅耳系数的近似表示	265
8.5.1	菲涅耳系数的泰勒级数	265
8.6	总结	266
8.7	习题集	267
8.8	参考文献	269

第 9 章

偏振光线追迹计算	270
9.1 偏振光线追迹矩阵 $\mathbf{P}$ 的定义	271
9.2 使用正交变换的偏振光线追迹矩阵形式	272
9.3 延迟器的偏振光线追迹矩阵例子	276
9.4 采用奇异值分解法计算二向衰减	280
9.5 实例：带有偏振分束器的干涉仪	281
9.5.1 参考光路光线追迹	282
9.5.2 测试光路光线追迹	284
9.5.3 过检偏器的光线追迹	285
9.5.4 两个光路的累积 $\mathbf{P}$ 矩阵	286
9.6 偏振光线追迹矩阵的叠加形式	288
9.6.1 干涉仪例子的 $\mathbf{P}$ 矩阵合并	289
9.7 例子：空心角锥镜	290
9.8 总结	293
9.9 习题集	294
9.10 参考文献	299

第 10 章

光学光线追迹	301
10.1 引言	301
10.2 光线追迹的目的	302
10.3 光学系统的技术指标	306
10.3.1 面形方程	307

10.3.2	孔径	308
10.3.3	光学面	308
10.3.4	虚拟面	308
10.4	光束的技术规格	309
10.5	系统的描述	309
10.5.1	物面	309
10.5.2	孔径光阑	310
10.5.3	入瞳和出瞳	310
10.5.4	出瞳的重要性	311
10.5.5	边缘光线和主光线	312
10.5.6	数值孔径和拉格朗日不变量	313
10.5.7	光学扩展量	313
10.5.8	偏振光	315
10.6	光线追迹	316
10.6.1	光线截点	316
10.6.2	光线与面的多重交点	318
10.6.3	光程长度	318
10.6.4	反射和折射	318
10.6.5	偏振光线追迹	320
10.6.6	s 分量和 p 分量	321
10.6.7	振幅系数和界面琼斯矩阵	322
10.6.8	偏振光线追迹矩阵	323
10.7	波前分析	329
10.7.1	归一化坐标	329
10.7.2	波像差函数	329
10.7.3	偏振像差函数	330
10.7.4	像差函数的评价	331
10.7.5	赛德尔波像差的展开	334
10.7.6	泽尼克多项式	336
10.7.7	波前质量	339
10.7.8	偏振质量	340
10.8	非序列光线追迹	341
10.9	相干和非相干光线追迹	341
10.9.1	用米勒矩阵进行偏振光线追迹	342
10.10	偏振光线追迹的使用	344
10.11	偏振光线追迹简史	345
10.12	总结和结论	346
10.13	习题集	346
10.14	附录: 手机镜头结构参数	350

10.15 参考文献·····	352
-----------------	-----

第 11 章

琼斯光瞳和局部坐标系·····	356
11.1 引言：用于入瞳和出瞳的局部坐标系 ·····	356
11.2 局部坐标 ·····	357
11.3 偶极坐标 ·····	358
11.4 双极坐标 ·····	362
11.5 高数值孔径波前 ·····	367
11.6 将 P 光瞳转变为琼斯光瞳 ·····	368
11.7 例子：手机镜头像差 ·····	370
11.8 偶极坐标与双极坐标的波像差函数差别 ·····	371
11.9 总结 ·····	372
11.10 习题集·····	373
11.11 参考文献·····	375

第 12 章

菲涅耳像差·····	376
12.1 引言 ·····	376
12.2 未镀膜单透镜 ·····	377
12.3 折光反射镜 ·····	383
12.4 反射镜组合 ·····	389
12.5 卡塞格林望远镜 ·····	397
12.6 菲涅耳棱体 ·····	401
12.7 小结 ·····	402
12.8 习题集 ·····	403
12.9 参考文献 ·····	404

第 13 章

薄膜·····	406
13.1 引言 ·····	406
13.2 单层薄膜 ·····	407
13.2.1 减反膜 ·····	409
13.2.2 理想单层减反膜 ·····	409
13.2.3 金属分束器 ·····	410
13.3 多层薄膜 ·····	412
13.3.1 算法 ·····	412

13.3.2 $\lambda/4$ 和 $\lambda/2$ 膜 413

13.3.3 增反膜 414

13.3.4 偏振分束器 416

13.4 对波前像差的影响 421

13.5 相位不连续性 423

13.6 小结 424

13.7 附录：单层膜公式的推导 425

13.8 习题集 427

13.9 参考文献 428

作者简介

罗素·奇普曼(Russell A. Chipman), 博士, 亚利桑那大学光学科学教授, 也是日本宇都宫大学光学研究与教育中心(CORE)的客座教授。他在这两所大学教授偏振光、偏振测量和偏振光学设计课程。奇普曼教授获得麻省理工学院(MIT)物理学学士学位, 以及亚利桑那大学光学科学硕士和博士学位。他是美国光学学会(OSA)和国际光学与光子学学会(SPIE)的会员。2015年, 他获得了 SPIE 的 2007 G. G. Stokes 偏振测量研究奖和 OSA 的约瑟夫·夫琅禾费奖/罗伯特·伯利光学工程奖。他是美国航天局喷气推进实验室气溶胶多角度成像仪的联合研究员, 该偏振测量仪计划于 2021 年前后发射到地球轨道, 用于监测城市的气溶胶和污染。他还在为其他 NASA 系外行星和遥感任务开发紫外和红外偏振仪试验样机和分析方法。他最近专注于开发 Polaris-M 偏振光线追迹代码, 该软件可分析包含各向异性材料、电光调制器、衍射光学元件、偏振散射光和许多其他效应的光学系统。他的爱好包括徒步旅行、钻研日语、养兔子和听音乐。

慧梓-蒂凡尼·林(Wai-Sze Tiffany Lam), 博士, 在香港出生和长大。她目前是脸书 Oculus 研究项目的光学科学家。她在亚利桑那大学获得了光学工程学士学位和光学科学硕士和博士学位。她为双折射和光学旋光元件、具有应力双折射的元件、晶体延迟器和偏振器中的像差以及液晶盒的建模开发了稳健的光学建模和偏振仿真算法。其中许多算法构成了艾里光学公司销售的商业光线追迹软件 Polaris-M 的基础。

嘉兰·杨(Garam Young), 博士, 毕业于韩国首尔国立大学获得物理学学士学位, 随后获得亚利桑那大学光学科学学院的博士学位, 还获得了毕业告别演讲和优秀研究生荣誉。然后, 她在帕萨迪纳市的 Synopsys 公司开发 CODE V 和 LightTools 的偏振特性和优化特性, 目前在旧金山湾区担任光学和照明工程师。她的丈夫和女儿让她在家里忙个不停。

致 谢

我们的家人在我们写这本书的过程中提供了如此多的支持,他们是 Laure, Peter, Kin Lung, Tek Yin, Wai Kwan, Stefano 和 Sofia。

特别感谢亚利桑那大学光学科学学院、喷气推进实验室、宇都宫大学光学研究和教育中心、Oculus 研发实验室和 Nalux 有限公司。

如果没有这么多同事的帮助,这本书是不可能完成的,其中包括:Lloyd Hillman, Steve McClain, Jim McGuire, James B. Breckinridge, Stacey Sueoka, Christine Bradley, Brian Daugherty, Scott Tyo, Anna-Britt Mahler, Scott McEldowney, Michihisa Onishi, Hannah Nobel, Paula Smith, Matthew Smith, Kyle Hawkins, Meredith Kupinski, Lisa Li, Dennis Goldstein, Shih-Yau Lu, Karen Twietmeyer, David Chenault, John Gonglewski, Yukitoshi Otani, Ashley Gasque, Larry Pezzaniti, Robert Galter, Nasrat Raouf, Glenn Boreman, David Diner, Greg Smith, Rolland Shack, Dan Reiley, Angus Macleod, Cindy Gardner, Stanley Pau, David Voeltz, Ab Davis, Joseph Shaw, Kira Hart, James C. Wyant, Amy Phillips, Tom Brown, John Stacey, Suchandra Banerjee, Brian DeBoo, David Salyer, Toyohiko Yatagai, Julie Gillis, Alba Peinado, Jeff Davis, Juliana Richter, Jack Jewell, Alex Erstad, Chanda Bartlett-Walker, Jaden Bankhead, Kazuhiko Oka, Wei-Liang Hsu, Adriana Stohn, Eustace Dereniak, Chikako Sugaya, Justin Wolfe, John Greivenkamp, Momoka Sugimura, Erica Mohr, Alex Schluntz, Charles LaCasse, Jason Auxier, Karlton Crabtree, Israel Vaughn, Pierre Gerligand, Jose Sasian, Ami Gupta, Ann Elsner, Juan Manuel Lopez, Kurt Denninghoff, Toru Yoshizawa, Kyle Ferrio, Tom Bruegge, Bryan Stone, James Harvey, Brian Cairns, Charles Davis, Adel Joobeur, Robert Shannon, Robert Dezmelyk, Matt Dubin, Quinn Jarecki, Masafumi Seigo, Tom Milster, James Hadaway, Dejian Fu, Steven Burns, James Trollinger Jr., Beth Sorinson, Mike Hayford, Jennifer Parsons, Johnathan Drewes, Bob Breault, Rodney Fuller, Peter Maymon, Alan Huang, Jacob Krause, Kasia Sieluzycka, Jurgen Jahns, Phillip Anthony, Aristide Dogariu, Michaela May, Jon Herlocker, Robert Pricone, Charlie Hornback, Krista Drummond, Barry Cense, Lena Wolfe, Neil Beaudry, Virginia Land, Noah Gilbert, Helen Fan, Eugene Waluschka, Phil McCulloch, Thomas Germer, Thiago Jota, Morgan Harlan, Tracy Gin, Cedar Andre, Dan Smith, Victoria Chan, Lirong Wang, Christian Brosseau, Andre Alanin, Graham Myhre, Mona Haggard, Eugene W. Cross, Ed West, Shinya Okubo, Matt Novak, Andrew Stauer, Conrad Wells, Michael Prise, Caterina Ubacch, David Elmore, Oersted Stavroudis, Weilin Liu, Tyson Ririe, Tom Burleson, Long Yang, Sukumar Murali, Julia Craven, Goldie Goldstein, Adoum Mahamat, Ravi Kinnera, Livia Zarnescu, Robert Rodgers, Randy Gove, Gordon Knight, Randall Hodgeson, Dan Brown, Nick Craft, Stephen Kupiac, Graeme Duthie, John Caulfield Jr., Joseph Shamir, Ken Cardell, and Bill Galloway。



前言

本书为本科生和研究生偏振光课程教材,该课程已在亚利桑那大学光学科学学院开展和完善了约十年。本书还可作为光学工程师和光学设计师在构建偏振测量仪、设计严格偏振光学系统以及为各种目的操控偏振光方面的参考书。

偏振是液晶显示器、三维(3D)电影、先进遥感卫星、微光刻系统和许多其他产品的核心技术。应用偏振光的光学系统其复杂性越来越大,由此,用于仿真和设计的工具也迅速发展起来了。更精确和复杂的偏振器、波片、偏振分束器和薄膜的发展为设计师和科学家提供了新的选择,也带来了许多仿真上的挑战。

与蜜蜂和蚂蚁不同,人类本质上是偏振视盲的。人类看不到天空、水和自然界其他地方丰富而微妙的偏振信息。同样,我们也无法看到偏振光在透过挡风玻璃、眼镜和所有光学系统时是如何变化和演变的。因此,学生往往难以理解偏振对光学系统设计、计量、成像、大气光学以及光在组织中传播的重要性。本书通过将偏振光的基本原理与光学工程师和设计师的实践结合起来,就这些技术背后的光学知识提供了指导。

偏振涉及多达 16 个自由度:线偏振、圆偏振和椭圆偏振、二向衰减、延迟和退偏。这些自由度对我们来说是不可见的,因此可能看起来很抽象。在与学生的讨论中,我们偶尔会听到偏振被认为是复杂的、困难的,而且经常被误解。不幸的是,这种情况经常发生,因为许多偏振概念是在仓促和过于简化的处理中教授的。

本书包含对偏振光及偏振光学系统的详细讨论,以澄清作者发现的容易产生混淆的几个主题,以及通常被忽视的以下主题:

- 电磁场和菲涅耳方程的符号约定
- 用琼斯算法在横向平面局部坐标系中处理偏振光
- 许多微妙的相位问题
- 使用矩阵指数,以一种新的更简单的方式定义延迟的三个自由度和二向衰减的三个自由度
- 斯托克斯参数和米勒矩阵的非正交坐标系
- 将琼斯或米勒算法应用于三维光线追迹光学系统,特别是用于杂散光或组织光学

为了解决这些问题,我们开发了一种新的教学方法,并在课堂上进行了测试。这种方法从光传播的三维方法开始。光在光学系统中以任意方向传播,用数学对此进行处理。但琼斯矩阵和米勒矩阵仅描述沿 z 轴的传播。重新定位此 z 轴,使其成为局部坐标,会带来一些重要问题,尤其对于反射的描述。这里,我们教授了三维偏振光线追迹矩阵,它简化了光学系统和偏振元件的分析。然后,琼斯矢量和琼斯矩阵被视为一个有用的特殊情形。这种三维方法听起来可能更复杂,但实际上它使偏振计算更简单。我们开始喜欢这种三维方法,因为它解决了长期以来关于琼斯矩阵和正入射反射的坐标相关悖论!

在许多入门光学课程中,普遍介绍了偏振,但很少再详细讨论。经常介绍菲涅耳方程,但其结果却被忽略了。因此,本书给出了描述菲涅耳方程如何影响光通过透镜和反射镜以及成像的详细研究。通过学习偏振光的衍射和成像,学生可逐步了解菲涅耳方程如何改变点扩散函数的结构,以及偏振态如何在点物的像中变化。

在光学工程中,偏振元件通常被视为一个独立的子系统。偏振的数学方法,即琼斯演算和米勒演算,一直与一阶光学、像差理论、透镜设计的数学方法分开,并且在很大程度上也与干涉和衍射分开。早期对偏振的研究主要集中在琼斯演算、米勒演算和偏振元件上。本书将偏振元件视为光学元件,也将光学元件视为偏振元件。透镜和反射镜系统的特性随波长、角度和位置而变化,这些就是像差。类似地,偏振元件的偏振特性随波长、角度和位置而变化,这些就是偏振像差。正如光学设计师在传统光学设计中需要对光程长度进行详细计算一样,偏振光线追迹也可以对偏振特性进行类似的详细计算。

现在大多数光学设计程序都提供了偏振光线追迹计算,因此现在许多用户更需要了解偏振光在光学系统中传播的细微之处,以便成功使用偏振光线追迹软件,并能够清楚地表达结果。到目前为止,偏振光线追迹尚未成为光学课程的一部分。为了解决这一问题,我们为讲师提供了材料,将课程建立为以光学系统中的偏振为基础,而不是把偏振作为一个子系统。本书通过讲授偏振元件、偏振元件序列、偏振测量、菲涅耳方程和各向异性材料的基础知识来满足这些需求。

偏振元件从来都不是理想的。所提出的理论和分析方法便于人们深入理解常见光学元件(如透镜、折轴反射镜和棱镜)的偏振效应。因此,本书在偏振像差方面投入了相当大的篇幅:波片的延迟随入射角和波长的变化,以及线栅、偏振片和格兰-泰勒偏振器的角度相关性。

为了完善本书对光学系统的论述,本书提供了光线追迹算法和近轴光学的概述,并提供了足够的材料,使来自光学以外的科学家和工程师熟悉光线追迹算法的基本概念。本书中的许多示例系统都是用我们内部研究的偏振光线追迹软件 Polaris-M 计算的,该软件基于三维偏振光线追迹矩阵。

我们觉得这些概念很有趣,希望我们的魅力能传达给读者。几何是数学中最令人愉悦的领域之一,偏振与光学系统的结合提供了大量的几何问题和见解。对于光学设计师来说,从标量波前像差函数(一个自由度,光程长度)的面转移到八维琼斯光瞳及其高维形状是一大步。但一旦人们习惯了二向衰减像差和延迟像差,将塞德尔像差和泽尼克像差推广到八维空间就具有极大的美和对称性。我们在对偏振像差的研究中,在琼斯演算结构中给出了这个八维琼斯矩阵空间的逐步指导。

罗素·奇普曼
慧梓·蒂凡尼·林
嘉兰·杨

这本书是怎么产生的

第一作者罗素·奇普曼讲授偏振光学已有 30 多年,同时在光学设计、偏振测量和偏振器件领域开展了广泛的偏振研究项目。多年来,他的研究优先于书籍写作,但课程材料获得了稳步发展和讲授。

从 2006 年开始,嘉兰·杨撰写了一篇关于偏振光线追迹的论文,在此过程中,偏振光线追迹中围绕相位、延迟和倾斜像差的许多潜在问题被揭示出来,并澄清了深层次的问题。这些进展致使亚利桑那州科学基金会支持编写一个研究偏振光线追迹的程序 Polaris-M,以演示这些新的偏振光线追迹方法。蒂凡尼·林与史蒂夫·麦克莱恩(Steve McClain)共同负责各向异性材料光线追迹算法的开发和测试,生成了许多极具指导意义的偏振光线追迹示例,并开发了双折射光线追迹的特殊处理方法。

本书是第一作者对于偏振像差研究的顶峰,该项研究始于 1982 年,是在喷气推进实验室的吉姆·怀恩特(Jim Wyant)和吉姆·布雷金里奇(Jim Breckinridge)指导下在亚利桑那大学光学研究生院开展的。在奇普曼的教材和研究经验、杨的偏振光线追迹论文和林的各向异性光线追迹论文中,这一雄心勃勃项目的各个部分都已就绪。这不仅仅是一本关于偏振光和偏振演算的书,它还将引导读者了解光学系统的现代观点,即光学系统中的一切都是偏振元件。



建议的课程

根据多年来讲授这门课程的经验,作者安排了各章的逻辑顺序。该顺序的组织是为了在课堂上自然流畅。这些章节从简单到复杂,从基础的概念到更实用的概念。根据课程目标,可以选择不同的章节顺序。以下是三个建议的课程:粉色突出显示的是(1)本科偏振光学课程,蓝色突出显示的是(2)研究生偏振光学课程,紫色突出显示的是(3)偏振光学设计高级课程。

本科生课程:偏振的光

- | | |
|---------------------|---------------------|
| 1. 引言和概述 | 15. 近轴偏振像差 |
| 2. 偏振光 | 16. 有偏振像差的成像 |
| 3. 斯托克斯参量和庞加莱球 | 17. 平移和延迟计算 |
| 4. 偏振光干涉 | 18. 倾斜像差 |
| 5. 琼斯矩阵及偏振特性 | 19. 双折射光线追迹 |
| 6. 米勒矩阵 | 20. 用偏振光线追迹矩阵进行光束组合 |
| 7. 偏振测量术 | 21. 单轴材料和元件 |
| 8. 菲涅耳公式 | 22. 晶体偏振器 |
| 9. 偏振光线追迹计算 | 23. 衍射光学元件 |
| 10. 光学光线追迹 | 24. 液晶盒 |
| 11. 琼斯光瞳和局部坐标系 | 25. 应力诱导双折射 |
| 12. 菲涅耳像差 | 26. 多阶延迟器和不连续性之谜 |
| 13. 薄膜 | 27. 总结和结论 |
| 14. 基于泡利矩阵的琼斯矩阵数据约简 | |

研究生课程:偏振光学

- | | |
|---------------------|---------------------|
| 1. 引言和概述 | 15. 近轴偏振像差 |
| 2. 偏振光 | 16. 有偏振像差的成像 |
| 3. 斯托克斯参量和庞加莱球 | 17. 平移和延迟计算 |
| 4. 偏振光的干涉 | 18. 倾斜像差 |
| 5. 琼斯矩阵和偏振特性 | 19. 双折射光线追迹 |
| 6. 米勒矩阵 | 20. 用偏振光线追迹矩阵进行光束组合 |
| 7. 偏振测量术 | 21. 单轴材料和元件 |
| 8. 菲涅耳公式 | 22. 晶体偏振器 |
| 9. 偏振光线追迹计算 | 23. 衍射光学元件 |
| 10. 光学光线追迹 | 24. 液晶盒 |
| 11. 琼斯光瞳和局部坐标系 | 25. 应力诱导双折射 |
| 12. 菲涅耳像差 | 26. 多阶延迟器和不连续性之谜 |
| 13. 薄膜 | 27. 总结和结论 |
| 14. 基于泡利矩阵的琼斯矩阵数据约简 | |

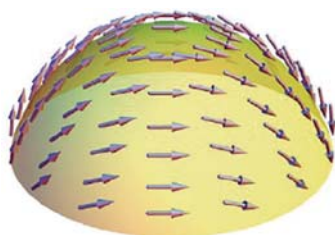
高级课程:偏振光学设计

- | | |
|---------------------|---------------------|
| 1. 引言和概述 | 15. 近轴偏振像差 |
| 2. 偏振光 | 16. 有偏振像差的成像 |
| 3. 斯托克斯参量和庞加莱球 | 17. 平移和延迟计算 |
| 4. 偏振光的干涉 | 18. 倾斜像差 |
| 5. 琼斯矩阵和偏振特性 | 19. 双折射光线追迹 |
| 6. 米勒矩阵 | 20. 用偏振光线追迹矩阵进行光束组合 |
| 7. 偏振测量术 | 21. 单轴材料和元件 |
| 8. 菲涅耳公式 | 22. 晶体偏振器 |
| 9. 偏振光线追迹计算 | 23. 衍射光学元件 |
| 10. 光学光线追迹 | 24. 液晶盒 |
| 11. 琼斯光瞳和局部坐标系 | 25. 应力诱导双折射 |
| 12. 菲涅耳像差 | 26. 多阶延迟器和不连续性之谜 |
| 13. 薄膜 | 27. 总结和结论 |
| 14. 基于泡利矩阵的琼斯矩阵数据约简 | |

章节导览

第 1 章：引言和概述

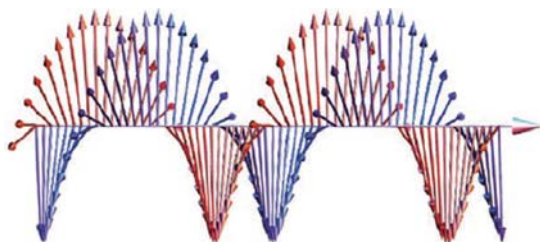
概述了偏振光和偏振光学,并介绍光学系统中的几个偏振问题。介绍了光的电磁本性。解释了偏振元件,如偏振器、延迟器、退偏器,以及相关特性,如双折射。以图形方式研究了一系列偏振问题:未镀膜透镜的马耳他十字图案、偏振器和延迟器的视场相关性、光学薄膜引起的偏振像差、应力双折射以及液晶的角度相关性。



半球面波前上的线偏振

第 2 章：偏振光

涵盖了单色光和平面波在二维琼斯矢量和三维偏振矢量中的数学处理,详细探讨了偏振椭圆,在此过程中回顾了基本向量数学。最后总结讨论了球面波前和光源的偏振。



圆偏振光电磁场的三维视图

第 3 章：斯托克斯参量和庞加莱球

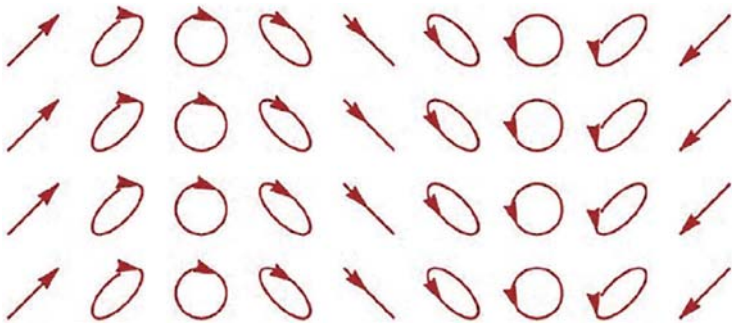
研究多色光、部分偏振光和非相干光。斯托克斯参量有一个不寻常的非正交坐标系,它对于辐射测量和遥感问题非常有效。庞加莱球是斯托克斯参量的三维表示,它简化了许多偏振元件问题的分析。



墨卡托投影法表示的庞加莱球

第 4 章：偏振光干涉

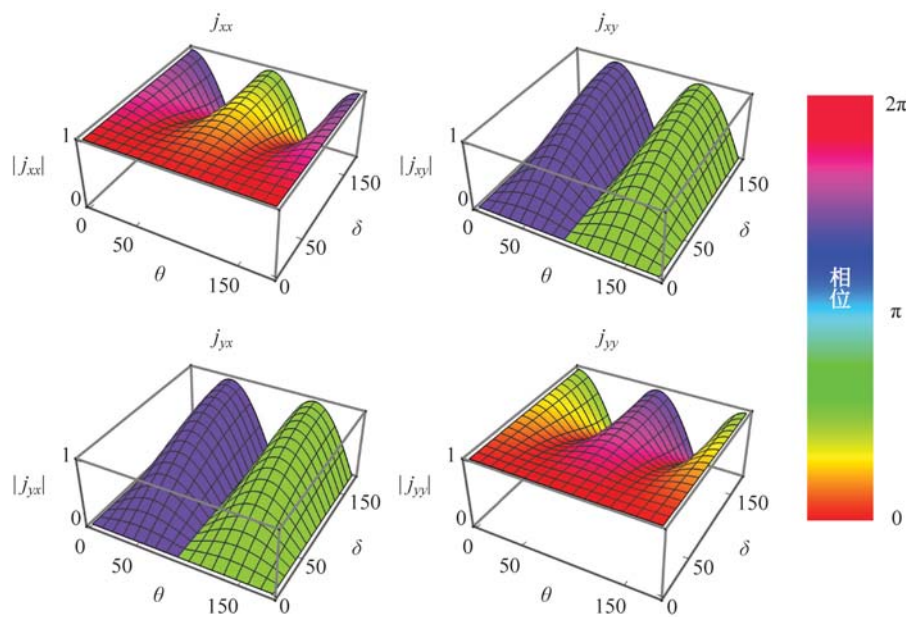
研究干涉中的偏振条纹和强度条纹。偏振问题会影响干涉仪,并给记录良好的干涉图造成困难。部分偏振光和多色光的干涉自然地导致光的斯托克斯参数描述。



0°和 90°激光束的干涉产生具有恒定强度和周期性偏振条纹的图案

第 5 章：琼斯矩阵及偏振特性

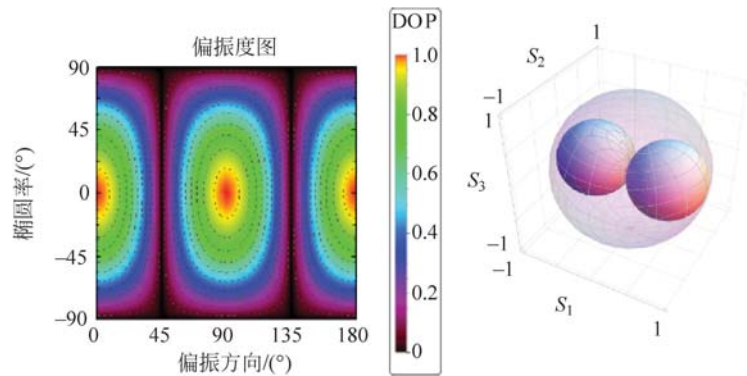
发展了矩阵作为偏振元件的强大模型。每个偏振元件和偏振特性都有一个对应的琼斯矩阵族。考虑了光通过一系列偏振元件的传播,为光学工程师提供了有价值的例子。考察了光正入射到反射镜上时反射的琼斯矩阵;这个琼斯矩阵展现了一个悖论,它将通过偏振光线追迹矩阵来解决。提出了入射光束和出射光束不平行情况下琼斯矩阵的概念,这在光学设计中非常重要。



所有线性延迟器的琼斯矩阵。高度是幅值，颜色编码为相位

第 6 章：米勒矩阵

为偏振元件(偏振器、二向衰减器、延迟器以及退偏器)的非相干光计算提供了一种强大的方法。引入反射和折射米勒矩阵,将该方法推广到包含光学元件的问题。退偏是一种具有九个自由度的常见现象。

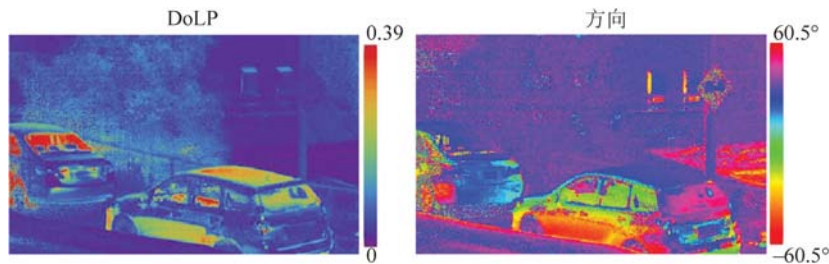


水平和垂直偏振器之间孔径上的二维和三维偏振度图

第 7 章：偏振测量术

将米勒矩阵方法应用于斯托克斯参数和米勒矩阵的测量。斯托克斯偏振测量仪在遥感中有许多应用,包括描述大气中的气溶胶特征和在杂乱场景中寻找人造物体。米勒矩阵用

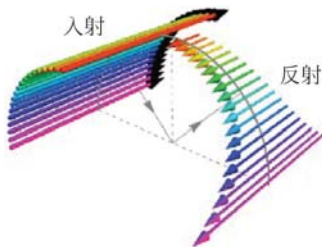
于测试偏振元件和光子器件,并作为椭偏仪用于测量薄膜厚度和折射率。



汽车图像的偏振度和偏振方向

第 8 章：菲涅耳公式

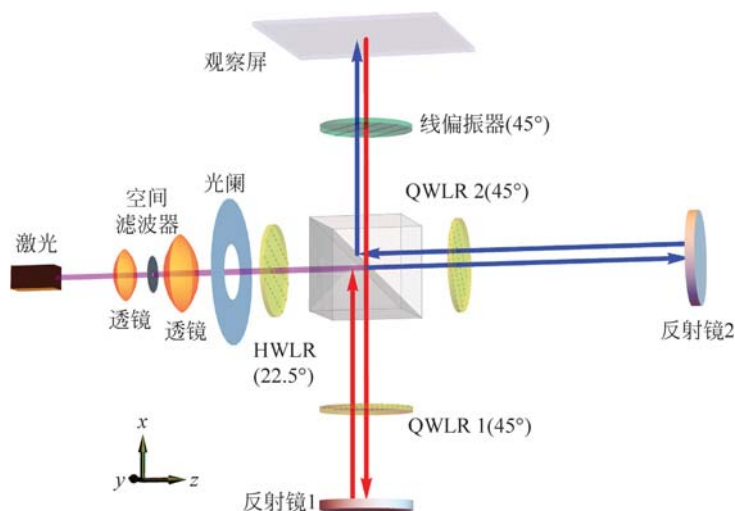
本章描述了发生在电介质界面上、全内反射和从金属反射镜反射的偏振变化。将入射光解析为 s 偏振和 p 偏振分量,并将其作为本征偏振分别进行研究。在延迟导数变为无穷大的临界角处,会发生非常大的偏振效应。



玻璃表面反射的 p 偏振光的入射和反射电场矢量

第 9 章：偏振光线追迹计算

本章开发了 3×3 偏振光线追迹矩阵和相关算法。该演算将偏振光线追迹系统化为三维偏振光线追迹矩阵,即 $\mathbf{P}$ 矩阵,它是琼斯矩阵的三维推广。 $\mathbf{P}$ 矩阵的一个主要优点是它定义在全局坐标中;它解决了琼斯矩阵和局部坐标由于奇点和非唯一性导致的深层次问题,这是贯穿本书的主题。因此,任何用 $\mathbf{P}$ 矩阵进行光线追迹光学系统的人都会得到相同的矩阵,不像琼斯矩阵或米勒矩阵的计算,其结果取决于所选局部坐标的顺序。给出了使用 $\mathbf{P}$ 矩阵计算二向衰减和延迟的算法。正入射时反射镜的反射琼斯矩阵与透射半波延迟器的琼斯矩阵相同,这一悖论得到了解决。通过偏振干涉仪的光线追迹(如图所示)给出了一个重要的演算例子。



用偏振光线追迹演算分析偏振干涉仪

第 10 章：光学光线追迹

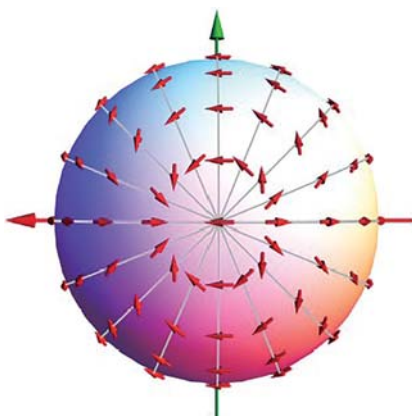
本章介绍了光线追迹光学系统的算法,并计算了波前和偏振像差函数。偏振光线追迹算法考虑了光线追迹过程中镀膜和未镀膜界面的偏振效应,例如菲涅耳系数。偏振光线追迹矩阵用于计算光线的透射率(切趾)、二向衰减和延迟特性。波前的光线网格构成了确定偏振像差函数的基础。给出了光线追迹概念的一个示例:有两个非球面的手机镜头。本章最后回顾了偏振光线追迹的历史。



通过手机镜头的离轴光束的二向衰减,逐面重叠在出瞳中

第 11 章：琼斯光瞳和局部坐标系

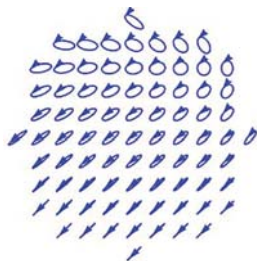
本章分析了将定义于三维球面上的光线追迹结果转换为平面表示的琼斯光瞳的难题。琼斯光瞳在工业上常用于表示偏振像差。为了正确使用琼斯光瞳,解释了局部坐标系的微妙之处,并提出了最优方法。发展了两种主要的局部坐标系:偶极坐标系和双极坐标系。对于高数值孔径波前,由于双极坐标系更接近透镜的自然行为,因此使用双极坐标系更加方便。双极坐标还包含一个迷人的双退化奇点。手机镜头示例继续说明 $\mathbf{P}$ 矩阵如何转换为琼斯光瞳。



透镜的双极偏振图中围绕双奇点的 720° 偏振旋转

第 12 章：菲涅耳像差

本章将菲涅耳公式应用于几个示例光学系统,得到的偏振像差令人惊讶。正交偏振器之间的未镀膜透镜会漏光形成马耳他十字图案。卡塞格林望远镜中的金属膜层将少量像散引入轴上光束! 该望远镜在正交偏振器之间的点扩散函数中心为深色,另有四个光斑分布在周边。菲涅耳公式的一个巧妙应用是菲涅耳菱体——一种基于全内反射的四分之一波延迟器。

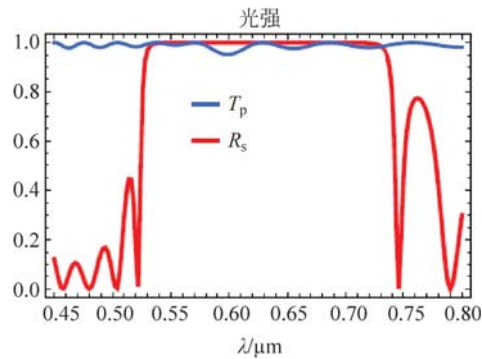


当入射偏振方向在 s 和 p 之间的 45° 时,从铝折光镜反射的 $f/1$ 光束的偏振态

第 13 章：薄膜

本章涵盖了几种最重要的光学薄膜及其偏振特性:

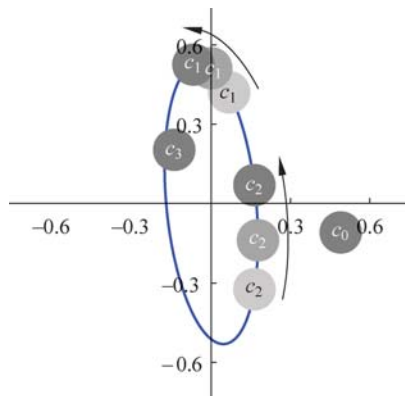
- 增透膜
- 增强反射膜
- 金属分束膜
- 偏振分束膜



麦克尼尔 (MacNeille) 偏振分束棱镜分光膜的 p 强度透射率和 s 强度反射率

第 14 章：基于泡利矩阵的琼斯矩阵数据约简

本章将琼斯光瞳解释为二向衰减和延迟像差函数。琼斯矩阵一章介绍了从偏振特性、二向衰减和延迟计算琼斯矩阵的正问题。本章通过求琼斯矩阵的标准形式,泡利矩阵和矩阵指数将琼斯矩阵转换为二向衰减和延迟。

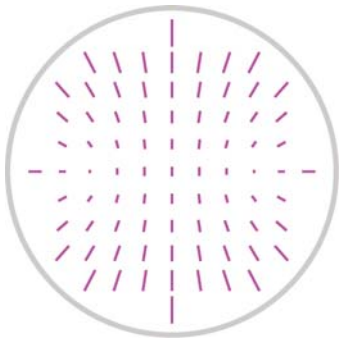


偏振元件可表示为单位矩阵和三个泡利矩阵的复系数加权之和。

当元件旋转时,两个线性系数沿椭圆轨迹移动,而单位矩阵系数和圆泡利系数保持不动

第 15 章：近轴偏振像差

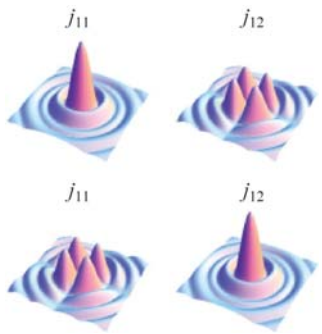
本章研究径向对称系统中偏振像差的形式,从入射角函数开始,结合典型的二向衰减和像差函数,得出二阶偏振像差模式,类似于离焦、倾斜和平移。将近轴光线追迹像差作为研究起点,以便扩展认知完全像差。



望远镜离轴视场光瞳上的双峰延迟分布,有两个零点,围绕每个零点快轴旋转 180°

第 16 章：有偏振像差的成像

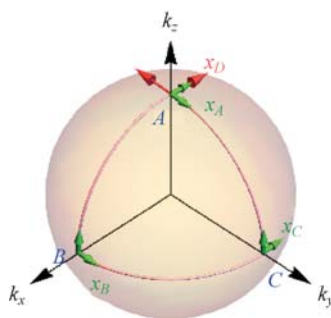
本章研究衍射以及存在偏振像差时点扩散函数和光学传递函数的计算。从光学系统出射的偏振态的变化会引起像及其偏振结构的有趣变化。由于倾斜像差和全内反射引起的延迟,角立方体的偏振像差非常大。



在 x 和 x 、 y 和 x 、 x 和 y 以及 y 和 y 方向偏振器之间的卡塞格林望远镜的点扩展函数，对于正交偏振器组合,产生了一个四瓣点扩展函数,中间为暗

第 17 章：平移和延迟计算

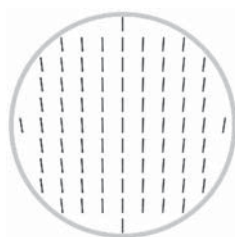
本章描述了延迟器和延迟的计算。延迟是一个特别微妙且有时矛盾的概念,通常描述为两个正交偏振态之间的光程差。然而,当一个系统有两个以上的干涉光束时,会出现其他概念问题,这些问题会使测量和解释显示器用双折射薄膜的特性变得复杂。当入射光线、中间光线段和出射光线彼此不平行时,三维中的延迟计算会出现一个悖论。本章展示了如何在详细了解通过光学系统的光线路径的情况下,简单地解决延迟悖论。



延迟的计算取决于单位传播球上形成的球面多边形面积,该单位传播球由每个光线段所有传播矢量形成

第 18 章：倾斜像差

本章将延迟悖论的解决方案应用于非偏振光学系统中发生的偏振态旋转。用 Pancharatnam/ Berry 相位解释了一种新型的偏振像差,即倾斜像差。倾斜像差的一个独特特征是它存在于理想非偏振光学系统中。这种效应对于具有大视场的高数值孔径光学系统是非常显著的;微光刻系统就是这种光学系统的好例子。推导了倾斜像差对偏振点扩展函数和光学传递函数的影响。



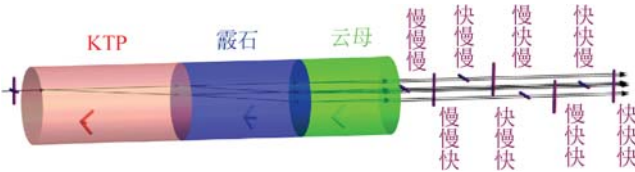
由于偏振态的平行转移,离轴视场的出射偏振在光瞳上发生了偏振旋转

第 19 章：双折射光线追迹

本章介绍了各向异性材料的光线追迹方法,并讨论了光线倍增的处理。通过各向异性材料进行偏振光线追迹需要追迹所有分裂光线的大量参数:

- 传播矢量 $\mathbf{k}$
- 坡印廷矢量 $\mathbf{S}$
- 模式折射率 n
- 复菲涅耳系数 a
- 电场方向 $\hat{\mathbf{E}}$

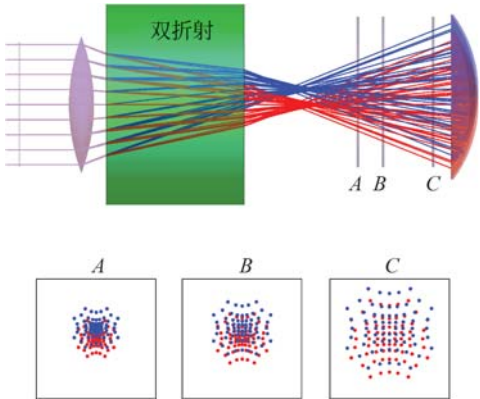
各向异性算法可以处理双折射和反射、镀膜的各向异性界面、倏逝光线,包括全内反射和抑制反射。本书的网站 www.polarizedlight.org 包含光束通过双轴材料以及偏振态演化的动画。



通过三块各向异性晶体序列的 8 条透射光线路径, 每条光线路径具有不同的模式序列和不同的光程长度。
8 条光线平行出射, 每条都在双平行四边形形状中的不同位置出射

第 20 章：用偏振光线追迹矩阵进行光束组合

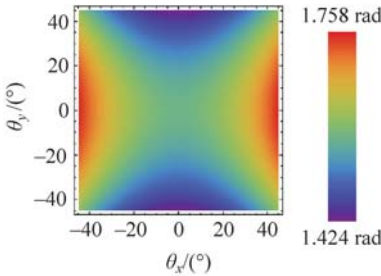
本章分析了具有相似和不同传播方向的多个波前的相互作用。作为光线追迹过程的一部分, 必须仿真多个出射光束的相互作用, 以分析双折射器件和干涉仪。组合多个波前的众多问题之一是光线网格的相对位置和插值的必要性。



两种模式(红色和蓝色)的光线网格, 通过厚波片聚焦, 在不同位置具有不同的像差。
仿真需要把相应的电场相加来模拟干涉、衍射和成像

第 21 章：单轴材料和元件

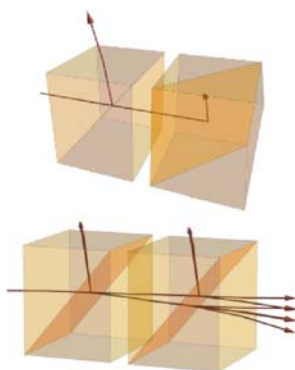
本章探索了常见单轴器件中的光传播和光线追迹。折射率椭球有助于解释波前通过双折射界面的传播。在单轴材料中, 由于折射率的角度变化, 异常模的双折射像差非常复杂。在分析波片时, 了解这种像差很重要。



通过波片的延迟随方向的变化, 呈马鞍形

第 22 章：晶体偏振器

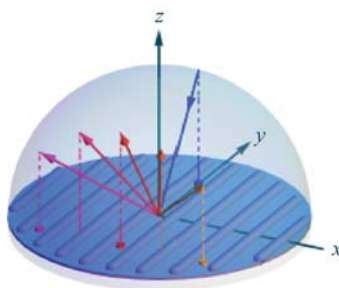
本章对常见但被误解的光学元件(晶体偏振器,包括格兰-泰勒和格兰-汤普逊)进行了新的分析。这种研究方法使人们对偏振器的视场、光束切趾及其像差有了新的认识。描述了由晶体偏振器产生的众多小光束,并解释了它们的路径。分析变得更加复杂,但对于入射球面波的平行和正交晶体偏振器来说却很有趣。



轴上光线不能穿过一对正交的格兰-泰勒偏振器,但对于 4° 离轴光线,会透过五个模式对。
这将偏振器的视场限制为 3°

第 23 章：衍射光学元件

本章使用严格的耦合波分析法对衍射光学元件进行了模拟。研究了反射光栅、线栅偏振器和减反射膜亚波长结构的偏振特性。解释了通过对振幅系数(菲涅耳系数)进行积分,在偏振光线追迹中准确包含衍射光学元件的方法。

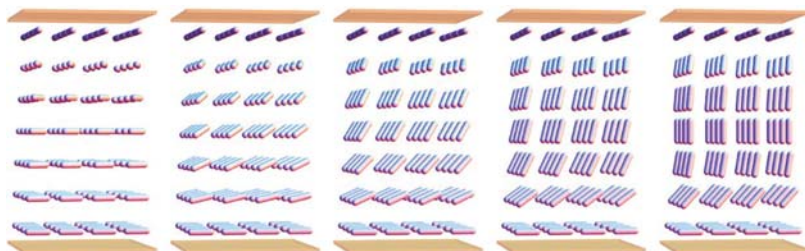


面外照射衍射光栅,不同衍射级的传播矢量位于圆锥面,但矢量在 xy 平面上的投影保持等间距

第 24 章：液晶盒

液晶盒通过旋转液晶分子来操控光的偏振,从而产生电控延迟器、偏振控制器和空间光调制器。本章分析了最常见和历史最重要的方案。液晶盒的主要问题之一是延迟随角度的变化。在不同设计之间比较了这些角偏振像差,并研究了液晶盒与视场校正双轴多层膜

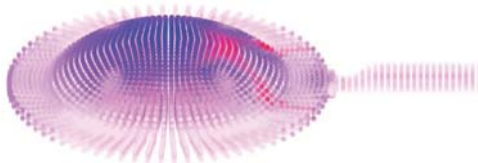
模组,以制作高性能液晶显示器。为了在显示器市场上占据主导地位,液晶技术克服了许多障碍,包括吸收、散射、低对比度、切换时间、均匀性、有限视角、向错和偏振像差。



从 0V(左)到 5V(右)的扭曲向列相液晶盒中的指向矢分布

第 25 章：应力诱导双折射

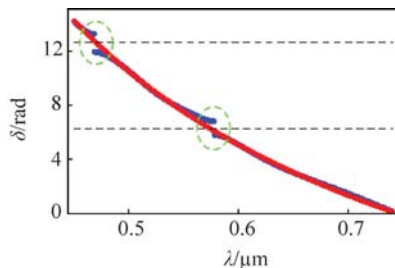
应力诱导双折射是光学中的一个普遍问题,由于成型工艺在注塑塑料光学元件中,以及由于光机安装技术较差在玻璃透镜中,经常出现这种问题。应力是光学元件中的内力,它改变了原子之间的距离,产生空间变化的双折射。应力可能在玻璃成型、塑料透镜注塑成型或光学元件安装过程中产生。本章的算法模拟了偏振光通过具有应力双折射的光学元件的传播。讨论了在 CAD 文件中存储应力信息的常用数据结构。包括解读应力双折射偏光镜彩色图像的方法。



注塑成型 DVD 透镜中的应力(蓝色)和应变(红色)的空间分布

第 26 章：多阶延迟器和不连续性之谜

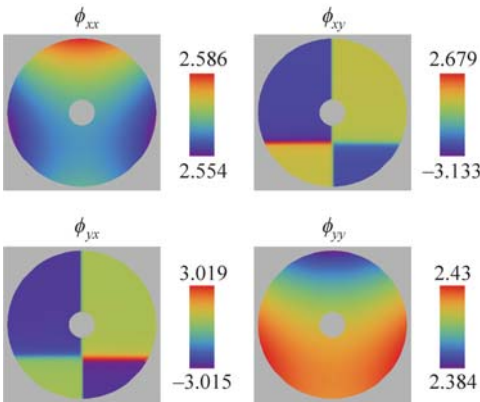
多阶延迟器是延迟大于一个波的延迟器。例如,复合延迟器(由多个双折射板构成)的延迟可以在 $1 \frac{1}{2}$ 波到 $2 \frac{1}{2}$ 波的延迟之间连续变化,而不会通过 2 波延迟! 当双折射组件的快轴彼此不平行或不垂直时,可以认为延迟同时有多个值。实测数据证实了这一复杂但迷人的问题。



轴对齐的双片延迟器的延迟谱是连续的(红色),但当其中一片稍微旋转时,在 $2n\pi$ (蓝色)值附近会出现不连续,绿色圆圈中所示

第 27 章：总结和结论

本章对本书的所有问题进行审视,以了解全局。回顾了光程长度、相位、延迟和坐标系等关键问题,并讨论了偏振容差。本书通过讨论偏振效应和像差的交流问题来结束。光学设计师和工程师如何与同事、供应商和生产同行最好地沟通这一复杂信息?



琼斯光瞳的相位部分显示了偏振像差(线性延迟倾斜),这导致点扩散函数的 x 和 y 偏振部分略微分离

学习特征

本课程是作者罗素·奇普曼在亚利桑那大学为本科生和研究生讲授多年的偏振课程。此外,许多 SPIE 和 OSA 短期课程都讲授了大部分课程内容。观察学生的学习,观察他们的困难,并从课堂上获得反馈,使本书具有几个特点,包括将光学设计整合到研究中。

彩色图

偏振和几何光学是高度几何化的学科,许多概念的交流用三维彩色图形比用方程式更有效。颜色表达更多细节,并能加快理解速度。准备这么多的图形需要付出巨大的努力,我们的作者之一蒂凡尼·林率先开发了图形。

庞加莱球

庞加莱球对于理解和解释偏振光非常有用。要真正欣赏和应用球形,三维庞加莱球至关重要。因此,本书的网站上有一个庞加莱球:www.polarizedlight.org。我们建议在厚纸上打印这个庞加莱球,然后将其切割和折叠,并将其粘贴成球形。



庞加莱球

视图

彩色图形在课堂上非常有效,可以吸引学生并保持他们的兴趣。采用本书的教师可以使用一套包含大多数插图的教学视图。

工作例子

贯穿全书的是与习题集密切相关的数值例子。这些工作例子解释了坐标旋转等基本概念,并为重要例子提供了有用的数值。学生通过对这些例子的学习,可以加快在数学问题解决技能上的进步,并进一步理解基本物理过程。当首次引入线性代数方法以帮助掌握矩阵操作时,工作示例给出了线性代数方法的逐步说明。

习题集和解题手册

每章都包含习题集,以帮助学生掌握概念并测试其解决问题的能力。通常,前几个问题只需用几分钟,然后问题的难度就会增加。

三维偏振光线追迹演算

对沿任何方向传播的光进行操作的 3×3 矩阵在这里得到了充分的解释,并集成到光学设计算法中。嘉兰·杨在她的论文中阐述了这个矩阵的概念,并给出了许多例子,证明了它优于琼斯算法。蒂凡尼·林在她的论文中进一步将偏振光线追迹演算扩展到双折射元件,包括单轴、双轴和应力双折射光学元件。

参考列表

贯穿全书的列表给出了偏振光、琼斯矩阵、米勒矩阵、斯托克斯参量和材料特性的关键特性。

缩 略 语 表

a, a_p, a_s	振幅系数, s 和 p 系数, 例如菲涅耳、薄膜
A	面积
A_E	入瞳的面积
a_i	像差系数
A_x, A_y, A_z	电场沿坐标轴的实振幅
A	分析器矢量, 米勒矩阵的顶行
$A(\rho)$	琼斯矩阵, 描述了振幅的偏振无关变化
$a(x, y)$	振幅函数
Abs	绝对值
AoP(S)	斯托克斯参量 S 的偏振角
$\text{apt}(x, y)$	孔径函数
ARM	振幅响应矩阵
arg	复数的参数
B 和 B	磁感应场和磁感应强度矢量
BP	蓝相
BRDF	双向反射分布函数
c	光速
C	对比度
C_0, C_1, C_2	应力光学系数
C	应力光学张量
C_q	第 q 个面的曲率
CA	晶轴
$CR(\delta)$	圆延迟器, 延迟量 δ
d	液晶盒间隙
d	薄膜厚度
$D, \mathcal{D}$	二向衰减
d	偶极轴矢量
D 和 D	电位移场和电位移场矢量
D	对角矩阵, 奇异值矩阵
D	并矢矩阵
Det	行列式
DFT	离散傅里叶变换
D_H, D_{45}, D_R	二向衰减分量
DoCP(S)	斯托克斯参量 S 的圆偏振度
DOE	衍射光学元件
DoLP(S)	斯托克斯参量 S 的线偏振度
DoP(S)	斯托克斯参量 S 的偏振度

e	椭圆率,椭圆短轴与长轴的比值
e	异常模式的标记
E	偏振器或二向衰减器的消光比
E	异常主轴的标记
E	杨氏模量
E	琼斯矢量
E	偏振矢量
$E(\mathbf{r}, t)$	单色平面波的电场
E_q	在第 q 个光线截点的电场矢量
E_x, E_y, E_z	电场沿三个坐标轴的复振幅
$ED(d_H, d_{45}, d_L)$	椭圆二向衰减器,二向衰减分量 d_H, d_{45}, d_L
$E(\epsilon, \phi)$	椭圆率为 ϵ 、取向角为 ϕ 的椭圆偏振器
EPD	入瞳直径
$ER(\delta_H, \delta_{45}, \delta_L)$	椭圆延迟器,延迟分量 $\delta_H, \delta_{45}, \delta_L$
f	快模式的标记
F	快主轴的标记
FEM	有限元模型
FOV	视场
G 和 g	旋光张量和旋光常数
$\mathbf{g}_{\text{In}, i}, \mathbf{g}_{\text{Exit}, i}$	定义在入瞳面和出瞳面的双极坐标
H	拉格朗日不变量
H	水平偏振光的琼斯矢量
H 和 $\mathbf{H}$	磁场和磁场矢量
H	厄米矩阵
H	物坐标
$H(\mathbf{r}, t)$	单色平面波的磁场
i, j	求和序数
i	各向同性模式的标记
i_c	主光线入射角
i_m	边缘光线入射角
I	光通量、光强度、特定偏振态的光强部分
I	第一个斯托克斯参量, S_0 , 光通量
I	米勒矩阵的非齐次性
I	单位矩阵
Im	复数值的虚部
inc	入射光线的标记
$I_{\max}, I_{\min}$	最大和最小光强透射率
IPS	面内切换
IR	抑制折射
J	琼斯矩阵
$J_{\text{光瞳}}$	琼斯矩阵光瞳
$JP(x, y)$	在出瞳面上对波前和偏振态的全面描述
k	波数
k	传播矢量
$\hat{k}_q$	在第 q 个光线截点的归一化传播矢量

l	物理光线路径
l	左旋圆偏振模式的标记
L	左旋圆偏振光的琼斯矢量
L, L_2	矩阵的条件数
L	左主折射率的标记
$\hat{L}(\theta)$	取向角为 θ 的线偏振光
LC	液晶
LCoS	硅基液晶
$LD(t_1, t_2, \theta)$	线性二向衰减器(部分偏振器), t_1, t_2 为振幅透射率, θ 为轴向
LCD	液晶显示器
LED	发光二极管
$LR(\delta, \theta)$	线性延迟器, δ 为延迟量, θ 为快轴方向
$LP(\cdot)$	线性偏振器的琼斯矩阵
M	下标, 表示递增相位符号规则中的量
M	放大率
M	介质主轴的标记
M	米勒矩阵
$\vec{M}$	展开的米勒矢量, 16×1
MMBRDF	米勒矩阵二向反射分布函数
MPSM	米勒点扩展矩阵
MVA	多畴垂直配向液晶盒
MTF	调制传递函数
MTM	调制传递矩阵
m_{ij}, M_{ij}	米勒矩阵元, $m_{00}, m_{01}, \dots, m_{33}$
Δn	双折射率
n	折射率
N_i	零空间的矢量
NA	数值孔径
o	寻常模式的标记
O	寻常主轴的标记
O, O^{-1}	正交变换矩阵
$O_{n,e}^m$	定向器基函数
OA	光轴
OPL	光程长度
OTM	光学传递矩阵
P	光通量、辐照度、偏振光通量, $P_H, P_V, P_{45}, \dots$
p	在入射面内的 p 分量
p_1, p_2	应变光学系数
$\hat{p}$	p 分量基矢量
P	光通量测量值矢量
P	3D 偏振光线追迹矩阵
$\tilde{P}$	用于相加的 3D 偏振光线追迹矩阵, 其 k 的奇异值设置为零
PBS	偏振分束器
PDL	偏振相关损耗, 分贝数表示的消光比

POI	入射面
PSA	偏振态分析器
PSF	点扩展函数
PSG	偏振态发生器
PSM	点扩展矩阵
PTM	相位传递矩阵
$p_q(x, y, z)$	1—0 值的孔径函数
PVA	图案化垂直配向液晶盒
$\ \mathbf{W} \ _p$	矩阵或矢量 $\mathbf{W}$ 的 p 范数
q	表面或元件的序数
Q	表面、元件等的总数
Q	斯托克斯参量的第二个参数 S_1 , 即 $0^\circ - 90^\circ$ 光通量
Q	3D 平行转移矩阵
r, r_p, r_s	振幅反射系数
R	曲率半径
r	右旋偏振模式的标记
R_p, R_s	光强反射系数
$\mathbf{r}$	位置矢量
R	右主折射率的标记
r, r_q	光线截点坐标, 在第 q 个面上的光线截点
$\mathbf{R}$	右旋圆偏振光的琼斯矢量
$\mathbf{R}, \mathbf{Rot}$	旋转矩阵
$\mathbf{R}(\alpha)$	琼斯矩阵旋转运算符
$\mathbf{R}_M(\cdot)$	斯托克斯参量和米勒矩阵的旋转矩阵
RMS	均方根
$\text{Re}(\cdot)$	实部
RCWA	严格耦合波分析
s	垂直于入射面的 s 分量
$\hat{s}$	s 分量基矢量
$\mathbf{S}$	坡印廷矢量
$\mathbf{S}$	应力张量
s	慢模式的标记
$\mathbf{S}$	慢主轴的标记
S_0, S_1, S_2, S_3	斯托克斯参量
$1, s_1, s_2, s_3$	归一化的斯托克斯参量
$\mathbf{S}$	斯托克斯参量
sup	上界, 限定的最大值
STN	超扭曲向列型液晶盒
SVD	奇异值分解
SWG	亚波长光栅
t	时间, 厚度
t, t_p, t_s	振幅透射系数
T	透射率, 出射光通量与入射光通量之比
$t_{q-1, q}$	光线段的长度, 面 $q-1$ 至面 q
TE	横向电场

TIR	全内反射
TM	横向磁场
TN	扭曲向列型液晶盒
T_p, T_s	光强透射系数
Tr	矩阵的迹
$T_{\max}$	偏振态的最大透射率
$T_{\min}$	偏振态的最小透射率
u	能量密度
U	第 3 个斯托克斯参数 S_2 , 即 $45^\circ-135^\circ$ 光通量
u	边缘光线角度
$\bar{u}_q$	面后的主光线角度
U	非偏振光的斯托克斯参量, $(1, 0, 0, 0)$
U, V	酉矩阵
V	第 4 个斯托克斯参数 S_3 , 即右旋-左旋光通量
V	条纹的可见性
V	速度
V	垂直偏振光的琼斯矢量
$V_{n,e}^m(\rho, \phi)$	矢量泽尼克多项式
VAN	垂直配向模式
W	偏振测量值矩阵
W^{-1}	偏振测量值约减矩阵
W_P^{-1}	W 的伪逆矩阵
W^T	矩阵 W 的转置
$W(x, y)$	波像差函数
x_E, y_E	入瞳坐标
$\hat{x}_{\text{Loc}}, \hat{y}_{\text{Loc}}$	局部 x, y 坐标
$\bar{y}_q$	第 q 面上的主光线高度
$z(x, y)$	某个面上的弧垂(矢高)函数
x, y, z	笛卡儿坐标轴
135	135° 线偏振光的琼斯矢量
45	45° 线偏振光的琼斯矢量
α	旋光度
$\alpha_{s,t,q}, \alpha_p$	菲涅耳 s、p 系数
β	薄膜的相位厚度
β_m	第 m 衍射级的衍射角
γ	分离角、偏离角
γ	应变张量系数
Γ	应变张量
δ	延迟量
$\delta_H, \delta_{45}, \delta_R, \delta_L$	延迟分量
$\delta_{i,j}$	克罗内克 δ 函数
$\delta_{\text{主}}$	主延迟
$\delta_{\text{展开}}$	展开的延迟
Δn	双折射率
$\Delta\lambda$	光谱带宽

ΔOPL	光程差
Δr	横向剪切
Δt	光线路径
ε	偏振椭圆的椭圆率
ε_0	自由空间的介电常数
$\tilde{\epsilon}, \epsilon$	介电张量
η	庞加莱球上的纬度
η	薄膜层或基底的特征导纳
$\eta, \hat{\eta}$	表面法线, 从入射介质指向别处
η	逆介电张量
θ	角度, 入射角、旋转角、偏振器或延迟器的角度
$\theta_i, \theta_{\text{in}}, \theta_{\text{inc}}$	入射角
θ_B	布儒斯特角
θ_B	光栅闪耀角
θ_C	临界角
$\bar{\theta}_q$	第 q 个面上的主光线入射角
Θ_1^m	偏振基矢量
κ	折射率的虚部, 吸收系数
κ	圆锥常数
λ	波长
λ_B	闪耀波长
Λ_i	奇异值
μ_i	奇异值
μ	磁导率张量
Ξ	扩展量
ξ, ξ_q, ξ_r	本征值
v_p 和 v_r	相位速度和光线速度
ν	泊松比
ρ	复振幅
ρ	归一化的光瞳坐标
ρ, ρ_p, ρ_s	振幅系数的幅值
$\hat{\rho}$	归一化的光瞳坐标
σ	正应力
σ_0	单位矩阵
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	泡利矩阵
Σ	用波数表示的相位
τ	剪切应力
τ_q	第 q 个面后的约化厚度
ϕ	光的相位, 复数的相位
φ	从 x 轴开始逆时针度量的光瞳角
Φ	入射面
Φ_q	第 q 个面的光焦度
$\Phi(\phi)$	总相位变化的琼斯矩阵
Ψ	偏振椭圆的主轴角度

Ψ	延迟器的快轴方向
$\Psi_o、\Psi_e$	寻常模式和异常模式的临界角
ω	角频率,单位为弧度每秒
$\bar{\omega}_q$	第 q 个面的主光线约减角度
Ω	立体角,单位为立体弧度、球面度
Ω	应变光学张量
$\cdot$	点积,矩阵乘积
$\dagger$	伴随矢量,转置的复共轭

第 1 章

引言和概述

对于许多光学系统来说,想要选择理想的偏振元件组合是很困难的。同样,理解和控制光学系统的偏振特性也是一个巨大的挑战,对于一些系统来说,这需要多年专业的偏振工程经验才能实现。这样的系统被称为严格偏振光学系统,因为这类系统存在偏振方面的挑战并且某些技术规范也难以实现。液晶显示和微光刻光学是严格偏振系统的两个例子。偏振工程是设计、制造、测试和大批量生产这种严格偏振光学系统的工程。

通常许多其他光学系统的偏振特性都很小,一般不会显著影响它们的使用。例如,许多透镜对偏振态的改变相对较小,大约为 1% 或更小。即使偏振效应很小,它们也是令人感兴趣的,并且必须确保满足某些偏振技术规范。

本书致力于解释这些大大小小的偏振效应或偏振像差,其中一项主要技术是偏振光线追迹。光线追迹是一套计算光线通过光学系统路径的算法。偏振光线追迹添加了跟踪偏振态演变的计算,并显示光线路径的偏振分布和偏振特性信息。

1.1 偏振光

光是一种横向电磁波,是一种移动的电磁场。光的电场和磁场在与光传播方向垂直的方向横向振荡。当电荷(电子和质子)加速并振荡时,光就产生了。然后,光的作用力反过来造成电荷振荡。偏振指的是光在横向平面上的特性,描述了光是偏振的还是非偏振的以及偏振方向。光的偏振态可用偏振元件来控制。透镜、反射镜、光学膜层、衍射光栅、晶体、液晶以及许多其他界面和材料都会改变光的偏振态。本书的目标是开发有效和通用的方法,

来理解光在偏振元件作用下,或通过光学系统时,以及在自然环境中的偏振变化。

人眼对于偏振光不敏感。我们可感知光的明暗和色彩但无法判断光是偏振的还是非偏振的,或偏振方向是怎样的。正因为人类是偏振视盲的,所以我们无法感知身边的许多偏振现象,室内的或室外的,如图 1.1 和图 1.2 所示。我们的眼睛无法判断出彩虹的光线和道路上反射的眩光是高度偏振的,同样也无法感知来自液晶显示器发出的偏振光。我们无法看到偏振光是如何被眼镜(图 1.1(c))和车窗(图 1.2)中的应力扰乱的。偏振器和偏光仪可使这种偏振效应变得可见。许多动物可以看见光的偏振,例如蜜蜂、蚂蚁和章鱼。它们把偏振用于实现各种目的,包括导航、交流和寻找猎物。

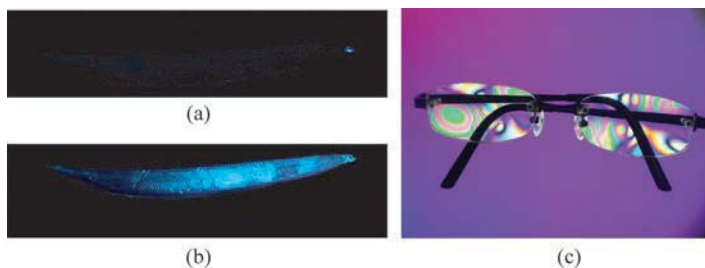


图 1.1 (a)为了躲避捕食者,在可见光下看到的细头鳗幼仔几乎是透明的。(b)当用偏振滤光片观看时,鳗鱼由于部分身体双折射引起的偏振变化,而更容易被看到。因此,偏振视觉在寻找这样的猎物时很有用。(图片来自 NOAA, ^[1])(c)正交圆偏振镜下的眼镜



图 1.2 在晴天用带有(a)和没有(b)偏振滤光镜的相机拍摄车窗顶。
彩虹棋盘图案揭示了钢化玻璃的应力双折射现象

1.2 偏振态和庞加莱球

单色光是一种单一频率、单一波长、电场呈余弦振荡的光。单色光是理想化的,是光源的波长展宽趋近于零的极限情况。单频激光器发出的光可近似为单色光,但是仍具有很窄的频谱宽度。第2章(偏振光)会介绍光的数学表述形式,本节仅介绍一部分概念。

偏振椭圆是由单色光的电场矢量尖端所描绘出的图形,且周期性重复。单色光一定是偏振的,不管是线偏振、椭圆偏振还是圆偏振,因为它是周期性的。当光的电场只在单个方向振动,例如图1.3所示沿着 y 轴的正负方向,这样的光是线偏振的。振动的方向是偏振面或偏振角。

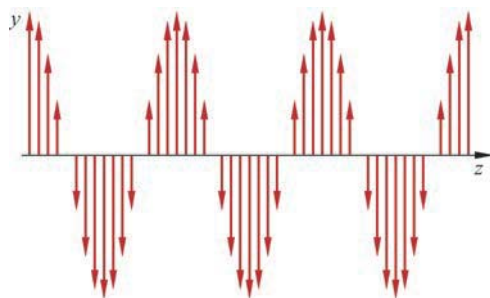


图 1.3 单色线偏振光在 y 轴的电场分布情况

对于沿着 z 轴传播的线偏振光,光的电场有相同相位的 x 和 y 分量,每个周期有两次两个分量在同时刻到达零的情况。否则,该光为椭圆偏振光,如图1.4所示, x 分量和 y 分量是不同相的。电场矢量顶端的轨迹为一个椭圆,每个周期描绘一个偏振椭圆,这是偏振光学中的一个标志性图形。逆着光传播的方向观察时可以描绘出偏振椭圆。单色圆偏振光具有恒定的电场振幅,电场方向在横向平面内均匀旋转。圆偏振光具有左旋和右旋偏振光两种形式。按照惯例,逆着光传播方向观察时,右旋圆偏振光随时间顺时针旋转,左旋圆偏振光随时间逆时针旋转。同样,椭圆偏振光具有右或左螺旋性,这取决于旋转方向。

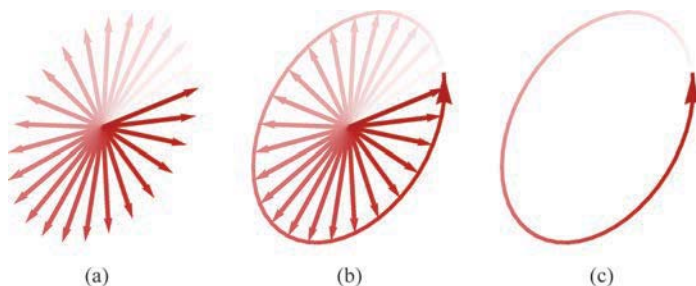


图 1.4 (a)椭圆偏振态的偏振椭圆是一个周期内电场矢量尖端所描绘的椭圆。(b)用边界椭圆表示电场与时间的关系。(c)通常只画椭圆表示偏振态。箭头的位置表示光波的相位

光也包含一个磁场,它的矢量指向在横向平面内,方向垂直于电场且与电场同相振荡。图1.5显示了单色光的电场(红色)和磁场(蓝色)在空间中以几种偏振态振荡。在大多数类型的光与物质的相互作用中,光与物质的相互作用以电场为主;因此,按照惯例,光的偏振

态是用它的电场来描述的。而磁场对于计算光与磁性材料、双折射材料、衍射光栅和液晶等多种介质的相互作用非常重要。

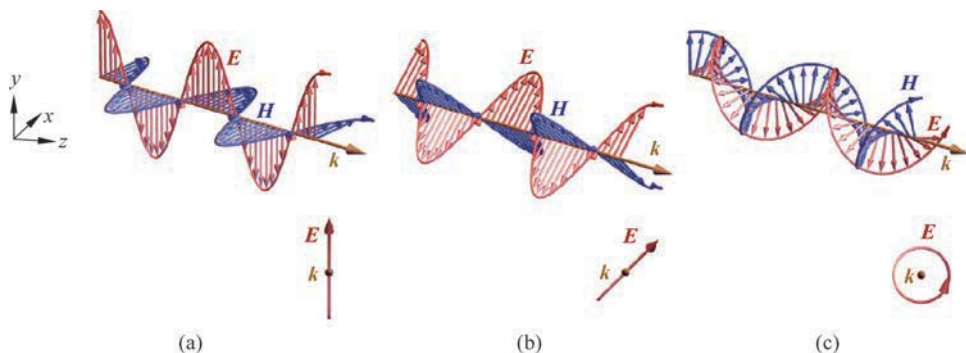


图 1.5 空间中(a)90°偏振,(b)45°偏振光和(c)左旋圆偏振光的电场(红)和磁场(蓝)

偏振椭圆可以方便地表示在单位球(庞加莱球)的表面上,如图 1.6 所示,在前、后视图中显示。右旋圆偏振光在球面的顶部,即北极;左旋圆偏振光在球面的底部,即南极。线偏振光位于赤道上。注意,对于一个绕赤道的完整回路,偏振态旋转 180° ,这将使 x 偏振光返回到 x 偏振光。庞加莱球表面的其余部分描述的是椭圆偏振光,在北半球具有右旋性,在南半球具有左旋性。椭圆率在赤道附近近似为线性,在两极附近接近圆形。庞加莱球面连续地表示了所有可能的偏振椭圆。如图 1.7 所示,将庞加莱球展开在平面上也很有用。

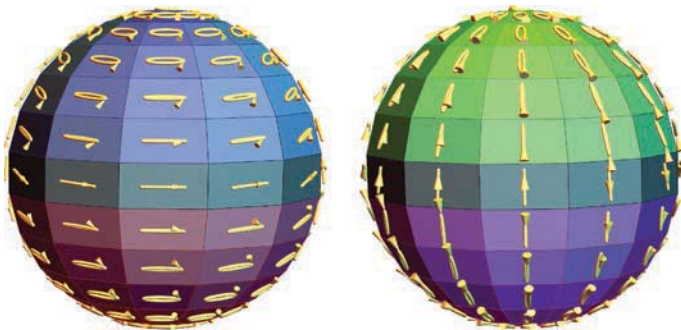


图 1.6 庞加莱球在球面上包含了所有偏振态的表示,线偏振态在赤道周围,两个圆偏振态在两极

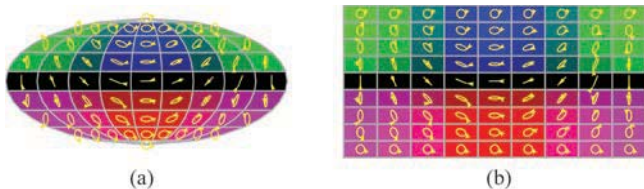


图 1.7 在平面上庞加莱球的两种表示:(a)Mollweide 投影和(b)矩形投影,其中整个顶行是右旋圆偏振的,整个底行是左旋圆偏振的

根据不同的应用,有许多方法可以用来描述偏振态。在第 2 章涉及的二元复矢量(琼斯矢量)和三元偏振矢量,特别适用于光学设计、衍射和干涉测量术,在这些情况下,光的相位

很重要。第3章涉及的斯托克斯参量非常适用于实验室测量和描述室外自然光,这些都是多色光和非相干光的应用,其中相位的意义不大。

1.3 偏振元件和偏振特性

偏振元件是一种用来改变或控制光的偏振态以及在不同偏振态之间转换的光学元件。根据偏振元件是否改变光的振幅、相位或相干性,偏振元件被分为三大类:偏振器、延迟器和退偏器。反射镜、透镜、薄膜和几乎所有光学元件都会在一定程度上改变偏振,但通常不被认为是偏振元件,因为这不是它们的主要作用,而是一种副作用。

偏振器透射已知的偏振态,与入射偏振态无关。最常见的是线偏振器,沿其透射轴透过线偏振光。线偏振器是这样一个器件,当它置于非偏振入射光中时,会产生一束光,该束光的电场矢量主要在一个平面内振荡,而在垂直平面内只有一个很小的分量。理想偏振器对于特定偏振态的透射率为1,对于正交偏振态的透射率为0。偏振器是二向衰减器或部分偏振器的一个例子,二向衰减器对于两个正交的偏振态具有两个透射率 $T_{\max}$ 和 $T_{\min}$,二向衰减器可用二向衰减率 D 来表征

$$D = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max} + T_{\min}}, \quad 0 \leq D \leq 1 \quad (1.1)$$

它对于偏振器取值为1,对于同等透过所有入射偏振态的光学元件取值为0。偏振片或宝丽来人造偏光片,是一种大块的塑料片,吸收一个偏振态而透过另一个正交的偏振态。如图1.8所示,偏振分束器将两个正交的偏振分量导向不同的方向。

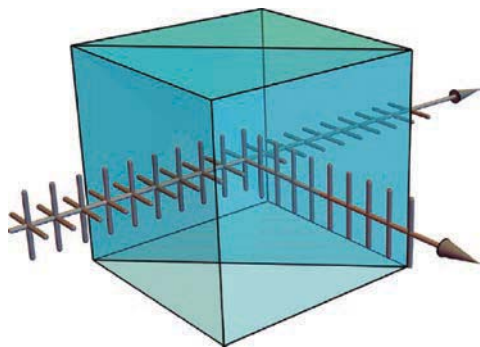


图1.8 偏振分束器将正交偏振分量分到两个方向

延迟器对于两个特殊的偏振态(快态和慢态)有两种不同的光程长度。与快态相比,慢态被延缓,或称为延迟。延迟量是光程长度之差,描述了两种偏振态之间的相对相位变化。任意入射偏振态进入延迟器后分解为快态和慢态,两个分量以不同的光程长度从延迟器出射,如图1.9所示。线性延迟器将光分为两个线偏振分量,彼此间隔 90° ,并将其中一个偏振态延迟。四分之一波长线性延迟器引入四分之一波长的相对相位延迟,用于将线偏振光转换为圆偏振光。半波线性延迟器可以将一个线偏振分量延迟半波长,可用于改变线偏振光的方向。

退偏器扰乱偏振态,将偏振光转换为非偏振光。退偏通常与散射有关,特别是多次散射。积分球很容易使一束光退偏。蛋白石(欧泊)是一种由紧密排列的石英球组成的宝石,其薄片常被用作退偏器。教室和会议室的大多数屏幕可以有效地使光束退偏。尝试用偏振光去照亮屏幕,可观察到无法通过偏振片使散射光消光。透镜、反射镜、滤光片和其他典型光学元件表现出非常微弱的退偏效应,通常小于零点几个百分点。因此,在大多数光学系统中,退偏幅度小且不明显。光学表面通过精细加工和镀膜以减少散射,因此高质量光学表面的退偏通常很小,图1.10展示了一组空间退偏的偏振椭圆。

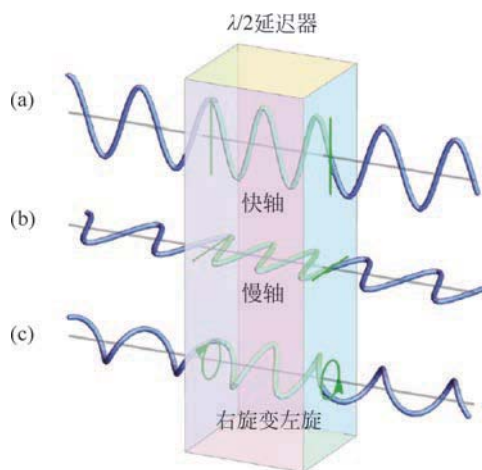


图 1.9 三种偏振态的光,从左边空气中进入一个半波线性延迟器(双折射波片),其快轴(较低折射率)在垂直方向。两个平面是入射平面和出射平面。垂直的偏振模式(图(a),较低折射率)在延迟器中具有更长的波长,所以它的光程长度比水平偏振模式(图(b))小 $1/2$ 波长。(图(c))右旋圆偏振光分解为两个模式,它们独立传播,然后从延迟器合并出射。由于两个模式之间存在半个波长的光程差(延迟量),这个出射光束变为左旋圆偏振光

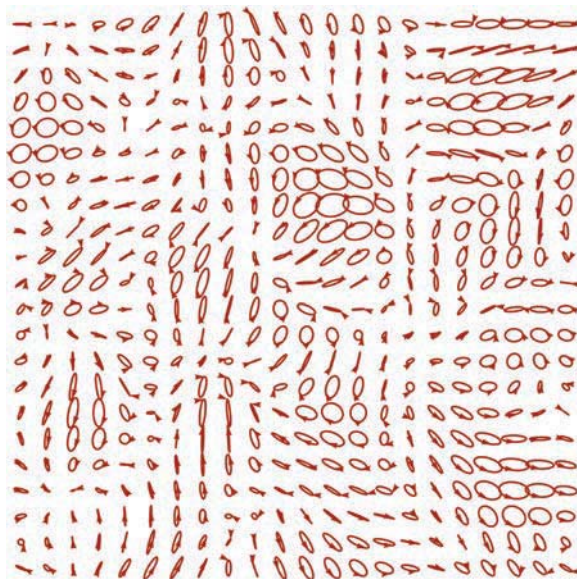


图 1.10 一种具有空间变化偏振态的退偏光场

1.4 偏振测量术和椭偏测量术

一束光的偏振特性可以由偏振测量仪测得,偏振测量仪可以由相机、辐射计和光谱仪配置起来,通过一系列偏振镜去测量光通量,并计算出偏振态;这是测光偏振测量仪。图 1.11 展示了一种类型的测光偏振测量仪的构造,即旋转延迟器的成像偏振测量仪。图 1.12 显示

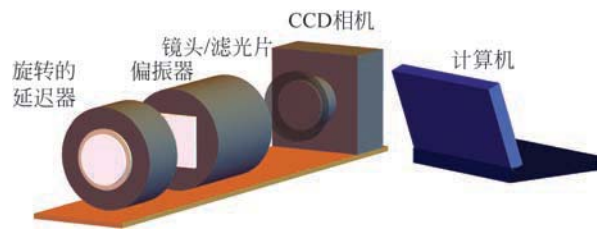


图 1.11 一种旋转延迟器的成像偏振测量仪,由一个延迟器、一个线偏振器和一个相机组成。通过延迟器旋转至多个角度并测量多幅图像来计算光的偏振度、偏振角和椭圆率并形成图像

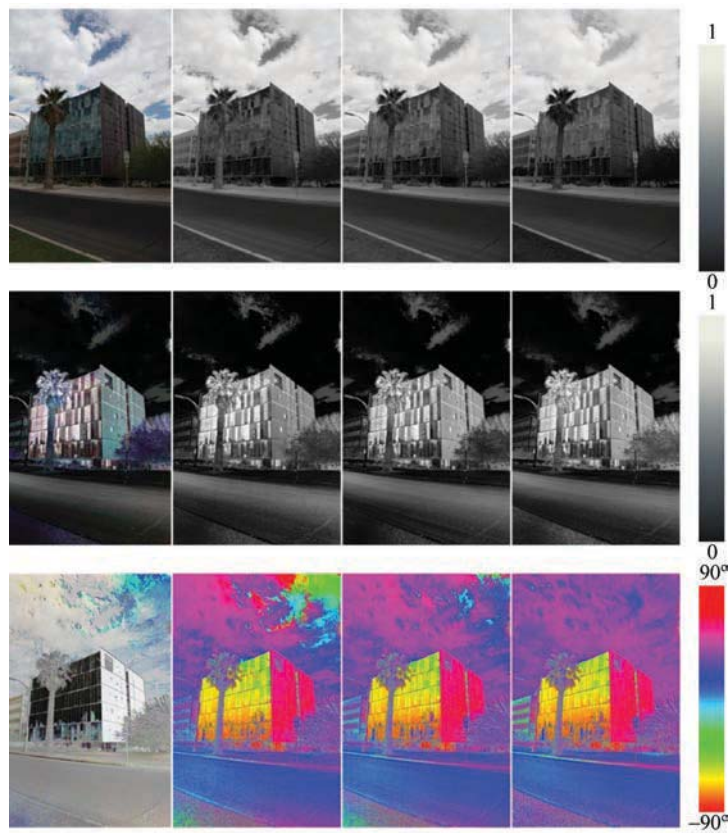


图 1.12 亚利桑那大学 Meinel 光学科学大楼的偏振图像。(第一行)强度图像,(中间行)线偏振度图像,(第三行)线偏振角图像。(左列)RGB 图像,(第二列)470nm 图像,(第三列)550nm 图像,(第四列)660nm 图像。Meinel 建筑的北侧为各种不同角度的玻璃窗格,反射出不同偏振度和偏振角的天光(从橙色约 -80° 到绿色约 50°)。建筑的右侧是铜质金属,窗户很少,线偏振角(AoLP)为约 80° 。天空大部分是多云的,线偏振度(DoLP)很小(暗),仅少数未被云层遮挡的蓝天区域在中间行显示为白色。在 660nm 处,多云天空与蓝天的线偏振角基本相同,而在 470nm 处多云天空的 AoLP 则有明显变化。(由 Karlton Crabtree 和 Narantha Balagopal 拍摄)

了亚利桑那大学 Meinel 光学科学大楼的偏振图像。一个有趣的特点是窗户正面的偏振。从窗户反射的部分偏振天空光,其偏振态随着窗户角度的不同而不同。因此,偏振测量术可

以用来恢复物体的方向信息。成像偏振测量术的一个应用是气溶胶的测量。经微小粒子散射的光在偏振态上发生了显著的变化,可以用来确定气溶胶粒子的大小和密度。气溶胶偏振测量仪通过测量大气散射的阳光来研究大气气溶胶的特性。在地球轨道上的成像偏振测量仪可以绘制全球大气中的气溶胶含量。

测量样品的偏振测量仪,如米勒矩阵偏振测量仪,通过用一系列偏振态的光照射样品并测量出射偏振态来确定材料的偏振特性(图 1.13)。米勒矩阵偏振测量仪可用于测量偏振元

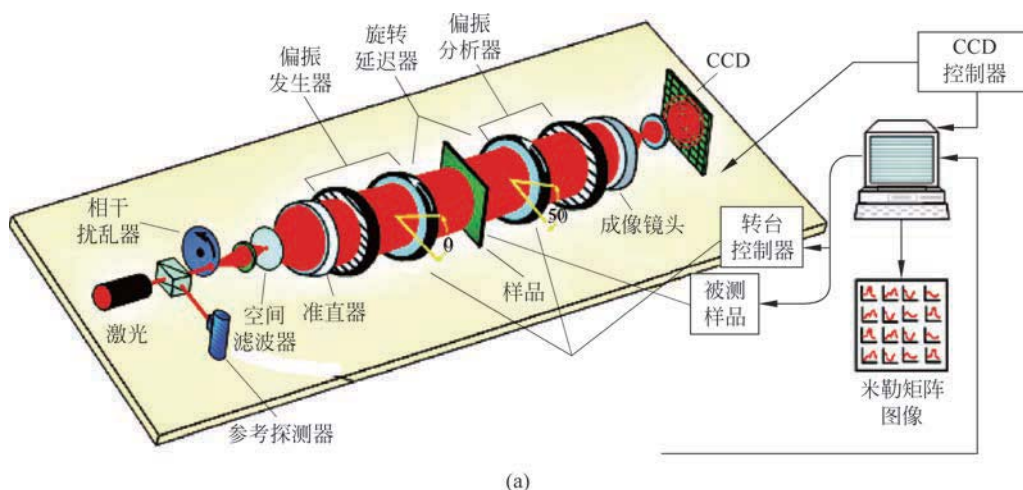


图 1.13 (a)米勒矩阵成像偏振测量仪,通过多种照明偏振器件和分析偏振器件组合对样品进行照明和测量,可测量样品的米勒矩阵、二向衰减、延迟和退偏。这个米勒矩阵偏振计通过一个线偏振器和一个可旋转角度的延迟器对样品进行照明。光和样品相互作用,出射光偏振态发生改变。根据测量需求,光可以经由样品反射、透射、衍射或散射。出射光偏振态的变化可以在光进入相机或辐射计之前,通过一个旋转角度的延迟器和一个线偏振器来分析。(b)用于透射米勒矩阵测量的商用米勒矩阵偏振计。这个偏振计每秒可以测量 30 个米勒矩阵。光源和偏振发生器位于仪器上部,分析器和探测器位于仪器底部。(由 Alabama 州 Huntsville 地区的 Axometrics 公司提供)

件、液晶盒、视网膜成像和其他形式的生物成像。椭偏仪是一种用于测量样品的偏振测量仪,最初由 Paul Drude 于 1880 年代发明,当时他正在寻找一种方法来测量材料的折射率,特别是金属的折射率。他认识到,如果将偏振角为 45° 的线偏振光从入射面上反射,就可以利用反射光偏振态的主轴方向和椭圆率来测量表面的折射率。椭偏测量术的名称就是根据偏振椭圆的特性而来的^[2]。后来,椭圆偏振测量技术发展能够非常精确地测量单层薄膜的厚度和折射率。因此,椭圆偏振测量术促进了减反射镀膜的发展,如 20 世纪 20 年代的四分之一波长厚的氟化镁膜层。通过对多层薄膜在不同入射角和不同波长下的测量,椭偏仪可以精确地获得多层薄膜的特性^[3]。椭偏仪现在是集成电路和微电子器件制造以及其他工业计量应用中的一项必不可少的技术。

1.5 各向异性材料

各向异性材料的折射率随光波电场的方向而变化。许多各向异性材料是晶体,例如方解石和石英。在一个单晶方解石中,所有的钙碳键都朝着一个方向,这个方向被称为光轴。碳酸盐自由基中的三个碳氧键位于垂直平面内。沿光轴偏振的光与正交平面内偏振的光相比,它们与不同的一组化学键相互作用,导致两种偏振光产生两个折射率,它们都对应同一个入射传播方向。当光折射进入方解石或其他各向异性材料时,折射成两种正交偏振的模式,即 o 光和 e 光,通常沿不同的方向传播。这在图 1.14 中可以清楚地看到。

因此,在偏振光线追迹过程中,每一条进入各向异性晶体的光线产生两条出射光线,这两条光线需要追迹到光学系统的输出端。如图 1.15 所示,当存在第二个各向异性光学元件时,光线再次倍增,需要追迹通过系统剩余部分的 4 条光线。一般来说,包含 N 个各向异性元件的系统会产生 2^N 条独立的光线,所有光线都需要被追迹来模拟光通过系统。每一条经过独立路径的光线都有各自的振幅、偏振态和光程长度。因此,出瞳中的光可以用 2^N 个不同的波像差函数来描述;每一个子波都有不同的振幅像差、离焦、球差、彗差、像散等。



图 1.14 通过方解石传播的光分解为两种模式,它们沿着不同的路径传播,产生两个图像

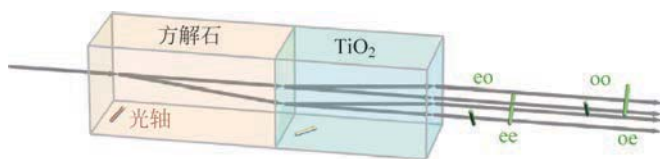


图 1.15 偏振光线追迹展示了一束光通过方解石后分成了两束光。

通过第二种各向异性材料氧化钛后,每一束光都会加倍。每个入射波前都会产生四个出射波前

1.6 光学系统中的典型偏振问题

偏振为许多光学系统的工作奠定了基础。例如液晶显示、用于显微光刻行业的椭偏仪以及芯片制造过程中用于测试沉积层成分和厚度的偏振仪器。但是许多系统都存在偏振相关的问题,在设计光学系统时经常需要对其分析。下面简要介绍一些简单光学系统的偏振像差,以便理解偏振光线追迹理论及分析的目的和方法。

1.6.1 偏振器的角度相关性

光学设计者面临的一个问题是偏振器对光的入射角度的依赖性。二向色偏振器(偏振片)和线栅偏振器都吸收投射到其吸收轴上的偏振分量。当入射角在垂直于或平行于透射轴的平面内变化时,消光比很高。但是由于基本几何的原因,当光在其他方向传播时这个高消光比会减小。当与消光轴成 45° 的平面内传播时,漏光(leakage)最严重。图 1.16 展示了两个偏振镜的 3D 视图,一个偏振器的吸收轴沿 y 轴(绿色),另一个沿 x 轴。轴上的方向用一条短黑线表示。如图 1.17 所示,当一束入射光沿对角线方向偏离轴线时,吸收轴不再正交,有越来越多的光泄漏通过。因此,如果一个 45° 光锥入射,透射强度如图 1.18 所示。

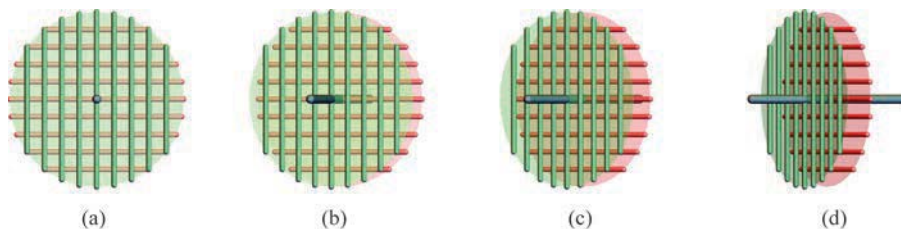


图 1.16 在 x - z 平面内从几个角度观察两个偏振器的 3D 示意图。前偏振器的透射轴是竖向的,用绿线表示。后偏振器的透射轴是水平的,用红线表示。粗黑线表示 z 轴,垂直于两个偏振器。(a) 正入射时,两个透射轴是垂直的。在 15° (b), 30° (c), 45° (d) 观察时,绿线和红线都保持垂直。在这些方向照射时,这对偏振器的消光比是最好的

1.6.2 延迟器的波长和角度相关性

简单的双折射波片是最常见的延迟器,其特性随波长和入射角变化。由于单轴晶体的寻常折射率和异常折射率随波长而变化,即色散,因此双折射也是波长的函数。图 1.19 展示了石英和 MgF_2 四分之一波长延迟器的延迟量与波长的关系。

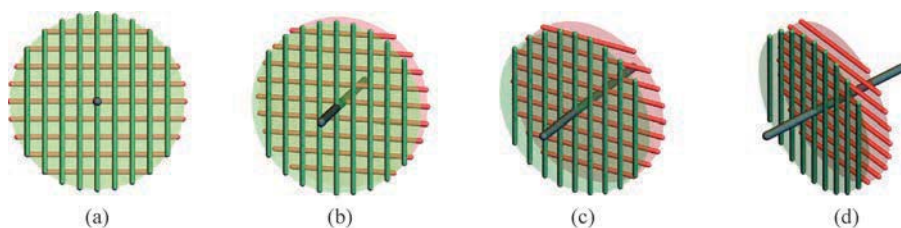


图 1.17 当光传播方向在对角平面内变化时,两个相同偏振器的视图。(a)沿 z 轴的 0° 入射角,绿线和红线是正交的。当入射角在 45° (相对 x 、 y 轴) 平面内依次变化为 (b) 15° 、(c) 30° 、(d) 45° 时,偏振器透射轴的投影不再正交,因此偏振器对出现漏光

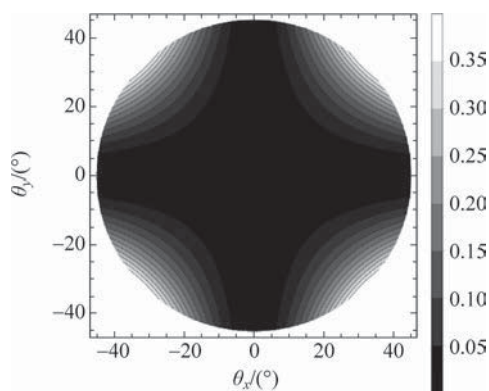


图 1.18 45° 光锥通过一对正交偏振器发生部分泄漏的光强图

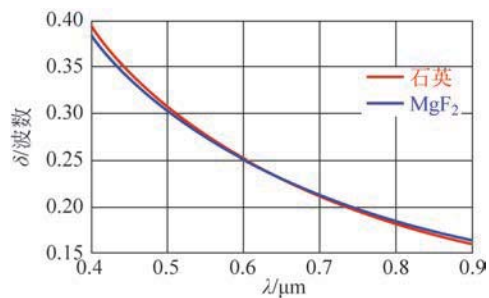


图 1.19 石英(红色)和氟化镁(蓝色) $\lambda/4$ 波片($\lambda=600\text{nm}$)的波长和延迟量相关性

延迟器的延迟量也随着入射角的变化而变化。因为通过延迟器的光程随入射角的增大而增大,并且异常折射率随角度变化,所以延迟器的延迟量随角度有一个类似环形的变化。针对石英四分之一波片延迟器的计算如图 1.20 所示。对于 y 偏振的光,沿 x - z 平面和 y - z 平面入射的光出射偏振态不变,但其他所有方向入射的光偏振态都发生变化。当延迟器或其他双折射晶体被放置在锥光镜(conoscope)中时,延迟量的变化是很容易看到的。锥光镜是这样一种光学仪器,它将偏振光聚焦通过样品并用另一个偏振器去分析偏振光。图 1.21(a)显示了锥光镜中厚的方解石 A-板的锥光镜图像,图 1.21(b)显示了厚方解石晶体的图像,其光轴沿平板法线,这种结构称为 C-板。

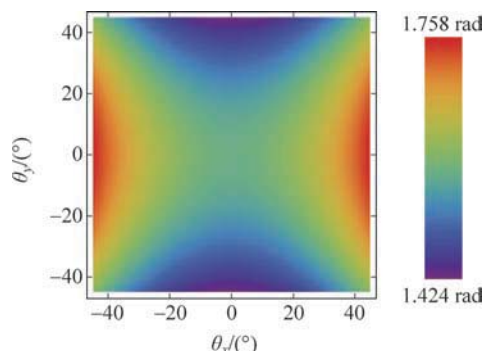


图 1.20 四分之一波长延迟器的延迟量(1.571rad)随入射角的变化情况:在包含光轴的平面内(垂直)随着入射角增大,延迟量减小;在正交平面(水平)内延迟量随入射角增大。在对角线方向,随着入射角变化,延迟量几乎不变

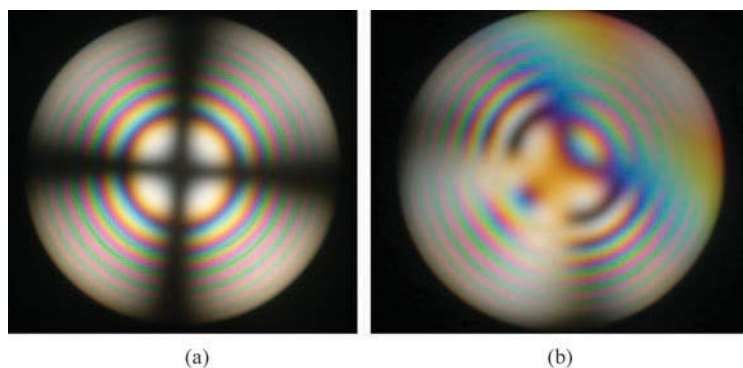


图 1.21 方解石 A-板(a)和 C-板(b)在锥光镜中的图像,彩色条纹显示了出射偏振态随角度和波长的变化

1.6.3 透镜中的应力双折射

关于偏振光和透镜的另一个问题是应力双折射,特别是注塑透镜。应力双折射是一种空间变化的双折射,由透镜内应力压缩或拉伸材料的原子,导致双折射。在制造过程中,由于透镜材料冷却不均匀,应力双折射将残留在玻璃坯料或注塑透镜中。应力也可来源于外部施加的力,例如透镜安装支架作用在透镜上的力,甚至重力。因此,应力双折射引入了非预期的延迟量变化。将透镜放置在正交偏振器之间(这个系统称为偏光镜),可以观察到应力双折射。由应力引起的延迟会使得部分光的偏振态发生改变,这种改变了的分量将通过第二个偏振器。通过观察偏振光泄漏,如图 1.22 所示,可以直观地看到应力。应力双折射通常可以通过退火来减弱,即将透镜加热到接近玻璃软化转变温度,然后缓慢冷却以降低内部应力。退火是高品质光学玻璃的常规工艺。图 1.23(a)展示了偏光镜中一块受到机械应力的玻璃。强度分布图显示了偏振态改变了的区域。图 1.23(b)显示了快速冷却产生高应力的一块玻璃。透镜中的应力双折射会降低其成像质量。

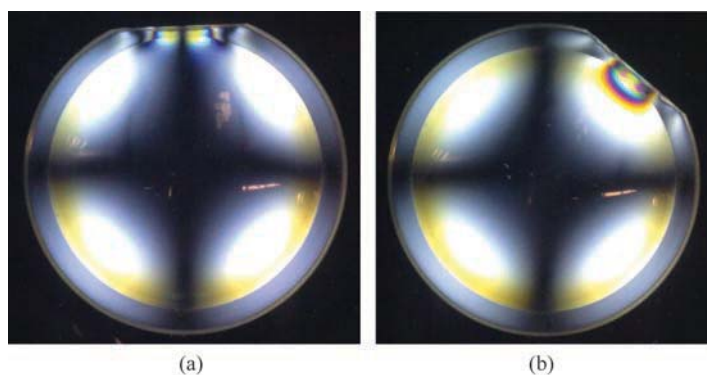


图 1.22 一个注塑透镜的应力双折射,(a)位于正交偏振器之间(在顶部),(b)将透镜旋转 45°

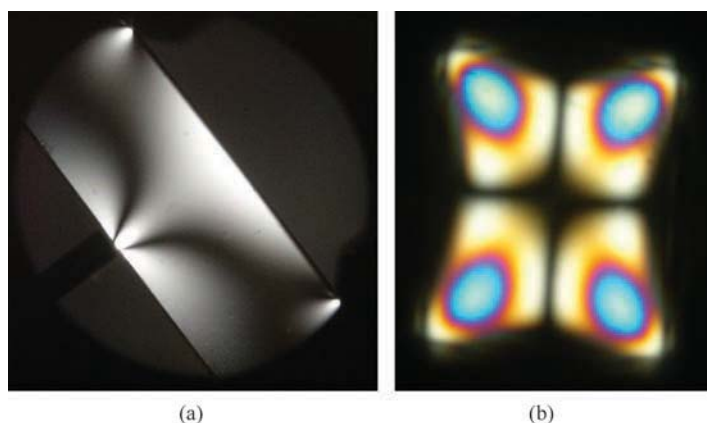


图 1.23 (a)偏光镜中由压力引起的应力双折射。通过右上方的两个点支撑的一块玻璃,由左下方一颗螺丝钉施加压力。(b)将一块包含有大应力的方形玻璃放在正交偏振器之间观察,可以观察到应力引起的延迟随波长的变化

1.6.4 液晶显示器和投影仪

液晶是一种双折射分子组成的浓稠液体,通常是根据偶极矩选择的棒状分子。这些分子在施加的电场作用下旋转,从而调节液晶元件的延迟量。图 1.24 展示了一个典型的扭曲向列液晶单元分子方向随不同电压的变化。当把液晶放置在偏振器之间时,液晶表现为一个电压控制的强度调制器。为了制造液晶显示器,在两块玻璃板之间放置一层薄薄的液晶,并在一个可寻址的阵列中制作一个电极阵列,以调整每个像素的电场,并与一组微小的红、绿、蓝滤光片组合在一起。

液晶盒、液晶显示器和投影仪都存在非常具有挑战性的偏振像差问题。显示器中出现的非预期偏振变化会导致不想要的显示色彩变化。眼睛对色彩的变化非常敏感,因此需要尽量减少这种不希望有的偏振变化。引起液晶器件颜色变化的一个主要原因是液晶器件的延迟量随入射角的变化很大。延迟量大小、快轴及椭圆率均会随角度变化。图 1.24(f)展示了这种延迟量变化的一个例子。椭圆表示快态,椭圆的大小表示延迟量的大小。这种变

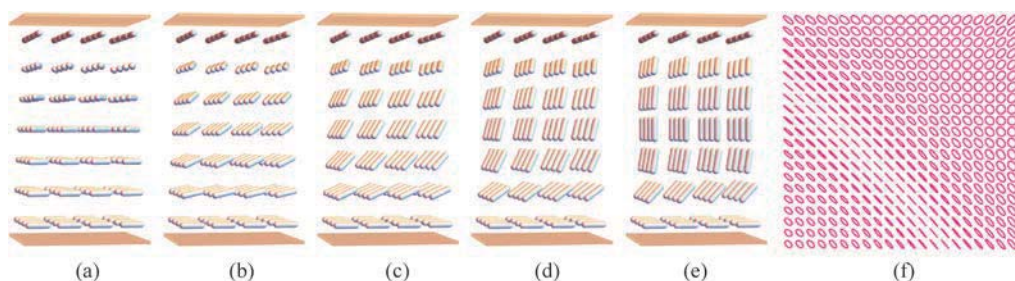


图 1.24 不同电压下,扭曲向列液晶盒的分子方向,电压从左向右依次递增。光沿垂直方向传播,液晶分子锚定在水平面的顶部和底部。在 0V 处(a),分子在水平面内绕 z 轴(垂直方向)扭转。随着电压的增加(向右依次增大),在液晶盒中央的分子开始偏离水平面,减少了对延迟量的贡献。在高电压下,中心的分子旋转到垂直平面,而顶部和底部的分子仍然锚定在基板上。(f)液晶盒在电场中的延迟变化(快轴方向和延迟量大小)

化如果不加以补偿,会导致显示器的色彩和亮度随入射角而变化,这是很让人分心的。这种延迟量的角度相关性通常通过添加另一层双折射分子薄膜(双轴多层膜)来修正,双轴多层膜通常由圆盘状分子制造,可有效补偿棒状液晶分子的双折射随角度的变化,如图 1.25(b)所示。

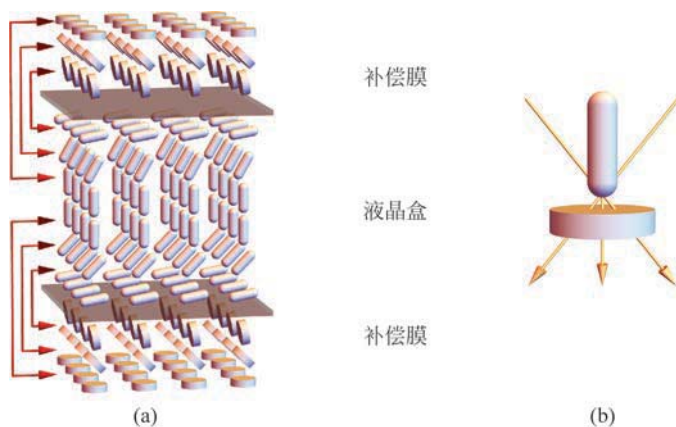


图 1.25 在所有显示器中,液晶盒都配备补偿薄膜来减少偏振像差。上部的薄膜补偿液晶盒的上半部分,下面的薄膜补偿液晶盒的下半部分;通过减少非必要的偏振态变化和偏振光泄漏,大大提高了显示的色彩质量

1.7 光学设计

光学设计是一门寻求各类光学元件的最优和有用组合的工程实践。它也称为镜头设计,这是因为镜头、望远镜和显微镜的设计以及对于像差的理解,自 19 世纪后期光学设计正式确立以来,一直是其核心的研究领域。

光学系统可以分为成像系统和其他类型的光学系统,如照明系统。成像系统的设计是将输入球面波转化为输出球面波。然而,用透镜和反射镜不可能将来自物体有限区域的输

入波转换为完美的球面输出波^①。用透镜和反射镜的组合,出射波面与球面的一些偏差不可避免。这些相较于球面波前的偏差称为像差。波前是从光源出发的等相位和等光程的面。光程是沿某一路径通过一个光学系统的波长数,通常以米为单位。几分之一波长的光程长度变化对成像质量有显著影响。传统的光学设计,我们说它不考虑偏振的影响,其重点是通过光线追迹计算光程长度。光程长度的变化比振幅或偏振态的变化对成像质量的影响要大得多。光学设计中最重要的一项任务是通过优化光学系统,使光学系统在期望的波长范围和目标位置上的像差达到最小。在许多类型的光学系统中,如电影镜头和光刻镜头,对波前像差的控制都十分严格。

考虑一个手机镜头的例子(图 1.26; 美国专利 7453654 实施例 #3),由光线追迹计算得到的一组光线路径。五束准直光(平行光)从左侧物空间进入,并用垂直于波前的光线表示。在示例中,由光学分析软件 Polaris-M^② 计算了每条光线与第一个表面的交点,这些交点称为光线截点。根据斯涅尔定律,在第一片透镜内部计算光线的方向,称为传播矢量。之后,折射光线传播,直到它与第二个表面相交,并计算第一个截点与第二个截点之间的光线长度。光线长度与折射率的乘积就是该光线段的光程长度。重复上述过程,求解光线截点然后折射光线,直到光线从最后一个表面出射进入像空间。该镜头的孔径光阑位于第一个表面,在那里来自各个视场的不同颜色的光线相交。更多关于光线追迹的内容请参考第 10 章(见关于几何和偏振光线追迹的讨论)。

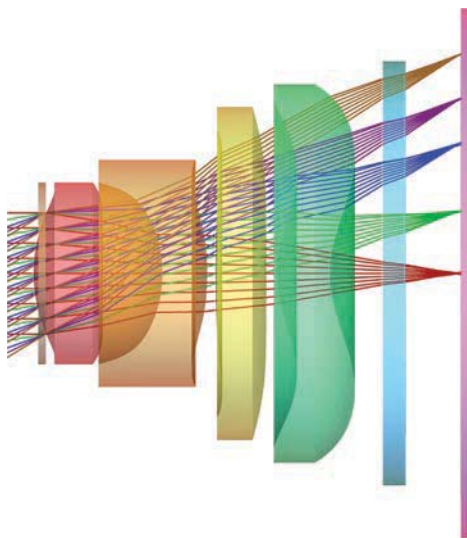


图 1.26 通过四个元件的手机镜头进行光线追迹的一个例子。轴上光线用红线表示,轴外视场的光线分别用绿、蓝、紫和棕线表示。蓝色为一个平行平面的红外阻隔滤光片,位于最右侧像面的左侧

为了评估该镜头的成像质量和像差,追迹一组光线到像平面。轴上光束的光线几乎会

^① 也存在特殊情况,如麦克斯韦鱼眼镜头和 Luneburg 镜头这一类具有弯曲物面和像面的镜头。这些例外情形不适用于相机镜头、手机镜头和大多数成像应用。

^② Polaris-M 是一款由 Airy 光学公司开发的偏振光线追迹程序,该公司位于亚利桑那州图森市。

聚到了一点,而轴外光束的光线会聚情况较差。为了评估像差,计算一组光线在一个球面上的光程长度,该球面以像点为中心,即参考球面,如图 1.27 所示。图 1.28 展示了以波长数表示的轴上物点的波像差。图 1.29 展示了绿色离轴光束的波像差。

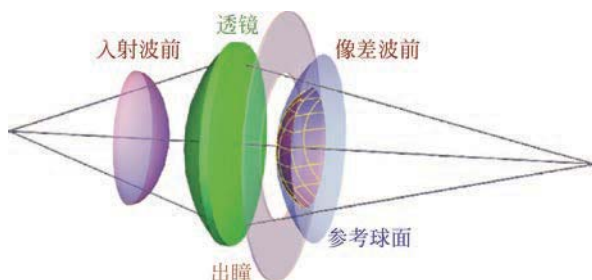


图 1.27 示例镜头(绿)的入射波前(紫)是球面,出射波前会聚到像点(右)。以像点为中心构建一个参考球面(蓝色),与出瞳(淡紫色)的中心相交。带有像差的出射波前(紫色,黄色网格线)是从物体和入瞳算起具有恒定光程的面。参考球面和带有像差波前之间沿光路的间隔就是波前像差。当这些面重合时,波前是球面并且没有像差。“衍射受限波前”通常被认为与参考球面光程差小于四分之一波长

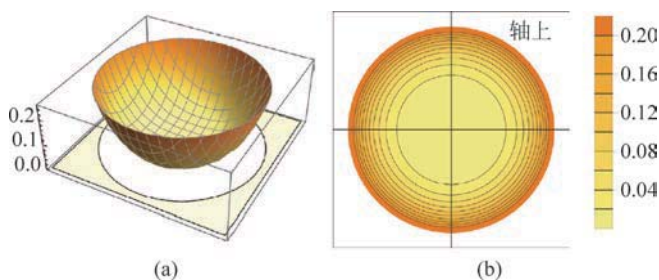


图 1.28 以两种形式展示图 1.26 轴上光束的波像差,一种是斜视图(a),另一种是彩色等高线图(b)。可看到大约四分之一波长的球差,即一个四阶碗状像差。理想的球面波前具有平整的波前像差图

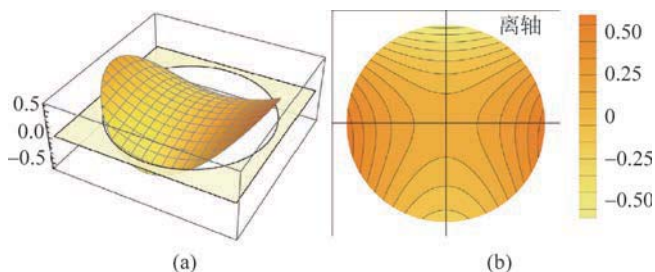


图 1.29 图 1.26 轴外光束波像差的两种表示方法,波像差包含十分之四波长的彗差、一个波长的像散和四分之一波长的球差

这些像差对像的影响可以通过第 16 章(有偏振像差的成像)中的傅里叶光学方法进行计算。点光源的像被称为点扩散函数(PSF),是通过出瞳处的波前进行傅里叶变换来计算的。图 1.30 展示了两种轴上 PSF 的表示方法:斜投影图和彩色等高线图。这个 PSF 的形式非常接近于理想波前(艾里斑)的 PSF,但由于球差而变大。峰值强度降低到无像差

PSF 强度的 40% 左右, 因此像的斯特雷尔比是 0.4。图 1.31 展示了离轴 PSF 的两个视图, 其中 PSF 更宽, 峰值强度因为更大的像差而进一步降低。

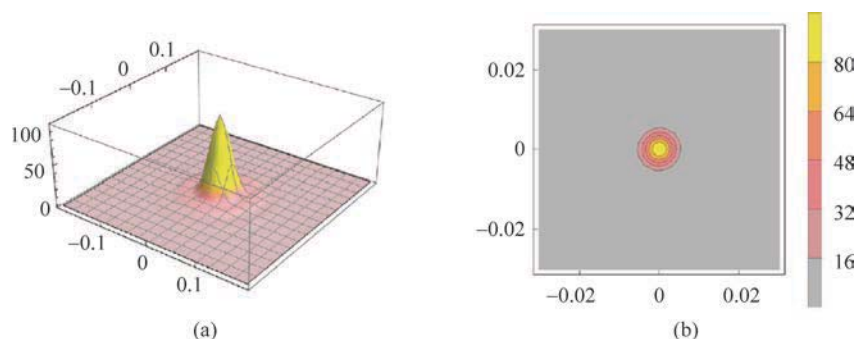


图 1.30 轴上 PSF, 点光源像的光通量分布, (a) 斜视图和 (b) 伪彩色等强度线图。任意光通量单位

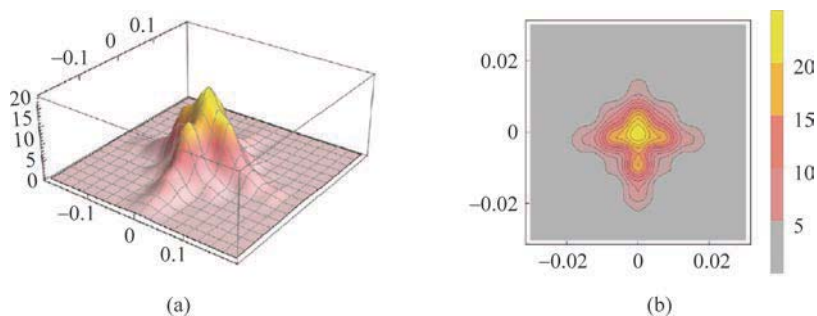


图 1.31 离轴 PSF, (a) 斜视图和 (b) 伪彩色等高线图。与图 1.30 的轴上 PSF 相比, 由于该光束的像差更大, 峰值强度更低, 光的分布更宽 (导致分辨率更低)

在传统光学设计中, 用于计算 PSF 的假设如下: ①所有光线透过率是相等的; ②在出瞳中出射偏振态是均匀不变的。计算只考虑光程长度变化和波像差的影响。图 1.28~图 1.31 中应用的这些假设是本书所指的传统光学设计假设。由于偏振像差通常很小, 因此被忽略了, 这对于许多系统是一种很好的近似。

事实上, 光线的透过率是不同的。每一条光线有一组不同的入射角, 会导致各个界面对应的透过率不同。此外, 折射时光的偏振态有细微的变化, 因此在出瞳处偏振态分布不均匀。这些振幅和偏振的改变取决于每个表面上使用的抗反射膜层。因此, 计算膜层对偏振光线追迹的影响, 必须给出膜层性质及透镜形状和折射率。一些膜层会引起比其他膜层更大的振幅和偏振变化。对于类似这个手机镜头的系统, 膜层对波像差和 PSF 的影响很小。在这种情况下, 当波像差的影响远大于振幅和偏振像差的影响时, 传统光学设计的假设是合理的。为了确定这些假设在什么情况下是合理的, 应该进行额外的偏振计算来确定每条光线截点处的振幅、光程长度和偏振变化, 并将这些效应级联起来成为偏振光线追迹。

从 20 世纪 60 年代早期到 90 年代中期, 商业光学设计程序只基于光程长度的计算。在此期间, 传统的光线追迹假设适用于大多数光学设计计算。但到了 21 世纪初, 许多光学设计问题都需要偏振计算来精确模拟大数值孔径的先进光学系统, 对这种偏振敏感系统进行公差分析, 了解光学膜层对波像差和偏振像差的影响。现在, 功能全面的光学设计程序允许

设计人员在光学表面指定膜层,计算出偏振态,并确定光路的偏振特性。

1.7.1 偏振光线追迹

偏振光线追迹的目的是计算光学系统的出射偏振态,并确定与光线路径相关的偏振特性,即二向衰减、延迟和退偏特性。用等效偏振元件的形式来理解通过光学系统的光路是非常有用的。需搞清楚与光路相关的偏振特性(二向衰减、延迟和退偏)是什么?等效偏振元件,二向衰减器、延迟器,是什么?哪一种等效偏置元件会造成偏振态改变?

偏振效应是由于反射和折射中 s 和 p 分量的差异而产生的。图 1.32(a)和(b)定义了入射光的 s 和 p 分量。图 1.32(c)给出了强度透射系数,即从空气折射分别进入折射率为 1.5、2 和 4 的未镀膜表面时,根据菲涅耳公式计算出的透射光强度比与入射角的关系。抗反射膜界面具有相似的曲线但提高了透射率,透射率更加接近于 1。

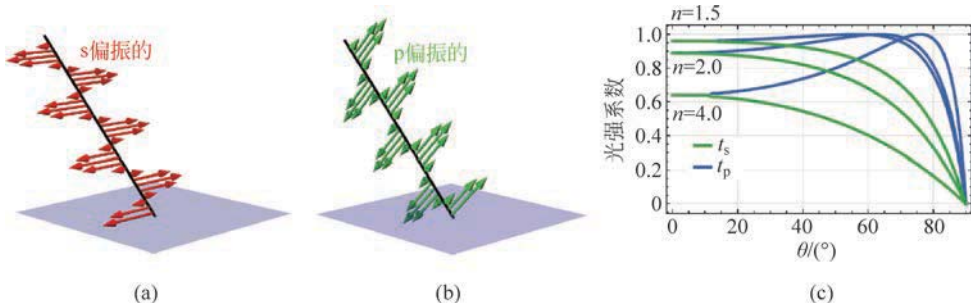


图 1.32 (a),(b)光束在界面上 s 和 p 分量的定义。(c)s 光(绿线)和 p 光(蓝线)从空气进入不同折射率透镜的菲涅耳透射系数是入射角的函数。透射的差异性导致了二向衰减或部分偏振

偏振光线追迹的主要方法是偏振矩阵传播法。计算出每个光线截点和光线段的偏振矩阵。用矩阵乘法将偏振相互作用级联起来。最后,计算出从物空间到像空间每条光线路径的偏振矩阵(例如琼斯矩阵或米勒矩阵)。偏振光线追迹的结果可与传统光线追迹得到的光程长度结合起来,并进行其他一系列附加的分析。

偏振矩阵传播法可以确定所有入射偏振态的输出偏振态,并描述光线路径的二向衰减和延迟。如果偏振态改变幅度是个问题,这有助于理解偏振态改变的原因,以及对它能做点什么。描述光线路径最简单的方法是用琼斯矩阵,即 2×2 复数矩阵,如式(1.2)所示。这里,矩阵元素用笛卡儿复数形式和极坐标形式表示,

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{21} \\ j_{12} & j_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + iy_{11} & x_{12} + iy_{12} \\ x_{21} + iy_{21} & x_{22} + iy_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{11} e^{i\phi_{11}} & \rho_{12} e^{i\phi_{12}} \\ \rho_{21} e^{i\phi_{21}} & \rho_{22} e^{i\phi_{22}} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

停下来思考一下这种偏振矩阵传播方法对偏振光学设计师和其他需要使用它并且理解其工作的工程师的重要性。传统的光学设计用波像差函数来描述像差,这是一个标量函数,在出瞳中波前上每一点都有一个值。偏振矩阵传播法将波前上每一点的标量函数替换为琼斯矩阵。这个函数称为偏振像差函数或琼斯光瞳。从每一条光线只有一个变量(光程长度)的表示法,到每一条光线有八个变量的矩阵表示法,这是一个非常实质性的复杂化!本书将会以一种循序渐进的方式,通过后面几个章节来详细介绍这些自由度并给出如何使用这些

附加信息的指导。因此,我们将学习解释偏振像差并了解它们对成像和各种测量的影响。难怪早期的光学设计师在他们的成像质量计算中没有包括对未镀膜或有镀膜的透镜表面和反射镜进行计算,因为这并不容易。

而且这变得更加复杂了!

1.7.2 透镜的偏振像差

由于菲涅耳公式和薄膜公式的效应,透镜会出现偏振像差。对于一个在球面上的轴上球面波,入射角从光瞳中心起始呈近似线性增大,入射面为径向方向,如图 1.33(a)所示。对于大部分减反膜,偏振光在 p 平面(径向)和 s 平面(切向)的透射差异近似呈二次方增大,如图 1.32(c)所示。因此,一个未镀膜透镜表面实际上是一个弱的线性偏振器,具有径向的透射轴,近似二次增大的二向衰减率,如图 1.33(b)所示。图 1.34 显示了当 90° 线偏振光、 45° 线偏振光和左旋圆偏振光进入透镜时,在未镀膜透镜出瞳中采集的一系列偏振椭圆,即偏振光瞳图。在图 1.34(a)中,光束的顶部和底部较亮,右侧和左侧较暗,并且在光瞳边缘对角线处的偏振转向径向方向。图 1.34(b)有相同的形式,但绕中心旋转了 45° 。当圆偏振光入射时,光线在光瞳边缘逐渐趋于椭圆化,而非圆形,椭圆的长轴沿径向。如果将未镀膜透镜放在正交的偏振器之间,沿两个偏振器轴的光出现消光,但是沿光瞳对角线出现漏光,如图 1.35 所示,这种图案称为马耳他十字(Maltese cross)。当马耳他十字光束聚焦时可观察到一个有趣的图案。由于这个偏振像差,在忽略波像差的情况下,PSF 的中心和沿 x 轴和 y 轴都是暗的,但在一个环中有四个光斑,离中心更远的地方有更暗的光斑,如图 1.36 所示。

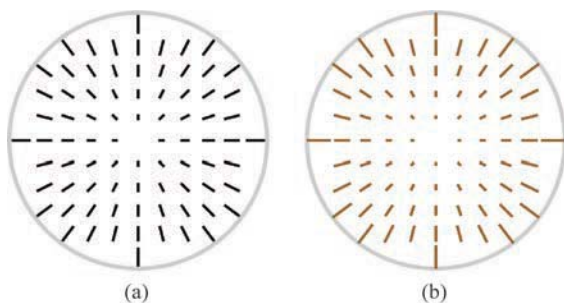


图 1.33 (a)显示了轴上球面波入射到球面上时,入射面和入射角的函数。入射角是径向的,并且从中心线性增大。(b)显示了轴上光源在透镜表面的二向衰减方向和大小。二向衰减是径向的,大小呈二次增大。二向衰减像差用棕色线段表示

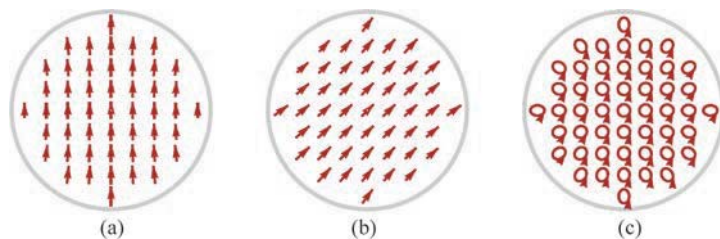


图 1.34 图 1.33 二向衰减像差对于入射的(a) 90° 线偏振光、(b) 45° 线偏振光和(c)左旋圆偏振光的影响

大多数透镜表面都镀有增透膜。对于镀有四分之一波长厚的 MgF_2 增透膜的透镜表

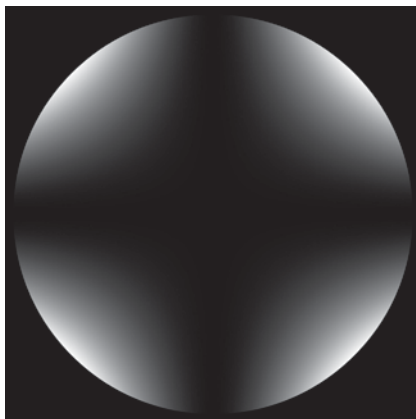


图 1.35 将一个未镀膜的透镜放在正交的(x, y 方向的)偏振器之间观察, 可以看到漏光, 这就是马耳他十字图案

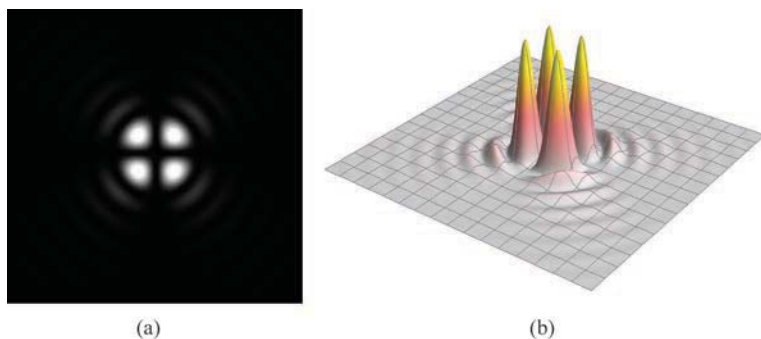


图 1.36 未镀膜的透镜位于正交偏振器(x, y 方向的)之间的 PSF。(a)强度图, (b)斜视图

面, 二向衰减通常减少到未镀膜的五分之一, 从而大大降低了偏振像差。通常情况下, 也会引入很少量的延迟。

对于一个多元件的镜头, 二向衰减和延迟逐级累积。正透镜和负透镜都引入相同符号的二向衰减。以图 1.37 中的一对显微物镜为例, 准直光进入第一个物镜, 在两个物镜之间形成一个焦点, 并被第二个物镜准直。这组低偏振显微物镜的数值孔径为 0.55。图 1.38 展示了这对低偏振显微物镜的测量偏振像差。这里二向衰减比延迟更大, 在光瞳的边缘处二向衰减达到 0.09。即使在这种低偏振像差情况下, 也有近 10% 的偏振, 当第一个透镜被准直的线偏振光照射, 出射光被正交的偏振器阻挡时, 光瞳平均漏光也具有马耳他十字图样。

光学系统中存在延迟表明该系统存在受偏振影响的光程长度, 因此在不同偏振态下会有不同的干涉图案。镀有金属膜的球面、抛物面、椭球面和双曲面反射镜, 在轴上可见延迟偏振像差, 相关的光学系统如卡塞格林望远镜有一个切向方向的快轴, 其延迟量大小从光瞳中心开始增加。图 1.39(a) 显示了球面和二次曲面反射镜的轴上延迟像差。平行于线段的偏振态相位超前, 垂直于线段的偏振态相位滞后。因此, 对于 90° 线偏振的球面波前, 波前会变形, 如图 1.39(b) 所示。对于轴上光源, 由于延迟, 金属反射镜、卡塞格林望远镜及类似光学系统沿着两个轴具有不同的二次相位变化; 反射镜使轴上光束产生了像散, 该像散无法由传统光线追迹计算得到! 这种像散与入射光的偏振面方向一致; 当偏振态旋转时, 像散波像差也随之旋转。幸运的是, 像卡塞格林望远镜这样的普通光学系统通常只有不到十

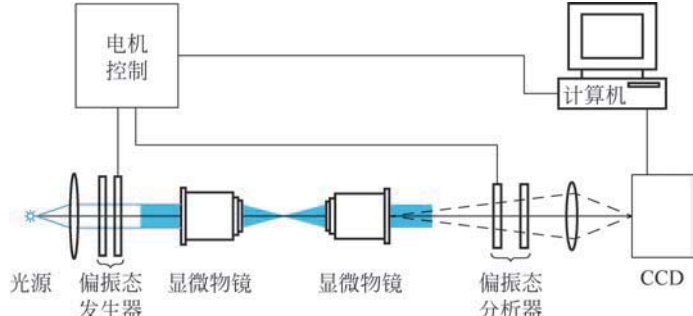


图 1.37 成像偏振测量仪中用于测量偏振像差的光路布局,其中准直光进入第一个显微物镜,聚焦,然后从第二个显微物镜准直出射

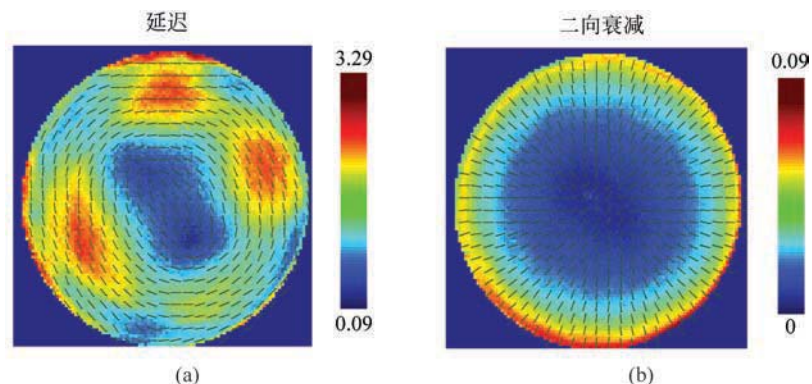


图 1.38 轴上光束通过一对显微物镜的偏振像差测量结果。(a)二向衰减像差分布,其中最大值为 0.09。(b)延迟像差分布,最大值为 3° (或 0.09 波长)。两种像差在入射角度较小的光瞳中心附近都有较小的偏振像差。用米勒矩阵偏振测量仪进行的测量

分之一波长的这种金属膜层引起的像散,所以这种像散的来源对光学设计者来说不是很重要。尽管如此,这种像散的来源也应该引起重视,因为它很容易在干涉测量中看到,当它出现时,需要进行合理的解释。

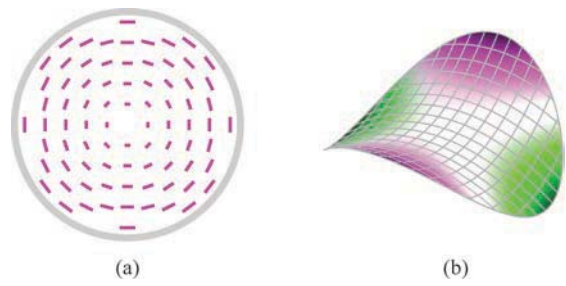


图 1.39 (a)球面或抛物面反射镜在轴向照明下的延迟像差;线条表示光瞳上延迟的快轴方向和延迟大小。当 90° 线偏振的球面波前与延迟像差(a)相互作用时会产生像散波前(b)。白色表示主光线的光程长度,紫色表示较短的光程长度,绿色表示较长的光程长度

1.7.3 高数值孔径波前

数值孔径表征了光学系统能接收或传输光的角度范围; F 数或 $F/\#$ 描述了类似的光

学性质。具有高数值孔径、大锥角的光束在光学中很有价值,因为它们可以聚焦为较小的像。因此,人们不断追求更大数值孔径的光学系统。

高数值孔径光束必定伴有偏振变化,因为偏振态(相对于波前是横向的)无法在三维空间中保持均匀,它必定会沿着球面弯曲。这些固有的高数值孔径偏振态变化往往是有害的,扩展了理想衍射受限像。

假设有一束半球形光束,其对应的数值孔径是 1,相应的立体角为 2π 立体弧度。例如,当 x 偏振的光入射到这样一个高数值孔径镜头上时,出射偏振形式如图 1.40 所示。在 z 轴(光束中心的光轴)附近,偏振是近似均匀分布的。沿着 y 轴,光总是能在保持 x 方向的偏振,一直到光瞳的边缘,因为沿着 x 轴的这些矢量与球面相切。沿着 x 轴,光必须向上倾斜(带有负的 z 分量),向下倾斜(带有正的 z 分量),才能保持在球面上。光的偏振态继续旋转,直到在图 1.40(a)中光瞳的左右两侧,光变为 $\pm z$ 方向偏振,因为这里光在 $\pm x$ 方向传播。在光瞳边缘附近,偏振变化如图 1.41 所示。这种偏振变化的结果是 PSF 在一个方向上拉长,类似像散。图 1.40 仅显示了在高数值孔径光束中偏振可能变化的一种形式。

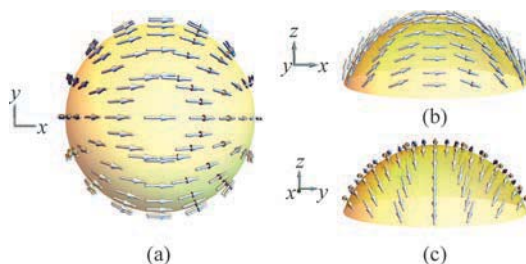


图 1.40 一个高数值孔径的球面波在 x 方向上线性偏振,(a)沿 z 轴的视图,(b)沿 y 轴的视图,(c)沿 x 轴的视图。该偏振与 11.4 节的双极坐标对应,双极位于 z 轴上

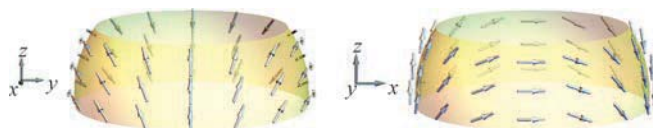


图 1.41 图 1.40 半球波前边缘周围的线偏振光分布

显微光刻和显微镜领域十分关注其他一些偏振分布,这些偏振分布具有有用的成像性能,特别是如图 1.42 所示的径向和切向偏振光束。注意,这些光波偏振态不能不间断地延伸到原点,因此会在中心产生一个暗斑。

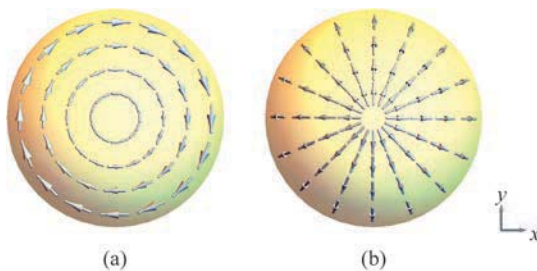


图 1.42 (a)切向偏振波前和(b)径向偏振波前的偏振分布

1.8 历史发展回顾

光的横波性质和偏振性质对光学和物理学的发展起了重要作用。Goldstein 的《偏振光》^[4]第1章之前对偏振光历史做了很精彩的总结。另一个总结在 Brosseau 的《偏振光基础,一种统计光学方法》中的第1部分(偏振光理解的历史回顾)。随着1800年至1830年对偏振光和衍射的深入理解,人们终于达成共识,认为光是一种横波。在 Buchwald 的《光的波动理论的兴起》中,可以找到这一形成时期广受关注的科学争议。出版于1842年 Pereira 著的《偏振光讲义》(可在线获得),其中记录了19世纪上半叶对偏振光的深刻理解^[5]。

随着宝丽来塑料偏振片的发明,偏振光学取得了巨大的进步。在宝丽来发明之前,偏振器往往是小而昂贵的,例如尼科尔棱镜。大而便宜的偏振片和延迟器的使用推动了偏振光学和相关领域的快速发展。Land 和 West^[6]、Grabau^[7]论述了二向色偏振器的历史。

1.9 偏振光学参考书籍

以下是一些关于偏振光的书籍或有意义的偏振光章节的简短清单,作者认为这些书对学生会有帮助。Goldstein 对偏振数学方法进行了透彻的研究,讨论了菲涅耳方程、椭圆测量术及很多其他主题。对于高中生和本科生这样的入门者,Können 是一个很好的开始,他对偏振光进行了非数学讨论。在网上可找到 Können 的免费版本^[8]。Mansuripur 在研究生水平对许多偏振效应提供了非数学讨论^[9]。

- [1] Shurcliff, W. A., Polarized Light. Production and Use, Cambridge, MA: Harvard University Press, 1966.
- [2] Azzam, R. M. A. and Bashara, N. M., Ellipsometry and Polarized Light, 2nd edition Amsterdam: Elsevier, 1987.
- [3] Kliger, D. S. and Lewis, J. W., Polarized Light in Optics and Spectroscopy, Elsevier, 1990.
- [4] Können, G. P., Polarized Light in Nature, CUP Archive, 1985.
- [5] Hecht, E., Optics, 4th edition, Addison Wesley Longman, 1998.
- [6] Brosseau, C., Fundamentals of Polarized Light: A Statistical Optics Approach, New York: Wiley, 1998.
- [7] Born, M. and Wolf, E., Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light, 7th expanded edition, Cambridge University Press, 1999.
- [8] Mansuripur, M., Classical Optics and Its Applications, 2nd edition, Cambridge University Press, 2009.
- [9] Collette, E., Field Guide to Polarization, SPIE Press, 2006.
- [10] Cloude, S., Polarisation: Applications in Remote Sensing, Oxford University Press, 2009.
- [11] Goldstein, D., Polarized Light, Revised and expanded 3rd edition, Vol. 83, Boca

Raton, FL: CRC Press, 2011.

- [12] Horváth, G., Polarized Light and Polarization Vision in Animal Sciences, Springer Series in Vision Research(2), 2014.

1.10 习题集

- 1.1 为什么单色光波有周期性电场? 为什么单色平面波的电场必定会在横向平面上沿椭圆轨迹运动?
- 1.2 画出 30° 线偏振光的偏振椭圆。画出 $E_x(t)$ 和 $E_y(t)$, x 和 y 分量, 磁场在哪个平面内振动?
- 1.3 在图 1.34 中, 对于 90° 的入射偏振光, 偏振椭圆的长轴沿光瞳边缘是如何变化的? 45° 偏振光呢? 左旋圆偏振光呢?
- 1.4 使用一个偏振片, 旋转一副偏振太阳镜并估计左右镜片透光轴的对准性。轴线是水平还是垂直的? 两个轴是相同的还是存在细微的差异?
- 1.5 用液晶投影仪的偏振光去照射投影屏幕。
 - a. 投影仪发出的光在红、绿、蓝波段是如何偏振的?
 - b. 用旋转偏振器检查从屏幕散射的光。分别投射一个红色、绿色和蓝色的场景, 目测散射光的线性偏振度。
 - c. 偏振对于散射的角度是否有相关性?
- 1.6 用线偏振器研究人造彩虹的偏振特性。背向太阳, 用软管、草坪洒水器或水雾机制造水雾。在阳台或其他地方看向水雾, 在暗背景下看水雾的效果最好。透过偏振器看彩虹, 沿着彩虹的弧形画出彩虹的偏振图, 表明线偏振的方向。偏振度很难用肉眼准确估计, 但大约接近 90% 。不同颜色的线偏振度是否相同?
- 1.7 用轴上准直光束从无穷远照射透镜球面, 入射角从中心开始近似线性增大还是二次增大?
- 1.8 考虑图 1.40 中的线偏振半球波前,
 - a. 过原点的哪个平面中, 所有的电场矢量都指向同一方向?
 - b. 在光瞳中哪些相对点上电场方向相反?
 - c. 当沿着半球波前的边缘移动时, 电场是如何旋转的?
- 1.9 图 1.22 中哪里的应力最大?
- 1.10 一个特定的二向衰减器, 或部分偏振器, 最大透射率 $T_{\max} = 0.7$, 二向衰减率 $D = 0.999$, 求 $T_{\min}$ 。
- 1.11 对比度定义为 $C = \frac{T_{\max}}{T_{\min}}$ 。求二向衰减率的表达式, 作为对比度的函数。当二向衰减率为 0.999 时, 对比度是多少?
- 1.12 在 600nm 处, 一石英晶片有三个波的延迟量, 另一 MgF_2 晶片有四个波的延迟量, 则可以得到一个一波的延迟器。参考图 1.19, 在什么波长下可组成 $3/4$ 波的延迟器? $5/4$ 波的延迟器?
- 1.13 取两个偏振片, 使它们的透光轴正交。当它们围绕水平轴、垂直轴和对角线轴旋转时

拍摄照片。描述它们是怎样漏光的,以及消光变化情况。

- 1.14 考虑光通过两个正交的偏振器,它们分别与 $\mathbf{x} = (1, 0, 0)$ 和 $\mathbf{y} = (0, 1, 0)$ 对准,光沿 $\mathbf{k} = (\sin\phi \cos\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\phi)$ 的方向传播。将两个偏振器投影到横向平面上,求它们吸收轴之间的表观角度 χ 。通过这对偏振器的透射率为 $T = \cos^2\chi$ 。沿对角 $\phi = 45^\circ$ 将 T 展开为 θ 的泰勒级数,以确定透射率的最低阶多项式变化。
- 1.15 马吕斯定律指出,当一个理想的线偏振器放置在线偏振光中,光的透射率可表示为 $F = \cos^2\theta$,其中 θ 是入射偏振光和偏振器透射轴之间的夹角。假设在 0° 偏振光中一个接一个放置 N 个偏振器(级联),第一个偏振器方向为水平 0° ,并且每个后续的偏振器相对于前一偏振器旋转固定的角度,使得最后一个偏振器总是在竖直方向 90° 。例如,如果 $N = 4$,偏振器的方向依次为 $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 。根据马吕斯定律,以这种方式排列的 2、4 和 8 个偏振器的光强透射率是多少?随着 N 的增加,透射率是如何变化的?(如果光通过一个角度为 β 的线偏振器,出射光为 β 角线偏振的且幅度衰减)。如果入射光是 α 角线偏振的,通过 β 角的线偏振器,则出射光为 β 角的线偏振光,其衰减的幅值为 $\cos^2(\alpha - \beta)$ 。

1.11 参考文献

- [1] S. Johnsen and T. Frank, Polarization Vision, Operation Deep Scope(2005). S. Johnsen using images from E. Widder, NOAA (<http://oceanexplorer.noaa.gov/explorations/05deepscope/background/polarization/media/eel.html>, accessed on July 15, 2017).
- [2] R. M. A. Azzam and N. M. Bashara, Ellipsometry and Polarized Light, Elsevier Science(1987).
- [3] I. Ohlidal and D. Franta, Ellipsometry of thin film systems, in Progress in Optics, Vol. 41, ed. E. Wolf, Elsevier(2000), pp. 181-282.
- [4] J. Z. Buchwald, The Rise of the Wave Theory of Light, Optical Theory and Experiment in the Early Nineteenth Century, The University of Chicago Press(1989).
- [5] J. Pereira, On the polarization of light, and its useful applications, Pharm. J 2 (1842): 619-637. (<https://play.google.com/store/books/details?id=OylbAAAACAAJ&rdid=book-ylbAAAACAAJ&rdot=1>, accessed October 25, 2016.)
- [6] E. H. Land and C. D. West, Dichroism and dichroic polarizers, Colloid Chemistry 6(1946): 160-190.
- [7] M. Grabau, Polarized light enters the world of everyday life, Journal of Applied Physics 9. 4(1938): 215-225.
- [8] G. P. Können, Polarized light in nature, CUP Archive (1985). (http://s3.amazonaws.com/guntherkonnen/documents/249/1985_Pol_Light_in_Nature_book.pdf?1317929665, accessed October 25, 2016.)
- [9] M. Mansuripur, Classical Optics and Its Applications, Cambridge: Cambridge University Press (2002).

第 2 章

偏 振 光

2.1 偏振光的描述

本章从描述单色平面波在任意方向的传播及其电场和磁场开始。表 2.1 列出了描述偏振光的几种常用方法^[1-3]。本章首先使用偏振矢量来描述平面波的偏振态。然后详细讨论了描述单色平面波沿 z 轴传播的琼斯矢量,分析了平面波的偏振态和偏振椭圆、相位、偏振光成分以及正交性。这种单色波可用激光^①产生。最后,考虑到光源的偏振,定义了两种进入光学系统的光束偏振模型:偶极球面波和双极球面波。第 3 章将进一步使用斯托克斯参量和庞加莱球描述非相干光和多色光(非单色光),其中庞加莱球是一种偏振态的图形化表示。

本书主要使用琼斯矢量来描述平面波,使用偏振矢量(三维电场矢量)来描述球面(或近似球面)波的偏振光,并在斯托克斯参量具有优势的地方使用斯托克斯参量。

表 2.1 偏振光计算的常用方法

光的描述	特 性	偏振元件描述
琼斯矢量	沿 z 轴的单色平面波 两个复元素	琼斯矩阵

① 激光几乎是单色的,但总有一个小的波长扩展。

续表

光的描述	特 性	偏振元件描述
偏振矢量	沿任意方向的单色平面波 三个复元素	偏振光线追迹矩阵
斯托克斯参量	沿 z 轴的非相干光 四个实元素	米勒矩阵

2.2 偏振矢量

光是一种横向电磁波,是在真空中以光速传播的振荡电场和磁场^[4-6]。最简单的光波是具有平坦波前的单色平面波,代表准直光束,例如图 2.1 所示的线性偏振电磁横波。假设一个单色平面波,波长为 λ ,沿单位传播矢量 $\mathbf{k}$ 的方向传播,角频率为 ω ,单位为弧度每秒^①。单色平面波在空间 $\mathbf{r}$ 和时间 t 的电场 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[\mathbf{E} e^{i(\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t - \phi_0)} \right] = \text{Re} \left[\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} e^{i(\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t - \phi_0)} \right] = \text{Re} \left[e^{i(\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t - \phi_0)} \begin{bmatrix} A_x e^{-i\phi_x} \\ A_y e^{-i\phi_y} \\ A_z e^{-i\phi_z} \end{bmatrix} \right]$$

(2.1)

偏振矢量 $\mathbf{E}$ 描述了偏振态。 $\mathbf{E}$ 是复振幅,单位是伏特每米。 $\mathbf{E}$ 的三个场分量以三种不同的形式表示,式(2.1)中(E_x, E_y, E_z)是沿三个坐标轴 x, y, z 的复振幅分量。 A_x, A_y, A_z 是复振幅的大小, ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z 是它们的相位。图 2.1 中间隔为 λ 的蓝色平面表示具有恒定相位的波前面。

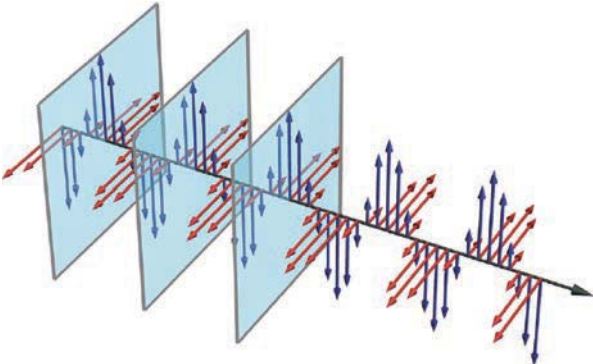


图 2.1 线偏振电磁波的电场矢量(红)和磁场矢量(蓝)。图示为三个恒定相位的波前面,间隔 1 个波长

$\mathbf{E}$ 是一个电场矢量,但是它在三维空间里完全表征了偏振椭圆,所以 $\mathbf{E}$ 也称为偏振矢量。传播矢量^[7] $\mathbf{k}$ 为

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z), \quad |\mathbf{k}| = 1$$

(2.2)

① ω 是 2π 乘以频率,单位是赫兹。

它被归一化并代表传播方向^①。 $\mathbf{k}$ 指向与波前相关的光线方向。三个分量(k_x, k_y, k_z)是方向余弦,是 $\mathbf{k}$ 与 x, y, z 轴之间角度的余弦。向量 $\mathbf{r}$ 定义了全局坐标系中的位置,

$$\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z) \quad (2.3)$$

在所选坐标系的原点, $\mathbf{r} = (0, 0, 0)$, $t = 0$, 电场为

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

对于在各向同性介质(如真空、空气、水和玻璃)中的传播,偏振矢量与传播矢量正交,因此它们的点积为零

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{k} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = 0 \quad (2.5)$$

式 $\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t - \phi_0$ 是平面波针对所有空间和时间的相位,通常以弧度表示,有时用度表示。相位指定了周期中的一个位置。 ϕ_0 是光的绝对相位,它是光在初始状态($\mathbf{r} = (0, 0, 0)$, $t = 0$)的相位。相位也可以用波数 Φ 来表示,

$$\Phi = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{\lambda} - \frac{\omega t + \phi_0}{2\pi} \quad (2.6)$$

如果 Φ 在一个相位恒定的面上是常数,在这种情况下是平面波前。相位可以分为整数部分和小数部分。 Φ 的整数部分提供了波前编号的方法,例如波前 $-2, -1, 0, 1, 2, \dots$ 。 Φ 的小数部分表示余弦波内一个用 $\mathbf{r}$ 和 t 表示的位置点,或者对于偏振光,表示电场在偏振椭圆上的位置。式(2.1)中各 x, y, z 电场分量的相位是 $\phi_x + \phi_0, \phi_y + \phi_0, \phi_z + \phi_0$ 。

2.3 偏振矢量的性质

$\mathbf{E}$ 是一个复矢量,每个复数都可用极坐标形式表示,

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x e^{-i\phi_x} \\ A_y e^{-i\phi_y} \\ A_z e^{-i\phi_z} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

A_x, A_y 和 A_z 是实振幅,表示每个分量在一个周期内达到的最大值。相位 ϕ_x, ϕ_y 和 ϕ_z 带负号,因为递减相位符号规则, $\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$,参见2.17节。将 $\mathbf{E}$ 乘以时间相位 $e^{-i\omega t}$,取 $\mathbf{r} = (0, 0, 0)$ 处的实部,得到三维取向的偏振椭圆 $\mathbf{E}(t)$,

$$\mathbf{E}(t) = \text{Re} \left[e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \right] = \text{Re} \left[e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} A_x e^{-i\phi_x} \\ A_y e^{-i\phi_y} \\ A_z e^{-i\phi_z} \end{pmatrix} \right] \quad (2.8)$$

① 在大多数文献中,波矢 $\mathbf{k}$ 的大小为 $2\pi/\lambda$ 。本书中, $\mathbf{k}$ 定义为归一化波矢,因此波矢为 $2\pi/\lambda \mathbf{k}$, $|\mathbf{k}| = 1$ 。

图 2.2 展示了左旋圆偏光的三维偏振椭圆^[1]。符号 $\mathbf{E}$ 将用于琼斯矢量和偏振矢量, 因为两者都是电场振幅。电矢量和磁矢量必须只在垂直于传播矢量 $\mathbf{k}$ 的平面(横向平面)内振动, 如图 2.3 所示。

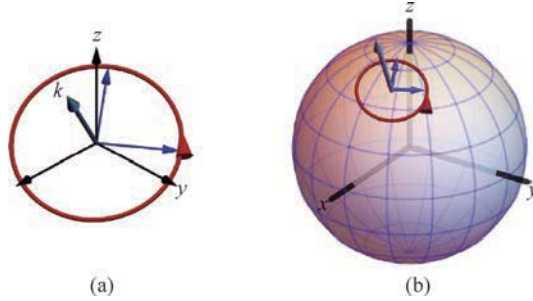


图 2.2 (a)左旋圆偏振光偏振椭圆(红色)的三维图,并显示了传播矢量 $\mathbf{k}=(6,2,9)/11$ (黑色)。(b)在单位球面上绘制的椭圆, $\mathbf{k}$ 垂直于球面。定义横向平面的两个基向量以蓝色显示

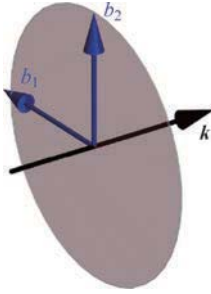


图 2.3 关于传播矢量 $\mathbf{k}$, 横向平面包含垂直于 $\mathbf{k}$ 的两个正交方向, 其基矢量 $\mathbf{b}_1$ 和 $\mathbf{b}_2$ 可在任意方向上选取

对于线偏振光, 所有三个电场分量应该同时通过零点, 每个周期两次。这要求式(2.8)中的三个相位彼此相差 0 或 π ,

$$\phi_x - \phi_y = 0 \text{ 或 } \pi, \quad \phi_x - \phi_z = 0 \text{ 或 } \pm \pi \quad (2.9)$$

对于圆偏振光, 电场矢量的大小是恒定的。这可以通过在多个时刻测试 $\mathbf{E}$ 的实部的大小来验证, 例如, 在 $t=0$ 和四分之一周期之后 ($t=\pi/(2\omega)$) 当 $\mathbf{E}$ 的虚部产生实电场时。因此, 当这两个矢量 $\mathbf{E}(0)$ 和 $\mathbf{E}(\pi/2)$ 正交且大小相等时, $\mathbf{E}$ 描述圆偏振光,

$$\text{Re}(\mathbf{E}) \cdot \text{Im}(\mathbf{E}) = 0 \quad \text{和} \quad |\text{Re}(\mathbf{E})| = |\text{Im}(\mathbf{E})| \quad (2.10)$$

如果光不是线偏振光或圆偏振光, 它就是椭圆偏振光。为了确定偏振态的螺旋性, 也就是右旋还是左旋, 可以计算时间 $t=0$ 和 $t=\pi/(2\omega)=T/4$ 时电场矢量的叉积。如果叉积与传播矢量反平行, 则光的螺旋性是右旋的。如果叉积平行于传播矢量, 光的螺旋性是左旋的。因此, 螺旋性(手性)由下式的符号决定

$$\{\mathbf{E}(0) \times \mathbf{E}[\pi/(2\omega)]\} \cdot \mathbf{k} \quad (2.11)$$

如果式(2.11)为正, 则电场逆时针旋转(左旋), 如果为负, 则电场顺时针旋转(右旋)。要确定椭圆率和主轴的方向, 请参考 2.16 节。

数学小贴士 2.1 向量的伴随

上标 $\dagger$ 表示向量的伴随,即转置的复共轭,例如 $\mathbf{E}=(A_x e^{-i\phi_x} \quad A_y e^{-i\phi_y} \quad A_z e^{-i\phi_z})^T$ 的伴随为

$$\mathbf{E}^\dagger=(A_x e^{i\phi_x} \quad A_y e^{i\phi_y} \quad A_z e^{i\phi_z}) \quad (2.12)$$

伴随提供了一种快捷方法来计算复矢量的振幅平方 $|\mathbf{E}|^2$,

$$|\mathbf{E}|^2=\mathbf{E}^\dagger \cdot \mathbf{E}=(A_x e^{i\phi_x} \quad A_y e^{i\phi_y} \quad A_z e^{i\phi_z}) \cdot \begin{pmatrix} A_x e^{-i\phi_x} \\ A_y e^{-i\phi_y} \\ A_z e^{-i\phi_z} \end{pmatrix}=A_x^2+A_y^2+A_z^2 \quad (2.13)$$

2.4 在各向同性介质中传播

以上对 $\mathbf{E}$ 的描述均为在真空中的传播。在玻璃、水和其他介质中,光速 V 降低,介质的特征表现为其折射率 n ,

$$n=\frac{c}{V} \quad (2.14)$$

光度变慢是因为当它的电场和磁场通过透明材料传播时,电磁场会引发原子电荷以 ω 运动,这种电荷运动会产生相同频率在相同方向上传播,但略有延迟的光。因此,折射率表征了特定频率的光与材料相互作用的强度。如果这种相互作用的强度与 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的方向无关,则材料是各向同性的;也就是说,对于所有传播方向和偏振态, n 是相同的。第19章讨论了各向异性材料,例如方解石和石英(见各向异性材料的讨论)。

2.5 磁场、光通量和偏振光通量

光是一种横向电磁波。光的磁场 $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ 振动方向垂直于电场,并与电场同相。对于在真空中传播的光,对应的磁场是

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)=\operatorname{Re}\left[\mathbf{H} e^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}-\omega t-\phi_0\right)}\right]=\operatorname{Re}\left[\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} e^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}-\omega t-\phi_0\right)}\right] \quad (2.15)$$

它的单位为安培每米。图2.4显示了几种偏振态下电场和磁场随时间的变化。

坡印廷矢量 $\mathbf{S}$ 描述了电磁波能量的瞬时流动,单位为瓦特每平方米^[2],

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)=\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (2.16)$$

坡印廷矢量与辐照度具有相同的单位(单位面积每秒的能量,或千克每秒)^[3,8]。对于线偏振光,坡印廷矢量每周期振荡两次;对于圆偏振光,坡印廷矢量是常数。光学探测器对光的许多周期进行平均测量,因为探测器不能在数百太赫兹的光学频率下做出响应。因此,

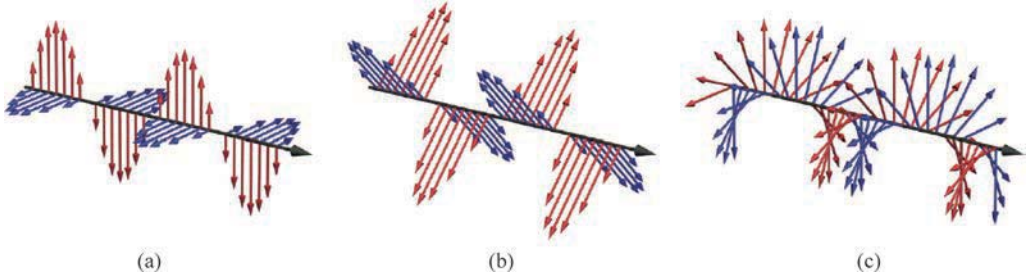


图 2.4 三种偏振态的电场(红色)和磁场(蓝色)在三维空间中的呈现。(a)竖直线偏振光。(b)45°线偏振光。(c)右旋圆偏振光

光学探测器测量的是时间平均能流,称为光通量或辐照度 P 。光束的光通量是单位时间内穿过垂直于能量流动方向单位面积的能量时间平均值。光通量通常被称为光强度,但在辐射测量学中,光强度特指来自点光源的每球面度的瓦特数。尽管如此,光强度术语的这种用法仍被广泛使用,也很容易理解,即使它没有遵循官方的定义^[9-10]。光束的辐照度 P ,是光的电磁场传输的单位面积上的功率,以瓦特每平方米为单位。单色平面波(式(2.1))的光通量 P 是

$$P = \frac{\epsilon_0 c}{2} \mathbf{E}^\dagger \cdot \mathbf{E} = \frac{\epsilon_0 c}{2} (A_x e^{i\phi_x} \quad A_y e^{i\phi_y} \quad A_z e^{i\phi_z}) \cdot \begin{pmatrix} A_x e^{-i\phi_x} \\ A_y e^{-i\phi_y} \\ A_z e^{-i\phi_z} \end{pmatrix} = \frac{\epsilon_0 c}{2} (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2) \quad (2.17)$$

通常情况下,常数 $\epsilon_0 c/2$ 会被忽略,琼斯矢量相关问题的计算会在归一化光通量 $\mathbf{E}^\dagger \cdot \mathbf{E}$ 中进行。只有在 MKS 单位制下且要得出辐射度单位的结果时, $\epsilon_0 c/2$ 才是必需的。

2.6 琼斯矢量

在许多偏振问题中,光的传播通常被限制在一个方向上。当光通过一系列偏振片和延迟片传播时,光沿单一方向传播。按照惯例光沿着 z 轴传播,从负向正。这种光经常被模型化为平面波,传播矢量为

$$\mathbf{k} = (0, 0, 1) \quad (2.18)$$

这种光在传播方向上没有电场分量,因为对于所有各向同性介质,电场总是在 $\mathbf{k}$ 的横向平面内振动。在这种情况下,光的 z 电场分量 E_z 为零,因此它可以被忽略,因此单色平面波的描述被简化为仅 x 和 y 电场分量。这个二元矢量就是琼斯矢量^[11-12]。琼斯矢量有两个复元素,表征了沿 z 传播单色光场的偏振态

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x e^{-i\phi_x} \\ A_y e^{-i\phi_y} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

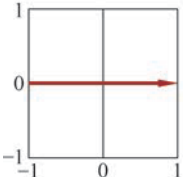
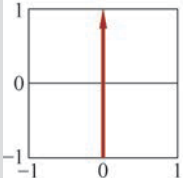
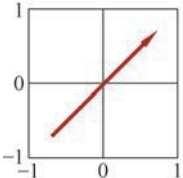
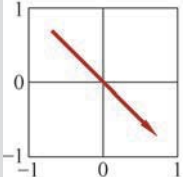
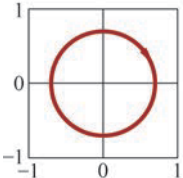
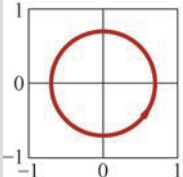
琼斯矢量有四个自由度,两个任意的电场振幅 A_x 和 A_y ,以及两个任意的相位 ϕ_x 和 ϕ_y ,它们定义了光波的偏振态。琼斯矢量的单位与电场的单位相同,为伏特每米。归一化的琼斯矢量 $\hat{\mathbf{E}}$,用一个插入符号作上标表示,其振幅被归化为 1,

$$|\hat{\boldsymbol{E}}| = \boldsymbol{E}^\dagger \cdot \boldsymbol{E} = A_x^2 + A_y^2 = 1$$

(2.20)

其中,“归一化”的偏振光通量意味着光通量为 1。表 2.2 列出了六种偏振态的归一化琼斯矢量。这六种状态被认为是基本偏振态,在定义偏振元件特性时经常出现。

表 2.2 六种基本偏振态的归一化琼斯矢量

偏 振 态	琼 斯 矩 阵	偏 振 椭 圆
水平,0°	$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	
垂直,90°	$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	
45°	$45 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	
135°	$135 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	
右旋圆	$\boldsymbol{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$	
左旋圆	$\boldsymbol{L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$	
方向从水平 x 轴开始度量,并逆时针增加		

根据定义,单色光是单一频率的周期光。由于这种周期性,它的电场矢量描绘了一个简单的图形,即偏振椭圆,它是偏振光最形象的表示法。看向光束时,偏振椭圆是由电场矢量的端点定义的,它描绘了一个随时间变化的椭圆。为了产生偏振椭圆,将琼斯矢量乘以时间相位 $e^{-i\omega t}$,且时间在一个周期内变化,得到

$$\mathbf{E}(t) = \text{Re} \left[e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} A_x e^{-i\phi_x} \\ A_y e^{-i\phi_y} \end{pmatrix} \right] \quad (2.21)$$

如图 2.5 所示。总体来说,在大多数光与物质相互作用中,电场施加的力比磁场大得多,因此用电场而不是磁场来定义偏振方向和偏振椭圆^[1]。这就是偏振的本质, $\mathbf{E}$ 的横向性质。偏振计算、琼斯计算、米勒计算和偏振光线追迹计算的一个重要任务就是要描述许多不同类型的光学系统中的这些横向特性和相关的偏振态变换。

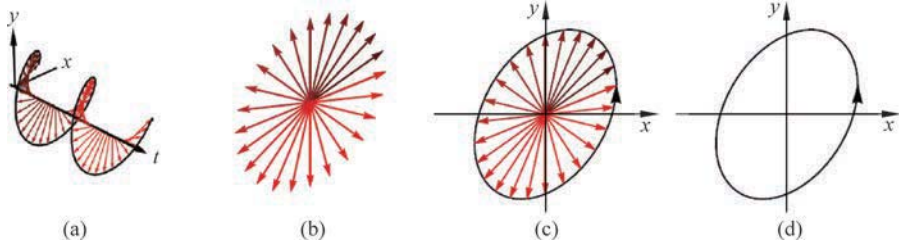


图 2.5 (a)单个周期内椭圆偏振态的电场矢量。(b)单个周期内作为时间函数的电场矢量。(c)电场矢量显示为作为时间函数的边界椭圆。(d)通常只画椭圆表示偏振态,这是偏振椭圆。箭头的位置表示波的绝对相位。这个偏振椭圆有一个左旋圆偏振分量,因为当看向光束时,它逆时针循环

琼斯矢量的两个复数分量 E_x 和 E_y 可用振幅 A 和相位 ϕ 极坐标形式表示,或(右)析出 x 的相位因子 ϕ_x ,

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} A_x e^{-i\phi_x} \\ A_y e^{-i\phi_y} \end{pmatrix} = e^{-i\phi_x} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y e^{-i\phi} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

在这种形式下,相对相位 ϕ (x 和 y 场分量之间的相位差)显然为

$$\phi = \phi_y - \phi_x \quad (2.23)$$

例 2.1 偏振椭圆家族

图 2.6 展示了一系列琼斯矢量的偏振椭圆

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5e^{-i\phi} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

椭圆随着相对相位 ϕ 而变化。这里将 y 振幅设置为 x 振幅的一半。

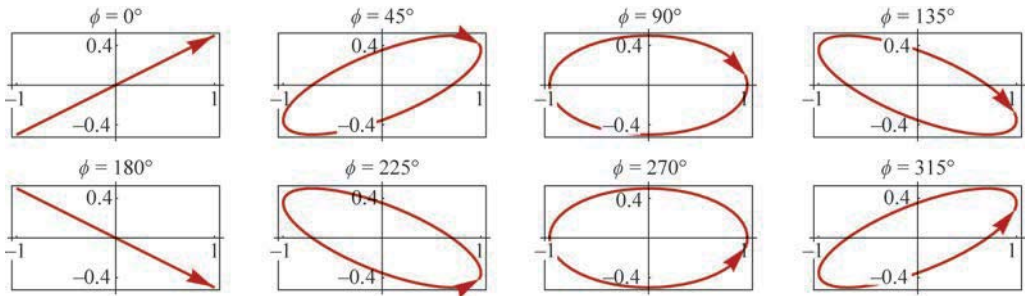


图 2.6 $E_x = 1$ 和 $E_y = 1/2$ 的几个相对相位的偏振椭圆

偏振椭圆位于一个矩形框内,该矩形框的大小是振幅 A_x 、 A_y 的两倍。相对相位决定了椭圆在框中的形状:

- (1) 当 $\phi = 0^\circ$ 或 180° 时,偏振态是线性的,沿着其中一条对角线;
- (2) 当 $\phi = \pm 90^\circ$,椭圆接触所有四条边的中间,并且在该椭圆族中具有最大椭圆率;
- (3) 对于 $0^\circ < \phi < 180^\circ$,椭圆是右旋椭圆偏振的;
- (4) 对于 $-180^\circ < \phi < 0^\circ$ 或 $180^\circ < \phi < 360^\circ$,椭圆为左旋椭圆偏振的。

椭圆箭头的位置表示偏振态的绝对相位。在这个椭圆族中, E_x 在 $t=0$ 时等于 1,因此箭头位于 $+x$ 侧。将琼斯矢量乘以复相位 $e^{-i\phi}$ 使箭头移动到椭圆上的另一点。

对琼斯矢量进行归一化就是调整振幅,因此归一化的光通量 P 为 1。对于式(2.22)的琼斯矢量,归一化的琼斯矢量 $\hat{\mathbf{E}}$ 为

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}} \begin{pmatrix} A_x e^{-i\phi_x} \\ A_y e^{-i\phi_y} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

所以 $|\hat{\mathbf{E}}| = 1$ 。

数学小贴士 2.2 矩阵向量乘法

矩阵乘法对向量作线性变换,将原向量元素作线性组合后生成新向量。给定一个 N 元素的向量 $\mathbf{A}$ 和一个 $M \times N$ 元素的矩阵 $\mathbf{C}$ (M 行 N 列),所得矩阵 $\mathbf{B}$ 的元素为

$$b_j = \sum_{n=1}^N c_{j,n} a_n \quad (2.26)$$

其中, a 、 b 和 c 是向量 $\mathbf{A}$ 、向量 $\mathbf{B}$ 和矩阵 $\mathbf{C}$ 的分量。例如, 3×3 矩阵向量乘法的一般公式为

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}a_1 + c_{12}a_2 + c_{13}a_3 \\ c_{21}a_1 + c_{22}a_2 + c_{23}a_3 \\ c_{31}a_1 + c_{32}a_2 + c_{33}a_3 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

2.7 总相位的演化

将琼斯矢量乘以 $e^{-i\phi_0}$, 可改变偏振态的相位,

$$e^{-i\phi_0} \mathbf{E} = e^{-i\phi_0} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

因改变总相位,该操作会使电场超前并移动偏振椭圆的箭头,但偏振椭圆的形状保持不变,如图 2.7 所示。

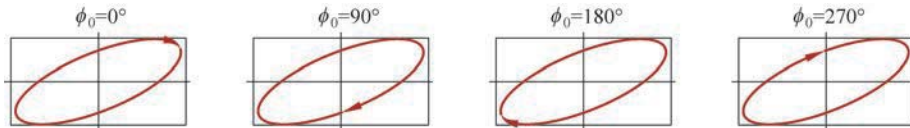


图 2.7 $E_x = 1$ 和 $E_y = e^{-i\pi/4}/2$ 的偏振椭圆(不同相位 ϕ_0)

2.8 琼斯矢量的旋转

矩阵乘法的一个应用是对偏振态进行旋转,如图 2.8 所示。将琼斯矢量乘以笛卡儿旋转矩阵 $\mathbf{R}(\alpha)$ 来旋转琼斯矢量的方向,

$$\mathbf{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

该方法旋转椭圆的长轴,保持椭圆率不变。相对于主轴,相位保持不变。对于图 2.8 的例子,旋转方程为

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha - i\sin\alpha/2 \\ \sin\alpha + i\cos\alpha/2 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

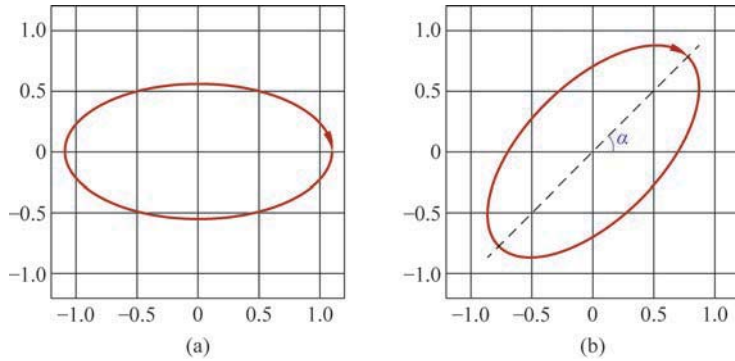


图 2.8 图(a)所示的椭圆偏振态逆时针旋转角度 α , 旋转后的偏振态显示在图(b)

2.9 线偏振光

线偏振光的电场矢量在正负方向之间的单一方向上振动。磁场的振幅沿正交方向振动,并与电场同相,如图 2.9 所示。电场的振幅在每个周期内两次归零。如图 2.5 所示,椭圆偏振光和圆偏振光的振幅永远不会为零。振幅为零要求 x 和 y 分量之间的相对相位 $\phi_x - \phi_y$ 为 0° 或 180° 。水平线偏振光(0°)的琼斯矢量为

$$\mathbf{E} = A e^{-i\phi_0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

其中, A 是振幅, ϕ_0 是绝对相位。根据递减相位符号规则, ϕ_0 前为负号。归一化水平线偏振光(具有单位振幅并且绝对相位为 0)的琼斯矢量用 $\mathbf{H}$ 表示,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

其中, $\mathbf{H}$ 不能与磁场矢量混淆。以角度 α (从 x 轴逆时针度量) 偏振的归一化线偏振光琼斯矢量 $\mathbf{LP}(\alpha)$ 可通过琼斯矢量旋转变换 $\mathbf{R}(\alpha)$ (式(2.29)) 来获得, 其中

$$\mathbf{LP}(\alpha) = \mathbf{R}(\alpha) \cdot \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

任意一束线偏振光的琼斯矢量为

$$\mathbf{E} = A e^{-i\phi_0} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

其中, A 是振幅, ϕ_0 是 $t=0$ 时的绝对相位。

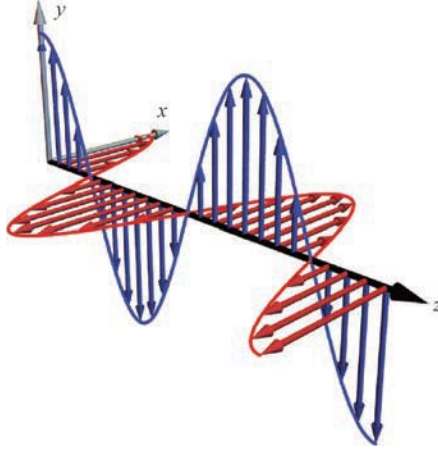


图 2.9 线偏振态的电场(水平)和磁场(垂直)

2.10 圆偏振光

单色圆偏振光具有恒定的电场振幅, 电场方向在横向平面内均匀旋转。圆偏振光有两种形式, 右旋圆偏振和左旋圆偏振, 取决于旋转方向或电场和磁场矢量的螺旋性。按照惯例, 如图 2.10 所示, 当朝 z 轴负方向看向光束时, 右旋圆偏振光的电场矢量顺时针旋转^[13]。如果把左手的拇指对准传播方向, 即离开页面方向, 那么左手的手指指向电场的运动方向。因此, 右旋圆偏振光遵循左手规则。类似地, 当看向光束时, 左旋圆偏振光的电场矢量逆时针旋转, 并遵循右手规则^[1]。

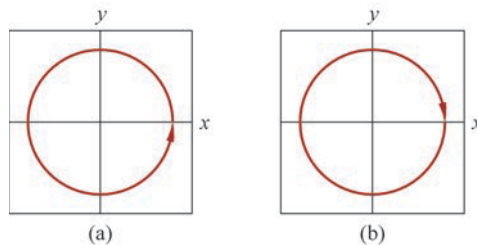


图 2.10 (a) 观察一束左旋圆偏振光, 电场和磁场在时间上逆时针转动。(b) 观察一束右旋圆偏振光, 电场和磁场在时间上顺时针转动

看向一束右旋圆偏振光, 电场和磁场在时间上顺时针旋转。归一化光束的右旋圆偏振琼斯矢量 $\mathbf{R}$ 为

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

对于左旋圆偏振光束,电场和磁场逆时针循环,归一化琼斯矢量 $\mathbf{L}$ 为

$$\mathbf{L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

对于每个偏振态,可以在三维空间画出时间螺旋函数 $\mathbf{E}(x, y, t)$ 和空间螺旋函数 $\mathbf{E}(x, y, z)$ 。设 $t=0$,右旋圆偏振光的空间螺旋为

$$\text{Re}[\mathbf{E}(z, 0)] = A \left[\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}z\right) \hat{\mathbf{x}} + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}z - \frac{\pi}{2}\right) \hat{\mathbf{y}} \right] = A \left[\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}z\right) \hat{\mathbf{x}} + \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}z\right) \hat{\mathbf{y}} \right] \quad (2.37)$$

这个螺旋遵循左手规则;当右手的手指在矢量前进的方向上弯曲时,拇指指向 z 增加的方向。通过设置 $z=0$,可以得到右旋圆偏振光的时间螺旋为

$$\text{Re}[\mathbf{E}(0, t)] = A \left[\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}z\right) \hat{\mathbf{x}} + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}z + \frac{\pi}{2}\right) \hat{\mathbf{y}} \right] = A \left[\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}z\right) \hat{\mathbf{x}} - \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}z\right) \hat{\mathbf{y}} \right] \quad (2.38)$$

这个右旋圆偏振时间螺旋遵循左手规则。请注意,由于 $\frac{2\pi}{\lambda}z - \omega t$ 中的负号,空间螺旋和时间螺旋具有相反的螺旋性。图 2.11(a)显示了右旋圆偏振光的时间螺旋,图 2.11(b)显示了空间螺旋。注意相反的螺旋性。因此,左右旋圆偏振是以相应的空间螺旋命名的。对于左旋圆偏振光,螺旋性在两个图中是相反的。

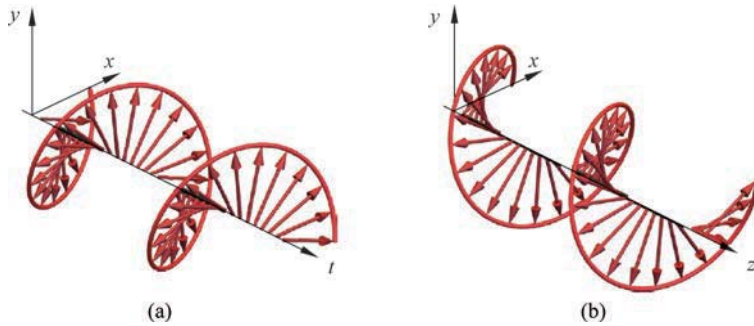


图 2.11 右旋圆偏振光的时间螺旋(a)和空间螺旋(b)旋转方向相反。时间螺旋是通过 x 、 y 和 t 用电场矢量端点绘制的空间曲线,时间螺旋遵循左手规则。对于右旋圆偏振光,关于 x 、 y 和 z 的空间螺旋是右旋的

2.11 椭圆偏振光

图 2.12 展示了偏振椭圆的主要几何特性。椭圆的椭圆率 ϵ 定义为短轴的长度 b 除以长轴的长度 a ,

$$\epsilon = \frac{b}{a} \quad (2.39)$$

长轴的方向 Ψ 从 x 轴逆时针旋转度量。图 2.13 展示了椭圆率逐渐增加的一系列椭圆。

对于偏振光,椭圆与电场和磁场矢量的振动有关;顺时针和逆时针椭圆都会出现。因此,把偏振椭圆的椭圆率推广为正值和负值,让其从 -1 (右旋圆偏振光)到 1 (左旋圆偏振

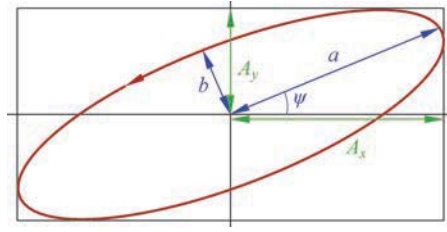


图 2.12 a 是偏振椭圆长轴的长度, b 是短轴的长度, Ψ 是长轴的方向

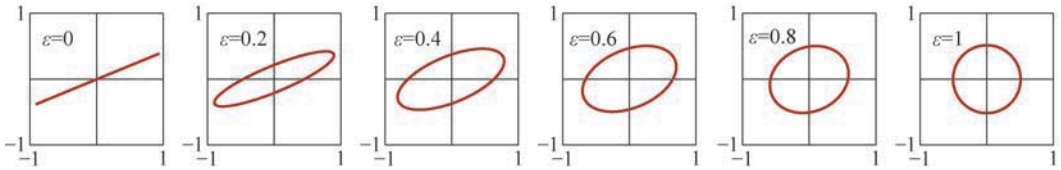


图 2.13 椭圆率 ϵ 分别为 0、0.2、0.4、0.6、0.8、1 的偏振椭圆

光)之间变化。椭圆率为 0 时表示线偏振光。类似地,当 $\epsilon < 0$ 时,光为右螺旋的;当 $\epsilon > 0$ 时,光为左螺旋的。对于水平长轴, $\Psi = 0$, 长轴 a 沿 x , 短轴 b 沿 y , 归一化的椭圆偏振琼斯矢量为

$$\mathbf{E}(\epsilon, 0) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} a \\ ib \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i\epsilon \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

虚部 i 出现在 y 分量上, 因为对于椭圆偏振光沿长轴和短轴的场分量之间总是存在 90° 相位差。任意主轴方向的偏振光归一化琼斯矢量可通过式(2.29)旋转角度 Ψ 获得,

$$\mathbf{E}(\epsilon, \psi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} \begin{pmatrix} \cos\Psi + i\epsilon \sin\Psi \\ -i\epsilon \cos\Psi + \sin\Psi \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

逆问题是根据任意琼斯矢量 $\mathbf{E}$ 来得到偏振椭圆参量, 其中 $\mathbf{E}$ 的分量以极坐标形式表示

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} A_x e^{-i\phi_x} \\ A_y e^{-i\phi_y} \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

如图 2.14 所示, 偏振椭圆必须内接一个 $2A_x \times 2A_y$ 的矩形, 并且与四条边相切。如图 2.14 所示主轴必定沿着两条对角线中的一条。如果式(2.23)中的相对相位满足以下条件, 则轴位于第一和第三象限:

$$-\pi/4 < \phi < \pi/4 \quad \text{或} \quad 3\pi/4 < \phi < 5\pi/4 \quad (2.43)$$

否则, 主轴位于第二和第四象限。

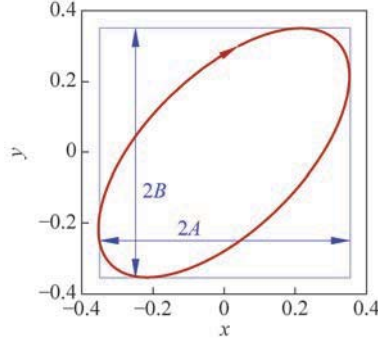
主轴方向 Ψ 与琼斯矢量相关, 如下所示:

$$\tan(2\Psi) = \frac{2A_x A_y \cos\phi}{A_x^2 - A_y^2} \quad \text{或} \quad \Psi = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2A_x A_y \cos\phi}{A_x^2 - A_y^2}\right) \quad (2.44)$$

半长轴长度 a 为长轴长度的一半, 为从原点到最远处的距离, 它具有复杂的表达式,

$$a = \sqrt{A_x^2 \cos^2 \Psi + A_y^2 \sin^2 \Psi + 2A_x A_y \cos \Psi \sin \Psi \cos \phi} \quad (2.45)$$

类似地, 短半轴为

图 2.14 偏振椭圆的边界框是一个矩形,其边长等于 x 和 y 振幅的两倍

$$b = \sqrt{A_x^2 \sin^2 \Psi + A_y^2 \cos^2 \Psi - 2A_x A_y \cos \Psi \sin \Psi \cos \phi} \quad (2.46)$$

因此,椭圆率方程是相当复杂的,

$$\epsilon = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{A_x^2 \sin^2 \Psi + A_y^2 \cos^2 \Psi - 2A_x A_y \cos \Psi \sin \Psi \cos \phi}{A_x^2 \cos^2 \Psi + A_y^2 \sin^2 \Psi + 2A_x A_y \cos \Psi \sin \Psi \cos \phi}} \quad (2.47)$$

注意, a 和 b 遵循以下关系:

$$a^2 + b^2 = A_x^2 + A_y^2 \quad (2.48)$$

例 2.2 椭圆偏振琼斯矢量

如图 2.15 所示,主轴方向为 $\Psi = \pi/4$ 、椭圆率为 $\epsilon = 1/2$ 的归一化琼斯矢量为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 2 + i \\ 2 - i \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

$\mathbf{E}$ 可以乘以任意相位 $e^{-i\phi}$ 。

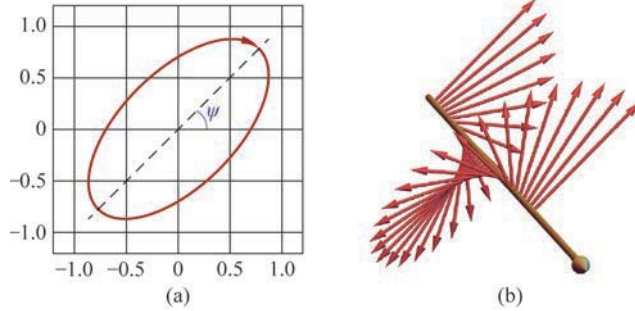


图 2.15 式(2.49)的偏振椭圆,看向光束(a)和时间螺旋的三维视图(b)

2.12 正交琼斯矢量

当偏振态的长轴夹角为 90° ,螺旋性相反,椭圆率大小相等时,偏振态是正交的。三对正交偏振态如图 2.16 所示。水平(0°)和垂直(90°)线偏振光彼此正交,右旋和左旋圆偏振光也是如此。正交偏振态的相位没有规定,可以采用任意值。对于代表正交偏振的两个琼斯

斯矢量 $\mathbf{E}_1$ 和 $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_1$ 的伴随与 $\mathbf{E}_2$ 的点积为零,

$$\mathbf{E}_1^\dagger \cdot \mathbf{E}_2 = (E_{1x}^* \ E_{1y}^*) \cdot \begin{pmatrix} E_{2x} \\ E_{2y} \end{pmatrix} = 0 \quad (2.50)$$



图 2.16 正交偏振态的长轴夹角 90° , 螺旋性相反, 椭圆率大小相等

例 2.3 两个琼斯矢量的正交性

琼斯矢量 $\mathbf{F}$ 正交于

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 2+i \\ 2-i \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

通过将 $\mathbf{F}$ 的任意一个元素设置为任意数值并求解另一个元素, 可以很容易地解出非归一化的 $\mathbf{F}$ 矢量。在这里, F_y 被设置为 1, 并求解方程得到 F_x

$$\hat{\mathbf{E}}^\dagger \cdot \mathbf{F} = \frac{(2-i \ 2+i)^*}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} F_x \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad F_x = \frac{-3-4i}{5} \quad (2.52)$$

然后, 如果需要的话 $\mathbf{F}$ 可以被归一化并且乘上任意相位 $e^{-i\phi}$ 。

$$\hat{\mathbf{F}} = \frac{e^{-i\phi}}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -3-4i \\ 5 \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

2.13 基矢量的改变

琼斯矢量最常用 x 和 y 分量来表示, 但也可以使用其他正交偏振基。下面的矩阵变换将琼斯矢量从 xy 基底变换到归一化的、正交的琼斯矢量基底 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 上,

$$\begin{pmatrix} E_A \\ E_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x^* & A_y^* \\ B_x^* & B_y^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

这是一个基底酉变换的例子, 是一种广义旋转(旋转矩阵可含有实数或复数值)。“普通旋转”应该有一个实数旋转矩阵。如果基底酉变换应用于两个矢量, 那么两个矢量的内积(点积)保持不变; 矢量之间的角度和长度都没有改变。

例 2.4 圆偏振基底

琼斯矢量经常使用左旋和右旋圆偏振基态作为基底, 而不是使用 x 和 y 作为基底, 该基底可从 xy 基底变换而来^[14]

$$\begin{pmatrix} E_L \\ E_R \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

2.14 琼斯矢量的相加

相同频率的两个平面波在相同方向上传播的合成是通过它们的琼斯矢量相加来模拟的。两个这样的单色光束可输入到分束器的两个不同的面上,并进行调整,使得它们在出射后以相同的方向传播。如果分束器后的两个琼斯矢量分别具有琼斯矩阵 $\mathbf{E}_A$ 和 $\mathbf{E}_B$,那么合成光束具有琼斯矢量 $\mathbf{E}$,

$$\mathbf{E}_A + \mathbf{E}_B = \begin{pmatrix} E_{x,A} \\ E_{y,A} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{x,B} \\ E_{y,B} \end{pmatrix} = \mathbf{E} \quad (2.56)$$

这种光束合成发生在干涉仪的输出端。把琼斯矢量相加时必须小心,要确保相位得到正确指定,因为当任一相位变化时会产生一系列偏振椭圆。

例 2.5 圆偏振光的叠加

合成具有相同振幅(这里设置为 $1/2$)的单色右旋圆偏振光和左旋圆偏振光,其中右旋圆偏振分量上有可调相位 ϕ ,其表达式为

$$\mathbf{E} = \frac{e^{i\phi}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{e^{i\phi/2}}{2} \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} + e^{-i\phi/2} \\ -i(e^{i\phi/2} - e^{-i\phi/2}) \end{pmatrix} = e^{i\phi/2} \begin{pmatrix} \cos(\phi/2) \\ \sin(\phi/2) \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

生成线偏振光,线偏振光的方向 $\phi/2$ 取决于圆偏振光之间的相对相位。因此,等振幅和可变相位的左旋和右旋圆偏振光束的干涉提供了一种产生方向可调线偏振光的方法。

2.15 偏振光通量分量

琼斯矢量 $\mathbf{E}$ 的光通量 P 是由式(2.17)计算的。 $\mathbf{E}$ 的偏振光通量 I_A 是 $\mathbf{E}$ 光通量的一部分,是归一化偏振态 $\hat{\mathbf{E}}_A$ 中的通量,即由透射 $\hat{\mathbf{E}}_A$ 的理想偏振器透射的光通量,

$$I_A = |\hat{\mathbf{E}}_A^\dagger \cdot \mathbf{E}|^2 = \left| \begin{pmatrix} E_{A,x}^* & E_{A,y}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x e^{-i\phi_x} \\ A_y e^{-i\phi_y} \end{pmatrix} \right|^2 \quad (2.58)$$

$\hat{\mathbf{E}}_A$ 偏振态光通量在 $\mathbf{E}$ 中的占比为 I_A/P 。 $\mathbf{E}$ 的总光通量是任意两个正交偏振态的偏振通量之和。例如, x 方向的偏振通量和 y 方向的偏振通量之和为

$$\mathbf{E}^\dagger \mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x^* & E_y^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x e^{i\phi_x} & A_y e^{i\phi_y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x e^{-i\phi_x} \\ A_y e^{-i\phi_y} \end{pmatrix} = A_x^2 + A_y^2 \quad (2.59)$$

偏振态为 $\mathbf{E}$ 的单色光可以被理想的偏振分束器分成两个标准正交(正交和归一化的)的偏振态 $\hat{\mathbf{E}}_A$ 和 $\hat{\mathbf{E}}_B$,其复振幅 α 和 β 由下式给出

$$\mathbf{E} = (\hat{\mathbf{E}}_A^\dagger \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}_A + (\hat{\mathbf{E}}_B^\dagger \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}_B = \alpha \mathbf{E}_A + \beta \mathbf{E}_B \quad (2.60)$$

对于任意的琼斯矢量 $\mathbf{E}$,

$$\mathbf{E} = e^{-i\phi_x} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y e^{-i\phi} \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

表 2.3 列出了每个基本偏振态 I_H 、 I_V 、 I_{45} 、 I_{135} 、 I_R 和 I_L 的光通量组成。这些式子在第 3 章中将用于琼斯矢量和斯托克斯参量之间的转换。

表 2.3 E 中的基偏振态的光通量

偏 振 态	琼斯矢量基	偏振通量 I
水平, 0°	$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$I_H = E_x ^2 = A_x^2$
垂直, 90°	$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$I_V = E_y ^2 = A_y^2$
45°	$\mathbf{45} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$I_{45} = \frac{1}{2} E_x + E_y ^2 = \frac{A_x^2 + A_y^2}{2} + A_x A_y \cos \phi$
135°	$\mathbf{135} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$I_{135} = \frac{1}{2} E_x - E_y ^2 = \frac{A_x^2 + A_y^2}{2} - A_x A_y \cos \phi$
右旋	$\mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$	$I_R = \frac{1}{2} E_x + iE_y ^2 = \frac{A_x^2 + A_y^2}{2} + A_x A_y \sin \phi$
左旋	$\mathbf{L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$	$I_L = \frac{1}{2} E_x - iE_y ^2 = \frac{A_x^2 + A_y^2}{2} - A_x A_y \sin \phi$

2.16 偏振矢量转换为琼斯矢量

通过在横向平面中选取一个基底并沿着新的基矢量计算振幅, 可以将定义在三维中的偏振态的偏振椭圆转换成(二维)琼斯矢量。然后, 可应用最后几节的琼斯矩阵分析法来分析偏振态的椭圆率、光通量成分和其他度量。在横向平面中两个基矢量的选择是任意的。对于给定的 $\mathbf{k}$, 选取两个归一化的实数向量($\hat{\mathbf{v}}_1$ 和 $\hat{\mathbf{v}}_2$), 它们彼此正交并且垂直于 $\mathbf{k}$,

$$\hat{\mathbf{v}}_1 \cdot \hat{\mathbf{v}}_2 = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{v}}_1 = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{v}}_2 = 0 \quad (2.62)$$

那么, 任何垂直于 $\mathbf{k}$ 的偏振矢量 $\mathbf{E}$ 都可以写成 $\hat{\mathbf{v}}_1$ 和 $\hat{\mathbf{v}}_2$ 的叠加,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} [\mathbf{E} e^{i(\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t - \phi)}] = \text{Re} \{ [(\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{v}}_1) \hat{\mathbf{v}}_1 + (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{v}}_2) \hat{\mathbf{v}}_2] e^{i(\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t - \phi)} \} \\ &= \text{Re} [(A_{v1} e^{-i\phi_{v1}} \hat{\mathbf{v}}_1 + A_{v2} e^{-i\phi_{v2}} \hat{\mathbf{v}}_2) e^{i(\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t - \phi)}] \end{aligned} \quad (2.63)$$

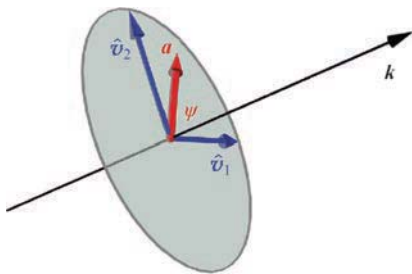


图 2.17 从 $\hat{\mathbf{v}}_1$ 到 $\hat{\mathbf{a}}$ 度量的主轴方向 Ψ , 轴矢量用红色箭头表示

其中, A_{vi} 是沿 $\hat{\mathbf{v}}_i$ 的实振幅。这就在 $(\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2)$ 基底下定义了一个琼斯矢量

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} A_{v1} e^{-i\phi_{v1}} \\ A_{v2} e^{-i\phi_{v2}} \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

使用式(2.44)计算局部坐标中的主轴方向 Ψ , 其中 Ψ 是从 $\hat{\mathbf{v}}_1$ 到 $\hat{\mathbf{v}}_2$ 度量的, 如图 2.17 所示。

局部坐标的选取将在第 11 章进一步讨论(见琼斯光瞳和局部坐标系的讨论)。

例 2.6 转换为琼斯矢量

作为一个例子,沿着 $\mathbf{k} = (6, 6, 7)/11$ 传播的左旋圆偏振光将用三种不同的琼斯矢量基底来表示,以了解基底的任意性及展示它们如何相互关联。琼斯矢量基底使用三个不同的偶极(纬度和经度)系统,如图 2.18 所示,来生成 $\hat{\mathbf{v}}_1$ 和 $\hat{\mathbf{v}}_2$ 基矢量。该左旋圆偏振光的偏振矢量是

$$\mathbf{E} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 11 + 7i \\ -11 + 7i \\ -12 \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

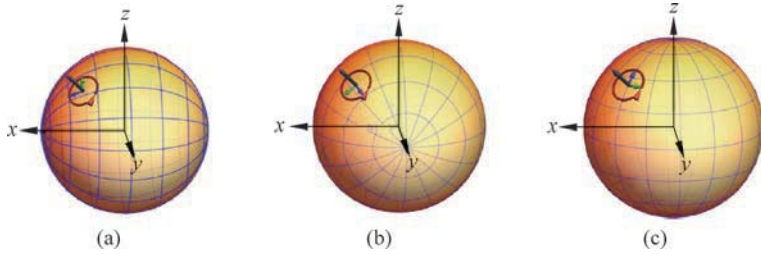


图 2.18 图中显示了一个带有传播矢量(黑色箭头)的左旋圆偏振态(红色圆圈,其上的箭头表示相位),可用三个不同的局部坐标系中的基矢量表示 E_x 和 E_y 。在图(a),第一个基矢量(绿色)沿着纬度线,第二个基矢量(蓝色)沿着经度线,沿 x 轴。在图(b),显示了相同的偏振态,但基矢量沿着经纬度线而极轴沿 y 轴,在图(c),极轴沿 z 轴

通过取 $\mathbf{k}$ 和偶极轴 $\mathbf{d}$ 的归一化叉积,生成沿纬度方向的基矢量

$$\hat{\mathbf{v}}_1 = \frac{\mathbf{d} \times \mathbf{k}}{|\mathbf{d} \times \mathbf{k}|}, \quad \hat{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{v}}_1 \quad (2.66)$$

对于第一个例子,琼斯矢量基底使用纬度和经度,极轴沿着 x 轴;基矢量是

$$\hat{\mathbf{v}}_1 = \frac{1}{\sqrt{85}} \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{v}}_2 = \frac{1}{11\sqrt{85}} \begin{pmatrix} 85 \\ -36 \\ -42 \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

琼斯矢量 $\mathbf{E}_{jx}$ 变为

$$\mathbf{E}_{jx} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{v}}_1 \\ \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{v}}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{85}} \begin{pmatrix} -7 + 11i \\ -11 - 7i \end{pmatrix} = \frac{-7 + 11i}{2\sqrt{85}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \approx \frac{e^{2.138i}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

选择使用极轴沿着 y 轴的经纬度基底,生成的基矢量是

$$\hat{\mathbf{v}}_1 = \frac{1}{\sqrt{85}} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{v}}_2 = \frac{1}{11\sqrt{85}} \begin{pmatrix} -36 \\ 85 \\ -42 \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

琼斯矢量 $\mathbf{E}_{jy}$ 变为

$$\mathbf{E}_{jy} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{v}}_1 \\ \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{v}}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{85}} \begin{pmatrix} -7 - 11i \\ 11 - 7i \end{pmatrix} = \frac{-7 - 11i}{2\sqrt{85}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \approx \frac{e^{-2.138i}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

最后使用极轴沿着 z 轴的经纬度基底,得到基向量

$$\hat{\mathbf{v}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{v}}_2 = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} -11-7i \\ 11-7i \\ 6i \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

琼斯矢量 $\mathbf{E}_{jz}$ 变为

$$\mathbf{E}_{jz} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{v}}_1 \\ \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{v}}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

这是左旋圆偏光的标准琼斯矢量(式(2.36))。在圆偏振光的情况下,三个琼斯矢量 $\mathbf{E}_{jx}$ 、 $\mathbf{E}_{jy}$ 和 $\mathbf{E}_{jz}$ 之间唯一的区别是它们的绝对相位,

$$\mathbf{E}_{jz} = e^{-2.138i} \mathbf{E}_{jx} = e^{2.138i} \mathbf{E}_{jy} \quad (2.73)$$

2.17 递减相位符号规则

电磁波通常用两种不同的符号规则之一来表示。分别为:相位随时间递减并随空间递增, $\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t - \phi_0$, 这是本书将采用的规则;或者相位随时间递增并随空间递减, $\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi_0$ 。根据选择,在圆偏振光和椭圆偏振光的数学描述中必须调整各自正负号。递减相位和递增相位这两种规则都被广泛使用;因此,当使用来自不同来源的琼斯算法方程时要小心。读者应该学会从上下文识别文稿中的符号规则,因为符号规则往往没有进行说明。

关于相位出现两种规则是因为余弦函数为偶函数

$$\cos(\theta) = \cos(-\theta) \quad (2.74)$$

因此,相位规则的选取并不重要,因为

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z - \omega t - \phi_0\right) = \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z + \phi_0\right) \quad (2.75)$$

并且对于所有的 z 和 t

$$\text{Re} \left[e^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda} z - \omega t - \phi_0\right)} \right] = \text{Re} \left[e^{i\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z + \phi_0\right)} \right] \quad (2.76)$$

在递减相位规则中,沿 z 方向传播的单色平面波的形式为

$$\mathbf{E}(z, t) = \text{Re} \left[\begin{pmatrix} A_x e^{-i\phi_x} \\ A_y e^{-i\phi_y} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda} z - \omega t - \phi_0\right)} \right] = \begin{pmatrix} A_x \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z - \omega t - \phi_0 - \phi_x\right) \\ A_y \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z - \omega t - \phi_0 - \phi_y\right) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

这里,光波随着时间前进,相位减少。光波通过增加相位而被延迟。在递减相位规则中,振幅为 A 、绝对相位为 ϕ_0 的右旋圆偏振平面波的方程为

$$\mathbf{E}(z, t) = \text{Re} \left[e^{i(\frac{2\pi}{\lambda}z - \omega t - \phi_0)} \frac{A}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (2.78)$$

因此,本书中右旋圆偏振光的琼斯矢量为

$$\mathbf{R} = \frac{A e^{-i\phi_0}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

类似地,在递减相位规则中,左旋圆偏振光的琼斯矢量为

$$\mathbf{L} = \frac{A e^{-i\phi_0}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

2.18 递增相位符号规则

除本节外,本书不使用另一种符号规则:递增相位符号规则。在递增相位符号规则中,相位随时间增加,因此 ϕ 的符号改变。本节使用下标 M 表示所表示的量使用的是递增相位符号规则。用递增相位规则表示的单色平面波的形式是

$$\mathbf{E}_M(z, t) = \text{Re} \left[\begin{pmatrix} A_x e^{i\phi_x} \\ A_y e^{i\phi_y} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}z + \phi_0)} \right] = \begin{pmatrix} A_x \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}z + \phi_0 + \phi_x\right) \\ A_y \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}z + \phi_0 + \phi_y\right) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

平面波方程中唯一的变化是指数的符号。注意,由于余弦函数是偶函数,符号实际上并不重要。因此,在递增相位符号规则下,左、右旋圆偏振光的琼斯矢量分别为

$$\mathbf{L}_M = \frac{A e^{i\phi_0}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_M = \frac{A e^{i\phi_0}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

递增相位规则中,左旋圆偏振光的琼斯矢量是递减相位规则中右旋圆偏振光的琼斯矢量,反之亦然。这可能会导致混乱!符号规则的选择也影响琼斯矩阵元素的符号,见第5章。

2.19 光源的偏振态

从光源出射或进入光学系统的偏振态是由许多因素决定的:光是出射、散射还是反射的;光源的温度和粗糙度;照明光的偏振和方向;还有很多其他因素。偏振可能以简单或复杂的方式变化,例如,图2.19展示了一个球面波前上的复杂偏振变化的例子。通常情况下,入射光的偏振难以知晓,或者在不同的测量中可能会有所不同。本节将简要介绍光源偏振的两种基本模型:偶极模型(dipole model)和双极模型(double pole model)。

偶极电磁波的形式简单,是除平面波外最常见的电磁波。电荷在简谐振荡中沿直线振荡产生偶极辐射。偶极在许多电磁波源的建模中都很重要,例如无线电天线和激发原子的辐射。偶极波是一种沿经度线线偏振的球面波^[2,15-16]。最大振幅的辐射出现在垂直于电荷振荡轴的平面上。偶极源不沿电荷振荡轴辐射。偶极波由沿直线(这里选取图2.20中的

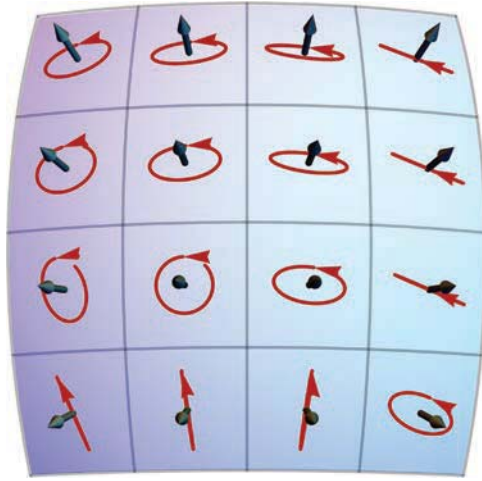


图 2.19 用矢量 $\mathbf{k}$ (黑色) 和偏振椭圆 (红色) 表示的任意偏振波前的波前片网格

y 轴) 进行简谐振动的电荷辐射产生。假设 θ 是经度, 绕 z 轴从纸面向外的方向度量, ϕ 是纬度。在这个极坐标系中, 归一化传播矢量 $\mathbf{k}$ 和偶极波的偏振矢量 $\mathbf{E}$ 是

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \cos\phi \sin\theta \\ \sin\phi \\ \cos\phi \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \sin\theta \\ \cos\phi \\ -\sin\phi \cos\theta \end{pmatrix} \quad (2.83)$$

偶极电场如图 2.20 所示, 是一个 4π 球面度的球面波前。用线偏振光和许多其他光源照射的孤立原子的散射光可能会产生偶极场。

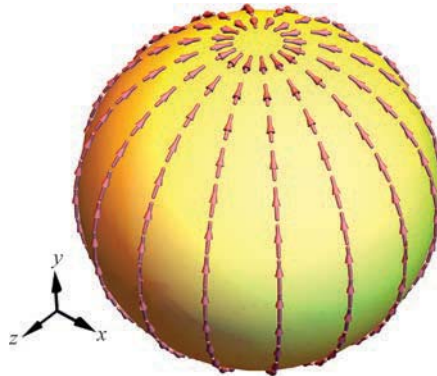


图 2.20 迎着 z 轴看到的偶极波前的偏振向量。电荷振荡的轴是垂直的 y 轴

图 2.21 中显示的双极球面波是光学中另一种十分常见的线偏振球面波。当透镜被准直的线偏振光照射时, 将产生双极球面波。当光折射并改变方向时, 入射偏振态在每个透镜表面上旋转。当光离开透镜时, 偏振椭圆已经围绕垂直于入射和出射光线的轴旋转; 旋转轴是它们的叉积, 如图 2.22 所示, 图中竖直线偏振光的传播方向被透镜改变, 用竖线表示。因此, 离开透镜的偏振波前不同于偶极球面波。当对球面波前中的每一条出射光线进行这种旋转时, 就会产生如图 2.21 所示的双极偏振模式。这种形式的偏振波前出现在正透镜和负透镜上。过 z 轴画出一些大圆。沿着每一个大圆, 偏振态与大圆形成一个恒定的角度;

这是如图 2.22 所示旋转作用的结果。理想的非偏振透镜会出现双极波。由于 s 和 p 菲涅耳反射和透射系数会偏离这个模式,但通常出射波前几乎都是双极模式。因此,双极偏振波前是一个非常有用和十分常见的光源模型。这种偏振模式也被用作描述球面波,并将它们展平到计算机屏幕和页面上。这个专题将在第 11 章深入讨论(见琼斯光瞳和局部坐标系的讨论)。

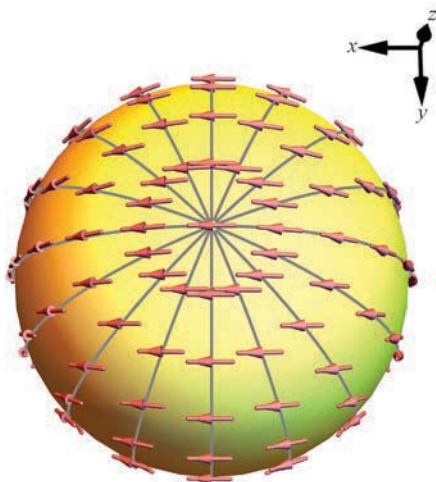


图 2.21 双极偏振模式中的线偏振球面波前是基本的偏振波前,它近似于从光学透镜出射的光波,包括正透镜和负透镜(顶部和底部)。偏振与过轴的大圆形成一个恒定的角度

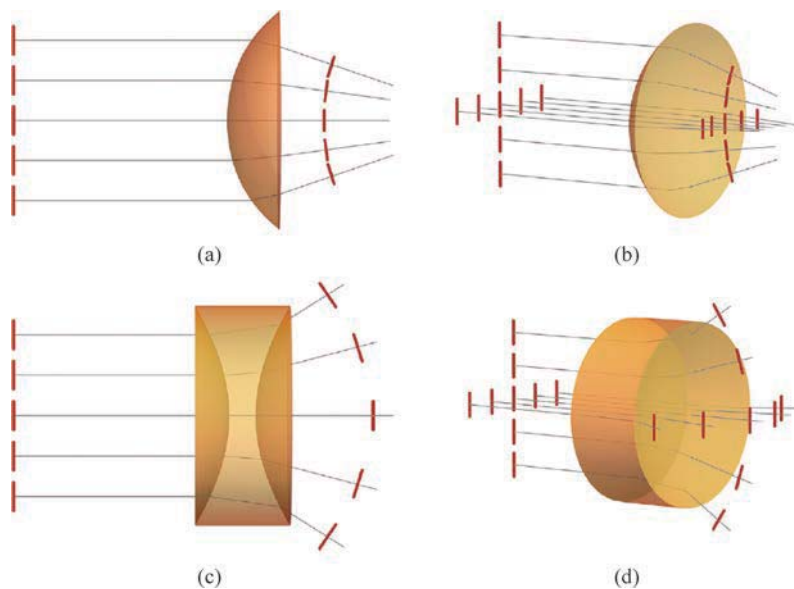
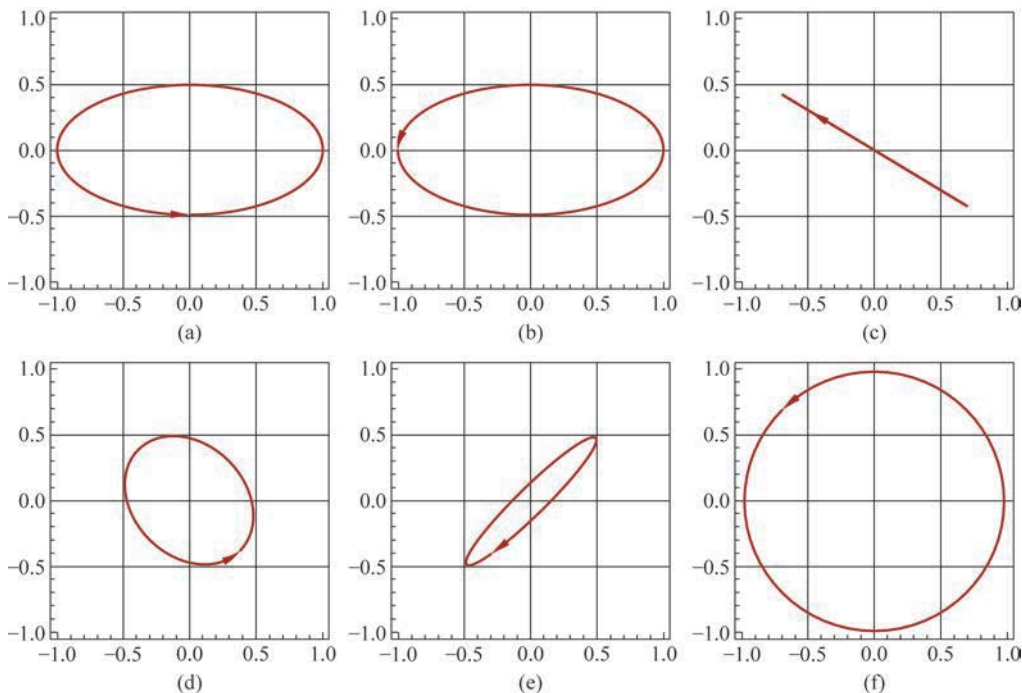


图 2.22 两个理想的非偏振透镜,(图(a),(b))正透镜和(图(c),(d))负透镜,旋转入射光的偏振面(图(a),红线),当光折射通过透镜并射出透镜后改变了方向

2.20 习题集

2.1 估计下列偏振椭圆的琼斯矢量。求出相位,将箭头正确放置在 $t=0$ 处。



2.2 下列哪个琼斯矢量是(a)线偏振, (b)圆偏振, 90° 或 $\pi/2$ 相位差且等振幅, (c)任意相位关系的椭圆偏振?

- | | | |
|-----------------|----------------------|----------------------|
| a. $(2, 2)$; | b. $(i/2, 1)$; | c. $(i, -i)$; |
| d. $(1, -4)$; | e. $(2+2i, -2+2i)$; | f. $(2+2i, -3+2i)$; |
| g. $(0, 1+i)$; | h. $(3, -6i)$; | i. $(2+3i, -3+2i)$; |
| j. $(2, -i)$ | | |

2.3 设平面波 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[e^{-i(\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \begin{pmatrix} a_x + ib_x \\ a_y + ib_y \\ a_z + ib_z \end{pmatrix} \right]$, 求下列时间和地点的电场和坡印廷矢量。

- | | |
|------------------------------------|--|
| a. $t=0, \mathbf{r}=(0, 0, 0)$; | b. $t=0, \mathbf{r}=\lambda^2 \mathbf{k} / (4\pi)$; |
| c. $t=\pi, \mathbf{r}=(0, 0, 0)$; | d. $t=4\pi/\omega, \mathbf{r}=8\lambda^2 \mathbf{k} / \pi$ |

- 2.4 a. 求正交于 $\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x e^{-i\phi_x} \\ A_y e^{-i\phi_y} \end{pmatrix}$ 的归一化琼斯矢量的一般方程;
- b. 用右旋圆偏光验证方程;
- c. 为什么正交琼斯矢量的相位是一个可以任意选择的自由参数?

- d. 给定一个传播方向 $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ 和偏振矢量 $\mathbf{F} = (A_x e^{-i\phi_x}, A_y e^{-i\phi_y}, A_z e^{-i\phi_z})$, 计算与 $\mathbf{F}$ 正交的偏振矢量(归一化的或未归一化的)。
- 2.5 将下面的琼斯矢量逆时针旋转 45° (从 $+x$ 到 $+y$)。
- a. $\mathbf{v}_1 = (1, i)$; b. $\mathbf{v}_2 = (3, 3)$; c. $\mathbf{v}_3 = (0, -2)$; d. $\mathbf{v}_4 = (1+i, 1-i)$
- 2.6 a. 琼斯矢量 $\mathbf{E}_3 = (\omega + ix, y + iz)$ 的归一化通量是多少?
 b. $\mathbf{E}_3$ 的光通量以 W/m^2 (瓦特每平方米) 为单位是多少?
 c. 琼斯矢量元素 $\omega + ix$ 和 $y + iz$ 的单位是什么?
- 2.7 a. 求从左、右旋圆偏振基态到 xy 基的基底变换矩阵?
 b. 将琼斯矢量 $\begin{pmatrix} E_L \\ E_R \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\eta} \\ e^{-i\eta} \end{pmatrix}$ 从圆偏振基转换到 xy 基, 并确定偏振态类型。
- 2.8 将普通线性 xy 基底琼斯矢量的六个基本偏振态(表 2.2)转化为 LR 圆偏振基(式(2.55))。
- 2.9 给定圆琼斯矢量基下的琼斯矢量 $\mathbf{E} = (1, 1)$, 将其转换到 xy 基。
- 2.10 偏振矢量为 $(4i, 6, 4i)$ 的光可能传播的两个方向是什么? 这可通过求 $\mathbf{E}$ 场在两个不同时刻的叉乘来确定, 用实数场表示而不是指数形式。
- 2.11 给定偏振矢量 $\mathbf{E} = (6i, 10, -8i)$
 a. 证明 $\mathbf{E}$ 是圆偏振的;
 b. 求光的传播轴。沿轴的方向是未定的;
 c. 哪个方向光会传播得到左旋圆偏振光?
- 2.12 圆偏振单色平面波电场的方程在空间或时间上给定点会描绘出一条螺旋线。绘制振幅为 1 的右旋圆偏振光的螺旋图, $\mathbf{E}(z, t) = \text{Re} \left[e^{i(\frac{2\pi}{\lambda}kz - \omega t - \phi)} \frac{A}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \right]$
 a. 绘制在 $t=0$, $(E_x(z, 0), E_y(z, 0), z)$ 的螺旋图(面向 $-E_z$, 三维透视图中的前视图);
 b. 空间螺旋是右螺旋还是左螺旋?
 c. 在固定点上绘制相同的螺旋图, 以时间为函数 $x=y=z=0$, $(E_x(0, t), E_y(0, t), t)$;
 d. 时间螺旋是右螺旋还是左螺旋?
- 2.13 对于以下的琼斯矢量:
- $$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}, \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ -i \end{pmatrix}, \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 3i/4 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_5 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ 1+i\sqrt{2} \end{pmatrix}, \mathbf{E}_6 = \begin{pmatrix} -i \\ -\pi/3 \end{pmatrix}$$
- a. 绘制偏振椭圆, 并指出电场旋转的方向。
 b. 计算 x 分量和 y 分量之间的相位差 $\delta(\phi) = \phi_x - \phi_y$, 椭圆主轴的方向 Ψ 和归一化光通量 P 。对于圆偏振光, 主轴方向是无定义的。
 c. 计算圆偏振度(DoCP), 其定义为 $|P_L - P_R| / (P_L + P_R)$ 。

- 2.14 a. 计算法向量 $\hat{\mathbf{w}}$ 来确定右手正交基 $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}})$, 其中 $\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ 。

- b. 写出垂直于 $\hat{u}$ 的旋转单位矢量 $\hat{s}(t)$ 的表达式, 当看向 $\hat{u}$ 时绕 $\hat{u}$ 轴顺时针旋转, 角速度为 $\omega \text{ rad/s}$, 且 $\hat{s}(0) = \hat{v}$ 。这是向 $\hat{u}$ 方向传播的右旋圆偏振光在某一点处的电场表达式。
- c. 计算这个波的偏振矢量 $\mathbf{E}$ 。

2.21 参考文献

- [1] W. A. Shurcliff, Polarized Light, Production and Use, Cambridge, MA: Harvard University Press (1966).
- [2] D. Goldstein, Polarized Light, Revised and Expanded, Vol. 83, Boca Raton, FL: CRC Press, (2011).
- [3] C. Brosseau, Fundamentals of Polarized Light: A Statistical Optics Approach, New York: Wiley, (1998).
- [4] M. Born and E. Wolf, Principles of Optics, 6th edition, Cambridge, UK: Cambridge University Press, (1980).
- [5] E. Hecht, Optics, Reading, MA: Addison-Wesley, 1987.
- [6] R. M. A. Azzam and N. M. Bashara, Ellipsometry and Polarized Light, 2nd edition, Amsterdam: Elsevier (1987).
- [7] G. Yun, K. Crabtree, and R. Chipman, Three-dimensional polarization ray-tracing calculus I: Definition and diattenuation, Appl. Opt. 50(2011): 2855-2865.
- [8] M. Born and E. Wolf, Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light, CUP Archive (1999).
- [9] E. L. Dereniak and G. D. Boreman, Infrared Detectors and Systems, New York: Wiley (1996).
- [10] G. J. Zissis and W. L. Wolfe, The Infrared Handbook, Ann Arbor, MI: Infrared Information and Analysis Center (1978).
- [11] R. C. Jones, A new calculus for the treatment of optical systems: I. Description and discussion of the calculus, J. Opt. Soc. Am. 31(1941): 488-493.
- [12] R. M. A. Azzam and N. M. Bashara, Ellipsometry and Polarization Light, New York: North-Holland (1977), p. 97.
- [13] W. Swindell, Handedness of polarization after metallic reflection of linearly polarized light, JOSA 61. 2(1971): 212-215.
- [14] J. P. McGuire Jr. and R. A. Chipman, Diffraction image formation in optical systems with polarization aberrations. I: Formulation and example, JOSA A 7. 9(1990): 1614-1626.
- [15] J. D. Jackson, Classical Electromagnetism, New York: Wiley (1975).
- [16] A. Shadowitz, The Electromagnetic Field, New York: McGraw-Hill (1975).

第 3 章

斯托克斯参量和庞加莱球

3.1 多色光的描述

非偏振光和部分偏振光是光在宇宙中的主要形式。星光几乎总是非偏振的。这种非偏振光是不相干的；它无法形成稳定的干涉图样。单色光(第 2 章的主题)是个例外,它主要来自激光。第 2 章的偏振矢量和琼斯矢量无法描述部分偏振光。

斯托克斯参量是表征光束偏振特性的一种方法,适用于非偏振光、部分偏振光和偏振光。用斯托克斯参量描述的光束可以是非相干光束,也可以是相干光束^[1-3]。非相干光在干涉和衍射过程中遵循与相干光相同的基本原理;然而,由于非相干光的多色自然属性,细节更加复杂。多色光是指多种波长的光,不是单色的光。图 3.1(a)显示了四种不同频率的单色波的电场振幅。当叠加这些场时,得到的振幅如图 3.1(b)所示,表现为不同高度和不规则周期的随机峰,这就是多色光的特性。单色光和多色光的一个区别是单色光一定是偏振的。单色光具有单一频率,呈余弦状。因此,单色光永远固定在一个单一的偏振态。

本章给出了斯托克斯参量及其数学性质,并讨论了部分偏振光和非偏振光。研究了线偏振光、圆偏振光和椭圆偏振光的斯托克斯参量特性。给出了斯托克斯参量和琼斯矢量之间的转换。描述了斯托克斯参量的非正交坐标系,这种特殊的坐标系正确地处理了非相干光的叠加和干涉。然后,建立了与斯托克斯参量相关的偏振态图形——庞加莱球。非相干光波的叠加及其干涉性质将在第 4 章讨论。

这四个斯托克斯参量通常被称为斯托克斯矢量。斯托克斯参量不是真正的矢量,因为

它们不作为矢量进行变换或旋转。可将斯托克斯参量作为矢量叠加,来模拟非相干光束的叠加。斯托克斯参量也可由米勒矩阵通过矩阵-矢量乘法进行操作。因此,将斯托克斯参量称为斯托克斯矢量可被接受,并且也很常见,但应该记住,它们不是真正的矢量。

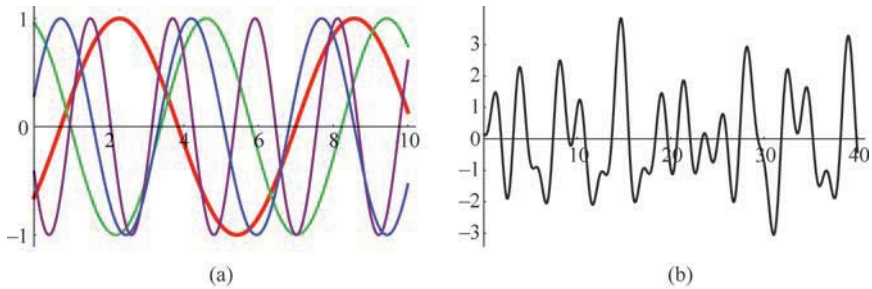


图 3.1 由四种不同波长的单色光波(a)叠加而成的多色光波的电场振幅随时间变化图(b)

3.2 斯托克斯参量的唯象定义

4 个斯托克斯参量^[4],即 S_0 、 S_1 、 S_2 、 S_3 ,是用理想偏振器进行的 6 个偏振光通量测量值定义的

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_H + P_V \\ P_H - P_V \\ P_{45} - P_{135} \\ P_R - P_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

斯托克斯参量通常写成矢量形式 $\mathbf{S}$ (具有四个实数元)。 S_0 是光束的总辐照度。 S_1 为水平(0°)偏振光通量分量(P_H)与垂直(90°)偏振光通量分量(P_V)之差。当 $S_1=0$ 时,水平线偏振器测得的光通量与垂直线偏振器测得的光通量相等。因此, S_1 度量了水平偏振超过垂直偏振的程度,如果 $P_V > P_H$, S_1 为负。类似地, S_2 是 45° 光通量(P_{45})减去 135° 光通量(P_{135})。最后, S_3 度量了右旋(P_R)与左旋(P_L)圆偏振光通量之差。斯托克斯参量也经常标记为 I 、 Q 、 U 和 V ,特别是在遥感和天文学中。

表 3.1 列出了六种基本偏振态的斯托克斯参量,每个光通量 S_0 都归一化为 1。最后一行给出了非偏振光的归一化斯托克斯参量。

表 3.1 基本偏振态及其斯托克斯参量

偏 振 类 型	符 号	斯托克斯参量
水平线偏振	H	(1,1,0,0)
垂直线偏振	V	(1,-1,0,0)
45°线偏振	45	(1,0,1,0)
135°线偏振	135	(1,0,-1,0)
右旋圆偏振	R	(1,0,0,1)
左旋圆偏振	L	(1,0,0,-1)
非偏振光	U	(1,0,0,0)

例 3.1 斯托克斯参量

一束光被测得有如下斯托克斯参量, $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$ 。计算式(3.1)中定义的斯托

克斯参量的 6 个光通量。

由于 $S_0 = P_H + P_V$ 和 $S_1 = P_H - P_V$, $P_H = \frac{S_0 + S_1}{2}$ 和 $P_V = \frac{S_0 - S_1}{2}$, 其他 4 种光通量也有类似的方程。因此, 用光通量矢量 $\mathbf{P}$ 表示的六个光通量测量值为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_H \\ P_V \\ P_{45} \\ P_{135} \\ P_R \\ P_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

3.3 非偏振光

非偏振光的偏振态是随机变化的, 对任何特定偏振态都没有倾向。太阳光是非偏振的。太阳光球中原子的激发没有特定的方向, 经常受到其他高速运动的原子的冲击。对于非偏振光, 任何理想的偏振器都能透射一半的光。如果旋转线偏振器, 出射光具有恒定的光通量。

在非偏振光的电场下, 如图 3.2 所示, 矢量的端点围绕原点随机移动, 有时顺时针, 有时逆时针, 有时近似线性。每一小段弧都近似为椭圆, 但椭圆参数是不断变化的。当光源发射偏振态随机分布的光子时, 就产生了非偏振光。每个光子的偏振都与先前由激发原子和它相邻原子发出的光子不相关。光束的偏振椭圆是不断变化的。

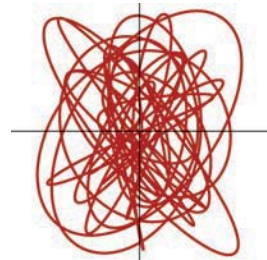


图 3.2 图示为非偏振光电场分布, 电场的端点轨迹为一个随机变化的偏振椭圆。该轨迹图是用来模拟太阳光的, 其中矢量场在不到一个光学周期内改变其局部椭圆参数

3.4 部分偏振光和偏振度

偏振度(DoP)是用斯托克斯参量来表征偏振态随机性的度量。偏振度定义为

$$\text{DoP}(\mathbf{S}) = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0}, \quad 0 \leq \text{DoP} \leq 1 \quad (3.2)$$

DoP 为 1 的光束是偏振的, 光处于单一偏振态, 光可以完全被匹配的偏振器阻挡。对于

这样一束完全偏振光,斯托克斯参量元素满足恒等式

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad (3.3)$$

相反,当 DoP 为 0 时,光束是非偏振的。此时,所有理想偏振器都会阻挡一半的光束,因为光没有偏重任何特定的偏振态。

部分偏振光具有随机变化的偏振态,但倾向于某个特定偏振态;有一个总的平均偏振态。在部分偏振光中,某些偏振椭圆比其他偏振椭圆更可能出现。图 3.3 为圆偏振(a)和部分圆偏振光束的电场图示例,其中偏振度逐渐减小。

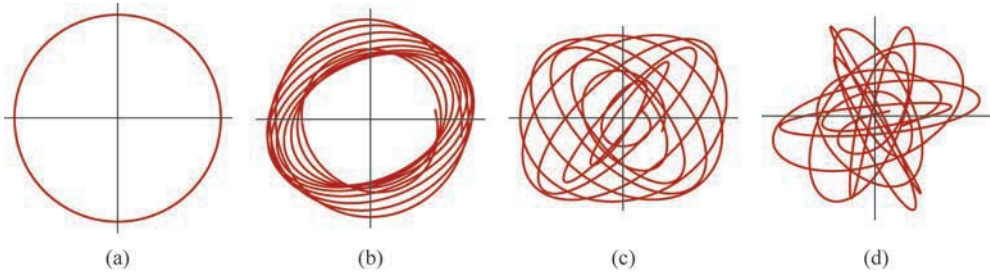


图 3.3 对于 DoCP 为 1.0、0.95、0.75 和 0.5(从左到右)的部分圆偏振光,随时间变化的电场具有逐渐变化的偏振椭圆

偏振光通量是偏振部分的光通量,为

$$\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} \quad (3.4)$$

因此,DoP 为偏振光通量与总光通量 S_0 的比值。对于一束线偏振光,调整线偏振器的方向可以透过整束光,而旋转 90° 的正交偏振器阻挡整束光。部分线偏振光具有随机分布,但倾向于特定的线偏振态。线偏振度 DoLP 定义为

$$\text{DoLP}(\mathbf{S}) = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}}{S_0} \quad (3.5)$$

它描述偏振椭圆分布趋向于线性的程度,或等效于描述将电场限制在一个平面内的程度。当 DoLP=1 时,光束为线偏振光。旋转线偏振器,当它与偏振面对齐时,可以使所有光通过。对于 45° 线偏振光,随着 DoP 或 DoLP 从 1 减小到 0,偏振椭圆变得更加随机,如图 3.4 所示。

DoLP 还与偏振器在光束中旋转时产生的光通量调制度有关,其中 $P_{\max}$ 和 $P_{\min}$ 是最大和最小的透射光通量,

$$\text{DoLP}(\mathbf{S}) = \frac{P_{\max} - P_{\min}}{P_{\max} + P_{\min}} = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}}{S_0} \quad (3.6)$$

如图 3.5 所示。偏振方向 Ψ 为偏振器达到 $P_{\max}$ 的角度。圆偏振光和非偏振光的 DoLP 都为 0。

部分线偏振光常产生于物体表面对非偏振太阳光的散射;通常,在垂直于入射面的平面内散射的偏振光(s 偏振光,见 1.7.1 节和图 1.32)比在入射面内散射的偏振光(p 偏振

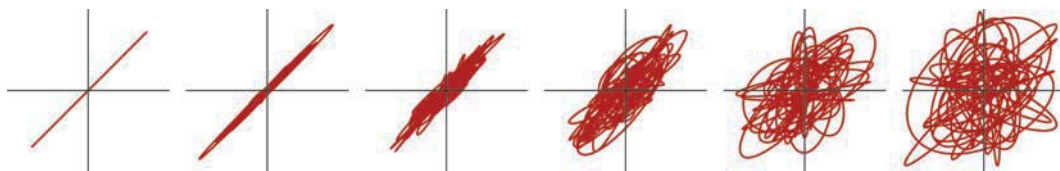


图 3.4 在 DoLP 为 1.0、0.8、0.6、0.4、0.2 和 0 的情况下, 45° 部分线偏光随时间变化的电场呈现随机变化的偏振椭圆

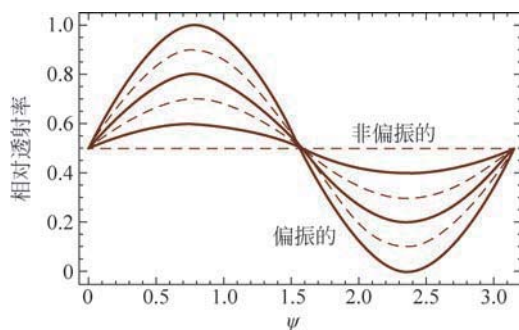


图 3.5 在部分线偏振光束中, 旋转偏振器的透过率产生的光通量调制度与线偏振度成正比。非偏振光是不会被调制的。图中显示的不同线对应于 DoLP 为 0 (未偏振)、0.2、0.4、0.6、0.8 和 1 (偏振) 的光。偏振情况由马吕斯定律描述

光)更多。散射光的偏振椭圆在时间和空间上仍然是随机变化的, 但散射增加了 s 分量的比例。因此, 太阳光或白炽灯光从物体表面散射后通常是部分偏振的, 而不是非偏振光。当非偏振光从光滑的水面反射时, 反射的光束变为部分偏振光。图 3.6 显示了反射光的 DoP, 可以使用菲涅耳公式(8.3.3 节)计算。

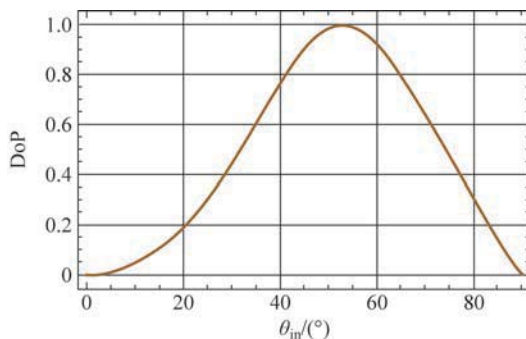


图 3.6 非偏振入射光在光滑的水面上经过镜面反射后, 线偏振度逐渐增大, 达到 57° (布儒斯特角) 时, 反射光变为水平方向的完全偏振光。超过布儒斯特角, 偏振度降低, 直到掠入射, 此时反射光是非偏振的, 就像正入射时一样

线偏振光的偏振角 AoP 是从 x 轴逆时针测量的电场振动的角度, 以弧度表示,

$$\text{AoP}(\mathbf{S}) = \frac{1}{2} \arctan \frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{2} \arctan 2(S_1, S_2) \quad (3.7)$$

函数 $\arctan2$ 是反正切函数的一种形式,把分子(S_2)和分母(S_1)作为两个独立的参数,通过独立使用分子和分母的符号,它可以返回传统反正切函数两倍范围($-\pi$ 到 π)的值。对于椭圆偏振光,AoP 是偏振椭圆长轴的角度。用圆偏振度

$$\text{DoCP}(S) = \frac{S_3}{S_0} \quad (3.8)$$

来表征圆偏振光通量的比例,并表明螺旋性的符号。DoCP=1 表示右旋圆偏振光; DoCP=-1 表示左旋圆偏振光,DoCP=0 表示线偏振光、部分线偏振光或非偏振光。环境中自然光的 DoCP 通常接近于 0。

例 3.2 建筑物的斯托克斯图像

图 3.7 展示了亚利桑那大学光学科学大楼在 660nm 波长下的光强度图像 S_0 ,用成像偏振分析仪 GroundMSPI^[5-6]拍摄。GroundMSPI 可以精确测量线偏振斯托克斯参量(S_0, S_1, S_2)。图 3.8 为斯托克斯参量 S_1 和 S_2 的灰度图像,图 3.9 为相同数据的伪彩色图像。

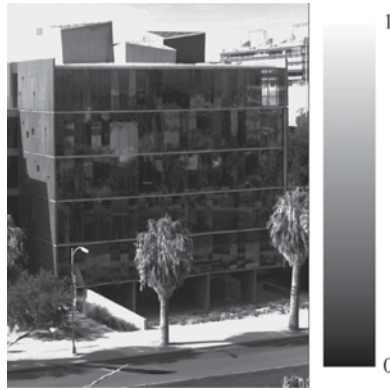


图 3.7 亚利桑那大学 Meinel 光学科学大楼的强度图像。建筑的整个北面都是不同角度倾斜的窗户。足球场的顶部是在右上方。高强度为白色,低强度为黑色

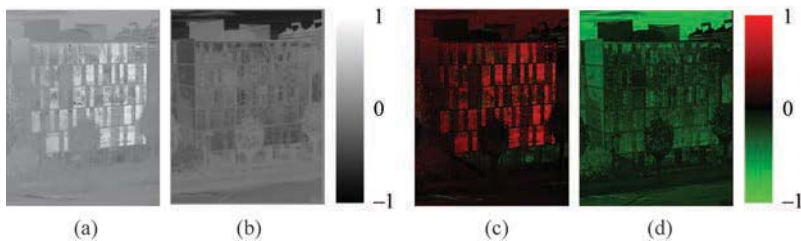


图 3.8 图 3.7 中图像的斯托克斯参量 S_1 ((a)和(c)) 和 S_2 ((b)和(d))。在图(a)和(b)中,灰色表示零,较亮的区域表示 S_1 或 S_2 为正,较暗的区域表示 S_1 和 S_2 为负。在图(c)和(d)中,黑色表示零,红色表示正,绿色表示负。斯托克斯参量随窗户角度而明显变化

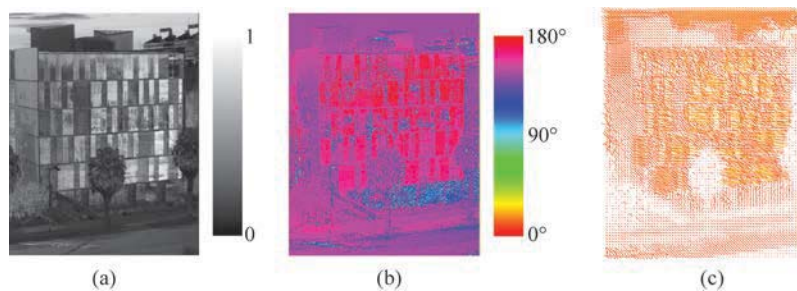


图 3.9 Meinel 大楼图像的 DoP 图像(a)显示了很大的变化。图像中的结构、窗户、树木、路灯、人行道等都很容易识别,但对比度机制与强度图像完全不同。AoP 图像(b)显示大部分图像(红色和紫色)的偏振方向变化不大,但一些区域(蓝色)显示明显不同的方向。在 AoP 图中,低 DoP 的区域往往噪声很大。在矢量图(c)中显示了许多线段,线段长度表示 DoP,线段方向表示 AoP。树木和屋顶结构可以看到具有低 DoP。同样,从一个窗格到另一个窗格,DoP 和 AoP 的变化是惊人的

3.5 光谱带宽

图 3.2 到图 3.4 展示了非偏振光和部分偏振光的随机变化的椭圆。本节研究椭圆是如何快速变化的。

光束的光谱是指光束中波长的范围,特别是指光谱功率密度图,即每纳米的光通量单位。可见光的光谱可用棱镜展示,也可用分光计测量。光谱带宽 $\Delta\lambda$ 是指光谱中波长的范围,通常用光的半高全宽(FWHM)表示。光的光谱带宽决定了部分偏振光偏振椭圆变化的速度。真正的单色光的光谱带宽为零,椭圆不变。激光是准单色的,光谱带宽接近于零,但不等于零。一些超长相干长度的激光器实现了光谱带宽 $\Delta\lambda/\lambda < 10^{-9}$ 。

对于非偏振光,不同波长的光可以有不同的偏振态,随着这些偏振态在相位超前和相位落后的变化,偏振态随之变化。对于太阳光和其他宽带可见光,这些偏振变化发生得非常快,在 10^{-14} s 的量级上,以至于光探测器无法响应偏振态的快速波动。图 3.10(a)是对非偏振太阳光电场的模拟。电场矢量的轨迹在短时段可以描绘为椭圆曲线,但这些局部椭圆参量是不断变化的。对于阳光,椭圆参量在不到一个光学周期内发生明显变化,椭圆弧呈现随机性。变化速率与光的光谱带宽有关。对于准单色光,非偏振光的椭圆参数变化相当缓慢。图 3.10(b)为光谱带宽 $\Delta\lambda/\lambda = 0.1$ 时的电场变化,图 3.10(c)为 $\Delta\lambda/\lambda = 0.05$ 时的电场变化。这样小的光谱带宽产生一个变化的椭圆,其中椭圆从一个周期到另一个周期的变化很小;非偏振光的椭圆参量在几个周期内几乎是恒定的。图(b)和(c)看起来是部分偏振(也就是说,不是所有偏振态都是随机的),只是因为展示了波形的一小部分。经过较长一段时间后,这些函数将完全随机化。图 3.11(a)~(d)展示了图 3.10(c)在四个连续等长时间片段内的状态,展示了偏振椭圆经历了多个不同偏振态区域的变化。图 3.11(e)显示了较长时段的偏振态,展示了偏振态的总体随机性。

具有一定光谱带宽的偏振光(DoP=1)也具有时变偏振椭圆的电场。随着不同波长的椭圆增加,椭圆参量也随之变化。图 3.12 显示了几个不同 $\Delta\lambda/\lambda$ 圆偏振光场的例子。对于单色光 $\Delta\lambda/\lambda = 0$,椭圆(圆)是固定的。随着光谱带宽的增大,椭圆的变化更加迅速,但始终

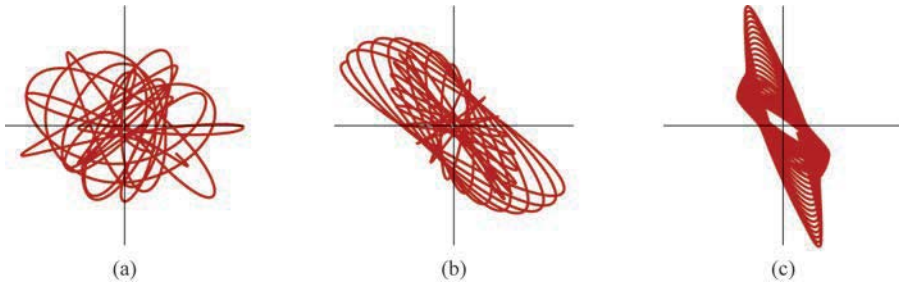


图 3.10 非偏振光具有随机变化的偏振椭圆。对于阳光(a), 矢量场在不到一个光学周期内改变其局部椭圆参量。对于较小的光谱带宽, 非偏振光的偏振椭圆变化得更慢, 在几个周期内保持在一个相似的椭圆中。光谱带宽分别为 $\Delta\lambda/\lambda=0.1$ (b) 和 $\Delta\lambda/\lambda=0.05$ (c) 的两个非偏振光例子, 表现出典型的偏振椭圆变化

保持接近其基圆形式。在这些模拟中, 每个波长都有相同的圆偏振态。这些图形是通过加入不同频率的圆函数得到的。这些完全偏振光很容易被误认为是如图 3.3 所示的部分偏振光。对图 3.12 中函数的 x 和 y 分量进行傅里叶变换可以看出, 每个谱分量都有一个圆偏振的琼斯矢量。

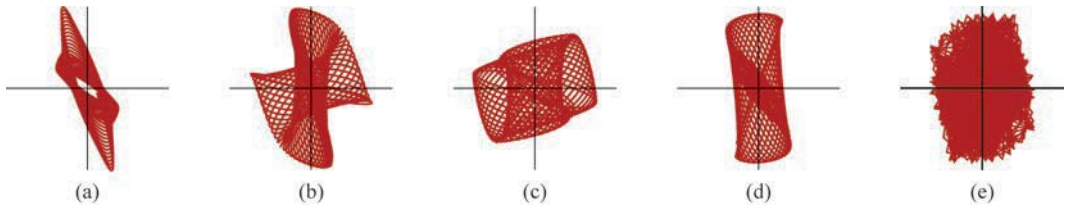


图 3.11 图 3.10(c) 的偏振态在四个((a)~(d))连续相同时间周期内随机变化的偏振椭圆。(e) 偏振椭圆在一个较长时间段内表现出它接近一个随机的非偏振分布

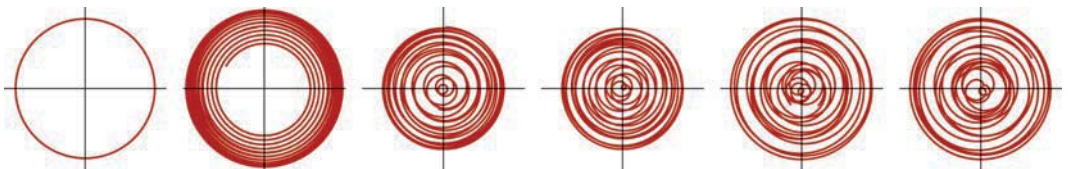


图 3.12 光谱带宽为 0%、4%、8%、12%、16%、20% 的圆偏振光(DoP=1)

3.6 偏振椭圆的旋转

接下来介绍通常用斯托克斯参量进行的数学运算。当偏振态相对于坐标轴旋转 Ψ 时, 如图 3.13 所示, 斯托克斯参量的变换为

$$\mathbf{S}_{\text{ER}} = \mathbf{R}_M(\Psi) \cdot \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\Psi & -\sin 2\Psi & 0 \\ 0 & \sin 2\Psi & \cos 2\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \cos 2\Psi - S_2 \sin 2\Psi \\ S_1 \sin 2\Psi + S_2 \cos 2\Psi \\ S_3 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

其中, $\mathbf{S}_{\text{ER}}$ 表示旋转后椭圆的斯托克斯参量。因此, 斯托克斯参量相对于坐标系的旋转是通过矩阵 $\mathbf{R}_{\text{M}}(\Psi)$ 来进行的,

$$\mathbf{R}_{\text{M}}(\Psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\Psi & -\sin 2\Psi & 0 \\ 0 & \sin 2\Psi & \cos 2\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

在 6.5 节中, 这个矩阵也被证明是米勒矩阵的旋转矩阵。 2Ψ 的出现是因为斯托克斯 S_1 轴和 S_2 轴之间只有 45° 的间隔(3.12 节)。旋转 180° 使“斯托克斯矢量”回到初始状态: 0° 水平偏振光旋转成 180° 水平偏振光; 因此, $\mathbf{R}_{\text{M}}(180^\circ)$ 必须等于单位矩阵。根据定义, 对于将 x 分量转向 $+y$ 轴方向的旋转, 也就是当看向光束时逆时针旋转, Ψ 是正的。

例 3.3 将斯托克斯参量旋转 45°

把描述偏振态的斯托克斯参量旋转 45° , 变换为

$$\mathbf{S}_{\text{ER}} = \mathbf{R}_{\text{M}}(45^\circ) \cdot \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 \\ -S_2 \\ S_1 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

S_1 和 S_2 元素反转, 且 S_2 元素符号改变。圆偏振分量 S_3 在旋转中保持不变。

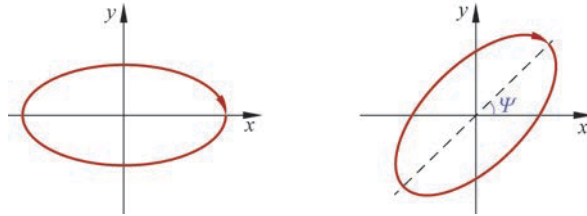


图 3.13 偏振态逆时针旋转角度 Ψ

3.7 线偏振斯托克斯参量

按逆时针从零开始度量、方向角为 Ψ 的线偏振光, 其归一化斯托克斯参量 $\mathbf{LP}_{\text{S}}(\Psi)$ 可通过将水平偏振斯托克斯参量 $\mathbf{H}$ 与米勒旋转矩阵(式(3.9))相乘来确定

$$\mathbf{LP}_{\text{S}}(\Psi) = \mathbf{R}_{\text{M}}(\Psi) \cdot \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\Psi) & -\sin(2\Psi) & 0 \\ 0 & \sin(2\Psi) & \cos(2\Psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(2\Psi) \\ \sin(2\Psi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

请再一次注意, 2Ψ 是必要的, 以使偏振光在 0° 和 180° 具有相同的斯托克斯参量。因此, 可以看出, 斯托克斯参量不像矢量那样转换, 所以不是真矢量。

3.8 椭圆偏振参量

部分偏振光的斯托克斯参量 $\mathbf{S}$ 在数学上可以表示为完全偏振光的“斯托克斯矢量” $\mathbf{S}_P$ 和非偏振光的“斯托克斯矢量” $\mathbf{S}_U$ 之和,它们与 $\mathbf{S}$ 唯一关联,如下所示:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_P + \mathbf{S}_U = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} + (S_0 - \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

第一个矢量的 DoP 为 1,而第二个矢量是非偏振的(1,0,0,0),DoP 为 0。因此,部分偏振光在数学上可以看作偏振光和非偏振光的叠加。虽然斯托克斯参量通过式(3.13)在数学上被分为偏振和非偏振部分,但没有相应的偏振器件来分离光束中的偏振和非偏振部分。

斯托克斯参量偏振部分对应的偏振椭圆有以下参数:

$$\text{长轴方位角: } \Psi = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{S_2}{S_1}\right) \quad (3.14)$$

$$\text{椭圆率: } \epsilon = \frac{b}{a} = \frac{|S_3|}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} + \sqrt{S_1^2 + S_2^2}}, \quad 0 \leq \epsilon \leq 1 \quad (3.15)$$

$$\text{离心率: } e = \sqrt{1 - \epsilon^2} \quad (3.16)$$

$$\text{圆偏振度: } \text{DoCP} = S_3/S_0, \quad -1 \leq \text{DoCP} \leq 1 \quad (3.17)$$

椭圆率 ϵ 为相应电场偏振椭圆的短轴(b)与长轴(a)之比,在 0(线偏振光)和 1(圆偏振光)之间变化。偏振椭圆也可以用它的离心率来描述,对于圆偏振光,离心率为零,随着椭圆变扁(更像雪茄状)而增大,对于线偏振光则变成 1。图 3.14 展示了一系列偏振椭圆(总是电场振幅而非辐照度)的椭圆率和 DoCP。



图 3.14 具有不同椭圆率和圆偏振度的偏振椭圆

3.9 正交偏振态

当两个偏振态的主轴相差 90° 、它们的螺旋性相反、椭圆率大小相等时,偏振态是正交的,如图 3.15 所示,这在 2.12 节讨论过。对于偏振态(DoP=1),若它们具有下面的斯托克斯参量 $\mathbf{S}$ 和 $\mathbf{S}_{\text{orth}}$,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{S}_{\text{orth}} = \begin{bmatrix} S_0 \\ -S_1 \\ -S_2 \\ -S_3 \end{bmatrix}$$

(3.18)

则是正交偏振态。对于部分偏振态,没有定义它的正交态,例如非偏振光没有正交偏振态。但部分偏振光的偏振部分具有正交态。

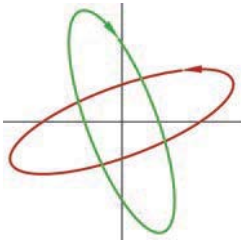


图 3.15 具有正交的长轴、相等的椭圆率和相反的螺旋度的一对正交偏振椭圆

3.10 斯托克斯参量和琼斯矢量的符号规则

琼斯矢量和斯托克斯参量之间的转换取决于两种表示法中为圆偏振选取的符号规则。应用单色光波电场的递减相位规则(表 3.2),左旋圆偏振光为 $(1,i)/\sqrt{2}$, y 分量为正复数。本书为斯托克斯参量采用了最常见的符号规则,其中右旋圆偏振分量具有正的 S_3 。因此,在我们的斯托克斯参量中,右旋圆偏振为正,而在琼斯矢量中,左旋圆偏振为正。在琼斯矢量和斯托克斯参量之间的转换式中,以及稍后在琼斯矩阵和米勒矩阵之间的转换式中,都恰当包含了负号(6.12 节)。对于其他符号规则的选取,检查椭圆和圆偏振态以及椭圆和圆延迟器之间的一些转换就可快速验证选取的符号规则的一致性。

表 3.2 基本偏振态及其斯托克斯参量

偏 振 类 型	符 号	斯托克斯参量	琼 斯 矢 量
水平线偏振	H	$(1,1,0,0)$	$(1,0)$
垂直线偏振	V	$(1,-1,0,0)$	$(0,1)$
45°线偏振	45	$(1,0,1,0)$	$(1,1)/\sqrt{2}$
135°线偏振	135	$(1,0,-1,0)$	$(1,-1)/\sqrt{2}$
右旋圆偏振光	R	$(1,0,0,1)$	$(1,-i)/\sqrt{2}$
左旋圆偏振光	L	$(1,0,0,-1)$	$(1,i)/\sqrt{2}$
非偏振光	U	$(1,0,0,0)$	无法表示

3.11 偏振光通量及斯托克斯参量和琼斯矢量之间的变换

对于斯托克斯参量为 $\mathbf{S}$ 的光束,一个特定的偏振器能透射一定比例的光通量,这个光通量分量是该特定偏振态下的偏振光通量。然后计算基本偏振态的偏振光通量,作为斯托

克斯参量与琼斯矢量之间进行转换的一个步骤。琼斯矢量 $\mathbf{E} = (A_x e^{-i\phi_x}, A_y e^{-i\phi_y})$ (2.6 节) 描述的沿 z 方向传播的单色平面波为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \hat{\mathbf{x}} A_x \exp \left[i \left(\frac{2\pi z}{\lambda} - \omega t - \phi_x \right) \right] + \hat{\mathbf{y}} A_y \exp \left[i \left(\frac{2\pi z}{\lambda} - \omega t - \phi_y \right) \right] \right\} \quad (3.19)$$

琼斯矢量的单位为伏特每米,而斯托克斯参量的单位为瓦特每平方米,描述完全偏振光的斯托克斯参量很容易转换成等效的琼斯矢量,反之亦然。等效意味着琼斯矢量和斯托克斯参量均可描述具有相同偏振椭圆和光通量的光束。然而,斯托克斯参量不能确定光的相位。对于部分偏振光,光通量的偏振部分 P_P 为

$$P_P = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} \quad (3.20)$$

琼斯矢量

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x e^{-i\phi_x} \\ A_y e^{-i\phi_y} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

的水平 $P_H(0^\circ)$ 和垂直 $P_V(90^\circ)$ 偏振光通量是通过理想的 x 和 y 方向偏振器的透射光通量:

$$P_H = \frac{\epsilon_0 c}{2} A_x^2, \quad P_V = \frac{\epsilon_0 c}{2} A_y^2 \quad (3.22)$$

P_H 和 P_V 与相位无关。其中 c 为光速, ϵ_0 为自由空间的介电常数。因子 $\epsilon_0 c/2$ 用于振幅平方(单位是 $(\text{V/m})^2$) 和 W/m^2 之间作转换。用 x, y 振幅和相位表示的 45° 和 135° 偏振光通量 P_{45} 和 P_{135} 为

$$\begin{cases} P_{45} = \frac{\epsilon_0 c}{4} [A_x^2 + A_y^2 + 2A_x A_y \cos(\phi_x - \phi_y)] \\ P_{135} = \frac{\epsilon_0 c}{4} [A_x^2 + A_y^2 - 2A_x A_y \cos(\phi_x - \phi_y)] \end{cases} \quad (3.23)$$

对于 45° 偏振光, x 和 y 分量同相或 $\phi_x - \phi_y = 0$, 而对于 135° 偏振光, $\phi_x - \phi_y = \pi$ 。右旋和左旋圆偏振光通量 P_R 和 P_L 对应于 x 和 y 相位差 $\pm \pi/2$,

$$\begin{aligned} P_R &= \frac{\epsilon_0 c}{4} [A_x^2 + A_y^2 + 2A_x A_y \sin(\phi_x - \phi_y)] \\ P_L &= \frac{\epsilon_0 c}{4} [A_x^2 + A_y^2 - 2A_x A_y \sin(\phi_x - \phi_y)] \end{aligned} \quad (3.24)$$

为了将琼斯矢量转换成斯托克斯参量,这些表达式可应用于式(3.1)中斯托克斯参量的定义。琼斯矢量 $\mathbf{E}$ 按如下方法转换成斯托克斯参量:

$$\mathbf{S}(\mathbf{E}) = \frac{\epsilon_0 c}{2} \begin{pmatrix} A_x^2 + A_y^2 \\ A_x^2 - A_y^2 \\ 2A_x A_y \cos(\phi_x - \phi_y) \\ 2A_x A_y \sin(\phi_x - \phi_y) \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

当电场 x 和 y 分量的相对相位为 0 或 π 时,光是线偏振的,斯托克斯参量具有非零的 S_1 和(或) S_2 分量,但 S_3 分量为零,因此 $\sin(\phi_x - \phi_y) = 0$ 。类似地,当相对相位为 $\pm \pi/2$, $\cos(\phi_x - \phi_y) = 0$, 对于给定的一组振幅 A_x 和 A_y , 偏振椭圆具有最大椭圆率。琼斯矢量的

绝对相位不改变对应的斯托克斯参量,因此

$$\mathbf{S}(e^{-i\phi}\mathbf{E}) = \mathbf{S}(\mathbf{E}) \quad (3.26)$$

例 3.4 求解光通量分量

图 3.16(a)绘制了琼斯矢量 $\mathbf{E}$ 对应偏振态的偏振椭圆,

$$\mathbf{E} = \sqrt{\frac{2}{\epsilon_0 c}} e^{0.6i} \begin{pmatrix} i \\ 0.8 + 0.5i \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

$\sqrt{2/(\epsilon_0 c)}$ 是将琼斯矢量 $\mathbf{E}$ 进行归一化的单位转换,归一化后不是以伏特每米为单位。偏振光通量分量对为 $P_H = |i|^2 = 1$, $P_V = |0.8 + 0.5i|^2 = 0.89$ 。根据式(3.23)和式(3.24), $P_{45} = 1.445$, $P_{135} = 0.445$, $P_R = 1.745$, $P_L = 0.145$, 得到斯托克斯参量 $\mathbf{S} = (1.89, 0.11, 1, 1.6)$ 。相应的正交偏振态对在图 3.16 中按比例绘制(图(b)~(d))。

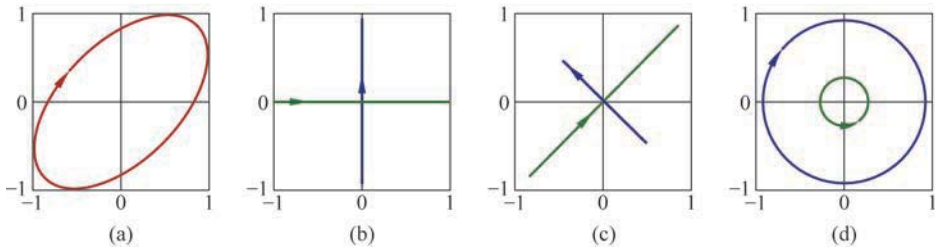


图 3.16 用偏振椭圆表示的椭圆偏振态(a)。分解为水平和垂直光通量分量(b)、45°和135°分量(c)以及右旋和左旋圆分量(d)。请注意水平和垂直分量上的箭头如何与椭圆偏振态的箭头相一致。类似地,45°和135°分量上的箭头作为矢量相加得到椭圆偏振态的箭头。同样,从原点到右旋和左旋圆偏振分量箭头的矢量相加,得到椭圆偏振态的箭头位置

一组完全偏振的斯托克斯参量,或者一组部分偏振的斯托克斯参量的偏振部分,等效于琼斯矢量 $\mathbf{E}$,

$$\mathbf{E}(\mathbf{S}) = \sqrt{\frac{2}{\epsilon_0 c}} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{S_0 + S_1}{2}} \\ \sqrt{\frac{S_0 - S_1}{2}} e^{-2i \arctan(S_2/S_3)} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

这个琼斯矢量可以乘以任意相位 $e^{-i\phi}$, 因为斯托克斯参量不确定绝对相位。

例 3.5 将琼斯矢量转换为斯托克斯参量

图 3.17 绘出了琼斯矢量 $\mathbf{E}$ 的偏振椭圆,并把它分解成基本偏振态对。

$$\mathbf{E} = \sqrt{\frac{2}{\epsilon_0 c}} \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 + 0.5i \end{pmatrix} = \frac{2}{\epsilon_0 c} \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.707 e^{i0.785} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

注意箭头位置表示了偏振电场分量的相位。当从原点到这些箭头的两个矢量相加时,它们等于图 3.17(a)中从原点到椭圆的矢量。 $\mathbf{E}$ 有如下的偏振光通量分量对: $P_H = 2.25$ 和 $P_V = 0.5$, $P_{45} = 2.125$ 和 $P_{135} = 0.625$, $P_R = 0.625$ 和 $P_L = 2.125$ 。对应的斯托克斯参量为

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1.5^2 + 0.707^2 \\ 1.5^2 - 0.707^2 \\ 2(1.5)(0.707)\cos(-0.785) \\ 2(1.5)(0.707)\sin(-0.785) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.75 \\ 1.75 \\ 1.5 \\ -1.5 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

因该偏振态可用琼斯矢量描述,所以偏振度必然为 1。其他椭圆偏振参数如下: $\text{DoLP} = \sqrt{85}/11 \approx 0.838$, 长轴方向 $\Psi \approx 20^\circ$, $\text{DoCP} = -6/11$, 椭圆率 $\epsilon = -0.30$, 离心率 $e \approx 0.95$ 。

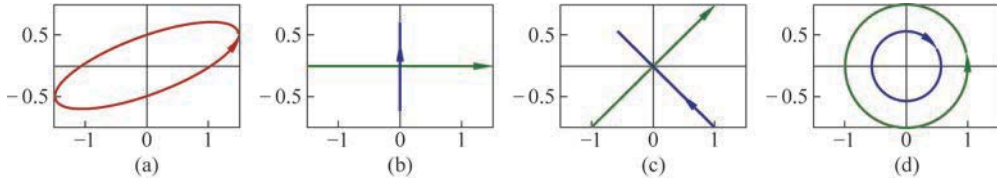


图 3.17 用偏振椭圆表示的椭圆偏振态(a),分解为水平和垂直光通量分量(b)、45°和 135°分量(c)以及右旋和左旋圆分量(d)

3.12 斯托克斯参量的非正交坐标系

斯托克斯参量有一个特殊的坐标系,因为 S_1 、 S_2 和 S_3 轴不构成交正坐标系。这个非正交坐标系是一个非常“聪明”的坐标系,它有效地描述了部分偏振光的叠加。

正交坐标系使用相互垂直的基矢量,例如笛卡儿基矢量集 $\hat{x}$ 、 $\hat{y}$ 和 $\hat{z}$:

$$\begin{cases} \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} \\ \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x} \\ \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y} \end{cases} \quad (3.31)$$

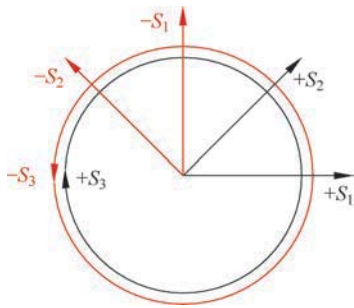


图 3.18 斯托克斯参量的三个基矢量 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{V}$ 和 $\mathbf{D}$, 对应于 S_1 、 S_2 和 S_3 基态,在笛卡儿空间中是不正交的

正交坐标系简化了绝大多数几何计算,是物理和光学中主要使用的坐标系。琼斯矢量使用标准的 x - y 正交坐标系。另一方面,斯托克斯参量使用基矢量,其中的正负值表示正交偏振,而不是相反的方向。 S_1 和 S_2 基态代表的电场只有 45° 的间隔;在琼斯算法中,这两种基态处于正交的中间,如图 3.18 所示。

这种非正交坐标系的巨大实用性有两个原因。

首先,斯托克斯参量在 0° 和 180° 偏振光之间没有区别,因为对于非相干光,没有有效差异。线偏振光是沿着一条线振荡的,如在横平面内沿 0° 和 180° 线,其电场在 $+x$ 方向和 $-x$ 方向上的偏移量相等。一个偏振器在 0° 方向与偏振器旋转 180° 后的方向具有相同的 optical 效果。这就是为什么偏振器有一个偏振面,如“水平”,而不是一个单一的方向,例如 $+x$ 。由于斯托克斯参量不能区分在 0° 和 180° 的偏振光,因此线偏振光 $\hat{\mathbf{L}}(\Psi)$ 的斯托克斯参量在线偏振光旋转 180° 后重复,

$$\hat{\mathbf{L}}(\Psi) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\Psi \\ \sin 2\Psi \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{L}}(\Psi + \pi) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(2(\Psi + \pi)) \\ \sin(2(\Psi + \pi)) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

这解释了米勒旋转矩阵中的 2Ψ 。其次,斯托克斯参量元素的正负号表示正交偏振。加入正交偏振的非相干光束会降低光的偏振度。例如,单位面积上光通量相等的水平偏振和垂直偏振多色光,这两束光叠加在一起将产生非偏振光。

3.13 庞加莱球

庞加莱球是偏振态和斯托克斯参量的几何表示,它简化了许多偏振问题的分析,特别是涉及延迟器^[2]的问题。亨利·庞加莱于1892年在他的著作 *Traité de Lumière*^[7]中介绍了庞加莱球,如图3.19所示,将所有完全偏振态映射为球面上的点。图中给出了庞加莱球的三个视角下的透视图(包含正面和背面)。图3.20显示了庞加莱球的另一种视图,其纬度线和经度线叠加在一起。椭圆是正对球的中心画的,因此,北(上)半球是右旋椭圆偏振的。

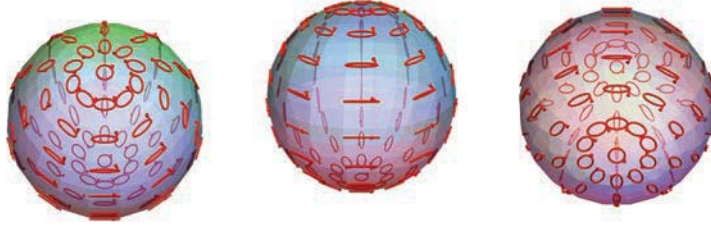


图 3.19 庞加莱球是偏振态的三维表示。球面上一组点的坐标已被转换为归一化的斯托克斯参量,并在球面上画出了椭圆。这些透视图从三个不同角度同时展示了前后两面,展示了偏振方向是如何绕球体的 360° 整圆旋转 180° 的

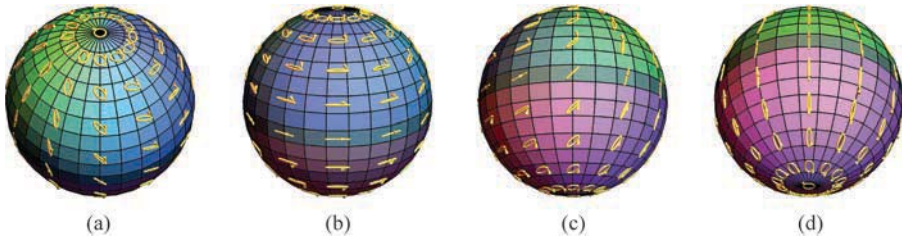


图 3.20 这里显示了庞加莱球的四个视图。以 135° 光或 $-S_2$ 为中心(a),以 0° 光或 $+S_1$ 为中心(b),以 45° 光或 $+S_2$ 为中心(c),以 90° 光或 $-S_1$ 为中心(d)。所有的完全偏振态都表示在球面上。赤道周围的暗带代表线偏振光,两极是圆偏光。以面向球心方式在球面上画出了偏振态,上半球是右旋椭圆偏振的

考虑将斯托克斯参量 $\mathbf{S}$ 除以光通量 S_0 得到归一化的斯托克斯参量 $\hat{\mathbf{S}}$,

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 1 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{S}}{S_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ S_1/S_0 \\ S_2/S_0 \\ S_3/S_0 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

$\hat{\mathbf{S}}$ 的偏振度, $\text{DoP}(\hat{\mathbf{S}})$ 是

$$\text{DoP}(\hat{\mathbf{S}}) = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} \quad (3.34)$$

对于所有的偏振态, 偏振度为 1, 因此归一化的斯托克斯分量满足以下关系:

$$\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} = 1 \quad (3.35)$$

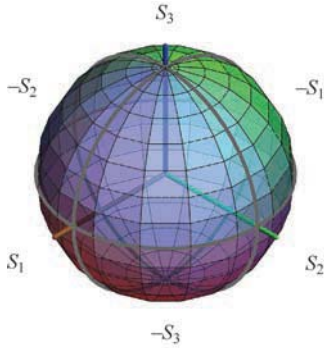


图 3.21 庞加莱球的轴是斯托克斯参量基本偏振态

庞加莱球把每个偏振态的归一化斯托克斯参量 (s_1, s_2, s_3) 表示为三维空间中的一个点。庞加莱球的轴为斯托克斯参量的基态 $\pm S_1, \pm S_2, \pm S_3$, 如图 3.21 所示。完全偏振态位于球面, 因为它们的 DoP 等于 1。图 3.22 显示了庞加莱球顶部和底部的圆偏振区域。在每个极点周围, 光是近乎圆形的椭圆偏振态, 当我们绕极点沿纬度圆转一圈时, 主轴旋转 180° 。

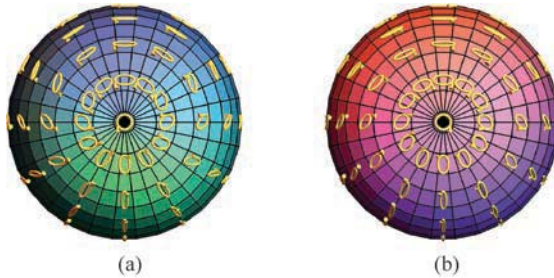


图 3.22 庞加莱球的极点区域代表右旋圆偏振态(a, 北极点)和左旋圆偏振态(b, 南极点)

庞加莱球的原点 $(0, 0, 0)$ 代表非偏振光。线偏振态占据 $s_1 - s_2$ 平面内的单位圆。右旋圆偏振光是在球顶部的北极点 $(0, 0, 1)$ 。左旋圆偏振光位于球底部的南极点 $(0, 0, -1)$ 。球表面的其余部分描述的是椭圆偏振光, 在北半球为右旋, 在南半球为左旋。在接近赤道时, 光的椭圆率趋于 0; 当接近两极时, 椭圆率趋于 ± 1 。庞加莱球的表面连续地表示所有可能的偏振态。

庞加莱球的内部代表部分偏振光, 离开原点的距离表示 DoP 。因此, 以原点为中心、半径为 $1/2$ 的球描述了所有 DoP 为 $1/2$ 的部分偏振态。图 3.23(a) 显示了一系列球, 每个都包含一个固定 DoP 的偏振态。始于中心并穿过每个球的一条径向线描述了一个具有相同偏振椭圆但 DoP 不同的偏振态。如图 3.23(a) 所示, 沿线段 $(s_1, 0, 0)$, $-1 \leq s_1 \leq 0$, 偏振态从完全垂直偏振、强垂直偏振、弱垂直偏振变化到无偏振。如图 3.23(b) 所示为随机偏振椭圆的例子。

沿着庞加莱球赤道从 $(1, 0, 0)$ 移动到 $(0, 1, 0)$ 、 $(-1, 0, 0)$ 、 $(0, -1, 0)$, 最后回到起点 $(1, 0, 0)$, 偏振态从水平或 0° 变化到 45° 、 90° 、 135° , 然后回到水平或 0° , 如图 3.24(a) 所示。 180°

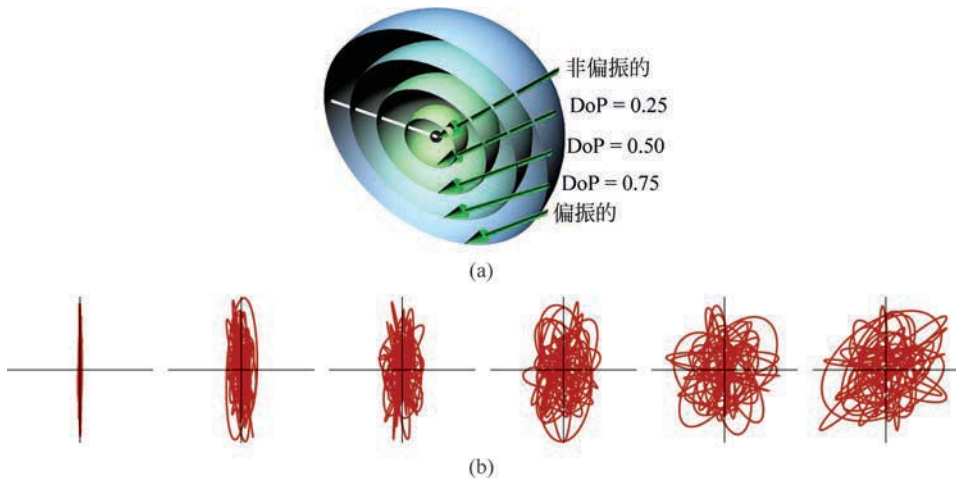


图 3.23 (a)恒定偏振度的面是以原点为中心的庞加莱球内部的一系列球面。这些球中心点代表非偏振光。(b)沿白线的偏振态呈随机偏振椭圆状,从垂直偏振(左)到非偏振(右)

方向的偏振态与 0° 方向的相同; 0° 和 180° 方向的偏振器产生相同的偏振态。因此,沿庞加莱球的赤道移动时,偏振轴的方向 Ψ 以经度 ζ 的一半速率变化,

$$\Psi = \frac{\zeta}{2} \quad (3.36)$$

这是式(3.7)中因子 2 的结果。

沿着一条经线,从南极(左旋圆偏振),穿过赤道,到北极(右旋圆偏振),光的椭圆率发生变化,但主轴的方向保持不变,如图 3.24(b)球的正面所示。球面上的纬度线,即垂直于过极点的 S_3 轴的平面内的圆圈,在南极点纬度为 -90° ,在赤道为 0° ,在北极点为 90° ,或者用更熟悉的弧度制表示,从 $-\pi/2$ 到 0 到 $\pi/2$ 。沿着纬度圆移动,归一化的斯托克斯参量 S_3 和椭圆率保持不变,但椭圆的长轴方向旋转了 180° ,如图 3.24(c)所示。每一个纬度圆对应着一个恒定圆偏振度的偏振态。归一化斯托克斯参量的圆偏振度为

$$\text{DoCP}(\mathbf{S}) = \frac{S_3}{S_0} = s_3 \quad (3.37)$$

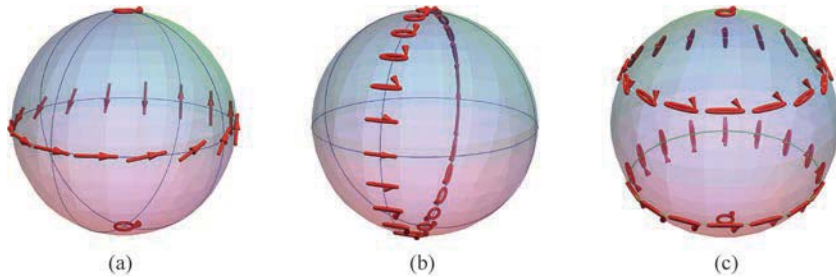


图 3.24 (a)当我们沿赤道移动 360° 时,赤道上的线偏振态旋转 180° 。(b)偏振椭圆沿经度大圆从左旋圆偏振光变为水平偏振光,再到右旋圆偏振光,都有一个水平主轴。延伸到背面,所有的椭圆都有一个垂直的主轴。(c)两个纬度圆上的偏振变化。在每一个纬度,椭圆主轴方向变化,而圆偏振度保持不变

因此,庞加莱球上以弧度为单位的纬度 η 正比于 s_3

$$\sin \eta = s_3 = \text{DoCP} \quad (3.38)$$

图 3.25 显示了庞加莱球上位于球坐标 2Ψ 和纬度 η 处的主轴方向。

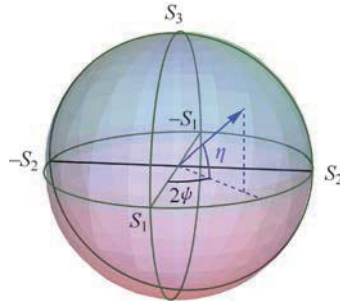


图 3.25 主轴方向 Ψ 和纬度 η 的偏振态在庞加莱球上的位置

3.14 庞加莱球的平面展开

正如在表示地球时,不仅可以用球体表示,还可用平面展开图来表示,我们同样也可以用各种平面表示法来表示庞加莱球面。首先,可以在一个矩形内表示庞加莱球,其中 x 轴表示偏振轴方向, y 轴为 DoCP,如图 3.26(a)所示。在这个等矩形投影(equi-rectangular projection)中,顶部的整行代表右旋圆偏振光,底部的整行代表左旋圆偏振光。还有其他标准映射转换可用来表示庞加莱球。图 3.26(b)描绘了庞加莱球的摩尔威德投影(Mollweide projection),图 3.26(c)为正弦投影(sinusoidal projection),图 3.26(d)为间断正弦投影(interrupted sinusoidal projection)。

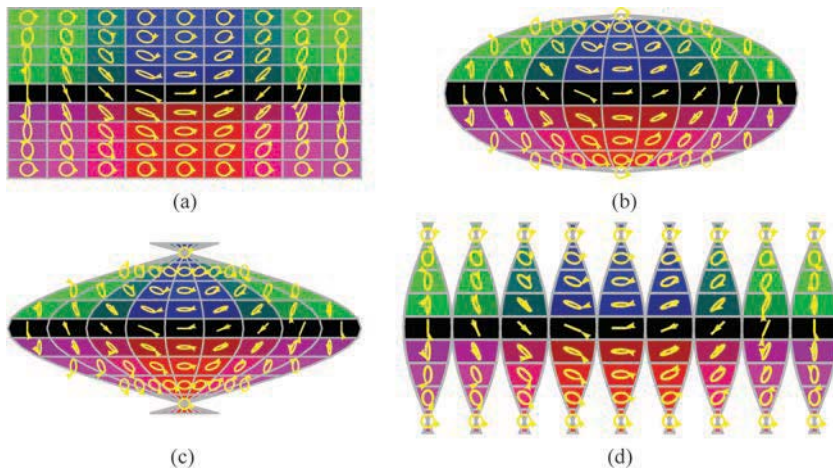


图 3.26 庞加莱球的几种平面表示法:(a)等矩形投影,(b)摩尔威德投影,(c)正弦投影,(d)间断正弦投影

在亨利·庞加莱引入庞加莱球之前,他首先在复平面上创建了一种有趣的偏振光表示法。通过放置一个与庞加莱球底部(在左旋圆偏振处)相切的平面,并将偏振态从庞加莱球沿如图 3.27 所示的线投影到复平面上,从而将斯托克斯参量参数化。如果把庞加莱球的半径设为 $1/2$,线偏振光就位于单位圆周围。根据复数 $z = x + iy$ 形式,归一化斯托克斯参量

最终参数化为

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2x}{1+x^2+y^2} \\ \frac{2y}{1+x^2+y^2} \\ \frac{2}{1+x^2+y^2} - 1 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

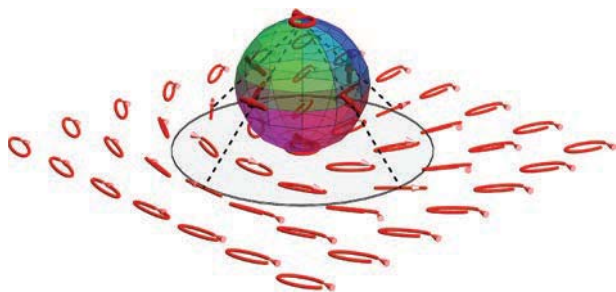


图 3.27 从右旋圆偏振态开始投影庞加莱球,可在复平面上表示所有偏振态

图 3.28 显示了庞加莱球的复平面原点附近的偏振态。各个中心圆包含了所有具有相同椭圆率的偏振态。径向线表示恒定的主轴方向。用归一化斯托克斯矢量元素表示的参数化复平面为

$$x + iy = \frac{s_1 + is_2}{1 + s_3} \quad (3.40)$$

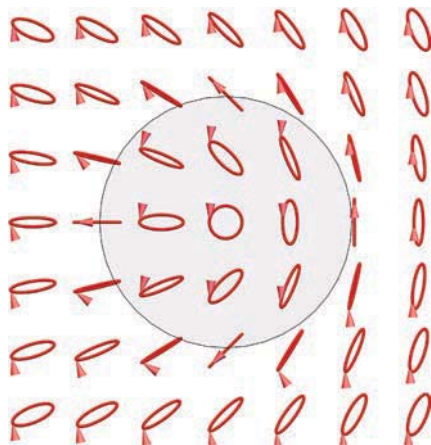


图 3.28 庞加莱球在平面上的投影,左旋圆偏振光在原点,线偏振光在单位圆上,右旋圆偏振光在无穷远

3.15 总结和结论

斯托克斯参量是光学中表征光束偏振态的标准方法。琼斯矢量最适合于相干光束。由于激光的光谱带宽几乎是单色的($\Delta\lambda \ll 1\text{nm}$),并且激光束可以很好地准直,因此可以很好

地用琼斯矢量和偏振矢量来近似激光。这些激光产生的光波比较容易描述。另一方面,来自太阳、灯泡、LED 和大多数其他光源的光绝非单色的。如 4.7 节所述,用数学方法描述所有这些波的叠加是很有挑战性的。

斯托克斯参量既可用于相干光束,也可用于非相干光束。非相干光在干涉和衍射过程中遵循与相干光相同的基本原理;然而,由于非相干光的多色自然特性,细节更加复杂。例如,单色光不能是非偏振的。特别是,偏振的非相干光束可以叠加形成非偏振光,而相互相干的光束则不能。将一个手电筒(带水平起偏器)发出的光和另一个手电筒(带垂直起偏器)发出的光相混合,将产生非偏振光。把来自水平偏振的和垂直偏振的激光混合在一起,将产生一系列偏振态,而不是非偏振光;这将在 4.4 节中进一步讨论。因此,非相干光采用了不同于琼斯矢量的偏振数学方法,该数学方法具有 3.12 节所述的特殊坐标系。

斯托克斯参量对于描述室外和室内场景的偏振是特别有用的^[8]。这些斯托克斯参量图像和光谱是用斯托克斯偏振分析仪测量的(第 7 章)。琼斯矢量不能用于描述自然光。

3.16 习题集

3.1 对于以下斯托克斯参量,确定偏振度、线偏振度、偏振椭圆主轴方向、圆偏振度和椭圆率。

- a. $(1, 0, 1, 0)$
- b. $(1, 0, 0.5, 0)$
- c. $(2, 1, 0.5, -0.5)$
- d. $(3, 1, 0, -1)$
- e. $(1, 0.2, 0.3, 0.6)$
- f. $(1, -0.8, 0.1, 0.4)$

如果所有六束光被非相干混合,那么得到的斯托克斯矢量是什么?

3.2 将习题 3.1 中的斯托克斯参量分解为完全偏振的分量 $\mathbf{S}_P$ 和非偏振的分量 $\mathbf{S}_U$ 。用相同的尺度绘制 $\mathbf{S}_P$ 的偏振椭圆。

3.3 下表中的每一行有一组四个偏振测量值,它们是从标题所示六个测量类型中选测出来的。计算斯托克斯参量,并填写两个缺失的测量值(标记为□)。

	P_H	P_V	P_{45}	P_{135}	P_R	P_L
a.	10	1	3	□	6	□
b.	5	2	5	□	□	2
c.	9	□	9	□	0	18
d.	6	□	□	4	10	7
e.	□	7	6	6	10	□
f.	4	□	6	4	□	4

3.4 为什么表征线偏振光方向的斯托克斯参量随 2Ψ 变化,而琼斯矢量元素随 Ψ 变化?

3.5 证明对于斯托克斯参量为 (S_0, S_1, S_2, S_3) 的部分偏振光,能透过匹配的理想偏振器的最大光通量大于偏振光通量 $\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$ 。能够更多透射多少光通量?

- 3.6 a. 在庞加莱球上, $\text{DoCP}=2/3$ 对应的所有偏振态在哪里?
b. 在庞加莱球上, 主轴方向为 30° 的所有偏振态在哪里?
c. 试说明能以 50% 透过率穿过 45° 线偏器的偏振态在庞加莱球上的位置。
d. 画出 45° 线偏振光依次通过 $\lambda/4$ 线性延迟器 (快轴为 0°)、 $\lambda/4$ 线性延迟器 (快轴为 45°)、 $\lambda/4$ 左旋圆延迟器的轨迹。
- 3.7 将代表相同偏振态的琼斯矢量与斯托克斯参量配对。
- a. $(1, 1, 0, 0)$ i. $(1+i, 0)$
b. $(\sqrt{2}, 1, 1, 0)$ ii. $(0, 1)$
c. $(1, 0, 1, 0)$ iii. (i, i)
d. $(\sqrt{2}, -1, 1, 0)$ iv. $(1, i)$
e. $(1, -1, 0, 0)$ v. $2^{\frac{1}{4}}(\cos 22.5^\circ, \sin 22.5^\circ)$
f. $(1, 0, 0, 1)$ vi. $(-i, 1)$
g. $(1, 0, 0, 0)$ vii. $2^{\frac{1}{4}}(\cos 67.5^\circ, \sin 67.5^\circ)$
- 3.8 给定辐照度 P 、取向角 θ 和椭圆率 ϵ , 求完全偏振的斯托克斯参数集:

$P/(\text{W}/\text{m}^2)$	θ	ϵ
2	0°	0
10	22.5°	0.1
10	45°	0.25
100	60°	0.4
30	90°	0.5
0.1	113°	1

- 3.9 将以下琼斯矢量转换为斯托克斯参量:
- a. $(1, 1)$ b. $(e^{\frac{i\pi}{4}}, 0)$ c. $(1, e^{i\theta})$ d. $(1, i/2)$
- 3.10 将以下斯托克斯参量转换为琼斯矢量:
- a. $(1, 0, 0, 1)$ b. $(1, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ c. $(1, 0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$
d. $(\sqrt{14}, 1, 2, 3)$ e. $(1, -\cos 2\theta, \sin 2\theta, 0)$ f. $(\sqrt{3}, 1, 1, 1)$
- 3.11 斯托克斯矢量为 $\mathbf{S}=(11, 6, 6, 7)$ 的光透过一个可调节的偏振旋转器, 该旋转器旋转偏振椭圆的主轴。
- a. 旋转以下角度: 10° 、 22.5° 、 30° 、 45° 、 90° 、 135° 和 180° , 求所得的斯托克斯矢量。
b. 画出庞加莱球并标出基本偏振态。
c. 画出入射偏振态和 a 中所有的出射偏振态。随着旋转角的增加, 在庞加莱球上描绘轨迹。
- 3.12 对斯托克斯矢量进行如下操作:
- $(1, 0, -1, 0)$ $(1, -0.5, 0, 0)$ $(1, 0.5, 0.5, 0)$ $(5, 0, 0, 2)$
- a. 求偏振度。
b. 确认偏振态, 并区分它是偏振的、部分偏振的, 还是非偏振的。

- c. 将斯托克斯参量 $\mathbf{S}$ 分解为偏振的分量 $\mathbf{S}_P$ 和非偏振的分量 $\mathbf{S}_U$ 。
- d. 求与 $\mathbf{S}_P$ 正交的偏振的斯托克斯矢量 $\mathbf{S}_0 (D_0=1)$ 。
- 3.13 椭圆偏振态有一个水平长轴, 偏振度为 1, 看向光束时顺时针旋转。水平偏振器通过 70% 的光通量, 垂直偏振器通过 30%。
 - a. 求归一化斯托克斯参量 $\mathbf{S}$ 。
 - b. 椭圆率和圆偏振度是多少?
 - c. 求正交偏振态。
 - d. 如果将椭圆的长轴旋转 60° , 求所得的斯托克斯矢量。
- 3.14 斯托克斯参量为 $\mathbf{S}=(27, 22, 14, 7)$ 的光透过一个可调节的偏振旋转器, 该旋转器旋转偏振椭圆的主轴。
 - a. 求旋转以下角度后的斯托克斯参量: $10^\circ, 22.5^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ 和 180° 。
 - b. 画出庞加莱球并标出六个基本偏振态。画出入射偏振态和 a 中所有出射偏振态。描绘轨迹。
 - c. 对于 $\mathbf{S}$, 求偏振度并画出偏振椭圆。
- 3.15 假设部分偏振斯托克斯矢量为 $\mathbf{S}=(1, 0, 0.3, 0)$ 。
 - a. 将 $\mathbf{S}$ 分解为两个光通量相等的完全线偏振态 $\mathbf{L}_1$ 和 $\mathbf{L}_2$ 之和。
 - b. $\mathbf{L}_1$ 和 $\mathbf{L}_2$ 的斯托克斯参量是正交的吗?
 - c. 把 $\mathbf{S}$ 分解成两个相等光通量的完全偏振斯托克斯参量之和, 这样的分解是唯一的吗? 若有帮助的话, 选择一个数值例子。对于任意的斯托克斯矢量, 分解是唯一的吗? 利用庞加莱球可以帮助理解。
 - d. 对于哪种或哪些偏振态, 分解不是唯一的?
- 3.16 为什么斯托克斯矢量使用一个非正交基, 使得 x 和 y 分量在相同的基态 $\mathbf{S}_1$ 上以正值和负值的形式出现? 在典型的矢量中, x 和 y 作为两个正交矢量基态出现。
- 3.17 证明: 如果 $\text{DoP}_1 > \text{DoP}_2$ 的两束部分偏振光相加, 得到的偏振度不能大于 DoP_1 , 但可以小于 DoP_2 。它什么时候等于 DoP_1 ?
- 3.18 如果两个振幅相等的偏振斯托克斯参量相加, 结果位于庞加莱球的何处? 如果三个振幅相等的偏振斯托克斯参量相加, 结果位于庞加莱球的何处?

3.17 参考文献

- [1] R. M. A. Azzam and N. M. Bashara, Ellipsometry and Polarized Light, 2nd edition, Amsterdam: Elsevier(1987).
- [2] W. A. Shurcliff, Polarized Light-Production and Use, Cambridge, MA: Harvard University Press (1962).
- [3] D. Goldstein, Polarized Light, 2nd edition, New York, NY: Marcel Dekker(2003).
- [4] G. G. Stokes, On the composition and resolution of streams of polarized light from different sources, Transactions of the Cambridge Philosophical Society 9(1851): 399.
- [5] D. J. Diner, A. Davis, B. Hancock, S. Geier, B. Rheingans, V. Jovanovic, M. Bull, D. M. Rider, R. A. Chipman, A.-B. Mahler, and S. C. McClain, First results from a dual photoelastic-modulator-based polarimetric camera, Applied Optics 49(2010): 2929-2946.

- [6] D. J. Diner, A. Davis, B. Hancock, G. Gutt, R. A. Chipman, and B. Cairns, Dual-photoelastic-modulator-based polarimetric imaging concept for aerosol remote sensing, *Applied Optics*, 46(2007): 8428-8445.
- [7] H. Poincaré, *Traite de la Lumiere*, Paris 2, 165(1892).
- [8] G. P. Können, *Polarized Light in Nature*, CUP Archive(1985).

偏振光干涉

4.1 引言

干涉是光波在叠加或干涉时产生干涉条纹的能力。在很多情况下,单色光很容易产生干涉条纹和散斑图样。因此,激光常被用于全息记录和用作许多干涉仪的光源。非相干光,如太阳光和发光二极管的光,只在非常有限的条件下才会产生干涉条纹,比如合成光束的光程长度(OPL)相差不到几个波长。本章首先讨论相干单色偏振光的干涉。然后,再研究多色光的干涉,以理解为什么斯托克斯参量可以很好地表征这种光束组合过程。

干涉仪的性能主要依赖于光束的光通量、光谱、波前质量和偏振性,后者是我们关注的焦点。相干性的基本度量是干涉图的质量,即条纹可见度,也就是条纹的对比度。当干涉光束的偏振态对齐时,干涉条纹的可见度最高,但随着偏振矢量夹角增大,干涉条纹的可见度降低。当正交偏振干涉时,条纹可见度变为零。但可能仍然会存在偏振条纹,这是偏振态的一种调制。即使条纹可见度为零,也可以通过引入一个中间角度的偏振器来恢复干涉图样。

自从托马斯·杨在 1803 年发表了他早期的干涉实验结果^[1]以来,光的干涉就为理解光的本质提供了重要线索。两束相等的光可以在某些区域抵消,而在其他区域产生两倍的光通量,这个事实为光的波动性提供了强有力的证据。后来,菲涅耳和阿拉果^[2]发现,如果两束光具有正交偏振态,则不会形成干涉条纹。因此,偏振控制是优化干涉仪和全息记录装置性能的一个重要因素。

4.2 光波的叠加

干涉是指当两个或两个以上的光波叠加在一起时所产生的可测量的效应。当两束光是相干的,它们可发生相长干涉(constructively interfere)和相消干涉(destructively interfere),产生能揭示两束光重要信息的干涉图样。

当光束在线性光学介质中合并时,它们的电场叠加。用下标 q 标记各个光束,光束重叠的整个空间区域的电场变为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_3(\mathbf{r}, t) + \cdots = \sum_q \mathbf{E}_q(\mathbf{r}, t) \quad (4.1)$$

当光束是单色的,例如所有光束都来自同一激光,所有光束都有共同的角频率 ω 和彼此之间固定的相位关系。光束的干涉用它们的场叠加表示,其中每个场有 x 、 y 和 z 振幅分布 $A(\mathbf{r})$ 和相位分布 $\phi(\mathbf{r})$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left(e^{-i\omega t} \sum_q \mathbf{E}_q(\mathbf{r}) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k}_q \cdot \mathbf{r}} \right) = \text{Re} \left(e^{-i\omega t} \sum_q \begin{pmatrix} E_{x,q}(\mathbf{r}) \\ E_{y,q}(\mathbf{r}) \\ E_{z,q}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Re} \left(e^{-i\omega t} \sum_q \begin{pmatrix} A_{x,q}(\mathbf{r}) e^{-i\phi_x(\mathbf{r})} \\ A_{y,q}(\mathbf{r}) e^{-i\phi_y(\mathbf{r})} \\ A_{z,q}(\mathbf{r}) e^{-i\phi_z(\mathbf{r})} \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

杨氏双缝干涉仪,如图 4.1 所示,使一个入射波前通过两个名义上宽度相等的狭缝从而发出两束光,这样通过分波前产生干涉图样。由于衍射,从每个狭缝发出的光以一定角度发散出去,在观察屏幕上形成干涉条纹。当光波正入射到两个狭缝时,从两个狭缝发出的光的相位相等。在观察屏上,由于到观察屏的路径长度之差 ΔL 随角度而变化,两束光的相位差也随角度变化。在 ΔL 是波长的整数倍的地方,发生相长干涉,干涉图样是明亮的,两束光同相。在两束光的相位差是 π 弧度的位置,干涉图样是暗的。由于假设狭缝不改变偏振,两束光具有相同的偏振,因此在干涉图样的计算中没有考虑偏振。

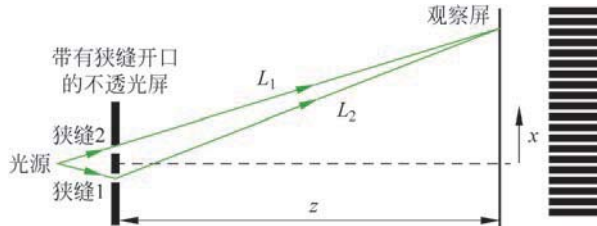


图 4.1 杨氏双缝干涉原理图,右侧显示的是相应的干涉图样

杨氏双缝通过分波面产生干涉,从一个波前提取两个独立的片段并将它们组合。大多数干涉仪采用分振幅方式,用分束器或衍射光学元件(如光栅)将光波的振幅分开,从而产生两束或多束光。如图 4.2 所示为非偏振分束器,它将入射光束分为两束光(a)并将两束光合并(b)。分束器可设计成将一束光等分为两束振幅相等的光束,但一般来说,分束是不相等

的。在实践中,分束器也会改变光的偏振;第一束将有一个偏振态,第二束将有一个不同的偏振态。分束器可以设计成非偏振的,其中偏振变化很小。另外,偏振分束器也很常见,其中一个偏振分量(p 偏振分量)透射,另一个偏振分量(s 偏振分量)被反射。

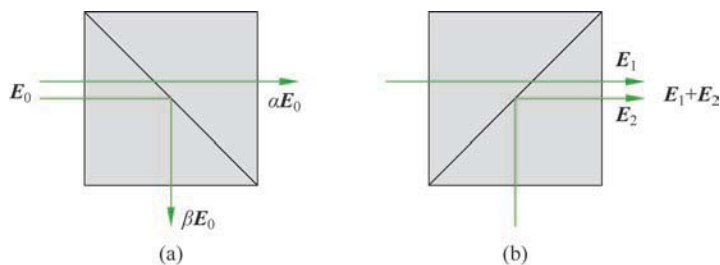


图 4.2 (a)非偏振分束器将入射光 E_0 分为 αE_0 和 βE_0 两束光。(b)分束器将两束光合并。从左侧入射的光束,出射时琼斯矢量为 E_1 。从底部入射的光束以 E_2 出射。对于相干单色光束,合并光束的琼斯矢量为 $E_1 + E_2$

4.3 干涉仪

干涉仪将光波分开和合并,并测量由此产生的相长干涉和相消干涉,通常是为了获得关于波前形状或光学表面形状的信息。目前已经有数百种干涉仪配置,并且干涉仪被用于各种应用,包括光学测量、光通信和全息^[3-10]。两种具有代表性的干涉仪分别是马赫-曾德尔干涉仪(图 4.3)和泰曼-格林干涉仪(图 4.4)。这两种干涉仪将入射波前分成两个波,分别对两束光进行处理,然后用分束器重新合并波前以产生干涉图样。在图 4.3 中,测试了一个透射样品的波前质量。激光束由扩束器准直并照射分束器 1。透射光束即测试光束,透射通过样品,从反射镜 1 反射,然后从分束器 2 反射到照相机。从分束器 1 反射的光束,即参考光束,从反射镜 2 反射并透射通过分束器 2。在离开分束器 2 时,一个镜头将样品成像到屏幕、照相机或探测器上,在那里可以观察到干涉。如果参考光束是高质量的平面波,样品的像差可以用干涉图样测量。图 4.4 中的泰曼-格林干涉仪与此类似,除了单个分束器被使用了两次。泰曼-格林干涉仪在光学车间中常用于测试光学元件^[3]。准直透射光束经过透镜聚焦,由凹面镜反射,第二次通过透镜,再由分束器反射。这种配置可用于测试透镜、反射镜形状或这两种元件的组合。

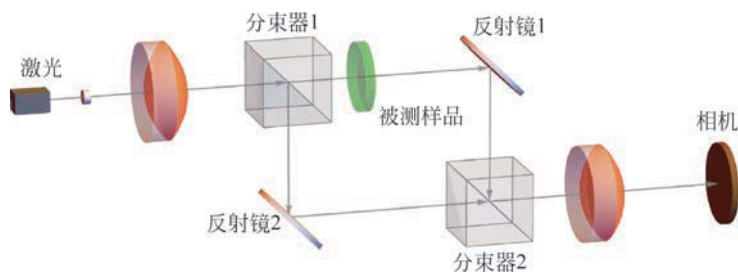


图 4.3 马赫-曾德尔干涉仪原理图,它利用两个分束器并采取两个不同的路径,使光束干涉。图中显示了一个透射被测样品,但也可使用许多不同类型的被测样品

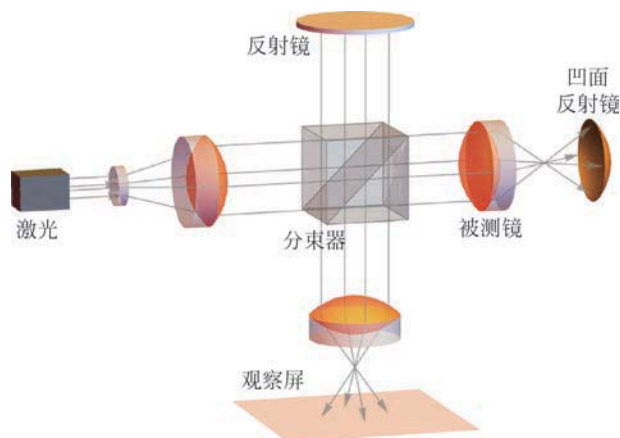


图 4.4 泰曼-格林干涉仪的原理图,它使用单个分束器,并使从干涉仪两臂返回的波前发生干涉

如图 4.5 所示为马赫-曾德尔干涉仪,这种配置可任意调节两出射光束的偏振态和相对振幅。来自激光器的线偏振光被准直并通过半波片。偏振分束器将 p 偏振光透射到反射镜 1,将 s 偏振光反射到反射镜 2。两个路径都有一个双延迟器组成的偏振态控制器。首先, $\lambda/4$ 线性延迟器的方向将光的椭圆率调节为任意想要的值,从左旋圆偏光到线偏光到右旋圆偏光。然后, $\lambda/2$ 线性延迟器的方向调整每个偏振椭圆的主轴方向。这两束光用一个非偏振分束器合并,它们的干涉图样由照相机、胶片或其他探测器进行测量。两束光之间的角度可通过倾斜反射镜来调节,这控制了条纹的空间频率。平移其中一个反射镜来调整相位,这可移动条纹。通过旋转初始 $\lambda/2$ 线性延迟器来调节两束光的相对振幅,使更多的光进入一个通道,更少的光进入另一个通道,这可改变条纹对比度。利用这种干涉仪,可在两个任意偏振态和任意振幅之间产生干涉。4.4 节讨论了一些由此产生的干涉图样。

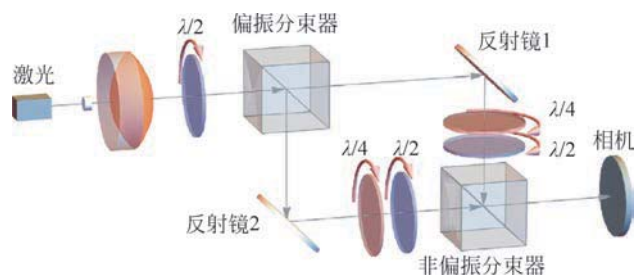


图 4.5 用于研究偏振光干涉的马赫-曾德尔干涉仪。每条路径上可旋转的四分之一波($\lambda/4$)和半波($\lambda/2$)线性延迟器可产生任意偏振椭圆对。初始的可旋转半波延迟器调整每个臂中光通量的比例。偏振分束器(PBS)输出 p 偏振光并将所有这些光传输到反射镜 1,PBS 输出 s 偏振光并将所有这些光传输到反射镜 2

4.4 近似平行单色平面波的干涉

如图 4.6 所示,考虑两个传播方向几乎平行的平面波的干涉。第一束具有偏振矢量 $\mathbf{E}_1$,第二束具有偏振矢量 $\mathbf{E}_2$ 。当光束重叠时,它们会发生干涉,电场叠加,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}(\mathbf{E}_1 e^{i(\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t - \phi_1)} + \mathbf{E}_2 e^{i(\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t - \phi_2)}) \quad (4.3)$$

假设归一化传播矢量 $\mathbf{k}_1$ 和 $\mathbf{k}_2$ 在 x - z 平面上且非常靠近 z 轴, 因此电场的 z 分量非常接近于零。从 z 轴度量的传播角为 ζ_1 和 ζ_2 。以相位表示的传播因子为

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} \sin \zeta_1 \\ 0 \\ \cos \zeta_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \sin \zeta_1 + z \cos \zeta_1, \\ \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} \sin \zeta_2 \\ 0 \\ \cos \zeta_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \sin \zeta_2 + z \cos \zeta_2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

因此, 电场为

$$\mathbf{E}(z, t) = \text{Re} \left[e^{-i\omega t} \left(\begin{pmatrix} E_{1,x} \\ E_{1,y} \\ E_{1,z} \end{pmatrix} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(x \sin \zeta_1 + z \cos \zeta_1) - i\phi_1} + \begin{pmatrix} E_{2,x} \\ E_{2,y} \\ E_{2,z} \end{pmatrix} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(x \sin \zeta_2 + z \cos \zeta_2) - i\phi_2} \right) \right] \quad (4.5)$$

干涉图样可以在任何平面上观察到。为简单起见, 令 $z=0$ 。当传播矢量接近 z 轴时, z 分量趋于零。然后可以去掉 z 分量, 并可将 $\mathbf{E}$ 矢量替换为 2×1 的琼斯矢量。观察面上的电场变成

$$\mathbf{E}(0, t) = \text{Re} \left[e^{-i\omega t} \left(\begin{pmatrix} E_{1,x} \\ E_{1,y} \end{pmatrix} e^{i(\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \zeta_1 - \phi_1)} + \begin{pmatrix} E_{2,x} \\ E_{2,y} \end{pmatrix} e^{i(\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \zeta_2 - \phi_2)} \right) \right] \quad (4.6)$$

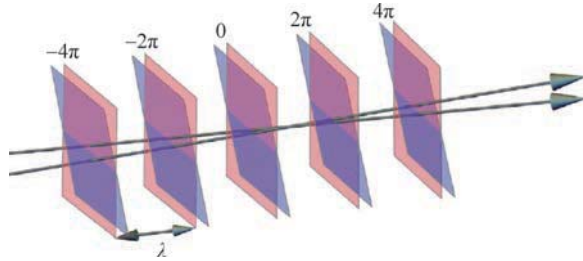


图 4.6 两个平面波(蓝色和粉红色)的干涉, 传播方向相互之间以及与 z 轴之间的角度很小

首先考虑这种情形: 两干涉光束处于相同偏振态, 但有不同的振幅 A_1 和 A_2 。 x 分量的相位可作为参考相位($\phi_1=0$), y 相位则成为相对相位($\phi_2=\phi$)。归一化琼斯矢量($F_{1,x}$, $F_{2,x}$)可以被提出来, 所以式(4.6)变成

$$\mathbf{E}(0, t) = \text{Re} \left[e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} F_{1,x} \\ F_{1,y} \end{pmatrix} \left(A_1 e^{i(\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \zeta_1)} + A_2 e^{i(\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \zeta_2 - \phi)} \right) \right] \quad (4.7)$$

干涉图样中的强度分布 $P(x)$ 为

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{\epsilon_0 c}{2} \mathbf{E}^\dagger \mathbf{E} \\ &= \frac{\epsilon_0 c}{2} \left(A_1 e^{-i(\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \zeta_1)} + A_2 e^{-i(\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \zeta_2 - \phi)} \right) \left(A_1 e^{i(\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \zeta_1)} + A_2 e^{i(\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \zeta_2 - \phi)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\epsilon_0 c}{2} (A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 e^{i \frac{2\pi x}{\lambda} (\sin \zeta_1 - \sin \zeta_2) + i \phi} + A_1 A_2 e^{-i \frac{2\pi x}{\lambda} (\sin \zeta_1 - \sin \zeta_2) - i \phi}) \\
&= \frac{\epsilon_0 c}{2} \left\{ A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \left[\frac{2\pi x}{\lambda} (\sin \zeta_1 - \sin \zeta_2) + \phi \right] \right\} \quad (4.8)
\end{aligned}$$

此干涉图样的光通量呈余弦变化,其周期为 $\Lambda = \lambda / (\sin \zeta_1 - \sin \zeta_2)$ 。最小光通量($P_{\min}$)和最大光通量($P_{\max}$)分别为

$$P_{\min} = \frac{\epsilon_0 c}{2} (A_1^2 + A_2^2 - 2A_1 A_2) \quad \text{和} \quad P_{\max} = \frac{\epsilon_0 c}{2} (A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2) \quad (4.9)$$

条纹的质量用条纹对比度 V 来描述,

$$V = \frac{P_{\max} - P_{\min}}{P_{\max} + P_{\min}} = \frac{2A_1 A_2}{A_1^2 + A_2^2} \quad (4.10)$$

这取决于两个光束之间的相对光通量。当振幅相等($A_1 = A_2$)时,最小光通量为 0,条纹对比度最大, $V=1$,这些条纹是最容易探测的。随着振幅比值 A_1/A_2 的增加或减少, $P_{\min}$ 增大,条纹对比度降低,条纹变得更难探测。当比值 A_1/A_2 趋于零时, $P_{\min}$ 趋于 $P_{\max}$,由于光强调制度很小,条纹变得难以测量。图 4.7 显示了由于两个光通量的不同比值所产生的不同对比度的干涉条纹。条纹对比度越高,条纹越容易测量,干涉测量的信噪比越好。在本章的其余部分中,将从光通量方程中去掉 $\epsilon_0 c/2$ 项,方程以归一化光通量单位表示。

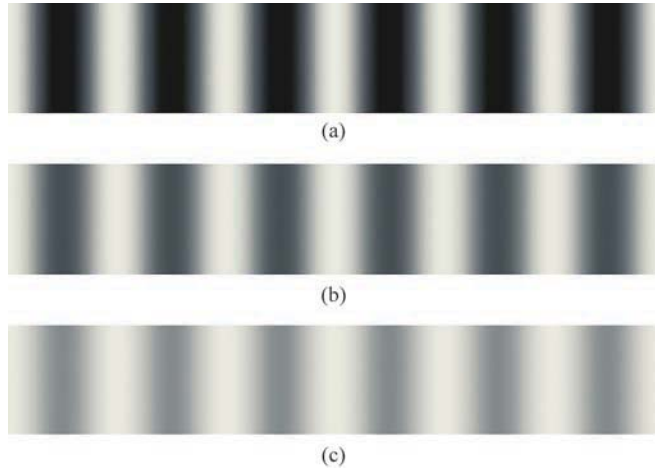


图 4.7 相同偏振态的两束光的干涉条纹图。(a)两束光的光通量相等 $P_1/P_2=1$,生成条纹的对比度为 1; (b) $P_1/P_2=1/3$,对比度为 0.5; (c) $P_1/P_2=9/11$,对比度为 0.1

接下来,将在例 4.1 和例 4.2 中研究不同偏振态光束之间的干涉。

例 4.1 水平和垂直偏振光的干涉

考虑在 $x-z$ 平面内靠近 z 轴且沿 z 轴对称传播($\zeta_1 = -\zeta_2 = \zeta$)的 0° 水平偏振和 90° 垂直偏振平面波之间的干涉。假设光束的振幅相等;因此,琼斯矢量为 $\mathbf{E}_1 = (1, 0)$ 和 $\mathbf{E}_2 = (0, 1)$ 。在 $z=0$ 平面中的 $\mathbf{E}$ 场,即式(4.7),变为

$$\mathbf{E}(0, t) = \text{Re} \left[e^{-i\omega t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \zeta)} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i(\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \zeta - \phi)} \right) \right] \quad (4.11)$$

就产生了一个在 x 方向上变化的琼斯矢量。传播因子(指数)描述了两个光束之间相对相位的线性变化。所得到的干涉图样如图 4.8 所示。当 x 偏振光和 y 偏振光相位相同时,光是 45° 线偏振的。随着相对相位的变化,偏振态在 $S_2 S_3$ 平面中沿着庞加莱球面上的大圆,从 45° 线偏振变化到右旋圆偏振态,到 135° 线偏振,再到左旋圆偏振态,以此类推。这些是偏振条纹,偏振条纹图中的强度分布是恒定的,

$$P(x) = \mathbf{E}^\dagger \mathbf{E} = 1 \quad (4.12)$$

因此条纹对比度为零。相机记录不到强度波动,除了恒定的光通量之外记录不到其他信息。因此,许多文献说正交偏振态不会发生干涉。但这些正交偏振态确实会干涉,偏振态被调制了,只是没有强度条纹。因此,更准确地说正交偏振态不产生(强度)干涉条纹,只产生偏振条纹。当一个 45° 方向的线偏振器插入偏振条纹时,如图 4.9 所示,就恢复出了强度条纹。圆偏振器恢复不同相位的强度条纹,如图 4.10 所示。许多干涉仪对正交偏振光进行干涉,然后使用偏振器产生条纹。

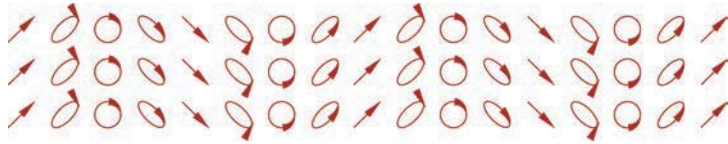


图 4.8 等振幅的水平偏振光和垂直偏振光干涉产生周期性的偏振态。这些偏振条纹的光通量是常数。最大光通量 $P_{\max}$ 和最小光通量 $P_{\min}$ 相等,条纹对比度为零



图 4.9 在图 4.8 的偏振条纹中插入一个线偏振器,就恢复出了强度条纹(亮纹和暗纹)并可进行测量

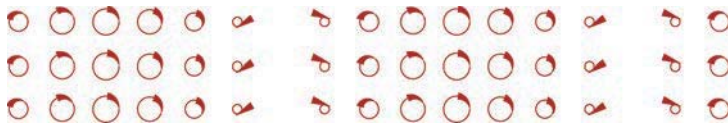


图 4.10 在图 4.8 的条纹中插入一个圆偏振器,就可恢复出不同相位的强度条纹

两个 45° 和 135° 偏振的等振幅平面波干涉也可以形成类似的偏振条纹图样,如图 4.11 所示。此时,偏振态在庞加莱球面上沿 S_1 和 S_3 轴构成的平面内的大圆变化。

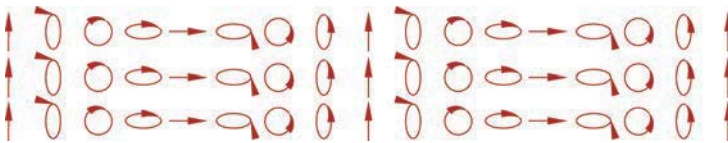


图 4.11 由 45° 和 135° 倾斜平面波的干涉产生了与图 4.8 相似的条纹。偏振态在庞加莱球面上沿 $S_1 S_3$ 面内的另一个大圆演变

例 4.2 左旋圆偏振光和右旋圆偏振光的干涉

由左右旋圆偏振光干涉形成了一组特别实用的偏振条纹。根据式(4.7), 电场变为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(0, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Re} \left[e^{-i\omega t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda}x \sin \zeta + \phi\right)} + \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-i\left(\frac{2\pi}{\lambda}x \sin \zeta + \phi\right)} \right) \right] \\ &= \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x \sin \zeta + \phi\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x \sin \zeta + \phi\right) \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

这是一个周期为 $\Lambda = \lambda / (2 \sin \zeta)$ 的旋转线偏振态, 如图 4.12 所示。当插入一个线偏振器时, 就会恢复强度条纹。当偏振器旋转, 如图 4.13 所示, 条纹跟随偏振器移动。这提供了一种移动干涉图样的简单方法, 例如移相干涉测量术中使用的移动条纹或步进条纹。



图 4.12 频率差为 5% 的等振幅的左右旋圆偏振光叠加产生旋转线偏振态

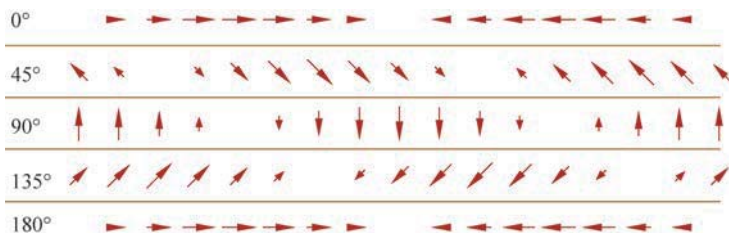


图 4.13 在图 4.12 的偏振条纹中插入一个 0° (顶行) 的偏振器, 产生强度条纹。旋转偏振器 (其余的行) 会导致条纹图案移动, 这为移动干涉图样提供了一种便利的方法

4.5 大角度平面波干涉

在干涉仪中, 两束光通常彼此非常接近地传播, 光束夹角在毫弧度量级内。对于全息记录, 角度通常要大得多。4.4 节的原理也适用于任意传播方向, 但条纹对比度取决于偏振方向与传播矢量 $\mathbf{k}_1$ 、 $\mathbf{k}_2$ 构成的平面之间的相对关系。图 4.14 显示了单色平面波相互间呈

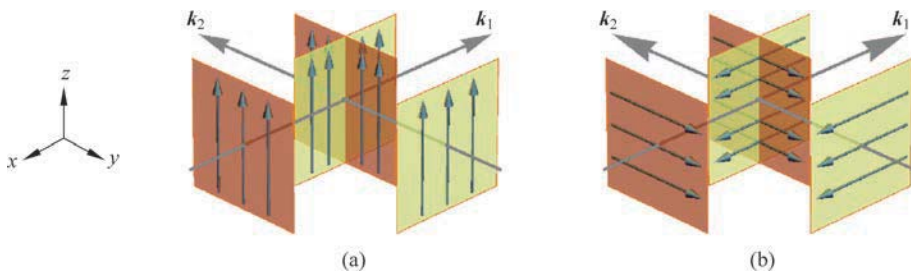


图 4.14 两个平面波相互呈 90° 传播, (a) 同向偏振, (b) 正交偏振

90°传播的两种情况。图 4.14(a)中,两束线偏振光沿 z 方向振动,即 $\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2$ 方向,电场 $\mathbf{E}_1$ 和 $\mathbf{E}_2$ 平行。在这种情况下,光束可以发生相长干涉和相消干涉,产生具有良好对比度的干涉条纹。在图 4.14(b)的例子中, $\mathbf{E}_1$ 、 $\mathbf{E}_2$ 在 $\mathbf{k}_1$ 和 $\mathbf{k}_2$ 构成的平面内,但彼此垂直, $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = 0$ 。这些场不能产生强度条纹。

同样,考虑图 4.15 的情形,其中两个圆偏振光 $\mathbf{E}_1$ 和 $\mathbf{E}_2$,

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

以 90°的相对角度传播。在这种情况下,每束光的 z 分量将发生干涉,但正交分量不会发生干涉。假设两束光的光通量都是 1,干涉图样在一个周期内的平均光通量是 2。 x 和 y 分量的光通量将分别相加,而两个 z 分量的振幅将相加或相减。最大和最小光通量 $P_{\max}$ 和 $P_{\min}$ 以及条纹对比度分别为

$$\begin{cases} P_{\max} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \right)^\dagger \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \right) = 3 \\ P_{\min} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} \right)^\dagger \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} \right) = 1 \\ V = \frac{P_{\max} - P_{\min}}{P_{\max} + P_{\min}} = \frac{3 - 1}{3 + 1} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.15)$$

在这种情况下,将得到对比度为 $V=1/2$ 的条纹。

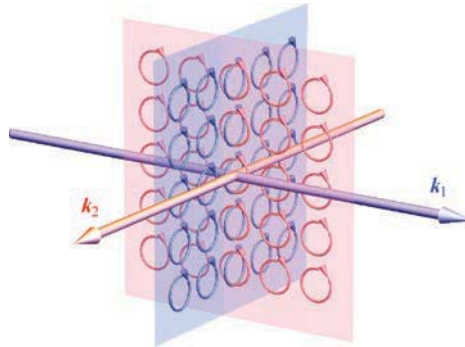


图 4.15 两束圆偏振光相互呈 90°传播,沿 $\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2$ (垂直方向)的分量会产生干涉条纹,而 $\mathbf{k}_1$ 和 $\mathbf{k}_2$ 平面内的分量则不会

4.6 全息术中的偏振考虑

4.5 节描述了当两光束以接近 90°的角度传播时,传播矢量平面中的偏振分量如何降低了条纹形成能力,因为它们不是平行的。对于某个偏振态,条纹对比度可能很高,而对于另一个偏振态,条纹对比度可能很低。这对于全息装置中的偏振设置有重要的意义。

全息术是一种记录光波并在以后再现光波的技术。全息图是一种光学元件,例如透明片,它含有光波的编码记录。这种编码记录通常是一种强度干涉图。由于记录的波可以是一个复杂的波前,全息图能够创建复杂物体的三维视图。大量的全息装置已被应用于各种各样的任务。本节将考虑一种最常见的全息配置,以突出偏振问题,这是大多数全息记录装置的共性问题。

图 4.16 展示了记录全息图的常见装置。激光通过可调分束器分束。每束光都经过空间滤波。测试光束照射样品后的散射光再照射全息图。参考光束是照射全息图的纯球面波。测试光束和参考光束之间的干涉被记录在照相胶片或类似的全息介质中,并形成振幅或相位图案。随后,当用另一束相同的参考光束照射全息图时,全息图会产生并传播多个衍射级,其中一个衍射级将是测试光束的延续。这个全息波前包含了物体的三维视图。

为了产生具有良好对比度的全息条纹,参考光束和测试光束的偏振态必须基本相同。在图 4.16 中,当偏振态垂直于页面时,就像图 4.14(a)那样,可得到最佳全息图。如果偏振方向在页面内,如图 4.14(b)那样,则条纹的对比度较差。在全息图的某些部分,参考光束和样品光束的偏振态可能是正交的,在该区域将不会出现条纹。

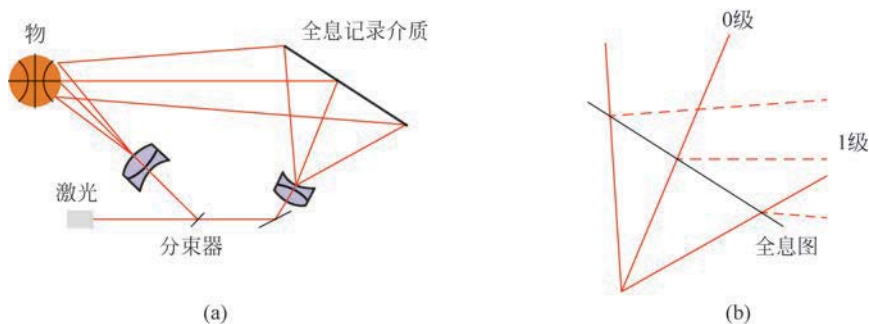


图 4.16 一种记录全息图的典型光学装置。具有良好相干长度的激光束在分束器上被分束。透过分束器的部分光发散,其球面波照射全息记录介质。较大部分的光被空间过滤并照亮散射物体。散射光入射到全息记录介质上,它可看作由物体发出的球面波的一个大集合。物波和参考波之间的干涉图样被记录为全息图。随后,当全息图被球面波(b)照射时,球面波与全息图中的精细条纹相互作用,产生了多个级次的衍射。0级光束是入射球面波的延续。更有趣的是 ± 1 级衍射光束。一级光束是物波的延续,当观察时,它投射出物体的三维图像。另一级包含物体的畸变视图

4.7 偏振光束的叠加

4.7.1 两束不同频率的偏振光叠加

两种不同频率的单色光束叠加不会产生偏振椭圆。电场矢量的端点描绘了一个更一般的形状,可认为是一个随时间变化的偏振态,呈现为一个演变的椭圆。例如,考虑两个沿 z 轴传播的平面波。设 $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$ 是角频率 ω_1 的 x 方向偏振光, $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$ 是等振幅但不同角频率 ω_2 的 y 方向偏振光。使 $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$ 与 $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$ 叠加,得到的电场是单个电场之和,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}(\hat{\mathbf{x}}\mathbf{E}_1 e^{i(k_1 z - \omega_1 t - \phi_x)} + \hat{\mathbf{y}}\mathbf{E}_2 e^{i(k_2 z - \omega_2 t - \phi_y)}) \quad (4.16)$$

对于 10% 的频率差, $\omega_1 = 1.1\omega_2$, 电场轨迹如图 4.17 所示。在每一个短暂的瞬间, 电场的轨迹近似于一个椭圆, 但椭圆率是稳步变化的。这个特殊形状是李萨如图形 (Lissajous figure) 的一个例子, 这种类型的曲线由下面的参数方程形成

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos(2\pi ct) \\ b \cos(2\pi dt + \phi) \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

其中, c 和 d 是两个整数, a 和 b 是任意振幅。由于 $\mathbf{E}_1$ 和 $\mathbf{E}_2$ 分量间的相位差在变化, $\omega_1 t - \omega_2 t = 1.1\omega_2 t - \omega_2 t = 0.1\omega_2 t$, 因此这种波具有不断变化的偏振椭圆。对于这两个不同频率的光波, 相位差随时间线性增加。这束合成光开始时是 45° 线偏振, 两束光相位相同。当 x 分量和 y 分量相位变得不一致时, 光变为椭圆偏振光, 并且椭圆率持续增大, 直到它变为右旋圆偏振光。当两束光相位相差 180° 时, 偏振椭圆演变为 135° 线偏振光, 并继续变化, 变为左旋圆偏振光。经过 10 个 ω_1 周期和 11 个 ω_2 周期, 两束光再次同相, 其椭圆变为 45° 线偏振。这个形状演变的时变斯托克斯参量为

$$\mathbf{S}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2\cos(0.1\omega_2 t) \\ 2\sin(0.1\omega_2 t) \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

它是快速波动的, 每 10 个 ω_1 周期完成一个循环, 对于可见光约为 2×10^{-14} s。 S_1 是零, 因为波的 x 分量和 y 分量总是相等的。

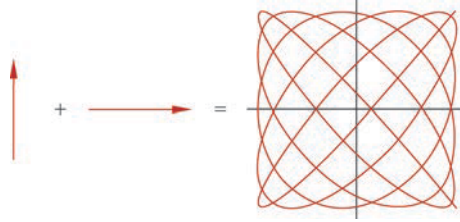


图 4.17 等振幅的水平和垂直偏振光以 10% 的频率差叠加, 产生一个时变偏振态, 平均后表现为非偏振光

为了测量该束光的斯托克斯参量, 需要进行一系列偏振光通量的测量。每次测量需要超过 10 个光学周期; 因此, 时间平均斯托克斯参量 $\langle \mathbf{S}(t) \rangle$ 为

$$\mathbf{S} = \langle \mathbf{S}(t) \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \langle 2\cos(0.1\omega_2 t) \rangle \\ \langle 2\sin(0.1\omega_2 t) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

得到非偏振光的斯托克斯参量。虽然测得的斯托克斯参量表明是非偏振光, 但光束具有不同频率的水平和垂直线偏振光分量。对斯托克斯偏振测量仪来说, 这束光与非偏振光难以区分。

综上所述, 两束不同频率的激光合并时, 斯托克斯偏振仪测得的偏振态为两束单独激光斯托克斯参量之和。对于前面的例子, 斯托克斯参量方程变成

$$\mathbf{S} = \mathbf{H} + \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

图 4.18 显示了频率差为 5% 的等振幅右旋和左旋圆偏振光叠加。这种花瓣状图案描述了一种近乎线性但方向稳步旋转的偏振态,在大约 20 个光学周期内旋转了 360° 。光学探测器太慢,跟不上这种快速的偏振态演变。对于这个波,分光通量 P_H 和 P_V 相等。类似地, P_{45} 和 P_{135} 数量上也相等,所以 $S_2=0$ 。最后,仔细分析可知,电场矢量沿顺时针方向和逆时针方向旋转的时间相等,因此 $S_3=P_R-P_L=0$ 。这些示例光波是相干的,而不是非相干的,因为光束是周期性的。干涉发生得太快以至于无法观察到,但可以从方程中推断和理解干涉。同样,非相干光波也会干涉;然而,光波是随机的,在任何特定情况下发生的变化都不能通过测量而得到。

图 4.19 显示了另外几对频率差为 10% 的单色光束叠加的结果。

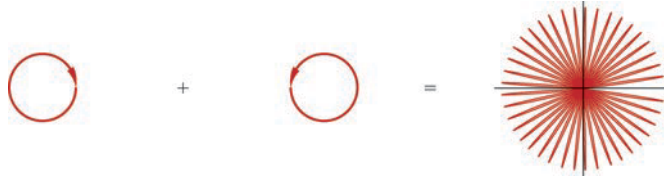


图 4.18 具有 5% 频率差的等振幅左、右旋圆偏振光叠加,生成旋转的近似线偏振态

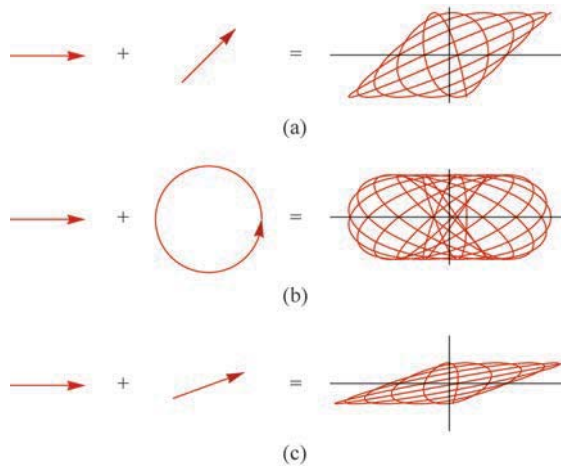


图 4.19 不同频率非正交偏振光束叠加的三个例子。(a) 10% 频率差的水平和 45° 线偏振光干涉产生 22.5° 的部分偏振光。(b) 10% 频率差的水平偏振光和右旋圆偏振光干涉产生具有水平快轴的部分椭圆偏振光。(c) 将 10% 频率差的水平和 20° 线偏振光叠加在一起,得到一个 10° 方向的近似偏振光

4.7.2 多色光束的叠加

本节将详细研究多色非偏振光的测量,并进行数值模拟。在垂直偏振多色光波的基础

上加入水平偏振多色光波,用斯托克斯偏振测量仪对产生的非偏振光束进行仿真测量。4.7.1 节展示了不同频率的两个平面波分量如何产生快速变化的偏振态,从而降低偏振度。类似地,在本节例子中,由于两束白光中大多数频率成分是不同的,当多色光叠加时,偏振度大大降低。

白光的波段覆盖眼睛的视觉响应区,大约从 400nm 到 700nm,频率范围从 750THz 到 430THz(1THz=10¹² Hz)。光的电场是每个成分频率的电场的叠加。因此,多色光可写成单色光在频率上的积分。

透过水平偏振器且沿 z 方向传播的准直白光束的电场是

$$\mathbf{E}_x(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\left(\hat{\mathbf{x}} \int_0^\infty A_x(\omega) e^{i(kz - \omega t - \phi_x(\omega))} d\omega\right) \quad (4.21)$$

其中, $A_x(\omega)$ 是该白光光束关于角频率的实振幅函数, $\phi_x(\omega)$ 是 $t=0$ 时刻每个频率成分的相位。 y 方向上的所有分量都会被偏振器去除。由此产生的多色光电场可用电场频谱 $E_x(\omega)$ 对频率进行积分来确定。同样,另一束通过垂直偏振器的白光的电场为

$$\mathbf{E}_y(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\left(\hat{\mathbf{y}} \int_0^\infty A_y(\omega) e^{i(kz - \omega t - \phi_y(\omega))} d\omega\right) \quad (4.22)$$

当两束光合并时,偏振态及斯托克斯参量为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_x(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_y(\mathbf{r}, t) \quad (4.23)$$

当进行仿真时,通常用离散频率成分求和的形式代替积分

$$\mathbf{E}_1(z, t) = \hat{\mathbf{x}} \text{Re}\left[\sum_{q=1}^Q (A_{x,q} e^{i(k_q z - \omega_q t - \phi_{x,q})})\right] \quad (4.24)$$

$$\mathbf{E}_2(z, t) = \hat{\mathbf{y}} \text{Re}\left[\sum_{r=1}^R (A_{y,r} e^{i(k_r z - \omega_r t - \phi_{y,r})})\right] \quad (4.25)$$

在这个仿真中, $Q=R=8$, 随机产生的频率、振幅和相位如图 4.20 所示。图 4.21 为前 3×10^{-14} s 的 x 偏振(a1)和 y 偏振(a2)电场。注意这些光波是非周期性的,因为它们的多色性。各个振动的宽度和高度在峰与峰之间变化。这两种光波合在一起形成如图 4.21(c)所示的非偏振态。由该光波传递的电场分量的瞬时光通量 $P(\mathbf{r}, t)$, 单位是瓦特每平方米,正比于电场分量的平方(坡印廷矢量),

$$P(\mathbf{r}, t) = \frac{\epsilon_0 c}{2} |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 \quad (4.26)$$

图 4.22 给出了 x 和 y 瞬时光通量(以 $\epsilon_0 c/2$ 为单位),它们始终为正。通过 x 偏振器(绿色)和 y 偏振器(橙色)进行光通量测量时,这些信号被光学探测器积分,产生光电流。斯托克斯参量 S_0 等于绿色和橙色曲线之和的积分。类似地, S_1 等于它们之差,如图 4.22 中紫色曲线所示,该信号可以是正的,也可以是负的,它的长时间积分值趋于零。

通过 45° 和 135° 偏振器的瞬时光通量分量为

$$|\hat{\mathbf{E}}_{45}^\dagger \cdot \mathbf{E}|^2 = \frac{(A_x + A_y)^2}{2} \quad \text{和} \quad |\hat{\mathbf{E}}_{135}^\dagger \cdot \mathbf{E}|^2 = \frac{(A_x - A_y)^2}{2} \quad (4.27)$$

在计算通过 45° 和 135° 线偏振器的光通量之前,可以将 y 偏振分量延迟四分之一波长,即 $\mathbf{E}_y(t, \pi/2)$, 来模拟圆偏振光通量。四分之一波长的延迟是消色差的,它不是时间上的延迟,每个频率延迟四分之一一个周期,如图 4.23 所示。图 4.24 绘制了 45°、135°、右旋圆偏振

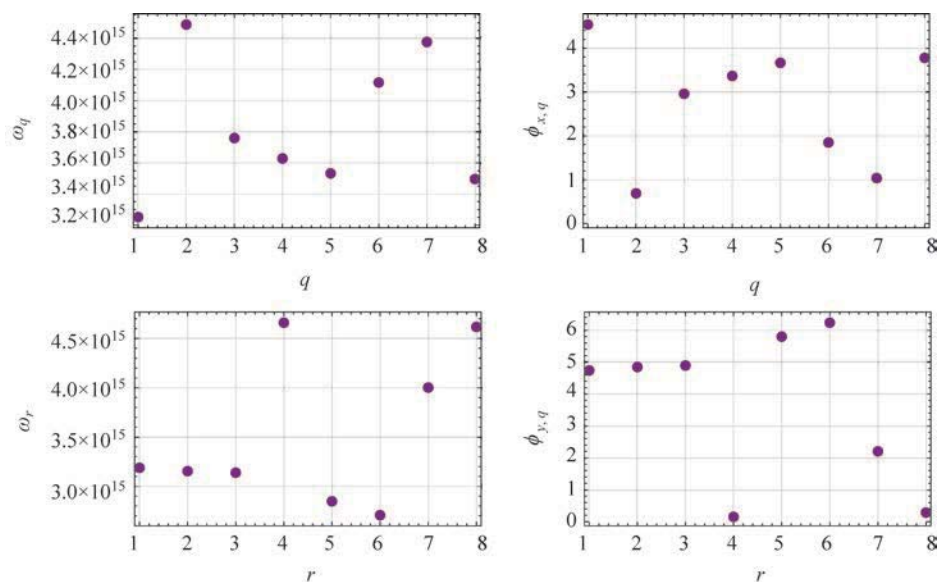


图 4.20 针对如图 4.21 所示的例子,用于式(4.25)的随机产生的频率和相位

和左旋圆偏振四种基偏振态的偏振通量,瞬时差用蓝色表示。图 4.22 和图 4.24 中蓝色曲线的积分为斯托克斯参量 S_1 、 S_2 和 S_3 。

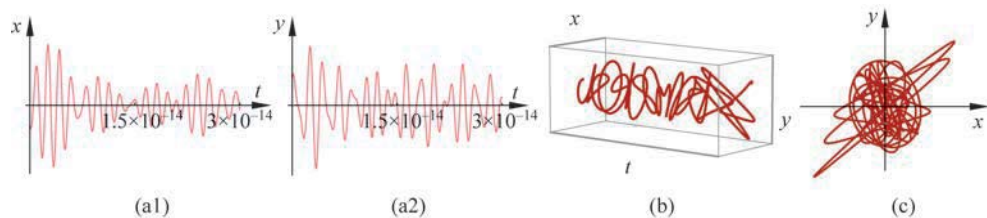


图 4.21 短时间内(10^{-13} s)沿 x 偏振的多色光 $E_1(0,t)$ 和沿 y 偏振的多色光 $E_2(0,t)$ 的振荡示例(a1~a2)。所得电场矢量的轨迹为随机图形(b),变化的偏振椭圆(c)

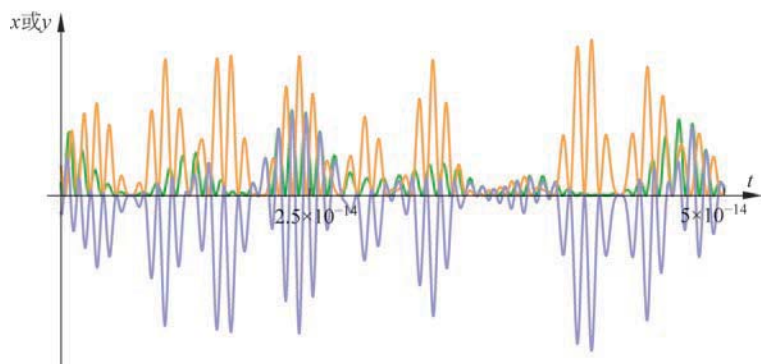


图 4.22 通过水平(绿色)和垂直(橙色)偏振器的瞬时光通量。紫色的曲线是水平光通量减去垂直光通量之差。对这个紫色函数求积分得到 S_1

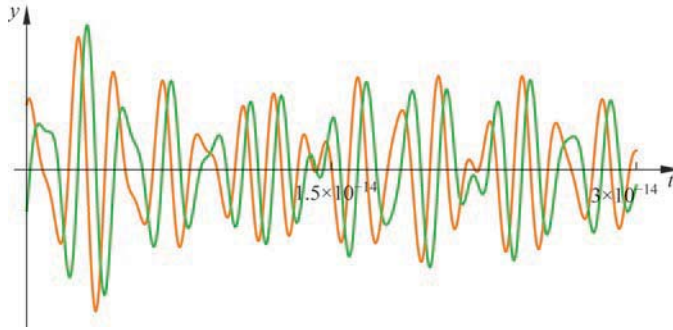


图 4.23 $E_y(t)$ (橙色) 和 $E_y(t, \pi/2)$ (绿色), 其中每个频率成分被延迟了四分之一波长, 较长的波长需要较长的延时, 较短波长则需要较短延时

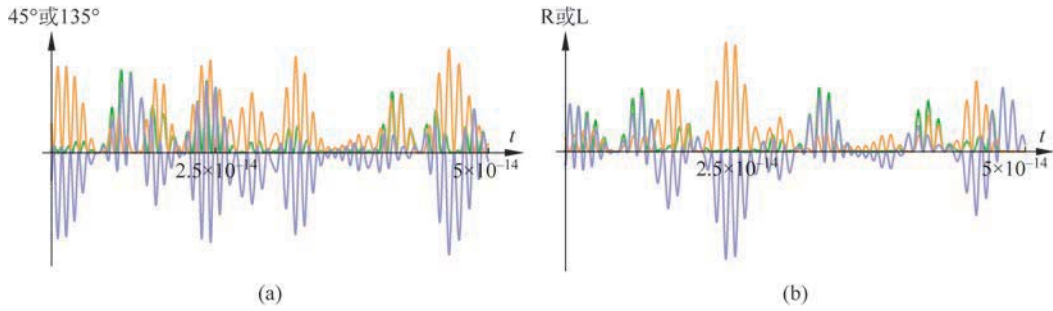


图 4.24 在 3×10^{-14} s 内通过 (a) 45° (绿色) 和 135° (橙色) 线偏振器的瞬时光通量, 以及 (b) 右旋 (绿色) 和左旋 (橙色) 圆偏振器的瞬时光通量。蓝色曲线表示两者之差, 为时间函数。对蓝色曲线积分得到 S_2 (a) 和 S_3 (b)。对于此光波, 随时间的推移, 积分趋向于零

$$E_y(t, \pi/2) = \text{Re} \left[\hat{y} \sum_{r=1}^R (A_{y,r} e^{i(k_r z - \omega_r t + \pi/2)}) \right] \quad (4.28)$$

这个仿真说明了叠加等照度的水平和垂直多色偏振光是如何生成一束近似非偏振光的。答案仅仅是“近似非偏振的”, 因为这个计算的结果是随机的, 取决于初始参数和积分时间。当仿真在许多不同的初始条件下重新进行时, 所得结果是以非偏振光作为均值的分布, 或非偏振光是最可能的结果。该方法可以仿真任意偏振态光束的叠加, 所得偏振态可很好地用两独立光束的斯托克斯参量之和来近似。因此, 可看出斯托克斯参量的叠加如何描述多色光波的叠加。

4.7.3 一个高斯波包的例子

这里给出另一个多色光波叠加的例子, 它产生偏振态快速变化的锁模脉冲。具有时变偏振态的脉冲被用于量子光学和光谱学中, 以获得对量子态和原子跃迁的良好控制。具有快速变化频率和偏振态的复杂脉冲可将原子或分子置于具有唯一密度矩阵的特定量子态。

一个近似高斯波包由 $Q=21$ 种不同频率、不同线偏振化方向的平行单色平面波组合而成。中心频率 $\omega_0 = 3 \times 10^{15}$ rad/s 对应于 $\lambda_0 = 627.9$ nm。21 个频率 ω_q 的间隔是 $\Delta\omega = 3 \times 10^{13}$ rad/s, $q = -10, -9, \dots, 10$, 其中

$$\omega_q = 3 \times 10^{15} + 3 \times 10^{13} q \quad (4.29)$$

实际振幅 A_q 以高斯函数的形式变化(图 4.25),

$$A_q = \frac{\exp\left(\frac{-q^2}{18}\right)}{\sqrt{2\pi}} \quad (4.30)$$

这些选择是任意的,但得出的结论是相当普遍的。

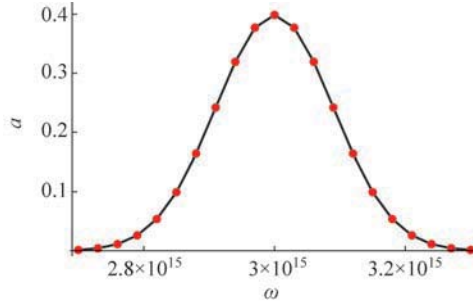


图 4.25 波包的 21 个实振幅形成一个高斯包络线

在 $t=0$ 时,相位都设置为 0。每个频率成分都是线偏振的。中心频率 ω_0 的光波为 0° 线偏振。然后,每个频率之间的线偏振角 χ 有 $18^\circ (\pi/10 \text{ rad})$ 的旋转,

$$\chi_q = \frac{\pi q}{10} \quad (4.31)$$

因此,光波电场相应的时变表达式为

$$\mathbf{E}(t) = \sum_{q=-10}^{10} \text{Re} \left[e^{-i\omega_q t} A_q \begin{pmatrix} \cos(\pi q/10) \\ \sin(\pi q/10) \end{pmatrix} \right] \quad (4.32)$$

图 4.26 显示了 x 和 y 电场随时间的变化。由于振幅分布近似高斯分布,波形也近似高斯形状。由于频率是离散的和周期性的,所以波形也是周期的(傅里叶级数),周期为 $21 \times 10^{-12} \text{ s}$,如图 4.27 所示。斯托克斯偏振测量仪将偏振态 $\mathbf{S}$ 测量为各个频率的斯托克斯参量之和。

$$\mathbf{S} = \sum_{q=-10}^{10} \mathbf{S}_q = \sum_{q=-10}^{10} A_q^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\pi q/5) \\ \sin(\pi q/5) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\pi q/5) \\ \sin(\pi q/5) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

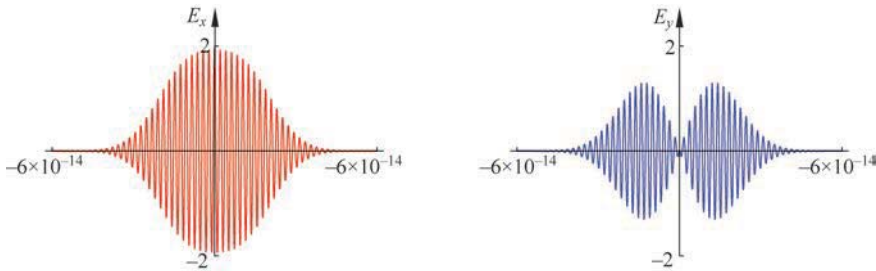


图 4.26 单个波包内的 x 和 y 电场

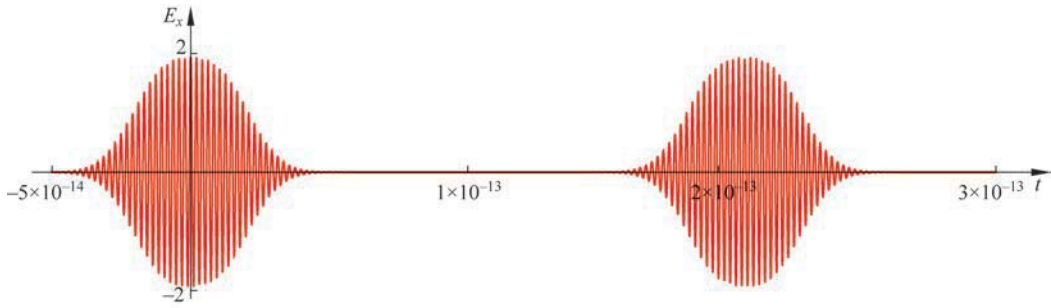
图 4.27 脉冲序列中两个脉冲的电场 x 分量

图 4.28 给出了一个高斯脉冲宽度的时变偏振椭圆的三维视图。电场在脉冲中心呈 0° 线偏振, 然后开始椭圆状螺旋, 且椭圆率增大, 直至脉冲通量消失。图 4.29 显示了构成斯托克斯参量的瞬时光通量。每个频率成分都有一组斯托克斯参量 S_q , 见表 4.1。该光束的斯托克斯参量为各频率成分的斯托克斯参量之和, 为 $S = (3, 0.5, 0, 0)$, $\text{DoP} = 1/6$ 。

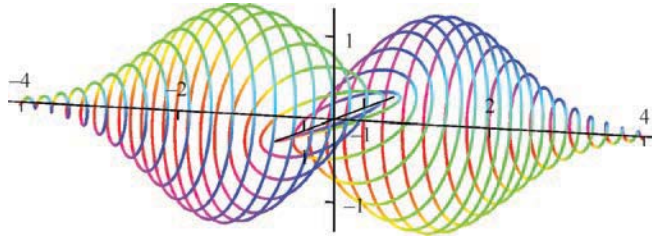


图 4.28 三维视图显示了 x 和 y 分量随时间围绕着轴螺旋, 以一种偏振椭圆稳步演变的形式。彩色圈的颜色从红、绿、蓝到红, 每 $2.1 \times 10^{-15} \text{ s}$ 循环一次, 这是一个近似周期。脉冲的前半部分具有左螺旋性(逆时针方向)。经过水平偏振后, 后半部分脉冲具有右螺旋性。沿 z 轴以 10^{-14} s 为单位标记时间

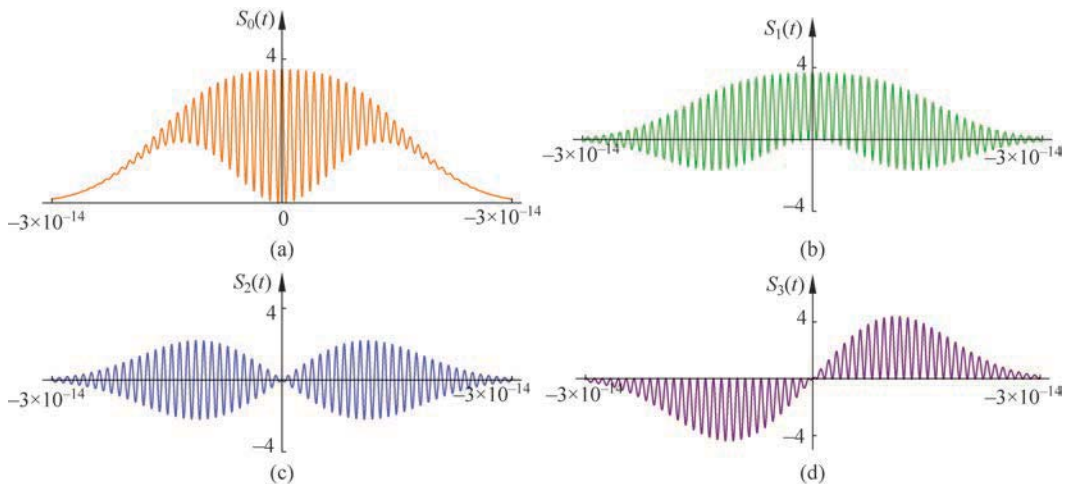


图 4.29 对斯托克斯参量的时间相关贡献: (a) S_0 , (b) S_1 , (c) S_2 和 (d) S_3 。这个光束的斯托克斯参量与这些函数的积分成正比

锁模激光器产生的脉冲序列包含一个梳状的频率, 如图 4.25 所示。这个脉冲开始时顺时针旋转, 这将趋于发生从 A 态到 B 态的转变, 改变分子的角动量。水平振动的场现在可

以把分子驱动到 C 态,最后逆时针的场可以把它驱动到另一个 D 态。

锁模激光器通常产生线偏振光。一种产生这种复杂脉冲的方法是使用厚的旋光板,例如 C 向切割的石英,利用它的旋光色散。这将使不同频率的偏振面旋转不同的量,产生像这个例子一样的偏振脉冲。由于腔体 Q 因子,在激光腔内放置旋光板可增加偏振旋转。其他延迟器的组合可产生各种各样的脉冲偏振特性。

表 4.1 高斯波包各频谱成分的斯托克斯参量

序号	S_0	S_1	S_2	S_3
-10	0.00000238	0.00000238	0	0
-9	0.0000196	0.0000159	0.0000115	0
-8	0.000129868	0.0000401316	0.000123512	0
-7	0.000687587	-0.000212476	0.000653935	0
-6	0.00291502	-0.0023583	0.00171341	0
-5	0.0098957	-0.0098957	0	0
-4	0.0268993	-0.021762	-0.015811	0
-3	0.0585498	-0.0180929	-0.0556842	0
-2	0.102047	0.0315343	-0.0970525	0
-1	0.142418	0.115219	-0.0837113	0
0	0.159155	0.159155	0	0
1	0.142418	0.115219	0.0837113	0
2	0.102047	0.0315343	0.0970525	0
3	0.0585498	-0.0180929	0.0556842	0
4	0.0268993	-0.021762	0.015811	0
5	0.0098957	-0.0098957	0	0
6	0.00291502	-0.0023583	-0.00171341	0
7	0.000687587	-0.000212476	-0.000653935	0
8	0.000129868	0.0000401316	-0.000123512	0
9	0.0000196413	0.0000158901	-0.0000115449	0
10	0.00000238	0.00000238	0	0

梳状频率的相对相位对于脉冲整形非常重要。如果在区间 $(-\pi, \pi)$ 内随机选取 21 个相位 ϕ_q , 如图 4.30(a) 所示, 脉冲不再是高斯型, 而是具有不规则形状, 如图 4.30(b) 所示。

$$E(t) = \sum_{q=-10}^{10} \operatorname{Re} \left[e^{-i(\omega_q t + \phi_q)} A_q \begin{pmatrix} \cos(\pi q/10) \\ \sin(\pi q/10) \end{pmatrix} \right] \quad (4.34)$$

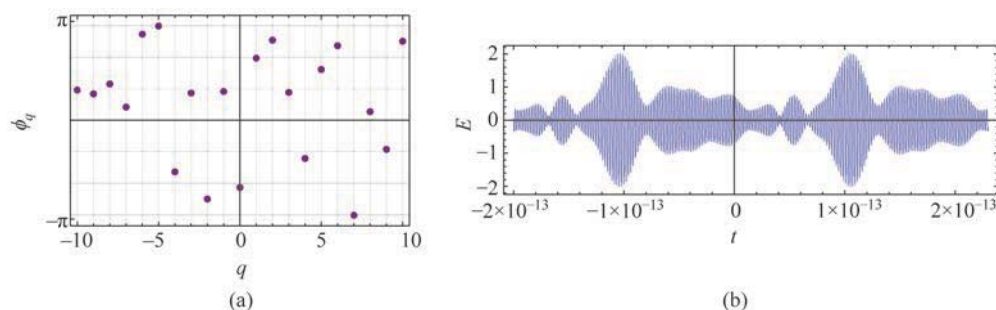


图 4.30 当图 4.25 中的 21 个高斯脉冲振幅被赋予随机相位时(a), 脉冲形状被破坏而呈不规则状(b), 图示为两个周期

4.8 总结

总之,当叠加两个不同波长和不同偏振态的单色光束时,得到的偏振态在时间上迅速变化。频率差越小,图样重复的时间就越长。偏振分析仪在测量中取许多这种周期的平均值,由于对偏振态取平均值,测量出的偏振度会降低。合成光束的斯托克斯参量等于两个单独激光束的斯托克斯参量之和。

单色光束类似于钢琴上的单个音符,而非相干光束类似于用你的手臂靠在多个钢琴键上弹奏的声音。叠加琼斯矢量类似于在几架不同的钢琴上弹奏完全相同的音符。这些声波会发生相长和相消的干涉,从而在室内建立起声波的干涉条纹。叠加斯托克斯参数类似于几个小孩在同一个房间里敲击钢琴。

4.9 习题集

4.1 计算图 4.19 中三束光的偏振度。

4.2 具有下列相对相位 ϕ 的右旋 $\mathbf{R} = (1, -i)/\sqrt{2}$ 和左旋 $\mathbf{L} = (1, i)/\sqrt{2}$ 圆偏振光,将其琼斯矢量叠加将得到什么偏振态:

- 同相, $\phi = 0$ 。
- 不同相, $\phi = \pi$ 。
- 正交, $\phi = \pi/2$ 。

假设 $\mathbf{R}$ 的相位是固定的,而 $\mathbf{L}$ 的相位改变。

4.3 编写一个程序来画出 $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} a_x + ib_x \\ a_y + ib_y \end{pmatrix}$ 的偏振椭圆,方法是画一系列从 (x_j, y_j) 到

(x_{j+1}, y_{j+1}) 的线,其中,对于 $t = (0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, 1)$, 有 $\begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} =$

$$\operatorname{Re} \left[e^{-i2\pi t_j} \begin{pmatrix} a_x + ib_x \\ a_y + ib_y \end{pmatrix} \right]。$$

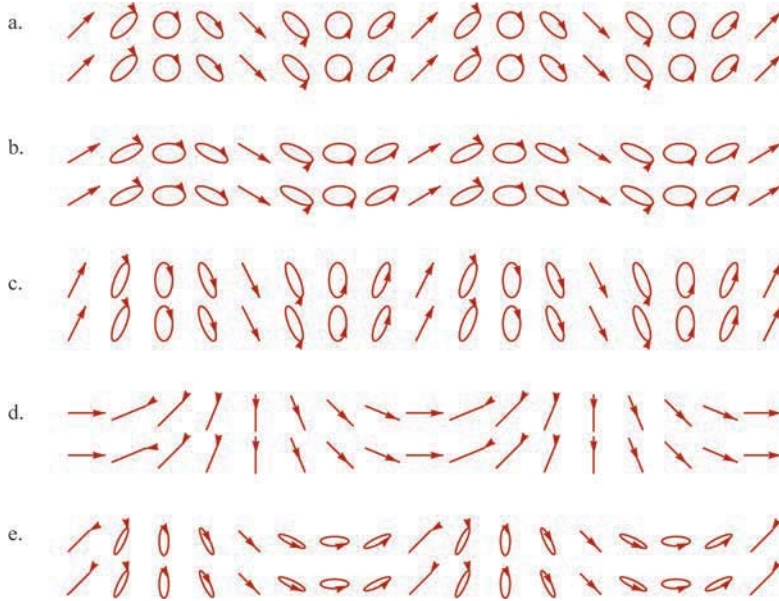
4.4 当单色的 0° 线偏振光与 90° 线偏振光干涉时,偏振条纹的琼斯矢量函数为 $\mathbf{E}(x) = e^{-i2\pi x/\Lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{i2\pi x/\Lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 Λ 是条纹的周期。

- 绘制两个周期的条纹图。
 - 得到的光通量 $P(x)$ 是多少?
 - 在庞加莱球上绘制条纹的路径。
- 4.5
- 绘制两个周期的等振幅为 A_0 的单色左、右旋圆偏振光干涉的偏振条纹。
 - 在庞加莱球上绘制条纹的路径。
 - 当振幅变为 $A_R = 2A_0/3$ 和 $A_L = 4A_0/3$ 时,在庞加莱球上绘制条纹的路径,所得的光通量 $P(x)$ 是多少?
 - 对于 $A_R = A_0/3$ 和 $A_L = 5A_0/3$, 重复 c.。

- 4.6 考虑偏振条纹图样 $\mathbf{E}(x) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi x/\Lambda) \\ i \sin(2\pi x/\Lambda) \end{pmatrix}$, 这个图样只能由两个特殊偏振态 $\mathbf{E}_1$ 和 $\mathbf{E}_2$ 在特定的振幅比 $|\mathbf{E}_1|/|\mathbf{E}_2|$ 通过干涉 $\mathbf{E}(x) = e^{-i2\pi x/\Lambda} \mathbf{E}_1 + e^{i2\pi x/\Lambda} \mathbf{E}_2$ 产生

- 绘制偏振条纹 $\mathbf{E}(x)$ 。
- 求唯一的偏振态 $\mathbf{E}_1$ 和 $\mathbf{E}_2$ 。

- 4.7 估算通过干涉产生以下干涉图样的两个唯一的琼斯矢量, 估算它们的振幅比和光通量比。



- 4.8 单色线偏振光 $\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和椭圆偏振光 $\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} \cos \zeta \\ i \sin \zeta \end{pmatrix}$ 发生干涉。

- 求 $\mathbf{E}_2$ 的椭圆率(关于 ζ 的函数)。
- 对于 $0 \leq \zeta \leq \pi$, 求偏振条纹的条纹可见度 V (关于 ζ 的函数)。
- 绘制 $\zeta = 0, \pi/6, \pi/3, \pi/2, 3\pi/4$ 和 π 的偏振条纹。

- 4.9 三个频率为 $\nu_1 = 480 \text{ THz}$, $\nu_2 = 500 \text{ THz}$, $\nu_3 = 520 \text{ THz}$ 的激光束, 经二向色滤光器混合后以相同的传播矢量传播。对应的琼斯矢量是 $\mathbf{E}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{E}_2 = (\cos(\pi/3), \sin(\pi/3))$ 和 $\mathbf{E}_3 = (\cos(2\pi/3), \sin(2\pi/3))$ 。

- 所得的偏振态 $\mathbf{E}_\alpha$ 是什么? 适当使用琼斯矢量或斯托克斯参量。
- $\mathbf{E}_\alpha$ 的偏振度是多少?
- 所得的偏振态 $\mathbf{E}_\beta$ 是什么?
- $\mathbf{E}_\beta$ 的偏振度是多少?
- 现在, 移除光束 $\mathbf{E}_1$, 则 $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ 和 $\mathbf{E}_4$ 组合光束的偏振度是多少?

- 4.10 两个偏振态 $\mathbf{E}_1 = (2, 0)$ 和 $\mathbf{E}_2 = (-1, i)$ 发生干涉。什么相对相位能产生最亮的光束? 哪个相对相位产生最微弱的光束? 如果两个平面波以某个角度传播, 条纹可见度会是多少?

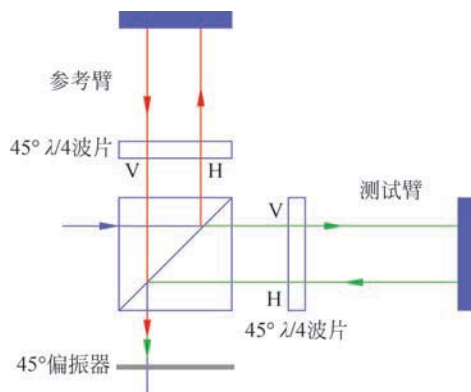
- 4.11 带有偏振器的杨氏双缝。杨氏双缝的一个狭缝上配置有一个右旋圆偏振器,另一个狭缝上配有一个左旋圆偏振器。狭缝非常窄,宽度相等。狭缝间距 10 个波长。狭缝被几乎单色的线偏振光均匀地正入射照明。
- 将远场中屏幕上形成的干涉图案描述为偏离狭缝之间中心线的角度 θ 的函数。
 - 画出偏振条纹。
- 4.12 这个问题模拟了两个非相干偏振光束的叠加,一个水平偏振,一个垂直偏振。这个例子说明了为什么多色光束的叠加应该用斯托克斯参量之和来处理。两束光都用多色平面波方程描述

$$\mathbf{E}_1(z, t) = \text{Re} \left[\hat{\mathbf{x}} \sum_{q=1}^Q A_{x,q} e^{i(k_q z - 2\pi\nu_q t + \phi_{x,q})} \right]$$

$$\mathbf{E}_2(z, t) = \text{Re} \left[\hat{\mathbf{y}} \sum_{q=1}^Q A_{y,q} e^{i(k_q z - 2\pi\nu_q t + \phi_{y,q})} \right]$$

可见光的频率范围从 430THz 到 750THz。为了简单起见,我们可减少频率成分,考虑分布在 430THz 和 750THz 之间的八个频率。对于 x 和 y 分量,分别在该频段中生成一组八个频率。在 0 到 2π 范围内选取八个相位,且让八个振幅都等于 1。

- 把所有的值列成两个表格。首先,表 1 包含 $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$ 参数, $1 \leq q \leq 8$, 表 2 包含 $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$ 参数, $1 \leq r \leq 8$ 。
 - 绘制 $E_x(0, t, \phi_x = 0)$ 、 $E_y(0, t, \phi_y = 0)$ 和 $E_y(0, t, \phi_y = \pi/2)$ 的瞬时值,这是每个分量平移四分之一波长的 E_y 信号,作为 x 偏振光和 y 偏振光的时间函数。使用足够的点来解析振荡,并绘制至少 400 个值。
 - 绘制透过六个基本偏振器 P_H 、 P_V 、 P_{45} 、 P_{135} 、 P_R 和 P_L 的光通量与时间的函数关系图。
 - 用数值积分计算斯托克斯参量。随着积分时间的增加,积分收敛的速度有多快? 你的斯托克斯参数可能会收敛到非偏振光,但并不保证就是这样。
 - 为了更好地理解这一点,将第一个 y 频率设置为等于第一个 x 频率,其余频率保持不变。重新计算斯托克斯参量。
 - 最后,将所有八个 y 频率设置为等于八个 x 频率。然后,将所有 y 相位设置为等于对应的 x 相位加上 $\pi/2$ 。重新计算斯托克斯参量。
 - 从 a 到 e 得出一些结论。
- 4.13 a. 假设移相泰曼-格林干涉仪(如图所示),它用一个 PBS 和两个线性 $\lambda/4$ 延迟器,使光以最小的损耗通过系统。一旦光束被重新合并,就用检偏器来得到条纹。 45° 线偏振器前面两光路的琼斯矩阵是什么? 整个系统的琼斯矩阵是什么? 务必考虑两臂之间不匹配的相位。
- 假设其中一个 $1/4$ 波片从 45° 旋转一个小角度 δ , 此臂的新琼斯矩阵是什么? 整个系统呢? 这对被测相位会有什么影响?
 - 假设其中一个波片的延迟量偏离一个很小的量 δ 。此臂的新琼斯矩阵是什么? 整个系统呢? 这对被测相位会有什么影响?
 - 当以 $\mathbf{L}_{45}$ 入射时,绘制偏振(在 $\mathbf{LP}_{45}$ 之前)随相移的函数。
 - 画出条纹对比度随输入偏振态变化的函数。



- f. 什么偏振态的条纹对比度最大?
g. 什么偏振态的条纹对比度最小?

4.10 参考文献

- [1] O. S. Heavens and R. W. Ditchburn, *Insight into Optics*, New York: John Wiley & Sons(1991).
- [2] E. Hecht, *Optics*, 4th edition, Addison Wesley(2002), pp. 386-387.
- [3] D. Malacara, (ed.), *Optical Shop Testing*, Vol. 59, New York: John Wiley & Sons(2007).
- [4] E. P. Goodwin and J. C. Wyant, *Field guide to interferometric optical testing*, SPIE(2006).
- [5] C. M. Vest, *Holographic Interferometry*, Vol. 476, New York: John Wiley & Sons(1979), p. 1.
- [6] P. K. Rastogi, *Holographic Interferometry*, Vol. 1, Heidelberg/Berlin: Springer(1994).
- [7] S. Tolansky, *An Introduction to Interferometry*, New York: John Wiley & Sons(1973).
- [8] P. L. Polavarapu, (ed.), *Principles and Applications of Polarization-Division Interferometry*, New York: John Wiley & Sons(1998).
- [9] A. Ya Karasik and V. A. Zubov, *Laser Interferometry Principles*, Boca Raton, FL: CRC Press(1995).
- [10] M. P. Rimmer and J. C. Wyant, *Evaluation of large aberrations using a lateral-shear interferometer having variable shear*, *Applied Optics* 14, 1(1975): 142-150.

琼斯矩阵及偏振特性

5.1 引言

偏振元件是用于改变或控制光的偏振态以及在偏振态之间转换的光学元件。最常见的偏振元件是偏振器和延迟器。反射镜、透镜、薄膜和几乎所有的光学元件在一定程度上都会改变偏振,但它们通常不被视为偏振元件,因为这不是它们的主要作用,而是副作用。

偏振元件和光学元件的偏振特性可分为三大类:

- 二向衰减,偏振相关的振幅变化;
- 延迟,偏振相关的相位变化;
- 退偏,偏振度的随机降低。

本章讨论以下这类问题:给定一系列偏振特性,计算相应的琼斯矩阵,这是正向问题。琼斯矩阵提供了一种强有力的方法来描述偏振元件序列和通过光学系统光路的内在偏振特性。第 14 章将继续讨论琼斯矩阵的逆向问题,即给定一个任意的琼斯矩阵,确定它的偏振特性。

本章用琼斯矩阵对偏振器、延迟器、二向衰减和延迟进行了描述。偏振元件序列通过矩阵乘法来建模。退偏不能用琼斯矩阵来描述,因此这个问题被推迟到第 6 章用米勒矩阵算法来处理。第 9 章将琼斯矩阵方法扩展到三维表示,即偏振光线追迹计算。

首先,在 5.2 节和 5.3 节描述了基本的偏振效应和材料特性。接下来介绍了用来对这些特性进行建模的各种琼斯矩阵。然后,用厄米矩阵、酉矩阵和奇异值分解方法分析了更复

杂矩阵的二向衰减和延迟分量。

5.2 二向色性和双折射材料

许多偏振元件由特定材料制成,其光学特性由与偏振态相关的折射率和吸收系数描述。这些偏振材料有许多例子,包括大多数晶体(例如方解石和石英)、方向性材料(例如偏振片),以及纳米结构材料(例如衍射光栅、全息图和线栅偏振器)。

当一种材料的吸收系数与偏振态有关时,该材料是二向色(dichroic)的,显示出二向色性(dichroism)。1815年,Biot首次在准宝石电气石^[1]中发现了二向色性。图5.1展示了四块电气石在 0° 和 90° 偏振光照射下的二向色性。在可见光谱中,寻常光比异常光被吸收得多^[2-3]。常用的偏振片是二向色偏振器的另一个例子^[4-5]。

当材料的折射率与偏振态相关时,材料是双折射的,双折射率是两个主折射率之差, $\Delta n = n_1 - n_2$ 。双折射材料的主要用途是制作延迟器。

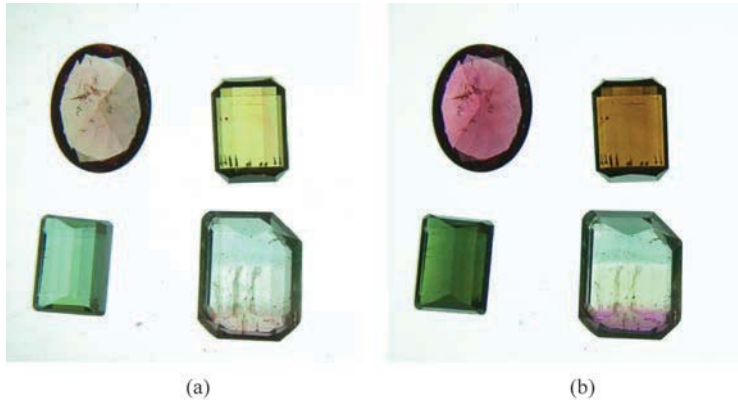


图5.1 二向色性最早发现于电气石中。二向色的准宝石电气石对于正交偏振具有不同的吸收光谱,并且会使透射光部分偏振化。(a)通过一个 0° 偏振器,这四块切割抛光后的电气石更加明亮,透光度更高。(b)通过 90° 偏振器,颜色发生偏移,因为吸收带与偏振相关,宝石颜色更深

5.3 二向衰减和延迟

本节给出了偏振元件偏振特性的基本定义,5.4~5.6节将讨论它们的矩阵表示。

5.3.1 二向衰减

二向衰减——元件的光强透射率是入射偏振态的函数,如图5.2所示^[6]。二向衰减 D 是偏振器或部分偏振器性能的度量。由最大 $T_{\max}$ (在所有偏振态中)和最小 $T_{\min}$ 光强透射率,定义二向衰减为

$$D = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max} + T_{\min}}, \quad 0 \leq D \leq 1 \quad (5.1)$$

二向衰减的性质很有用, D 从1变化到0,其中1对应于偏振器,0对应于均等透射所有

偏振态的元件,例如延迟器或非偏振元件。当非偏振光入射到偏振元件上时,出射光的偏振度等于该元件的二向衰减率。

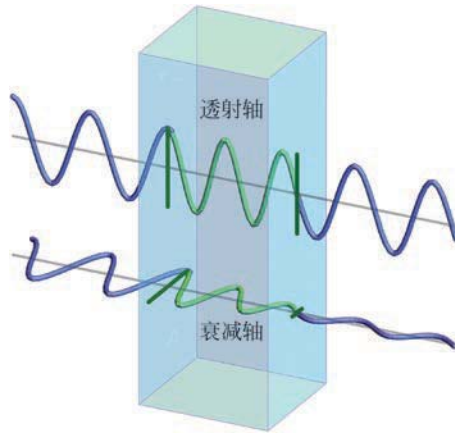


图 5.2 二向衰减器以最大透射率透射与二向衰减器透光轴对齐的偏振态,而与衰减轴对齐的正交偏振态具有最小透射率。二向衰减器(diattenuator)中的“di”指的是两个,这里是指具有不同透射率两个本征偏振。在偏振片的例子中,由于沿衰减轴方向偏振的光波吸收系数很大,衰减偏振态振幅呈指数衰减

偏振器——一种设计用于透射特定偏振态的光学元件,与入射偏振态无关。正交态的透射接近于零。非偏振入射光将以偏振光出射。

理想偏振器——透射偏振态与入射偏振态无关,只有一种偏振态能出射。正交偏振态,即消光态,其透射率为 $T_{\min}=0$ 。因此,二向衰减为

$$D = \frac{T_{\max} - 0}{T_{\max} + 0} = 1 \quad (5.2)$$

所以对于理想偏振器, $D=1$ 。偏振器从不是理想的,它们的二向衰减接近但小于 1。

线偏振器——这样一种器件,当置于非偏振入射光中时,产生光束的电场矢量主要在一个平面内振荡,在垂直平面内只有一个很小的分量^[7]。

偏振无关透射——当所有入射偏振态以相等的衰减率透射时,即 $T_{\max}=T_{\min}$,此时二向衰减为

$$D = \frac{T_{\max} - T_{\max}}{T_{\max} + T_{\max}} = 0 \quad (5.3)$$

一个例子是理想延迟器;透射时偏振态发生变化,但 $T_{\max}$ 和 $T_{\min}$ 相等, $D=0$ 。

消光比—— E ,即最大透射率与最小透射率之比,是衡量偏振器性能的另一个常用指标。

$$E = \frac{T_{\max}}{T_{\min}} = \frac{1+D}{1-D} \quad (5.4)$$

对于理想的偏振器 $E=\infty$ 。

二向衰减器——展现二向衰减的光学元件或偏振元件。偏振器的二向衰减率非常接近 1,但几乎所有的光学表面都有一定的二向衰减。二向衰减器的例子包括偏振器和二向色性材料(偏振片、电气石),以及用菲涅耳方程描述反射和透射差异的金属和介电界面、薄膜(均

匀的和各向同性的)和衍射光栅。

偏振相关损耗——PDL,以分贝为单位的消光比,

$$\text{PDL} = 10 \lg \frac{T_{\max}}{T_{\min}} \quad (5.5)$$

偏振相关损耗是光纤光学中表述二向衰减的一种常用方式。

二向色性——一种材料特性,它在光传播过程中引起二向衰减。二向色性与正交偏振态的吸收系数差异有关。

5.3.2 延迟

本征偏振——以与入射态相同的偏振态离开元件或系统的偏振态。除了振幅和绝对相位可能发生变化,出射态保持不变。每个非退偏偏振元件都有两个本征偏振。任何非本征偏振态的入射光都以不同于入射态的偏振态透射。本征偏振是相应的琼斯或米勒矩阵的本征向量。

理想延迟器——一种具有两个本征偏振态的无损光学元件,这两个本征态具有不同光程长度(OPL)或相位变化量。图 5.3 展示了通过半波延迟器传播的两种模式的不同延迟。

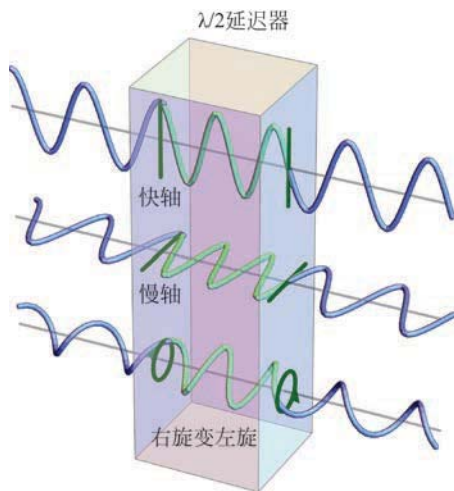


图 5.3 在延迟器中,上方的光波和中间的光波这两种模式具有不同的光程长度。沿着快轴偏振的偏振态,在入射后经过 $2 \frac{1}{4}$ 个周期首先射出。沿着慢轴的偏振态出射得较晚,在入射后经 $2 \frac{3}{4}$ 个周期射出。任何其他偏振态的光都以不同的偏振态出射。对于这种半波线性延迟器,右旋圆偏振光将以左旋圆偏振光出射

延迟器——偏振特性接近理想延迟器的一种光学元件。延迟器会有一些传输损耗,通常会有少量的二向衰减。两个本征偏振的透射率应该相等(否则该元件也将是一个二向衰减器)。例如,双折射延迟器,如波片,由于双折射将入射光分成具有正交偏振的两个模式,其中一个模式相对于另一个模式发生延迟,两个模式之间折射率不同。其他产生延迟的相互作用包括金属反射、多层薄膜的反射和透射、应力双折射以及与衍射光栅的相互作用。这

些相互作用也经常同时带有延迟和二向衰减。

延迟量—— δ ,本征偏振之间的光程差。延迟量通常用四种不同的单位来表示(表 5.1)。在本书中,延迟量一般用弧度表示,所以 $\delta=2\pi$ 表示一个波长的光程差。 π 弧度的延迟量是 180° 或 $\lambda/2$ (半波)。从上下文可以很容易看出用法。

表 5.1 延迟量的常用单位

弧度	对于一个波长的延迟量 $\delta=2\pi$
角度	对于一个波长的延迟量 $\delta=360^\circ$
纳米	对于一个波长的延迟量 $\delta=\lambda$; 对于 550nm 的光, $\delta=550\text{nm}$
波数	对于一个波长的延迟量 $\delta=1$

实际中最常见的延迟器是四分之一波长线性延迟器和半波长线性延迟器。四分之一波长线性延迟器具有 $\pi/2$ 弧度的延迟量,最常用于线性偏振光和圆偏振光之间的转换。半波长线性延迟器具有 π 的延迟量,通常用于旋转线性偏振面。

线性延迟器——具有快、慢本征偏振的延迟器,这两个本征偏振态是正交的和线性偏振的。线性延迟器通常由双折射晶体板制成,特别是方解石、氟化镁、石英、金红石和钽酸钪这些晶体。

圆延迟器——具有快、慢本征偏振的延迟器,这两个本征偏振是左旋和右旋圆偏振的。光学活性液体,如葡萄糖和葡萄糖溶液是圆延迟器。

椭圆延迟器——具有快、慢本征偏振的延迟器,这两个本征偏振是正交的椭圆偏振态。晶体石英是椭圆延迟器、线性延迟器还是圆延迟器,取决于晶片是如何从晶体上切割下来的。

波片——也称为延迟片,是由一片平行平板或多片线性双折射材料板构成的延迟片。波片几乎总是线性延迟器。

快轴——与较小的 OPL 对应的本征偏振和首先出射的偏振态。对于双折射延迟器,它是与较低折射率对应的模式。快轴可以是线性的、椭圆形态的或圆形态的。对于线性延迟器,轴是一条特定角度的直线,例如 0° 和 180° 。对于椭圆或圆延迟器,则是对应的椭圆偏振态。

慢轴——与较大 OPL 相关的本征偏振,对于双折射延迟器,它是与较高折射率对应的模式。

请注意,术语“轴”(axis)听起来似乎仅指线性偏振态,但如这里所使用的,快和慢本征偏振也可以是椭圆形或圆形的,术语“轴”仍然适用。如图 5.4 所示,穿过庞加莱球^①中心的轴可以穿过两个正交的线偏振态、两个正交的椭圆偏振态或两个正交的圆偏振态。

双折射——引起传播延迟的一种材料特性。



图 5.4 穿过庞加莱球中心的轴(棕色)

① 庞加莱球在第 3 章中介绍。

为简单起见,上述定义仅参考了元件的透射。这里所使用的术语“透射”(transmission)的定义适用于从光学元件出射的任何光束,透射的、反射的、被衍射光栅衍射的、从表面或体内散射的,等等。

数学小贴士 5.1 矩阵乘法

矩阵 $\mathbf{A}$ 和矩阵 $\mathbf{B}$ 的矩阵乘积, $\mathbf{AB}$ 或 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, 是 $\mathbf{A}$ 的相应行和 $\mathbf{B}$ 的相应列的逐元素内积计算的^[8-10]。 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 的第 i, j 个元素是

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{i,j} = \sum_k A_{i,k} B_{k,j} \quad (5.6)$$

当需要阐明方程的矩阵乘法含义时,插入点乘($\cdot$)表示矩阵乘法。在矩阵乘法运算很明显的其他地方,可以将点乘符号去掉。

矩阵乘法与阶数有关,因为一般来说,矩阵不能交换,

$$\sum_k A_{i,k} B_{k,j} \neq \sum_k B_{i,k} A_{k,j}, \quad \text{所以 } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (5.7)$$

当 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 称为可交换矩阵。

矩阵乘法是可结合的,相邻矩阵可以任意顺序用括号组合并相乘,

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad (5.8)$$

5.4 琼斯矩阵

琼斯矩阵的数学理论为描述这些偏振效应提供了一套系统的方法,特别适用于计算光学元件序列的相互作用。琼斯矩阵提供了一种简单的方法来表征偏振元件和光学元件的偏振特性。琼斯矩阵和琼斯矢量一起组成琼斯计算法; 计算法指的是一种用于计算的系统方法,这里指偏振计算^[11-17]。其中,入射光由二元琼斯矢量 $\mathbf{E}$ (第2章)表示。偏振元件用琼斯矩阵 $\mathbf{J}$ 表示,这是一个 2×2 的复元素矩阵。

琼斯矩阵通过矩阵—矢量乘法将任意入射偏振态 $\mathbf{E}_0$ 与相应的出射偏振态 $\mathbf{E}'$ 关联起来,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_0 &= \begin{pmatrix} j_{xx} & j_{xy} \\ j_{yx} & j_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{x \leftarrow x} & j_{x \leftarrow y} \\ j_{y \leftarrow x} & j_{y \leftarrow y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} j_{xx} E_x + j_{xy} E_y \\ j_{yx} E_x + j_{yy} E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.9)$$

式(5.9)中的点乘代表矩阵—矢量相乘。琼斯矩阵可以表征单个偏振元件或偏振元件序列的偏振变换。琼斯矢量元素 E_x 和 E_y 的单位是伏特每米(电场单位)。琼斯矩阵元素 j_{xx} 、 j_{xy} 、 j_{yx} 和 j_{yy} 是无量纲的。

如图 5.5 所示的偏振元件序列的琼斯矩阵为 $\mathbf{J}$,

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_Q \cdot \mathbf{J}_{Q-1} \cdots \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{J}_1 = \prod_{q=1}^Q \mathbf{J}_{Q-q+1} \quad (5.10)$$

它由矩阵乘法确定。在这种乘积表示法中, $\prod$ 表示一系列项的乘积,这里是矩阵乘法。与光相互作用的第一个元件在矩阵乘法的右侧,与光相互作用的最后一个元件在矩阵乘法

的左侧。使用矩阵的一个好处是,系统表征可适用于所有入射偏振态。

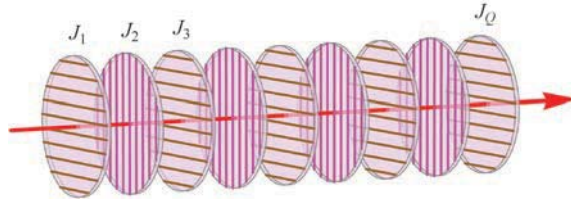


图 5.5 光通过一系列 Q 个用琼斯矩阵 J_q 表示的偏振元件传播

5.4.1 本征偏振

特征值和特征向量有助于理解和分类琼斯矩阵的偏振属性。矩阵的特征向量是与矩阵相乘后保持其方向的向量;输出特征向量是输入特征向量的常数倍。每个琼斯矩阵有两个特征向量 $\mathbf{E}_q$ 和 $\mathbf{E}_r$,以及两个相关的特征值 ξ_q 和 ξ_r ,它们满足

$$\begin{cases} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_q = \xi_q \mathbf{E}_q = \rho_q e^{-i\phi_q} \mathbf{E}_q \\ \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_r = \xi_r \mathbf{E}_r = \rho_r e^{-i\phi_r} \mathbf{E}_r \end{cases} \quad (5.11)$$

相互作用后,特征向量的振幅 ρ_q 和 ρ_r 以及相位 ϕ_q 和 ϕ_r 可能已经改变,但是它的状态,即方向和椭圆率没有改变。特征值是振幅和相位的相应变化。琼斯矩阵的特征向量也被称为本征偏振,因为它们代表两个且仅有两个偏振态,这两个偏振态在透射时不发生改变^[18]。与单位矩阵成正比的矩阵是例外,所有的偏振态都是其本征偏振。

数学小贴士 5.2 2×2 矩阵的特征值和特征向量

为求解式(5.11)的两个特征值 ξ_q, ξ_r ,建立了特征方程,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{J} - \xi \mathbf{I}) &= \det \begin{pmatrix} j_{xx} - \xi & j_{xy} \\ j_{yx} & j_{yy} - \xi \end{pmatrix} \\ &= (j_{xx} - \xi)(j_{yy} - \xi) - j_{xy}j_{yx} = 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

$\mathbf{I}$ 是 2×2 的单位矩阵。如果矩阵有一个逆矩阵,则它的行列式 $\det(\mathbf{J})$ 是非零的,且行列式大小给出了矩阵变换的比例因子。 2×2 矩阵的行列式为

$$\det \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} \quad (5.13)$$

式(5.12)右边是一个关于 ξ 的二次方程

$$\xi^2 - (j_{xx} + j_{yy})\xi + j_{xx}j_{yy} - j_{xy}j_{yx} = 0 \quad (5.14)$$

此方程的两个解,即特征值 ξ_q 和 ξ_r ,可根据琼斯矩阵元素求出

$$\xi_q, \xi_r = \frac{j_{xx} + j_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(j_{xx} - j_{yy})^2 + 4j_{xy}j_{yx}} \quad (5.15)$$

把特征值代入方程(5.11)求解特征向量。由于不需要对特征向量进行归一化,所以可以将特征向量设置为试验向量(trial vectors)

$$\mathbf{E}_q = \begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{E}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

其中 q 和 r 可由下式计算

$$q = \frac{-j_{xx} + j_{yy} + \sqrt{(j_{xx} - j_{yy})^2 + 4j_{xy}j_{yx}}}{2j_{xy}} = \frac{\xi_q - j_{xx}}{j_{xy}} = \frac{j_{yx}}{\xi_q - j_{yy}} \quad (5.17)$$

$$r = \frac{-j_{xx} + j_{yy} + \sqrt{(j_{xx} - j_{yy})^2 + 4j_{xy}j_{yx}}}{2j_{xy}} = \frac{\xi_r - j_{xx}}{j_{xy}} = \frac{j_{yx}}{\xi_r - j_{yy}} \quad (5.18)$$

两个归一化的本征偏振是

$$\hat{\mathbf{E}}_q = \frac{e^{-i\zeta_1}}{\sqrt{1+|q|^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \hat{\mathbf{E}}_r = \frac{e^{-i\zeta_2}}{\sqrt{1+|r|^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

相位 ζ_1 和 ζ_2 是任意的。特征向量的总相位 ζ 是不确定的,这里标注出来是为了提醒它是一个自由参数。对于复值向量,归一化的条件是 $\mathbf{E}_q^\dagger \cdot \mathbf{E}_q = 1$ 。

式(5.17)的特殊情况,其中

$$j_{yx} = 0 \text{ 和 } \xi_q - j_{yy} = 0, \quad \text{则 } \mathbf{E}_q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

类似地,当

$$j_{yx} = 0 \text{ 和 } \xi_r - j_{yy} = 0, \quad \text{则 } \mathbf{E}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

一个 $n \times n$ 的方阵将有 n 个特征值和 n 个特征向量。

根据本征偏振的正交性,琼斯矩阵被分为两类^[19]: 齐次的和非齐次的。当 $\mathbf{E}_q^\dagger \cdot \mathbf{E}_r = 0$ 时,两个复值向量是正交的。

齐次偏振元件——本征偏振正交的元件。它的本征偏振态对应最大和最小透射率,也对应于最大和最小 OPL。齐次琼斯矩阵具有相对简单的性质。根据本征偏振的形式,齐次元件可分为线偏振的、圆偏振的或椭圆偏振的。因此,当 $\mathbf{E}_q$ 和 $\mathbf{E}_r$ 是线偏振态时, $\mathbf{J}$ 是线性偏振元件: 线性二向衰减器、线性延迟器,或线性二向衰减器和延迟器的组合。当 $\mathbf{E}_q$ 和 $\mathbf{E}_r$ 为圆偏振态时, $\mathbf{J}$ 为圆偏振元件。同样,当 $\mathbf{E}_q$ 和 $\mathbf{E}_r$ 为椭圆偏振态时, $\mathbf{J}$ 为椭圆偏振元件。

非齐次偏振元件——本征偏振不正交的元件,即 $\mathbf{E}_q^\dagger \cdot \mathbf{E}_r \neq 0$ 。当二向衰减轴和延迟轴不对齐时就会出现这种情况。非齐次琼斯矩阵有更复杂的性质,不能简单地归类为线偏振、圆偏振或椭圆偏振元件。非齐次矩阵的本征偏振通常不是最大和最小透射率所对应的偏振态。这种非齐次元件也将对前向和后向传播的光束展现不同的偏振特性。第14章将详细介绍非齐次矩阵。

例 5.1 非齐次矩阵

矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ 具有特征值 $\xi_q = 1, \xi_r = 1/2$, 对应的特征向量为 $\mathbf{E}_q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (0° 线偏振光) 和 $\mathbf{E}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (45° 线偏振光)。因此, $\mathbf{E}_q^\dagger \cdot \mathbf{E}_r \neq 0$, 它是非齐次的。

5.4.2 琼斯矩阵标记法

琼斯矩阵和米勒矩阵使用相同的符号,因为它们总是分开出现,它们的乘法会产生各自的输出结果。除非另有说明,延迟器琼斯矩阵假定采用对称相位约定(表 5.2)。

表 5.2 理想偏振元件矩阵的表示法

$\mathbf{CR}(\delta)$	圆延迟器,延迟量 δ	式(5.48)
$\mathbf{ED}(d_H, d_{45}, d_R)$	椭圆二向衰减器,二向衰减分量 d_H, d_{45}, d_R	式(5.56)
$\mathbf{EP}(\epsilon, \psi)$	椭圆偏振器,椭圆率 ϵ ,方向角 ψ	式(5.30)
$\mathbf{ER}(\delta_H, \delta_{45}, \delta_R)$	椭圆延迟器,延迟分量 $\delta_H, \delta_{45}, \delta_R$	式(5.60)
$\mathbf{LD}(t_1, t_2, \theta)$	线性二向衰减器(部分偏振器),振幅透射率 $t_1, t_2 (t_1 \geq t_2)$, t_1 轴为 θ 方向	式(5.33)
$\mathbf{LP}(\theta)$	线偏振器,透射轴在 θ 方向	式(5.29)
$\mathbf{LR}(\delta, \theta)$	线性延迟器,延迟量 δ ,快轴的方向角为 θ	式(5.41)
$\mathbf{R}(\theta)$	以角度 θ 改变基底的旋转矩阵	式(5.23)

5.4.3 琼斯矩阵的旋转

如图 5.6 所示,许多光学系统需要旋转偏振器或延迟器来改变和调制偏振态。给定偏振元件的初始琼斯矩阵 $\mathbf{J}$,当该元件围绕光传播方向旋转角度 θ 时,新的琼斯矩阵 $\mathbf{J}(\theta)$ 为

$$\mathbf{J}(\theta) = \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{R}(-\theta) \quad (5.22)$$

其中琼斯旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 与二维笛卡儿旋转矩阵相同,

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

这是一个基底酉变换的示例。类似地,一个琼斯矢量 $\mathbf{E}$,旋转 θ 角后变为 $\mathbf{E}(\theta) = \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{E}$ 。

记住 $\mathbf{R}(\theta)$ 中 j_{xy} 和 j_{yx} 元素上负号位置的一种方法是将 $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 旋转为 $\hat{45} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,即

$$\mathbf{R}(45^\circ) \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

琼斯旋转矩阵 $\mathbf{R}(\theta)$ 具有以下性质:

(1) 对于一系列旋转,角度可以相加,

$$\mathbf{R}(\alpha) \cdot \mathbf{R}(\beta) = \mathbf{R}(\alpha + \beta) \quad (5.25)$$

(2) $\mathbf{R}(-\theta)$ 是 $\mathbf{R}(\theta)$ 的逆,

$$\mathbf{R}(\alpha) \cdot \mathbf{R}(-\alpha) = \mathbf{R}(\alpha) \cdot \mathbf{R}^{-1}(\alpha) = \mathbf{R}(\alpha - \alpha) = \mathbf{R}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

(3) $\mathbf{R}$ 满足交换律, $\mathbf{R}(\alpha) \cdot \mathbf{R}(\beta) = \mathbf{R}(\beta) \cdot \mathbf{R}(\alpha)$ 。

当入射态和偏振元件一起旋转 θ 时,

$$[\mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{R}(-\theta)] \cdot [\mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{E}] = \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (5.27)$$

两次旋转 $\mathbf{R}(-\theta) \cdot \mathbf{R}(\theta)$ 相互抵消,这提供了一种方法来记住旋转一个矩阵是 $[\mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{R}(-\theta)]$,而不是相反。

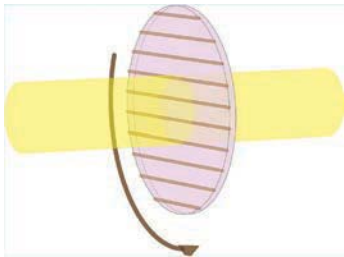


图 5.6 绕入射光束和元件表面法线旋转的偏振元件

5.5 偏振器和二向衰减器的琼斯矩阵

5.5.1 偏振器的琼斯矩阵

理想的偏振器完全透射一种偏振态,并完全衰减另一个正交偏振态。水平线偏振器的琼斯矩阵 $\mathbf{LP}(0)$ 透射入射光中的所有 x 分量并阻挡 y 分量,

$$\mathbf{LP}(0^\circ) \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.28}$$

调整线偏振器琼斯矩阵 $\mathbf{LP}(0)$ 的方向,使其通过角度 θ 偏振的光,调整角度后的琼斯矩阵可用式(5.22)计算^[20],

$$\mathbf{LP}(\theta) = \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{LP}(0) \cdot \mathbf{R}(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \tag{5.29}$$

表 5.3 偏振器的琼斯矩阵

透 射 轴	偏振器的琼斯矩阵
水平线偏振器 $\mathbf{HLP}, L(0^\circ)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
垂直线偏振器 $\mathbf{VLP}, L(90^\circ)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
45°线偏振器 $L(45^\circ)$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
135°线偏振器 $L(135^\circ)$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
右旋圆偏振器 $\mathbf{RCP}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$
左旋圆偏振器 $\mathbf{LCP}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$

表 5.3 列出了六种基本偏振态的琼斯矩阵。任何琼斯矩阵表都必须采用绝对相位约定。琼斯矩阵的绝对相位是乘在整个琼斯矩阵上的一个相位。这里,选取琼斯矩阵的总绝对相位,使得 j_{xx} 是正实数。这些矩阵中的任何一个都可以乘以 -1 或 $e^{i\phi}$,尽管出射相位将会不同,但偏振器矩阵的作用保持不变。

要测试琼斯矩阵是否代表偏振器,可以计算特征值。如果其中一个特征值为零,则该元件是偏振器。

例 5.2 线偏振器对本征偏振态的作用

线偏振器 $\mathbf{LP}(\theta)$ 透射所有的线偏振态 $\hat{\mathbf{L}}(\theta)$,这是一个本征偏振,其特征值为 $\xi_1=1$,

$$\mathbf{LP}(\theta) \cdot \hat{\mathbf{L}}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

线偏振器 $\mathbf{LP}(\theta)$ 完全衰减偏振态 $\hat{\mathbf{L}}(\theta+90^\circ)$, 这是一个特征值为 $\xi_2=0$ 的本征偏振,

$$\mathbf{LP}(\theta) \cdot \hat{\mathbf{L}}(\theta+90^\circ) = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$

理想椭圆偏振器可以通过所有的 $\mathbf{E}(\epsilon, \psi)$ 偏振态(见式(2.41)), 它的椭圆率为 ϵ , 方向角为 ψ , 并阻挡正交偏振态 $\mathbf{E}(-\epsilon, \psi+\pi/2)$, 它的琼斯矩阵是

$$\mathbf{EP}(\epsilon, \psi) = \frac{1}{1+\epsilon^2} \begin{pmatrix} \cos^2\psi + \epsilon^2 \sin^2\psi & i\epsilon + (\epsilon^2 - 1)\cos\psi\sin\psi \\ -i\epsilon - (\epsilon^2 - 1)\cos\psi\sin\psi & \epsilon^2 \cos^2\psi + \sin^2\psi \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

5.5.2 线性二向衰减器琼斯矩阵

二向衰减器是部分偏振器。一个本征偏振具有振幅透射率 t_1 , 另一个正交本征偏振具有振幅透射率 t_2 。由于两种不同的透射率或衰减率, 术语“二向衰减”指与偏振相关的透射率。因此, 二向衰减器指的是具有二向衰减的光学元件。齐次二向衰减器的最大和最小透射率对应的入射偏振态是正交偏振态。纯二向衰减器只有二向衰减, 没有延迟。

为了生成二向衰减器的琼斯矩阵, 首先考虑水平线性二向衰减器 $\mathbf{LD}(t_{\max}, t_{\min}, 0^\circ)$, x 分量的振幅透射率为 $t_{\max}$, y 分量的为 $t_{\min}$ ($t_{\max} > t_{\min}$, $t_{\max}$ 和 $t_{\min}$ 是正定的, 即实数且非负数), $t_{\max}$ 的透射轴方向为 0° ,

$$\mathbf{LD}(t_1, t_2, 0^\circ) = \mathbf{LD}(t_{\max}, t_{\min}, 0) = \begin{pmatrix} t_{\max} & 0 \\ 0 & t_{\min} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{T_{\max}} & 0 \\ 0 & \sqrt{T_{\min}} \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

其中, $T_{\max} = t_{\max}^2$ 和 $T_{\min} = t_{\min}^2$ 是相应的光强透射率。对入射光的影响是使 x 和 y 分量衰减不同的量,

$$\mathbf{LD}(t_1, t_2, 0) \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} t_{\max} & 0 \\ 0 & t_{\min} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{\max} E_x \\ t_{\min} E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} = \mathbf{E}' \quad (5.32)$$

其中, $\mathbf{E}'$ 是出射偏振态。透射轴角度为 θ 的线性二向衰减器为

$$\begin{aligned} \mathbf{LD}(t_1, t_2, \theta) &= \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{LD}(t_1, t_2, 0) \cdot \mathbf{R}(-\theta) \\ &= \begin{pmatrix} t_{\max} \cos^2\theta + t_{\min} \sin^2\theta & (t_{\max} - t_{\min}) \cos\theta \sin\theta \\ (t_{\max} - t_{\min}) \cos\theta \sin\theta & t_{\max} \sin^2\theta + t_{\min} \cos^2\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.33)$$

$\mathbf{LD}(t_1, t_2, \theta)$ 的二向衰减是通过将振幅透射率取平方转换为强度透射率而得到的,

$$D[\mathbf{LD}(t_{\max}, t_{\min}, 0^\circ)] = \frac{t_{\max}^2 - t_{\min}^2}{t_{\max}^2 + t_{\min}^2} \quad (5.34)$$

$t_{\min}$ 、 $t_{\max}$ 与二向衰减的关系是

$$t_{\min} = t_{\max} \sqrt{\frac{1-D}{1+D}} \quad (5.35)$$

图 5.7 画出了 $t_{\max}$ 等于 1 的线性二向衰减器的琼斯矩阵的四个元素。

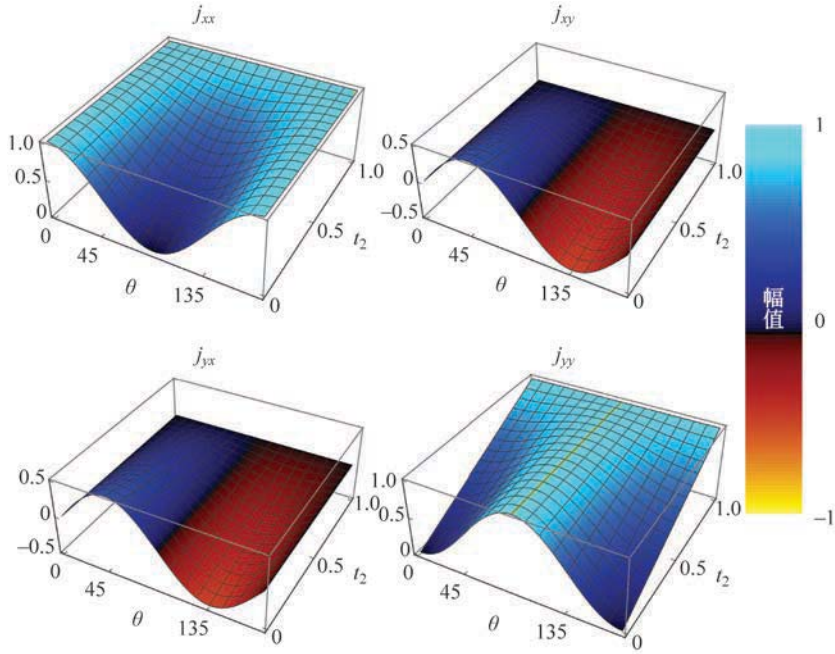


图 5.7 绘制了 $t_1=1$ 线性二向衰减器 $\mathbf{LD}(1, t_2, \theta)$ 的琼斯矩阵元素。所有元素都是实数。理想偏振器沿着前边缘, 单位矩阵 ($t_1=t_2=1$, 非二向衰减琼斯矩阵) 在后面。青色表示 1, 黑色表示 0, 棕色和黄色小于 0

例 5.3 导出线性二向衰减器的琼斯矩阵

通过将两个输入琼斯矢量关联到两个输出琼斯矢量, 可以导出琼斯矩阵。下面的例子导出了一个特殊的线性二向衰减器, 它的透射轴方向为 45° 。该琼斯矩阵由以下两个条件定义:

- (1) 所有入射的 45° 线偏振光都以 45° 线偏振光的形式透射。
- (2) 入射的 135° 线偏振光, 其振幅的 $1/4$ (或光通量的 $1/16$) 能透射为 135° 线偏振光。

a. 建立这两个条件下的两个琼斯矩阵方程, 并求出对应的琼斯矩阵元素的线性方程。然后求解各个元素。

由于

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$a+b=1, c+d=1, a-b=1/4$ 以及 $c-d=-1/4$ 。因此

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

b. 求行列式、特征值、特征向量和逆矩阵。

$$\text{行列式: } \det(\mathbf{J}) = ad - bc = \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} - \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\text{特征值: } \det(\mathbf{J} - \xi \mathbf{I}) = 0 = (a - \xi)(d - \xi) - bc, \xi_q = 1, \xi_r = 1/4$$

$$\text{特征向量: } \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_q = \xi_q \mathbf{E}_q = 1 \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5E_x + 3E_y \\ 3E_x + 5E_y \end{pmatrix}, \mathbf{E}_q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{逆矩阵: } \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

c. 证明当线偏振光入射时,透射光始终是线偏振光,并求出相应的偏振角 ψ 。

角度为 θ 的线偏振光的琼斯矢量乘以 $\mathbf{J}$:

$$\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5\cos\theta + 3\sin\theta \\ 3\cos\theta + 5\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \psi = \arctan\left(\frac{3\cos\theta + 5\sin\theta}{5\cos\theta + 3\sin\theta}\right)$$

最终偏振态只有实数元素,因此它一定是线性的。没有复数项,因此 x 和 y 分量之间没有相位差来产生椭圆率; x 分量和 y 分量同时趋于零,每周期两次。

例 5.4 偏振器测验

矩阵

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

它的特征值为 $\xi_q = 1/2$ 和 $\xi_r = 0$ 。由于其中一个特征值为 0,对应的特征向量 $(1,0)$ 被完全阻挡,只有一个偏振态 $(1,1)$ 出射。由于特征向量 $(1,0)$ 和 $(1,1)$ 不是正交的,偏振器是非齐次的。

矩阵

$$\mathbf{J}_1 = \frac{1}{200} \begin{pmatrix} 99 & 101 \\ 101 & 99 \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

它的特征值为 $\xi_q = 1$ 和 $\xi_r = 1/100$ 。由于特征值都不为 0,该元件不是偏振器,而是二向衰减器。特征向量 $(1,1)$ 和 $(1,-1)$ 是正交的,所以二向衰减器是齐次的。二向衰减为

$$D = \frac{1^2 - \left(\frac{1}{100}\right)^2}{1^2 + \left(\frac{1}{100}\right)^2} = \frac{999}{1001} \quad (5.38)$$

5.6 延迟器的琼斯矩阵

理想的延迟器将不同的相位变化引入两个正交的本征偏振。理想延迟器是无损耗的。实际延迟器有一些损耗,通常也有少量的二向衰减。

5.6.1 线性延迟器的琼斯矩阵

线性延迟器 $\mathbf{LR}(\delta, \theta)$ 有两个正交本征偏振 $\hat{\mathbf{L}}(\theta)$ 和 $\hat{\mathbf{L}}(\theta + 90^\circ)$ 。线偏振态 $\hat{\mathbf{L}}(\theta)$ 在通过

延迟器时保持不变,只有这个本征偏振的相位发生了变化。相位变化了 ϕ_1 ,得到一个特征值 $\xi_1 = e^{-i\phi_1}$,负号如 2.17 节所述由递减相位约定产生。由于这是一个延迟器,正交态 $\hat{\mathbf{L}}(\theta + 90^\circ)$ 的相位变化 ϕ_2 不同于 ϕ_1 ,得到特征值 $\xi_2 = e^{-i\phi_2}$,延迟量 $\delta = |\phi_1 - \phi_2|$ 是两个本征偏振之间相位差的绝对值。 $\theta = 0$ 时对应的琼斯矩阵为

$$\mathbf{LR}(\delta, 0) = \begin{pmatrix} e^{-i\phi_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_2} \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

延迟器有两个自由度,绝对相位变化和延迟量,但通常只指定一个,即延迟量。因此,当构造延迟器的琼斯矩阵时,存在一个与相位约定相关的相位选择问题:

- (1) 慢轴不变约定,使快本征偏振相位超前,使慢本征偏振相位保持不变;
- (2) 快轴不变约定,使慢本征偏振相位滞后,使快本征偏振相位保持不变;
- (3) 对称相位约定,对称地使快本征偏振相位超前并延迟慢本征偏振的相位;
- (4) 在本征偏振之间选取其他的相位划分方式。

对于快轴为水平偏振方向的线性延迟器,有以下四种选择:

$$\text{a. } \begin{pmatrix} e^{-i\delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b. } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix}, \quad \text{c. } \begin{pmatrix} e^{-i\delta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\delta/2} \end{pmatrix}, \quad \text{d. } \begin{pmatrix} e^{-i(\delta/2+\phi)} & 0 \\ 0 & e^{i(\delta/2-\phi)} \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

对称相位形式与第 14 章中给出的使用泡利矩阵描述偏振特性吻合得最好,因此这是此处首选的形式,但用形式 a 和 b 进行手工计算通常更容易。在对称相位约定中,快轴方向为 θ 的线性延迟器 $\mathbf{LR}(\delta, \theta)$ 的琼斯矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{LR}(\delta, \theta) &= \mathbf{R}(\theta) \begin{pmatrix} e^{-i\delta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\delta/2} \end{pmatrix} \mathbf{R}(-\theta) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i\delta/2} \cos^2 \theta + e^{i\delta/2} \sin^2 \theta & -i \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \sin(2\theta) \\ -i \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \sin(2\theta) & e^{i\delta/2} \cos^2 \theta + e^{-i\delta/2} \sin^2 \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.41)$$

表 5.4 列出了线性圆 1/4 和半波延迟器的常见琼斯矩阵。图 5.8 绘出了所有延迟量和方向的线性延迟琼斯矩阵的四个元素。因为琼斯矩阵元素是复杂的,振幅和相位都被表示出来。振幅由 2D 表面的高度表示,元素的相位用颜色编码表示。四个元素图的前沿,延迟量 $\delta = 0$,琼斯矩阵是单位矩阵。沿左右两边($\theta = 0^\circ$ 或 180°)的延迟器为水平延迟器;垂直延迟器位于中间线上($\theta = 90^\circ$)。背面($\delta = 180^\circ$)是所有的半波线性延迟器。

对称相位形式的四分之一波长线性延迟器 $\mathbf{LR}(\pi/2, \theta)$ 的琼斯矩阵为

$$\mathbf{LR}(\pi/2, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 - i \cos 2\theta & -2i \cos \theta \sin \theta \\ -2i \cos \theta \sin \theta & 1 + i \cos 2\theta \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

四分之一波长延迟器可以把与快轴成 $\pm 45^\circ$ 的线偏振光转换为圆偏振光。对称相位约定的半波线性延迟器的琼斯矩阵 $\mathbf{LR}(\pi, \theta)$ 为

$$\mathbf{LR}(\pi, \theta) = \begin{pmatrix} -i \cos 2\theta & -i \sin 2\theta \\ -i \sin 2\theta & i \cos 2\theta \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

表 5.4 遵照递减相位约定的三种绝对相位约定延迟器琼斯矩阵: 快轴不变、对称相位约定和慢轴不变

快 轴	延迟器: 四分之一波		
	快轴不变	对称相位约定	慢轴不变
水平, $0^\circ, \mathbf{LR}(\pi/2, 0^\circ)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
垂直, $90^\circ, \mathbf{LR}(\pi/2, 90^\circ)$	$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$
$45^\circ, \mathbf{LR}(\pi/2, 45^\circ)$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i & -1-i \\ -1-i & 1-i \end{pmatrix}$
$135^\circ, \mathbf{LR}(\pi/2, 135^\circ)$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ -1+i & 1+i \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}$
右旋圆 QWR CR	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1+i \\ -1-i & 1+i \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & i \\ -i & i \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i & -1+i \\ 1-i & 1-i \end{pmatrix}$
左旋圆 QWL CR	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & -1-i \\ 1+i & 1+i \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & -i \\ i & i \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i & 1-i \\ -1+i & 1-i \end{pmatrix}$

快 轴	延迟器: 半波		
	快轴不变	对称相位约定	慢轴不变
水平, $0^\circ, \mathbf{LR}(\pi, 0^\circ)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
垂直, $90^\circ, \mathbf{LR}(\pi, 90^\circ)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$45^\circ, \mathbf{LR}(\pi, 45^\circ)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$135^\circ, \mathbf{LR}(\pi, 135^\circ)$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
右旋, $\mathbf{CR}(-\pi)$	$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$
左旋, $\mathbf{LR}(\pi)$	$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

为了使 $\mathbf{LR}(\pi, \theta)$ 满足快轴不变约定, 矩阵需乘以 i ,

$$i\mathbf{LR}(\pi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

两个矩阵 $i\mathbf{LR}(\pi, \theta)$ 或 $\mathbf{LR}(\pi, \theta)$ 都表示半波线性延迟器。半波线性延迟器的一个常见用途是将线偏振态旋转到新的方向。考虑一个快轴方向为 θ 的半波线性延迟器, 入射线偏振态方向为 $(\theta - \alpha)$, 也就是说, 在快轴一侧 α 弧度。出射偏振态为

$$i\mathbf{LR}(\pi, \theta) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta - \alpha) \\ \sin(\theta - \alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \alpha) \\ \sin(\theta + \alpha) \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

它旋转到快轴的另一侧 α 弧度, 出射态被旋转 2α 弧度。因此, 把半波延迟器的快轴置于输入和期望输出线偏振态的中间位置, 可在任意两个线偏振态之间进行转换。对于入射线偏振光, 半波线性延迟器的旋转将使得出射线偏振光以两倍的延迟器角速度旋转。对于入射椭圆偏振光, 出射椭圆的主轴以两倍的角速度旋转。半波线性延迟器将右旋圆偏振光转换

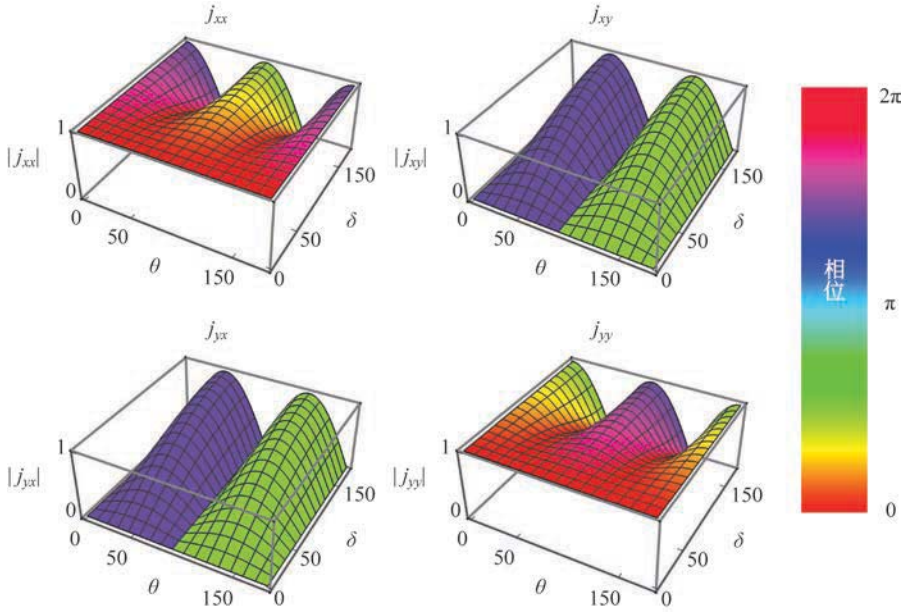


图 5.8 对称相位形式的所有线性延迟器的四个琼斯矩阵元素图。方向在前面变化(度),延迟量从前到后变化(度)。高度表示元素的大小。对元素的相位进行循环颜色编码,红色表示 0 相位,从绿色到青色为半波相位,从紫色和粉色最后回到红色为 1λ 相位

成左旋圆偏振光,反之亦然,

$$i\mathbf{LR}(\pi, \theta) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} = e^{\pm 2i\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix} \quad (5.46)$$

如果半波延迟器以 ω 的角速度旋转,

$$i\mathbf{LR}(\pi, \omega t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} = e^{\pm 2i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

则光在时间上发生线性相移,这意味着光在角频率上平移了两倍的延迟器角速度,频率或增或减。因此,旋转延迟器可以给光施加角动量或从中减去角动量,从而使光的颜色发生细微变化。

将对称相位形式乘以 $e^{-i\delta/2}$, 得到 $e^{-i\delta/2} \mathbf{LR}(\delta, \theta)$, 可将线性延迟器的琼斯矩阵表示为快本征偏振相位超前,而慢本征偏振保持不变的形式。类似地,用 $e^{i\delta/2} \mathbf{LR}(\delta, \theta)$, 可将线性延迟器的琼斯矩阵表示为使慢本征偏振相位延后,而保持快本征偏振不变的形式。

5.6.2 圆延迟器的琼斯矩阵

圆延迟器的琼斯矩阵为 $\mathbf{CR}(\delta)$, 它相当于笛卡儿旋转矩阵,但它的三角自变量是 $\delta/2$,

$$\mathbf{CR}(\delta) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\delta}{2} & \sin \frac{\delta}{2} \\ -\sin \frac{\delta}{2} & \cos \frac{\delta}{2} \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

注意, 1λ 的圆延迟器的琼斯矩阵为

$$\mathbf{CR}(2\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

由于选择对称相位约定,总相位是 π , 对应于 -1 。具有整数倍波长延迟量的延迟器琼斯矩阵,例如 1λ ($\delta=2\pi$)、 2λ ($\delta=4\pi$) 等,都与单位矩阵成正比,不会引起偏振态变化。引起圆延迟的一个常见原因是旋光性。

5.6.3 涡旋延迟器

作为琼斯矩阵应用的一个例子,接下来探索涡旋延迟器。光学涡旋是电磁场零点附近的一个相位奇点^[21]。图 5.9(a)显示了圆偏振光中的涡旋。这个例子中,在光瞳相位图的中心零点附近相位变化 2π 。相位在零点周围是连续的,但在过零点时是不连续的。这是螺旋错位(screw dislocation),在此图中,相位具有 $\arctan(y/x)$ 形式。其他涡旋也可以是 $m \cdot \arctan(y/x)$ 的形式,其中 m 是涡旋的阶数。作为对比,图 5.9(b)显示了电磁场的一个普通零点。

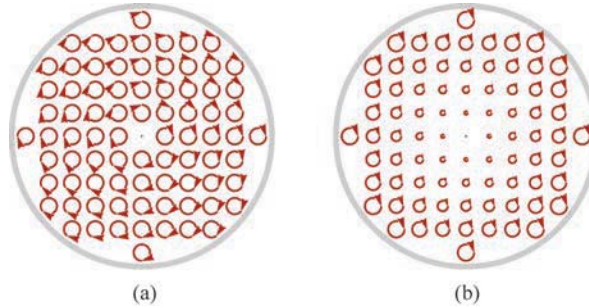


图 5.9 光学涡旋的光瞳图(a),其中光的相位(由圆圈上的箭头位置表示)在电磁场零点周围变化 2π 。在涡旋处,电磁场是不连续的。(b)场的一个普通零点,其中偏振态不变,没有间断,也没有光学涡旋

涡旋延迟器是一种空间变化的半波延迟器,其中延迟器的快轴根据与 x 轴的角度 $\phi = \arctan(y/x)$ 旋转^[22-24]。极坐标中涡旋延迟器的空间变化琼斯矩阵为

$$\mathbf{J}(m\phi) = \begin{pmatrix} \cos(m\phi) & \sin(m\phi) \\ \sin(m\phi) & -\cos(m\phi) \end{pmatrix} \quad (5.50)$$

其中, m 是涡旋延迟器的阶数。图 5.10 显示了 $m=1, 2, 3$ 和 4 阶延迟量的光瞳图。式(5.50)在原点处的值取决于接近原点的方向 ϕ 。因此,式(5.50)在原点不是连续的。涡旋延迟器可以由液晶聚合物制造。随着逐渐接近原点,延迟量变化越来越快;因此,制造的涡旋延迟器将在中心使用一个不透明的黑点来隐藏顶点处的一小块无序区域。

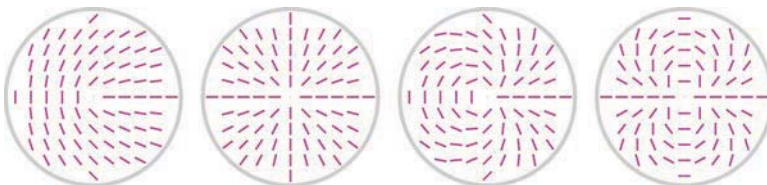


图 5.10 $m=1, 2, 3$ 和 4(从左至右)的涡旋延迟器的延迟量光瞳图(以粉色表示,线段方向表示快轴方向)。这些涡旋延迟器在任何地方都是半波线性延迟器,其快轴绕光瞳旋转 $m/2$ 次;沿着径向快轴方向是恒定的。原点处延迟的不连续性用一个小点标出

图 5.11 显示了 0° 线偏振准直入射光经涡旋元件后出射偏振面是如何变化的。这些偏振图是原始偏振涡旋的例子。在偏振涡旋中,当围绕场中的零点做小圆周运动时,偏振态旋转 π 的几倍^[25]。当这些涡旋延迟器位于 0° 和 90° 线偏振器之间时,透射强度如图 5.12 所示。当这种光聚焦时,形成了有趣的图案,如图 5.13 所示。按照第 16 章的方法,将出射光分布作傅里叶变换,然后取平方来计算光通量分布,可计算出这些强度图像。涡旋延迟器可应用于创建光镊和微光刻中的特殊点扩散函数^[26-27]。图 5.11(a) 中的光场图样,即径向偏振光,当很高数值孔径的这种光束聚焦时特别有趣,因为它可以比均匀偏振光束聚焦得更紧(更小)^[28-29]。

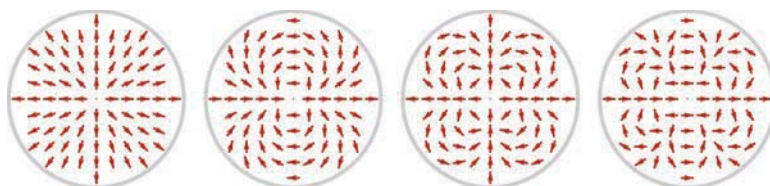


图 5.11 对于 $m=1, 2, 3$ 和 4 (从左至右) 的涡旋延迟器, 0° 偏振光入射, 出射偏振态的光瞳图。出射光在任何地方都是线偏振的, 振幅不变, 但在原点展现不连续性, 即涡旋

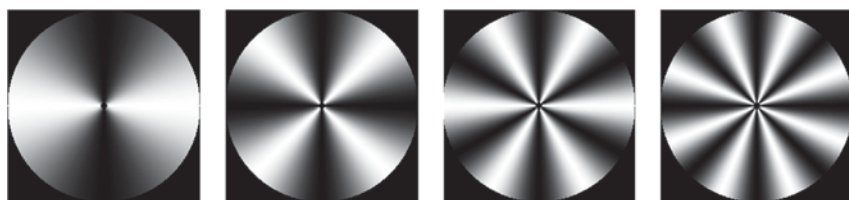


图 5.12 水平和垂直线偏振器之间的涡旋延迟器产生的光瞳强度, $m=1, 2, 3$ 和 4, 在光瞳中呈余弦变化

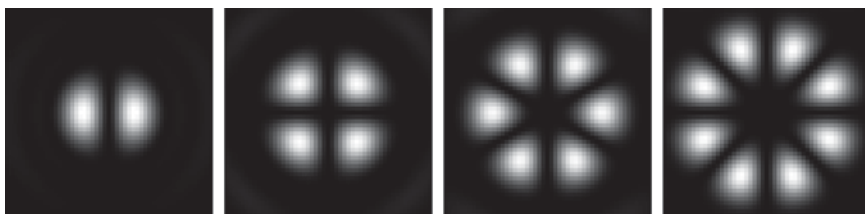


图 5.13 水平和垂直线偏振器之间的涡旋延迟器的点扩散函数 ($m=1, 2, 3$ 和 4)。它们中间是暗的, 被一组明亮的亮斑包围着, 这些亮斑就像螺旋桨。如果第二个偏振器旋转, 螺旋桨会跟着偏振器一起旋转。点扩散函数的计算在第 16 章中讨论

5.7 广义二向衰减器和延迟器

下面几节将前面几节中用于线性和圆本征偏振的齐次琼斯矩阵方程推广到椭圆本征偏振。首先, 研究线性二向衰减器的另一种形式。这部分内容在代数上更具挑战性, 但得到的方程非常有用。

5.7.1 线性二向衰减器

当平均振幅透射率(特征值的平均值)设为 $\cosh(d)$ 时,二向衰减器琼斯矩阵(式(5.31))具有简单而有趣的形式,其中 $2d$ 是二向衰减率 D 的双曲反正切,即 $d = \operatorname{arctanh}(D)/2$ 并且

$$\mathbf{LD}(D, 0) = \begin{pmatrix} \cosh(d) + \sinh(d) & 0 \\ 0 & \cosh(d) - \sinh(d) \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

由于高度对称,式(5.51)既简单又有指导意义。特征值如图 5.14 所示,其中一个特征值(矩阵元 j_{xx})大于 1,意味着在这种形式下特征值具有增益。

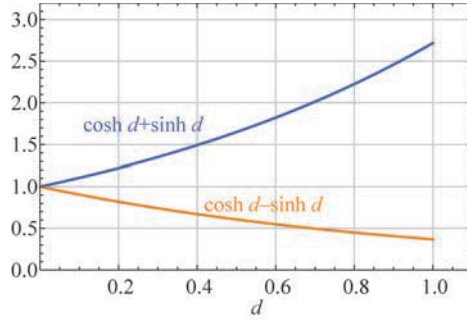


图 5.14 具有最简形式的线性二向衰减器琼斯矩阵(式(5.51))的两个特征值, $d = \operatorname{arctanh}(D)/2$ 作为函数参数。通常将 $\mathbf{LD}(D, 0)$ 乘以一个常数,将两个特征值缩放到 0 到 1 的范围内

依据旋转运算(式(5.22)),可求得在任意方向上的线性二向衰减器的琼斯矩阵为

$$\mathbf{LD}(D_H, D_{45}) = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} D \cosh(d) + D_H \sinh(d) & D_{45} \sinh(d) \\ D_{45} \sinh(d) & D \cosh(d) - D_H \sinh(d) \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

其中, D_H 和 D_{45} 分别是水平和 45° 的二向衰减相关参数。

5.7.2 椭圆二向衰减器

椭圆二向衰减器透射两个椭圆本征偏振,其偏振和相位不变,但振幅透射率(两个本征值) ξ_q 和 ξ_r 不同。对于这两个椭圆本征偏振,当用斯托克斯参量而不是琼斯矢量表示时,椭圆二向衰减器的琼斯矩阵实际上具有最简单的形式。让二向衰减率 D 用三个二向衰减分量表示,一个水平分量 D_H , 一个 45° 分量 D_{45} , 一个左旋圆分量 D_L ,

$$D = \sqrt{D_H^2 + D_{45}^2 + D_L^2}, \quad 0 \leq D \leq 1 \quad (5.53)$$

其中用斯托克斯参量表示的非归一化本征偏振是

$$\mathbf{S}_q = \begin{pmatrix} D \\ D_H \\ D_{45} \\ -D_L \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{S}_r = \begin{pmatrix} D \\ -D_H \\ -D_{45} \\ D_L \end{pmatrix} \quad (5.54)$$

用归一化琼斯矢量表示的对应的本征偏振是 $\mathbf{E}_q$ 和 $\mathbf{E}_r$,

$$\mathbf{E}_q = \frac{1}{\sqrt{2D(D_H + D)}} \begin{pmatrix} D_H - D \\ D_{45} + iD_L \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{E}_r = \frac{1}{\sqrt{2D(D_H + D)}} \begin{pmatrix} D_H + D \\ D_{45} + iD_L \end{pmatrix} \quad (5.55)$$

这个椭圆二向衰减器的琼斯矩阵 $\mathbf{ED}(D_H, D_{45}, D_L)$ 很容易用矩阵指数和双曲反正切表示为

$$\mathbf{ED}(D_H, D_{45}, D_L) = \exp \left[\operatorname{arctanh}(D) \frac{D_H \sigma_1 + D_{45} \sigma_2 + D_L \sigma_3}{2D} \right] \quad (5.56)$$

该种形式将在 14.4.5 节中进一步讨论。两个振幅透射率,即特征值,是

$$\begin{cases} \xi_q = \cosh \left[\frac{\operatorname{arctanh}(D)}{2} \right] + \sinh \left[\frac{\operatorname{arctanh}(D)}{2} \right] = \cosh(d) + \sinh(d) \\ \xi_r = \cosh \left[\frac{\operatorname{arctanh}(D)}{2} \right] - \sinh \left[\frac{\operatorname{arctanh}(D)}{2} \right] = \cosh(d) - \sinh(d) \end{cases} \quad (5.57)$$

如图 5.14 所示,式(5.57)中的一个振幅透射率将大于 1,表明琼斯矩阵具有增益。因此,为了描述没有增益的传统光学元件,矩阵 $\mathbf{ED}(D_H, D_{45}, D_L)$ 需要乘以小于 $1/\xi_q$ 的常数。例如,为将椭圆二向衰减器的最大振幅透射率设为 $t_{\max}$,按如下方式缩放矩阵:

$$\frac{t_{\max}}{\xi_q} \mathbf{ED}(D_H, D_{45}, D_L) \quad (5.58)$$

例 5.5 椭圆二向衰减器实例

二向衰减 $D = \sqrt{3}/2$, 最大透射偏振态的斯托克斯参量为 $(\sqrt{3}, 1, 1, -1)$, 二向衰减分量 $D_H = D_{45} = D_L = 1/2$ 的椭圆二向衰减器琼斯矩阵为

$$\mathbf{ED}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 2\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1-i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1+i}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

特征值(振幅透过率)为 $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ 和 $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ 。如果最大振幅透射为 $t_{\max} = 1/2$, 那么矩阵应该被缩放到 $\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} \mathbf{ED}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 。

5.7.3 椭圆延迟器

椭圆延迟器透射两个椭圆偏振态,这两个偏振态不发生改变,但会有不同的相位变化。将这些相位变化对称地选取为 $\phi_q = -\delta/2$ 和 $\phi_r = \delta/2$, 正如对线性延迟器所做的那样,当使用泡利矩阵^①和斯托克斯参量表示这两个本征偏振时,椭圆延迟琼斯矩阵 $\mathbf{ER}(\delta_H, \delta_{45}, \delta_L)$ 具有最简单的形式,

$$\begin{aligned} \mathbf{ER}(\delta_H, \delta_{45}, \delta_L) &= \exp [-i(\delta_H \sigma_1 + \delta_{45} \sigma_2 + \delta_L \sigma_3)/2] \\ &= \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \frac{\delta_H}{\delta} & -i\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \frac{(\delta_{45} - i\delta_L)}{\delta} \\ -i\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \frac{(\delta_{45} + i\delta_L)}{\delta} & \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \frac{\delta_H}{\delta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.60)$$

① 椭圆延迟器方程和泡利矩阵的推导将在第 14 章中进一步解释。

其中延迟量是用三个延迟分量形式给出的：水平分量 δ_H 、 45° 分量 δ_{45} 和左旋圆分量 δ_L ，

$$\delta = \sqrt{\delta_H^2 + \delta_{45}^2 + \delta_L^2} \quad (5.61)$$

本征偏振由式(5.54)和式(5.55)给出,用延迟分量 δ_H 、 δ_{45} 和 δ_L 代替相应的二向衰减分量: d_H 、 d_{45} 和 d_L 。椭圆延迟器在第 14 章中有更详细的介绍。

例 5.6 椭圆二向衰减器和椭圆延迟器

用非归一化斯托克斯参量表示的本征偏振为 $\mathbf{S}_1 = (0.374, 0.1, 0.2, 0.3)$ 和 $\mathbf{S}_2 = (0.374, -0.1, -0.2, -0.3)$, 二向衰减分量为 $D_H = 0.1$ 、 $D_{45} = 0.2$ 和 $D_L = -0.3$ 的椭圆二向衰减器的琼斯矩阵是

$$\mathbf{ED}(0.1, 0.2, -0.3) = \begin{pmatrix} 1.07 & 0.11 + 0.16i \\ 0.11 - 0.16i & 0.97 \end{pmatrix} \quad (5.62)$$

在本节中,所有数字都四舍五入到小数点后三位。特征值为 $\xi_1 = 1.22$, $\xi_2 = 0.82$; 其中一个特征值如预期的那样大于 1。图 5.15 绘出了本征偏振态,包括二向衰减效应。对于最大振幅透射率为 1,琼斯矩阵变为

$$\frac{\mathbf{ED}(0.1, 0.2, -0.3)}{1.22} = \begin{pmatrix} 0.88 & 0.09 + 0.13i \\ 0.09 - 0.13i & 0.79 \end{pmatrix} \quad (5.63)$$

延迟分量为 $\delta_H = 0.1$ 、 $\delta_{45} = 0.2$ 和 $\delta_L = -0.3$ 的相应的椭圆延迟器 $\mathbf{ER}(0.1, 0.2, -0.3)$ 为

$$\mathbf{ER}(0.1, 0.2, -0.3) = \begin{pmatrix} 0.98 - 0.05i & 0.15 - 0.10i \\ -0.15 - 0.10i & 0.98 + 0.05i \end{pmatrix} \quad (5.64)$$

笛卡儿极坐标形式的特征值是

$$\xi_1 = 0.98 - 0.19i = e^{-0.19i} \quad \text{和} \quad \xi_2 = 0.98 + 0.19i = e^{0.19i} \quad (5.65)$$

特征值相位之差是延迟量 δ ,

$$\delta = 0.19 - (-0.19) = \sqrt{0.1^2 + 0.2^2 + 0.3^2} = 0.37 \quad (5.66)$$

将 $\mathbf{ER}(0.1, 0.2, -0.3)$ 乘以 $\mathbf{ED}(0.1, 0.2, -0.3)$, 可产生具有共同本征偏振的椭圆二向衰减器和椭圆延迟器的组合。

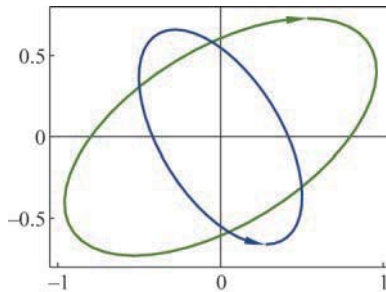


图 5.15 特征值(振幅透射率)按比例缩放了的椭圆二向衰减器的本征偏振,具有相反的螺旋度和正交的主轴。它们的相位与入射相位相同

5.8 非偏振琼斯矩阵的振幅和相位变化

具有两个相等实元素的对角琼斯矩阵 $\mathbf{A}(\rho)$ 描述了与偏振无关的振幅变化,例如吸收或偏振无关反射,

$$\mathbf{A}(\rho) \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho E_x \\ \rho E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} = \rho \mathbf{E} = \mathbf{E}' \quad (5.67)$$

其中 $0 \leq \rho \leq 1$ 为振幅透射比。包含总相位变化的琼斯矩阵 $\Phi(\phi)$ 是

$$\Phi(\phi) = e^{-i\phi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.68)$$

这种相位变化与偏振态无关,例如通过大气或玻璃传播。对于球差、彗差或任何其他波前像差,可以使用该相位琼斯矩阵来构造琼斯矩阵函数。

$$\Phi(\phi) = e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \text{OPL}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.69)$$

Φ 表示通过厚度为 t 、折射率为 n 的各向同性材料的传播。例如,玻璃的相位琼斯矩阵为

$$e^{i\frac{2\pi}{\lambda} nt} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.70)$$

例 5.7 幂零矩阵

如果有 $\mathbf{N}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 矩阵 $\mathbf{N}$ 是幂零的。光不能通过两个相同的幂零矩阵偏振元件的串联序列。假设由三个偏振器的琼斯矩阵生成幂零矩阵,

$$\mathbf{N} = \mathbf{LP}(90^\circ) \cdot \mathbf{LP}(45^\circ) \cdot \mathbf{LP}(0^\circ) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{N}$ 的两个特征值分别是 0 和 0。它的特征向量也是简并的(相同的)(0,1),是具有零透射率的唯一入射偏振态。很容易看出,具有最大透射率的偏振态是 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中

$$\mathbf{N} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

5.9 琼斯矩阵的矩阵性质

琼斯矩阵的性质反映了两类基本矩阵的性质:厄米矩阵和西矩阵^[30]。

5.9.1 厄米矩阵: 二向衰减

表现二向衰减的琼斯矩阵 $\mathbf{H}$ 是厄米矩阵; 厄米矩阵的伴随或共轭转置等于矩阵本身,

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^\dagger \quad (5.71)$$

因此,厄米矩阵的元素满足

$$\begin{pmatrix} j_{xx} & j_{xy} \\ j_{yx} & j_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{xx}^* & j_{yx}^* \\ j_{xy}^* & j_{yy}^* \end{pmatrix} \quad (5.72)$$

因此,厄米矩阵的对角元素必须是实数,因为

$$j_{xx} = j_{xx}^*, \quad j_{yy} = j_{yy}^* \quad (5.73)$$

并且非对角元素必须是彼此的复共轭,

$$j_{xy} = j_{yx}^* = u + iv \quad \text{和} \quad j_{yx} = j_{xy}^* = u - iv \quad (5.74)$$

如果厄米矩阵用与泡利矩阵相关的四个实系数 h_0, h_1, h_2 和 h_3 来表示,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_0 + h_1 & h_2 - ih_3 \\ h_2 + ih_3 & h_0 - h_1 \end{pmatrix} \quad (5.75)$$

那么 $\mathbf{H}$ 的特征值是

$$\xi_q, \xi_r = h_0 \pm \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2} \quad (5.76)$$

对应的特征向量

$$\mathbf{E}_q = \begin{pmatrix} h_1 + \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2} \\ h_2 + ih_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_r = \begin{pmatrix} h_1 - \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2} \\ h_2 + ih_3 \end{pmatrix} \quad (5.77)$$

因此, $\mathbf{H}$ 的二向衰减率 D 是

$$D = \frac{\xi_q^2 - \xi_r^2}{\xi_q^2 + \xi_r^2} = \frac{2h_0 \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}{h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2} \quad (5.78)$$

厄米矩阵的特征值是实数。因此,厄米矩阵代表测量值,正如可以在光束中插入偏振器,然后用辐射计探测特定偏振态的功率一样。厄米矩阵的特征向量是正交的。厄米矩阵是伸缩矩阵,它可将圆或球的单位矢量变为椭球的矢量(可能有复元素)。生成的最大和最小长度矢量就是特征向量,它的长度被特征值缩放。

厄米矩阵可通过酉变换对角化。酉变换后,厄米矩阵的特征值就是对角元素。

5.9.2 酉矩阵和酉变换: 延迟器

延迟器琼斯矩阵是酉矩阵,用 $\mathbf{U}$ 表示。对于酉琼斯矩阵,它的伴随矩阵等于逆矩阵,

$$\mathbf{U}^{-1} = \begin{pmatrix} j_{xx} & j_{xy} \\ j_{yx} & j_{yy} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} j_{xx} & j_{xy} \\ j_{yx} & j_{yy} \end{pmatrix}^{\dagger} = \mathbf{U}^{\dagger} = \begin{pmatrix} j_{xx}^* & j_{yx}^* \\ j_{xy}^* & j_{yy}^* \end{pmatrix} \quad (5.79)$$

像所有酉矩阵一样,延迟器琼斯矩阵的特征值 ξ_q 和 ξ_r 的大小为 1,因此它们可以表示为

$$\xi_q = e^{-i\phi_q}, \quad \xi_r = e^{-i\phi_r} \quad (5.80)$$

延迟器琼斯矩阵 $\mathbf{U}$ 的延迟量是特征值相位之间的差值大小,

$$\delta = |\arg(\xi_q) - \arg(\xi_r)| = |\phi_q - \phi_r| \quad (5.81)$$

$\mathbf{U}$ 的行是归一化的正交向量,

$$\mathbf{U}_i^{\dagger} \cdot \mathbf{U}_j = \delta_{ij} \quad (5.82)$$

从而形成正交基。同样, $\mathbf{U}$ 的列也是正交的。酉矩阵的行列式为单位值, $\det(\mathbf{U}) = 1$ 。酉矩阵代表旋转。因此,酉矩阵将旋转偏振态, $\mathbf{U} \cdot \mathbf{E}$ 不改变矢量的大小

$$|\mathbf{U} \cdot \mathbf{E}| = |\mathbf{E}| \quad (5.83)$$

琼斯旋转矩阵

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (5.84)$$

是酉矩阵。 $\mathbf{R}(\theta)$ 的矩阵元为实数,把一个实向量旋转成另一个实向量。像 $\mathbf{R}(\theta)$ 这样的实酉矩阵被记为正交矩阵^[31]。 $\mathbf{R}$ 的第一列为向量 $(1,0)$ 将旋转到的状态。类似地, $\mathbf{R}$ 的第二列是 $(0,1)$ 将旋转到的状态。其他具有复数元素的酉矩阵执行复数旋转;一个实向量可以旋转成一个复向量。

酉变换通过左乘酉矩阵和右乘逆矩阵将矩阵 $\mathbf{J}$ 旋转到新的基底,

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{U}^{-1} \quad (5.85)$$

为了将 $\mathbf{J}$ 从 x - y 基底变换成任意基底, $\mathbf{U}$ 的行向量与新的正交基向量共轭。

$\mathbf{J}$ 的酉变换保持矩阵的特征值和行列式不变。它将 $\mathbf{J}$ 的特征向量作为一个组进行旋转,保持它们的点积也就是特征向量之间的角度不变。

厄米琼斯矩阵 $\mathbf{H}$ 总是可以通过酉变换对角化,

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \begin{pmatrix} \rho_q & 0 \\ 0 & \rho_r \end{pmatrix} \quad (5.86)$$

对角化后, $\mathbf{H}$ 的两个实特征值 ρ_q 和 ρ_r 在对角线上。 $\mathbf{U}^{-1}$ 的行和 $\mathbf{U}$ 的列包含 $\mathbf{H}$ 的归一化特征向量,它们总是正交的。

例 5.8 酉变换

线性基底和圆基底之间的一个重要酉变换可由矩阵 $\mathbf{B}$ 实现

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad (5.87)$$

其中 $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ 。

$\mathbf{B}$ 将一个用 x - y 线性基底表示的琼斯矢量 (E_x, E_y) 变换到 R-L 圆基底;

$$\begin{pmatrix} E_R \\ E_L \end{pmatrix} = \mathbf{B} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} E_x + iE_y \\ E_x - iE_y \end{pmatrix} \quad (5.88)$$

在 R-L 圆基底中,右旋圆偏振光具有单位琼斯矢量 $(1,0)$,左旋圆偏振光的琼斯矢量为 $(0,1)$ 。

作为酉变换的一个例子, x - y 线性基底中的左旋圆偏振器琼斯矩阵是 $\mathbf{LCP} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$,R-L 圆基底中对应的琼斯矩阵是

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{B}^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \cdot \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.89)$$

其中,例如,任意偏振态的光束可做如下分析:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_R \\ E_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_L \end{pmatrix} \quad (5.90)$$

在 x - y 线性基底中延迟量为 δ 的圆延迟器琼斯矩阵为 $\mathbf{CR}(\delta) = \begin{pmatrix} \cos\delta/2 & \sin\delta/2 \\ -\sin\delta/2 & \cos\delta/2 \end{pmatrix}$ 。在 R-L 圆基底中对应的琼斯矩阵为

$$\mathbf{B} \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\delta}{2} & \sin \frac{\delta}{2} \\ -\sin \frac{\delta}{2} & \cos \frac{\delta}{2} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\delta}{2} - i \sin \frac{\delta}{2} & 0 \\ 0 & \cos \frac{\delta}{2} + i \sin \frac{\delta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\delta/2} & 0 \\ 0 & e^{+i\delta/2} \end{pmatrix} \quad (5.91)$$

因此,可以看出酉变换如何用于不同于 x - y 基的其他基中进行琼斯矩阵运算,例如,在 R-L 基或任何其他可能的正交基中。

例 5.9 厄米矩阵的对角化

椭圆二向衰减器 $\mathbf{H}_1$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\mathbf{ED} \left(0, \frac{-1+e^2}{\sqrt{2}(1+e^2)}, -\frac{-1+e^2}{\sqrt{2}(1+e^2)} \right)}{\sqrt{e}} = \begin{pmatrix} \frac{1+e}{2e} & \frac{(1+i)\sinh \frac{1}{2}}{\sqrt{2}e} \\ \frac{(1-i)\sinh \frac{1}{2}}{\sqrt{2}e} & \frac{1+e}{2e} \end{pmatrix} \quad (5.92)$$

具有斯托克斯本征偏振

$$\mathbf{S}_q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{S}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (5.93)$$

把它酉变换为对角阵。一个本征偏振是椭圆偏振,介于 45° 和右旋圆偏振之间;另一个本征偏振是正交的,在 135° 和左旋圆偏振之间。因子 $1/\sqrt{e}$ 在不改变二向衰减率的情况下调节最大和最小振幅透射率,它是式(5.58)中描述的吸收系数。这些斯托克斯本征偏振可根据式(5.55)转换为归一化琼斯本征偏振 $\mathbf{E}_q$ 和 $\mathbf{E}_r$,

$$\mathbf{E}_q = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_r = \begin{pmatrix} -\frac{1+i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (5.94)$$

因此,用 $\mathbf{E}_q$ 和 $\mathbf{E}_r$ 的共轭作为行可构造出酉矩阵 $\mathbf{U}_1$,来对角化 $\mathbf{H}_1$

$$\mathbf{U}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i & \sqrt{2} \\ -1+i & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (5.95)$$

对 $\mathbf{H}_1$ 进行酉变换 $\mathbf{U}_1 \mathbf{H}_1 \mathbf{U}_1^{-1}$ 得到一个对角矩阵,

$$\mathbf{U}_1 \mathbf{H}_1 \mathbf{U}_1^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i & \sqrt{2} \\ -1+i & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1+e}{2e} & \frac{(1+i)\sinh \frac{1}{2}}{\sqrt{2e}} \\ \frac{(1-i)\sinh \frac{1}{2}}{\sqrt{2e}} & \frac{1+e}{2e} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & -1-i \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/e \end{pmatrix} \quad (5.96)$$

椭圆二向衰减器 $\mathbf{H}_1$ 的两个振幅透射率,也就是它的特征值 1 和 $1/e$,现在位于对角线上。

5.9.3 极分解法: 将延迟和二向衰减分开

任意琼斯矩阵可能混合有二向衰减和延迟。如果二向衰减器和延迟器具有相同的特征向量,则琼斯矩阵 $\mathbf{J}$ 是齐次的,酉矩阵和厄米矩阵可交换;交换算子 $[\mathbf{H}, \mathbf{U}]$ 为零,

$$[\mathbf{H}, \mathbf{U}] = \mathbf{H} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{U} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (5.97)$$

这种齐次琼斯矩阵可通过酉变换对角化,

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \begin{pmatrix} \xi_q & 0 \\ 0 & \xi_r \end{pmatrix} \quad (5.98)$$

得到对角矩阵,特征值位于其对角线上, $\mathbf{U}$ 的列是特征向量。

一般来说,具有二向衰减和延迟任意混合的矩阵 $\mathbf{J}$ 会有非零的交换算子,即 $[\mathbf{H}, \mathbf{U}] \neq 0$ 。那么, $\mathbf{J}$ 不能通过酉变换对角化, $\mathbf{J}$ 具有非正交的本征偏振,这定义为非齐次矩阵。此外,特征值不一定代表最大和最小振幅透射率,并且用于二向衰减的齐次琼斯矩阵方程通常不成立,

$$D \neq \frac{\xi_q^2 - \xi_r^2}{\xi_q^2 + \xi_r^2} \quad (5.99)$$

非齐次矩阵或齐次矩阵可用极分解法(polar decomposition)表示为酉矩阵和厄米矩阵的乘积,或者厄米矩阵乘以酉矩阵^[32-35]:

$$\mathbf{J} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{H}' \cdot \mathbf{U} \quad (5.100)$$

在这两种形式的极分解法中,酉矩阵保持不变,但厄米矩阵 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{H}'$ 根据分解的顺序而不同^[34],如图 5.16 所示。极分解分量可以通过两种不同的方法计算。

第一种方法, $\mathbf{J}$ 可以通过奇异值分解分解成酉矩阵 $\mathbf{W}$ 、奇异值对角矩阵 $\mathbf{D}$ 和酉矩阵的伴随 $\mathbf{V}^\dagger$ 的乘积^[36],

$$\mathbf{J} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^\dagger = \begin{pmatrix} w_{x,1} & w_{x,2} \\ w_{y,1} & w_{y,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{x,1}^* & v_{y,1}^* \\ v_{x,2}^* & v_{y,2}^* \end{pmatrix} \quad (5.101)$$

其中奇异值排序为 $\Lambda_1 \geq \Lambda_2$ 。 $\mathbf{J}$ 的最大振幅透射率为 Λ_1 ,对应于输入偏振态 $(v_{x,1}, v_{y,1})$ 和输

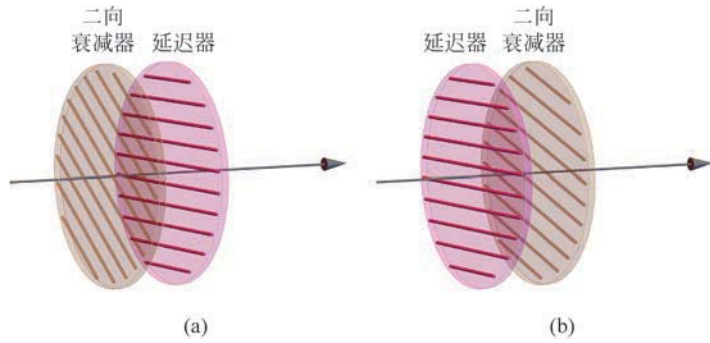


图 5.16 一个非齐次的琼斯矩阵可以用极分解法表示为(a)一个二向衰减器后接一个延迟器,或者(b)一个相同的延迟器后接一个不同的二向衰减器

出偏振态 $(w_{x,1}, w_{y,1})$ 。最小振幅透射率对应于第二个奇异值、 $V^\dagger$ 第二行的共轭和 W 第二列。因此, J 的二向衰减率由奇异值计算如下:

$$D = \frac{\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2}{\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2} \quad (5.102)$$

关于奇异值分解的更多内容可参见数学小贴士 9.2。 J 极分解的厄米分量(厄米矩阵)计算如下:

$$H = VDV^\dagger, \quad H' = WDW^\dagger \quad (5.103)$$

那么酉分量(酉矩阵,纯延迟器)就是

$$U = WV \quad (5.104)$$

第二种方法,计算厄米部分的平方

$$J^\dagger J = H^2 \quad \text{和} \quad JJ^\dagger = H'^2 \quad (5.105)$$

这得到另一对表达式,用矩阵平方根法(式(14.36))求解极分解的厄米或二向衰减部分

$$H = \sqrt{J^\dagger J}, \quad H' = \sqrt{JJ^\dagger} \quad (5.106)$$

式(5.106)要求 H 和 J 是非奇异的,具有非零行列式。于是, $U = JH^{-1} = H'^{-1}J$ 。

对于任意的琼斯矩阵 J ,纯延迟器琼斯矩阵 U 可视为 J 的延迟部分, H 或 H' 可视为二向衰减部分。请注意,极分解法是顺序相关的:要么延迟器在前,随后是二向衰减器,或者反之亦然。14.6节将进一步讨论非齐次矩阵。14.4.5节中给出了偏振分量的阶数无关的表示法,即偏振分量的指数形式。

例 5.10 极分解法示例

考虑一个非齐次矩阵

$$J = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 - 2i & 2 - 2i \\ -1 - i & 1 + i \end{pmatrix} \quad (5.107)$$

它的特征值 $\approx (0.868e^{-1.025i}, 0.576e^{1.025i})$ 。入射归一化特征矢量和出射特征矢量的偏振椭圆如图 5.17 所示。 J 的奇异值分解分量是

$$W = \begin{pmatrix} e^{-i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix} = LR\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \quad (5.108)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \mathbf{LD} \left(1, \frac{1}{2}, 0 \right) \quad (5.109)$$

和

$$\mathbf{V}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{CR} \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) \quad (5.110)$$

厄米部分是

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \sqrt{\mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}} = \mathbf{VDV}^\dagger = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \mathbf{H}' &= \sqrt{\mathbf{J} \mathbf{J}^\dagger} = \mathbf{WDW}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.111)$$

对于二向衰减率 3/5, 两者都有特征值 1 和 1/2; 因此, 根据极分解法, 这是 $\mathbf{J}$ 的二向衰减。酉部分是

$$\mathbf{U} = \mathbf{WV}^\dagger = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i & 1-i \\ -1-i & 1+i \end{pmatrix} \quad (5.112)$$

它的特征值为 $\pi/3$ 和 $-\pi/3$, 延迟量为 $2\pi/3$ 。根据极分解法, 这是 $\mathbf{J}$ 的延迟。图 5.18 绘出了 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{H}'$ 和 $\mathbf{U}$ 的特征矢量。

根据极分解法, $\mathbf{J}$ 可用两种方式表示为 $\mathbf{UH}$ 和 $\mathbf{H}'\mathbf{U}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{UH} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i & 1-i \\ -1-i & 1+i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{H}'\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i & 1-i \\ -1-i & 1+i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2-2i & 2-2i \\ -1-i & 1+i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.113)$$

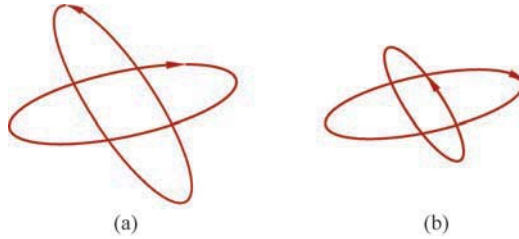


图 5.17 归一化的入射本征偏振(a)和出射本征偏振(b)。注意主轴不是正交的; 因此, 本征偏振不是正交的。二向衰减和延迟都是存在的

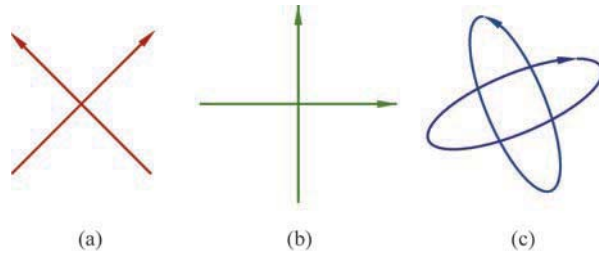


图 5.18 非齐次琼斯矩阵 $\mathbf{J}$ 的厄米部分 $\mathbf{H}$ (二向衰减)((a), 红), 厄米部分 $\mathbf{H}'$ ((b), 绿) 和酉部分 $\mathbf{U}$ (延迟)((c), 蓝) 的归一化本征偏振

5.10 递增相位符号约定

2.17 节和 2.18 节介绍并讨论了相位的符号约定。本书使用递减相位符号约定。另一个符号约定, 递增相位符号约定, 在本书中没有使用, 但将在本节中进行讨论。在本节中下标 M 用于表示遵从递增相位符号约定的物理量, ϕ 符号按此约定变化。于是单色平面波的形式如下:

$$\mathbf{E}_M(z, t) = \text{Re} \left[\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kz + \phi)} \right] = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \cos(\omega t - kz + \phi) \quad (5.114)$$

用递增相位符号约定, 平面波方程中唯一的变化是 $\omega t - kz + \phi$ 的符号。请注意, 由于余弦是一个偶函数, 因此余弦参数的符号无关紧要, $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ 。

在递增相位符号约定中, 左、右旋圆偏振光的琼斯矢量为

$$\mathbf{L}_M = \frac{a e^{i\phi}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_M = \frac{a e^{i\phi}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (5.115)$$

请注意, 在递增相位约定中, 左旋圆偏振光的琼斯矢量是递减相位约定中右旋圆偏振光的琼斯矢量, 反之亦然。如果约定表述不清楚, 这可能会变得非常混乱!

符号约定的选择影响琼斯矩阵元素的符号。表 5.5 比较了递减相位符号约定和递增相位符号约定中的几种常见琼斯矩阵。它们彼此是共轭的。

5.11 总结

琼斯算法为计算二向衰减和延迟提供了一种简洁而灵活的方法。琼斯算法是为解决相干光问题而建立的; 特别是, 琼斯矢量的相加可模拟相干光束的叠加, 琼斯矩阵的相加可模拟在干涉仪中多条路径合成激光束, 如第 4 章所述。

具有正交特征向量的琼斯矩阵(齐次矩阵)的分析比更一般的情况更简单, 齐次琼斯矩阵的特征值直接与延迟量和二向衰减率有关。二向衰减器具有厄米琼斯矩阵, 延迟器具有酉琼斯矩阵。

琼斯矢量和琼斯矩阵的定义假设光是单色的, 因此是相干的。因此, 琼斯矩阵适用于偏

振光线追迹计算。但更一般地说,琼斯矩阵很好地描述了光学系统或偏振元件序列的二向衰减和延迟,在这种情况下,它们的应用不限于单色光。因为琼斯矩阵包含绝对相位,它们很容易与光学设计计算相结合,使它们成为光学设计中处理偏振像差问题的有效工具。

对于理想的偏振元件,偏振特性很容易定义。对于实际的偏振元件,偏振特性的精确定义更为微妙,因为偏振元件,例如偏振器和延迟器,可能会显示出一些二向衰减、一些延迟,甚至可能是一些退偏。这些特性将随着波长和入射角的变化而变化,也可能随着元件上的位置而变化。

延迟器的琼斯矩阵在对称相位约定中是最简练的,在对称相位约定中,较快偏振态的相位超前了延迟量的一半,较慢偏振态的相位滞后了延迟量的一半。通常,偏振元件的总相位是未知的,例如对于采购的元件;那么,延迟器的对称相位形式对于琼斯矩阵来说是一个简练但任意的选择。许多参考文献给出了用其他延迟器约定的琼斯矩阵:①慢本征偏振不变或②快本征偏振不变。这些延迟器琼斯矩阵在图 5.19 中以振幅和相位(彩色编码)绘制,以供比较:(左图)慢本征偏振不变,这使快本征偏振的相位超前,或(右图)快本征偏振不变,使慢本征偏振的相位滞后。与图 5.8 的唯一区别是相位。

表 5.5 递减和递增相位约定中的琼斯矩阵

快 轴	延迟器:四分之一波	
	递减相位约定,快轴不变	递增相位约定,快轴不变
水平,0°,QWHLR 或 $LR(\pi/2,0^\circ)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$
垂直,90°,QWVLR 或 $LR(\pi/2,90^\circ)$	$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
45°,QW45LR $LR(\pi/2,45^\circ)$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}$
135°,QW135LR $LR(\pi/2,135^\circ)$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ -1+i & 1+i \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i & -1-i \\ -1-i & 1-i \end{pmatrix}$
右旋圆 QWRCL	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1+i \\ -1-i & 1+i \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i & 1-i \\ -1+i & 1-i \end{pmatrix}$
左旋圆 QWLCL	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & -1-i \\ 1+i & 1+i \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i & -1+i \\ 1-i & 1-i \end{pmatrix}$

快 轴	延迟器:半波	
	递减相位约定	递增相位约定
半波水平线性延迟器 HWHLR	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
半波垂直线性延迟器 HWVLR	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
半波 45°线性延迟器 HW45LR	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
半波 135°线性延迟器 HW135LR	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

续表

快 轴	延迟器: 半波	
	递减相位约定	递增相位约定
半波右旋圆延迟器 HWRCR	$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$
半波左旋圆延迟器 HWLCR	$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

快 轴	偏振器	
	递减相位约定	递增相位约定
水平线偏振器 HLP	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
垂直线偏振器 VLP	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
45°线偏振器 L45P	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
135°线偏振器 L135P	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
右旋圆偏振器 RCP	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$
左旋圆偏振器 LCP	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$

选用了绝对相位；因此,快轴经历了零相位变化,慢轴被滞后。

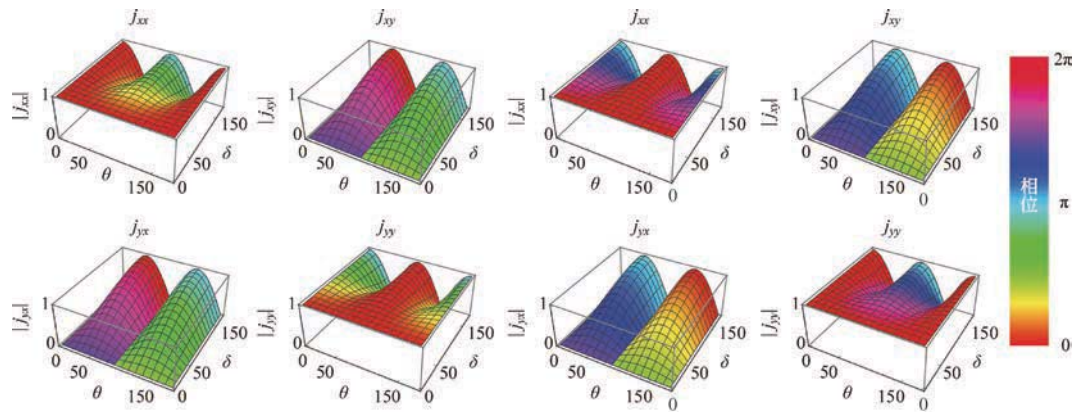


图 5.19 使快本征偏振的相位超前,而慢本征偏振保持不变的所有线性延迟器的琼斯矩阵元素,(左)沿着 j_{xx} 元素的左、右边缘和 j_{yy} 元素的中间是不变的(红色)。相反,使慢本征偏振的相位滞后而快本征偏振保持不变的所有线性延迟器的琼斯矩阵元素(右),沿着 j_{yy} 元素的左右边缘和 j_{xx} 元素的中间是不变的(红色)。这个图应该与图 5.8 进行比较

5.12 习题集

数学小贴士 5.3 习题集中的相位

通常,在习题集中指定偏振元件时,不会指定元件的绝对相位(如果指定了,习题文本会变得乏味、冗长和混乱)。因此,如果习题要用到一个水平快轴的四分之一波线性延迟器,琼斯矩阵可以是下面中的任何一个

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{-i\phi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad (5.116)$$

如果没有指定绝对相位,这些矩阵中的每一个都是正确的。此外,本书建议,采用对称延迟器约定的第二个矩阵是最规范的,但显然它不是最容易用于手工计算的形式。因此,在习题评分时,任何相位的答案都应该被接受。例如,如果你认为答案是单位矩阵,而你得到了以下任何一种形式,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^{-i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix} \quad (5.117)$$

那么可以停止了,你已经完成了!

5.1 矩阵乘以下列琼斯矩阵序列。然后,在偏振器和延迟器琼斯矩阵表中识别所得的琼斯矩阵。该矩阵可能相差一个常数或同相位(-1 和 i),具体取决于为延迟器选取的相位。

- 两个线性延迟器 $\mathbf{LR}[\pi/2, 0]$
- $\mathbf{LR}[\pi/2, 90^\circ]$ 后接 $\mathbf{LR}[\pi/2, 0]$
- $\mathbf{LR}[\pi/4, 90^\circ]$, $\mathbf{LP}[0^\circ]$ 和 $\mathbf{LR}[\pi/4, 0]$
- 三个线偏振器 $\mathbf{LP}[0^\circ]$ 、 $\mathbf{LP}[45^\circ]$ 、 $\mathbf{LP}[0^\circ]$
- 一个线偏振器在两个圆延迟器之间 $\mathbf{CR}[-\pi/2]$, $\mathbf{LP}[0^\circ]$, $\mathbf{CR}[\pi/2]$
- 两个二向衰减率为 1 的左旋圆二向衰减器 $\mathbf{CD}[1, 0]$
- 圆延迟器和圆二向衰减器 $\mathbf{CR}[-\pi/2]$, $\mathbf{CD}[1, 0]$ 和 $\mathbf{CR}[\pi/2]$
- $\mathbf{CR}[\pi]$ 后接 $\mathbf{LR}[\pi, 0]$
- $\mathbf{CR}[\pi]$, $\mathbf{LR}[\pi, 45^\circ]$ 和 $\mathbf{LR}[\pi, 0]$
- $\mathbf{LR}[\pi/2, -45^\circ]$, $\mathbf{CR}[\pi]$ 和 $-i\mathbf{LR}[\pi/2, 45^\circ]$
- $\mathbf{LR}[\pi/2, -45^\circ]$, $\mathbf{CR}[\pi/2]$ 和 $-i\mathbf{LR}[\pi/2, 45^\circ]$

5.2 对下列延迟器用三种相位约定计算琼斯矩阵,

(1)快轴不变,(2)对称相位约定,(3)慢轴不变

- $\mathbf{LR}[\pi, 45^\circ]$
- $\mathbf{LR}[\pi/2, 135^\circ]$
- $\mathbf{LR}[\pi/8, 0]$
- $\mathbf{LR}[\pi/2, 30^\circ]$
- $\mathbf{LR}[\pi/4, 45^\circ]$
- $\mathbf{LR}[\pi/3, 45^\circ]$

5.3 给定琼斯矩阵 $\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{2} - \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ 。

- 通过计算特征值证明 $\mathbf{J}_1$ 代表一个偏振器。
- 为什么这些特征值能证明这个矩阵是偏振器?
- 计算透射态和消光态对应的非归一化琼斯矢量。
- 这个元件是齐次的吗?

5.4 运用线偏振器 $\mathbf{LP}(\theta)$ 的琼斯矩阵和角度为 $\theta - \alpha$ 的线偏振光,推导出线偏振光透过线偏振器的马吕斯定律。

5.5 通过特征值和特征向量分析琼斯矩阵 $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{i}{4} & \frac{1}{2} - \frac{i}{4} \\ \frac{1}{2} - \frac{i}{4} & \frac{1}{2} + \frac{i}{4} \end{pmatrix}$ 的偏振特性。

5.6 求下列琼斯矩阵的特征值和本征偏振。将矩阵分类为延迟器、偏振器、二向衰减器或其组合。将矩阵分类为线性、圆或椭圆偏振元件:

- $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$
- $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$
- $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i & -1+i \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$
- $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
- $\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}$
- $\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$
- $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$
- $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1+i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}$
- $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$
- $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

5.7 使用 $\mathbf{LD}(1, t_{\min}, \pi/4)$ 的矩阵验证琼斯矩阵的二向衰减率公式

$$D = \sqrt{1 - \frac{4 |\det \mathbf{J}|^2}{\text{Tr}(\mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J})^2}} \quad (5.118)$$

5.8 对于非偏振入射光,求任意琼斯矩阵的透射率, $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix}$ 。

- 计算 0° 和 90° 偏振态的透射光通量。透射率是透射光通量与入射光通量之比。
- 非偏振光可以被视为任意两种正交偏振态的非相干组合。根据 a. 小题,计算非偏振光的透射率。

- c. 计算 45° 和 135° 偏振态的透射光通量,并依据这些值计算非偏振光的透射率。
- 5.9 考虑式(5.57)的特征值,证明式(5.56)的椭圆二向衰减器琼斯矩阵的二向衰减率等于 D 。
- 5.10 证明两个偏振器的乘积 $\mathbf{LP}(0)\mathbf{LP}(\pi/4)$ 不是式(5.29)中的线偏振器形式。
- 5.11 a. 求让偏振态旋转 180° 的琼斯矩阵。
 b. 当偏振面旋转 180° 时,相干光会发生什么变化? 琼斯矢量会改变吗?
 c. 线偏振光的琼斯矢量和偏振态是如何变化的?
 d. 圆偏振光的琼斯矢量和偏振态是如何变化的?
- 5.12 根据矩阵乘法的定义 $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{i,j} = \sum_k A_{i,k} B_{k,j}$
 a. 证明矩阵乘法满足结合律 $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ 。
 b. 证明如果 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C}$,那么对于共轭,有 $\mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{B}^\dagger = \mathbf{C}^\dagger$
- 5.13 验证延迟器方程的周期性。
 a. 证明线性延迟器方程 $\mathbf{LR}_1(\delta, 0^\circ) = \begin{pmatrix} e^{-i\delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 具有周期性,并且周期为 2π , $\mathbf{LR}_1(\delta, 0^\circ) = \mathbf{LR}_1(\delta + 2\pi, 0^\circ)$
 b. 给定任意方向,证明延迟器方程的对称形式
- $$\mathbf{LR}(\delta, \theta) = \begin{pmatrix} e^{\frac{-i\delta}{2}} \cos^2 \theta + e^{\frac{i\delta}{2}} \sin^2 \theta & -i \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \sin(2\theta) \\ -i \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \sin(2\theta) & e^{\frac{i\delta}{2}} \cos^2 \theta + e^{\frac{-i\delta}{2}} \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$
- 不具有 2π 周期性, $\mathbf{LR}(\delta, \theta) \neq \mathbf{LR}(\delta + 2\pi, \theta)$ 。解释一下不同之处。为什么这是合理的?
- 5.14 a. 证明半波线性延迟器琼斯矩阵 $\mathbf{LR}(\pi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$, 对于所有角度 θ , 能把左旋圆偏振光转换为右旋圆偏振光。
 b. 出射偏振态如何随角度 θ 变化?
- 5.15 以 45° 取向的一般线性二向衰减器可用泡利自旋矩阵写成 $\rho_0 \sigma_0 + \rho_2 \sigma_2$ (第14章)。计算琼斯矩阵。以 ρ_0 和 ρ_2 的函数形式计算 45° 和 135° 线偏振光的振幅透射率。计算两个光强透射率和二向衰减率。
- 5.16 证明线性延迟器琼斯矩阵的二向衰减总是 0。
- $$\mathbf{LR}(\delta, \theta) = \begin{pmatrix} e^{\frac{-i\delta}{2}} \cos^2 \theta + e^{\frac{i\delta}{2}} \sin^2 \theta & -i \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \sin(2\theta) \\ -i \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \sin(2\theta) & e^{\frac{i\delta}{2}} \cos^2 \theta + e^{\frac{-i\delta}{2}} \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$
- 5.17 求线性二向衰减器的琼斯矩阵,它把在 30° 偏振的 $4/9$ 光通量透射为 30° 线偏振光,把在 120° 偏振的 $1/9$ 光通量透射为 120° 线偏振光。
- 5.18 举一个两个特征值都等于零的零 2×2 矩阵 $\mathbf{N}$ 的例子。对于一个特定的 $\mathbf{E}_1$ 偏振态, $\mathbf{N}$ 透射所有入射光通量,但是光以正交偏振态出射。
- 5.19 a. 透射所有 x 偏振光通量(作为 x 偏振光)和一半 y 偏振光通量(作为 y 偏振光)的部分偏振器的琼斯矩阵是什么?

- b. 当透光轴逆时针旋转到角度 θ 时, 琼斯矩阵 $\mathbf{D}(\theta)$ 是什么?
- c. 假设左旋圆偏振光入射到两个偏振器组成的序列上, $\mathbf{D}(\pi/2)\mathbf{D}(0)$ 。两个二向衰减器序列的琼斯矩阵是什么?
- d. 求出射偏振态。相对于入射偏振态的光通量是多少? 偏振椭圆的椭圆率和角度是多少?
- e. 求三个二向衰减器 $\mathbf{D}(\pi/2)\mathbf{D}(\pi/4)\mathbf{D}(0)$ 序列的琼斯矩阵。
- f. 哪个偏振态的透射率最大?
- g. 求二向衰减率 D 。
- 5.20 a. 计算正交于 $\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b + ic \end{pmatrix}$ 的偏振态 $\mathbf{E}_2$ 。
- b. 证明对于所有的 a, b 和 c 值, 不存在将 $\mathbf{E}_1$ 变换成 $\mathbf{E}_2$ 的单个矩阵 $\begin{pmatrix} j_{xx} & j_{xy} \\ j_{yx} & j_{yy} \end{pmatrix}$ 。因此, 不存在偏振元件“正交器”, 它总能够将任意输入偏振态变换为正交偏振态。
- 5.21 特定的光学仪器需要偏振元件, 该偏振元件将所有入射的水平线偏振光转换成 45° 线偏振光, 并将所有入射的 45° 线性偏振光转换成右旋圆偏振光。
- a. 求具有这些性质的琼斯矩阵 $\mathbf{J}$ 。请注意, 矩阵将根据假设的相位而变化。
- b. $\mathbf{J}$ 的特征值是什么?
- c. $\mathbf{J}$ 是齐次的吗? 本征偏振是正交的吗?
- d. $\mathbf{J}$ 有增益吗? 出射功率比入射功率大吗?
- 5.22 a. 推导出一种方法来求任意琼斯矩阵, 该矩阵可进行以下两种任意变换,
- $$\begin{pmatrix} j_{xx} & j_{xy} \\ j_{yx} & j_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \text{ 和 } \begin{pmatrix} j_{xx} & j_{xy} \\ j_{yx} & j_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$
- 创建一个 4×4 的矩阵, 它是 a, b, c 和 d 的函数, 对向量 $(j_{xx} \ j_{xy} \ j_{yx} \ j_{yy})^T$ 进行运算得到 $(s \ t \ u \ v)^T$ 。然后对 j_{xx}, j_{xy}, j_{yx} 和 j_{yy} 求解这个方程。
- b. 求琼斯矩阵, 将 $(1, 0)$ 转换为 $(0, 1)$ 并将 $(0, 1)$ 转换为 $(1, -1/\sqrt{2})$ 。
- 5.23 图 5.11 显示了由涡旋延迟器和输入偏振光束产生的径向偏振光束。怎样能产生切向偏振光束?
- 5.24 证明对于一阶二向衰减, 水平线性二向衰减器的琼斯矩阵为
- $$\mathbf{LD}\left(1 + \frac{d}{2}, 1 - \frac{d}{2}, 0^\circ\right) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{d}{2} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{d}{2} \end{pmatrix}$$
- 5.25 证明式(5.19)不适用于形式为 $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$ 的矩阵。为这种特殊情况找到一个求本征偏振的替代方程。
- 5.26 通过求将 $(1, 0)$ 转换为 $\mathbf{E}(\epsilon, \psi)$ 并将 $(0, 1)$ 转换为正交偏振态的西矩阵 $\mathbf{U}$, 推导出式(5.30)中椭圆偏振器的琼斯矩阵。然后用 $\mathbf{U}$ 对 $\mathbf{LP}(0)$ 进行基底的酉变换, 来生成 $\mathbf{EP}(\epsilon, \psi)$ 。验证 $\mathbf{EP}(\epsilon, \psi)$ 对 $\mathbf{E}(\epsilon, \psi)$ 的作用和对正交偏振态的作用。

5.13 参考文献

- [1] F. Pezzotta and B. M. Laurs, Tourmaline: The kaleidoscopic gemstone, *Elements* 7, 5 (2011): 333-338.
- [2] M. Grabau, Polarized light enters the world of everyday life, *J. Appl. Phys.* 9, 4(1938): 215-225.
- [3] W. R. Phillips, *Mineral Optics: Principles and Techniques*, WH Freeman(1971).
- [4] E. Land, Some aspects of the development of sheet polarizers, *J. Opt. Soc. Am.* 41(1951): 957-962.
- [5] W. A. Shurcliff, *Polarized Light. Production and Use*, Cambridge, MA: Harvard University Press (1966).
- [6] R. A. Chipman, Polarization analysis of optical systems, *Opt. Eng.* 28, 2(1989): 280-290.
- [7] J. M. Bennett, Polarizers, in *Handbook of Optics*, Vol. I, Chapter 13, 3rd edition, ed. M. Bass, New York: McGraw-Hill(2010).
- [8] G. E. Shilov, *Linear Algebra*(translated and edited by Richard A. Silverman), Dover(1977).
- [9] D. Poole, *Linear Algebra: A Modern Introduction*, Cengage Learning(2014).
- [10] G. Strang, *Linear Algebra and Its Applications*, Belmont, CA: Thomson, Brooks/Cole(2006).
- [11] R. Jones, A new calculus for the treatment of optical systems, *J. Opt. Soc. Am.* 31(1941): 500-503.
- [12] H. Hurwitz Jr. and R. Jones, A new calculus for the treatment of optical systems, *J. Opt. Soc. Am.* 31 (1941): 493-495.
- [13] R. Jones, A new calculus for the treatment of optical systems, *J. Opt. Soc. Am.* 31(1941):488-493.
- [14] R. Jones, A new calculus for the treatment of optical systems. IV, *J. Opt. Soc. Am.* 32 (1942): 486-493.
- [15] R. Jones, A new calculus for the treatment of optical systems VI. Experimental determination of the matrix, *J. Opt. Soc. Am.* 37(1947): 110.
- [16] R. Jones, A new calculus for the treatment of optical systems V. A more general formulation, and description of another calculus, *J. Opt. Soc. Am.* 37(1947): 107.
- [17] R. Jones, A new calculus for the treatment of optical systems. VII. Properties of the N-matrices, *J. Opt. Soc. Am.* 38(1948): 671-683.
- [18] R. M. A. Azzam and N. M. Bashara, *Ellipsometry and Polarization Light*, New York: North-Holland (1977), p. 97.
- [19] S.-Y. Lu and R. A. Chipman, Homogeneous and inhomogeneous Jones matrices, *JOSA A* 11, 2 (1994): 766-773.
- [20] D. Goldstein, *Polarized Light, Revised and Expanded*, Vol. 83, CRC Press(2011).
- [21] J. F. Nye and M. V. Berry, Dislocations in wave trains, *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 336, No. 1605. The Royal Society(1974).
- [22] S. McEldowney, D. Shemo, R. Chipman, and P. Smith, Creating vortex retarders using photoaligned liquid crystal polymers, *Opt. Lett.* 33(2008): 134-136.
- [23] S. McEldowney, D. Shemo, and R. Chipman, Vortex retarders produced from photo-aligned liquid crystal polymers, *Opt. Express* 16(2008): 7295-7308.
- [24] P. Piron, P. Blain, S. Habraken, and D. Mawet, Polarization holography for vortex retarders recording, *Appl. Opt.* 52(2013): 7040-7048.
- [25] A. Boivin, J. Dow, and E. Wolf, Energy flow in the neighborhood of the focus of a coherent beam, *J. Opt. Soc. Am.* 57(1967): 1171-1175.
- [26] K. T. Gahagan and G. A. Swartzlander, Optical vortex trapping of particles, *Opt. Lett.* 21, 11(1996): 827-829.

- [27] J. Curtis and D. Grier, Modulated optical vortices, *Opt. Lett.* 28(2003): 872-874.
- [28] S. Quabis, R. Dorn, M. Eberler, O. Glockl, and G. Leuchs, Focusing light to a tighter spot, *Opt. Commun.* 179(2000): 1-7.
- [29] R. Dorn, S. Quabis, and G. Leuchs, Sharper focus for radially polarized light beam, *Phys. Rev. Lett.* 91(2003): 23.
- [30] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Chapter 4.4, New York: Academic(1970).
- [31] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Chapter 4.3, New York: Academic(1970).
- [32] P. Lancaster and M. T. Tismenetsky, *The Theory of Matrices*, 2nd edition, New York: Academic(1985).
- [33] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge: Cambridge University Press(1991).
- [34] S. Lu and R. Chipman, Homogeneous and inhomogeneous Jones matrices, *J. Opt. Soc. Am. A* 11(1994): 766-773.
- [35] S. Lu and R. Chipman, Interpretation of Mueller matrices based on polar decomposition, *J. Opt. Soc. Am. A* 13(1996): 1106-1113.
- [36] H. H. Barrett and K. J. Myers, *Foundations of Image Science*, Section 1.5, New York: Wiley(2004).

第 6 章

米勒矩阵

6.1 引言

米勒矩阵提供了一种表征样品所有偏振特性：二向衰减、延迟和退偏的系统方法。米勒矩阵有一个简单的定义；对于任何类型的样品，它都是 4×4 的矩阵，将一组入射斯托克斯参量与出射斯托克斯参量联系起来。尽管其定义简单，米勒矩阵的性质还是相当复杂的。

米勒矩阵的引入大大扩展了可以描述的偏振现象的范围。琼斯方法仅适用于非退偏相互作用的情形；所有完全偏振的入射态都以完全偏振的形式出射。事实上，对于大多数光学系统，如透镜、望远镜、显微镜和光纤系统来说，这些非退偏的相互作用是理想情况。大多数光学系统工作于非常接近无退偏的条件。

存在退偏时，偏振光变成部分偏振的，偏振度降低。在显微镜或望远镜中，这种退偏情况通常与诸如污垢、指纹、划痕或不良光学膜层等缺陷有关。米勒矩阵，而不是琼斯矩阵，更适合表征这些缺陷的偏振效应。但更普遍的情况是，当偏振光从任何物体散射时，如油漆、纸张、灰尘、岩石、塑料等，偏振度会降低，并出现一些退偏。因此，米勒矩阵扩展了可以描述的光与物质相互作用的范围。

6.2 米勒矩阵

米勒矩阵 $\mathbf{M}$ 是一个 4×4 的矩阵，它通过矩阵矢量乘法^[1-2]将入射斯托克斯参量 $\mathbf{S}$ 转

换为出射斯托克斯参量 $\mathbf{S}'$,

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S}' = \begin{bmatrix} M_{00} & M_{01} & M_{02} & M_{03} \\ M_{10} & M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{20} & M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{30} & M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

根据矩阵矢量乘法的定义,出射的斯托克斯参量 $\mathbf{S}'$ 为

$$\mathbf{S}' = \begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 M_{00} + S_1 M_{01} + S_2 M_{02} + S_3 M_{03} \\ S_0 M_{10} + S_1 M_{11} + S_2 M_{12} + S_3 M_{13} \\ S_0 M_{20} + S_1 M_{21} + S_2 M_{22} + S_3 M_{23} \\ S_0 M_{30} + S_1 M_{31} + S_2 M_{32} + S_3 M_{33} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

入射 $\mathbf{S}$ 的每个元素通过 $\mathbf{M}$ 中的元素与 $\mathbf{S}'$ 的四个元素相关联。由于 $\mathbf{S}$ 和 $\mathbf{S}'$ 的元素单位是辐照度, $\mathbf{M}$ 的元素是无量纲的辐照度比值。因为辐照度是实数,所以 $\mathbf{M}$ 的元素是实数,而不是复数。我们的惯例是将下标从 0 到 3 编号,以匹配相应的斯托克斯参量的下标。

例 6.1 米勒矩阵列的含义

当非偏振光入射时,米勒矩阵的第 0 列(序数从 0 到 3)描述了出射偏振态,

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S}' = \begin{bmatrix} M_{00} & M_{01} & M_{02} & M_{03} \\ M_{10} & M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{20} & M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{30} & M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{00} \\ M_{10} \\ M_{20} \\ M_{30} \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

第 0 列也是平均出射偏振态,因为当 0° 或 90° 偏振光入射时,出射态是第 0 列加或减第 1 列,

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S}' = \begin{bmatrix} M_{00} & M_{01} & M_{02} & M_{03} \\ M_{10} & M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{20} & M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{30} & M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{00} \\ M_{10} \\ M_{20} \\ M_{30} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{01} \\ M_{11} \\ M_{21} \\ M_{31} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S}' = \begin{bmatrix} M_{00} & M_{01} & M_{02} & M_{03} \\ M_{10} & M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{20} & M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{30} & M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{00} \\ M_{10} \\ M_{20} \\ M_{30} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{01} \\ M_{11} \\ M_{21} \\ M_{31} \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

因此,第 0 列是这两种输出态的平均值。当 45° 或 135° 偏振光入射时,出射态为第 0 列加或减第 2 列。类似地,当右旋或左旋圆偏振光入射时,出射态是第 0 列加上或减去第 3 列。因此,第 0 列被视为平均输出。

6.3 偏振元件序列

一系列偏振元件的效应或相互作用可以通过它们各自的米勒矩阵 $\mathbf{M}_q$ 的矩阵乘法来描

述,其中 q 是描述元件顺序的序数。遇到的第一个元件的米勒矩阵位于相乘的矩阵序列的最右端,最后一个元件的米勒矩阵 $\mathbf{M}_Q$ 位于矩阵乘积的最左侧。

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_Q \cdot \mathbf{M}_{Q-1} \cdots \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1 = \prod_{q=1}^Q \mathbf{M}_{Q-q+1} \quad (6.6)$$

因此,利用简单的矩阵乘法运算就可以很容易地计算出元件序列偏振效应的性质。在计算米勒矩阵的级联时,可以使用矩阵乘法的结合律

$$(\mathbf{M}_3 \cdot \mathbf{M}_2) \cdot \mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_3 \cdot (\mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1) \quad (6.7)$$

相邻矩阵可以任意顺序组合相乘。例 6.2 展示了一个偏振元件序列的例子。

6.4 非偏振的米勒矩阵

非偏振光学元件不会改变任何入射偏振态只有振幅和(或)相位会改变。非吸收、非偏振样品的米勒矩阵是 4×4 的单位矩阵 $\mathbf{I}$,

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

$\mathbf{I}$ 是真空的米勒矩阵,也是空气的近似米勒矩阵。对于中性密度滤光器或具有偏振无关吸收或损耗的元件,米勒矩阵满足 $T_{\max} = T_{\min} = T$, 所得的米勒矩阵与单位矩阵成比例,可以用线性二向衰减器的标记法 $\mathbf{LD}(T_{\max}, T_{\min}, \theta)$ (式(6.53))表示为

$$\mathbf{LD}(T, T, 0) = T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

与琼斯矢量不同,斯托克斯参量不包含绝对相位项。绝对相位变化为 ϕ 的琼斯矩阵为

$$e^{j\phi} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

相位变化没有对应的米勒矩阵。如果需要计算相位变化或光程长度,则除了计算米勒矩阵,还需进行上式计算。各偏振分量之间的相对相位变化,即延迟,可通过米勒运算得到。

6.5 偏振元件绕光束方向的旋转

当米勒矩阵为 $\mathbf{M}$ 的偏振元件绕入射光束旋转 θ 角时,入射角不变。例如,正入射光束通过一个绕法线旋转的元件,所得米勒矩阵 $\mathbf{M}(\theta)$ 为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\theta) &= \mathbf{R}_M(\theta) \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}_M(-\theta) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{00} & M_{01} & M_{02} & M_{03} \\ M_{10} & M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{20} & M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{30} & M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

$\mathbf{R}_M(\theta)$ 是米勒旋转矩阵,

$$\mathbf{R}_M(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

是绕光轴旋转的矩阵。 $\mathbf{R}_M(\theta)$ 已在第3章介绍,同时也讨论了斯托克斯参量的非正交坐标系。

对于矢量,基底的旋转变换是用旋转矩阵左乘来实现的。因此,斯托克斯参量通过下面这种变换实现相对于其坐标系的旋转

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\theta) &= \mathbf{R}_M(\theta) \cdot \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \cos 2\theta - S_2 \sin 2\theta \\ S_1 \sin 2\theta + S_2 \cos 2\theta \\ S_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.13)$$

出现 2θ 是因为 S_1 轴和 S_2 轴仅间隔 45° 。旋转 180° 会将斯托克斯参量恢复到初始状态,因此 $\mathbf{R}_M(180^\circ)$ 必须等于单位矩阵。根据定义,对于将 x 分量向 $+y$ 轴转动的旋转,即看向光束方向逆时针的旋转, θ 为正值。

对于矩阵,基底的旋转变换需要两个符号相反的旋转矩阵,一个左乘,一个右乘,这是矩阵的酉变换。注意式(6.11)中第一个旋转矩阵中的 $+\theta$ 和第二个旋转矩阵中的 $-\theta$ 。这些符号可以通过比较非旋转坐标系中的矩阵矢量乘法来理解。

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S}' \quad (6.14)$$

将旋转后的矩阵和旋转后的斯托克斯参量相乘,各自分别表示在方括号中,

$$\begin{aligned} &[\mathbf{R}_M(\theta) \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}_M(-\theta)] \cdot [\mathbf{R}_M(\theta) \cdot \mathbf{S}] \\ &= \mathbf{R}_M(\theta) \cdot \mathbf{M} \cdot [\mathbf{R}_M(-\theta) \cdot \mathbf{R}_M(\theta)] \cdot \mathbf{S} \\ &= \mathbf{R}_M(\theta) \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{S} \\ &= \mathbf{R}_M(\theta) \cdot \mathbf{S}' \end{aligned} \quad (6.15)$$

由于矩阵乘法满足结合律, $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$, 括号可以重新排列成上式第二行表达式。 $\mathbf{R}_M(\theta)$ 是酉旋转矩阵,反方向旋转必然可以消除旋转的影响,

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_M(\theta) \cdot \mathbf{R}_M(-\theta) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.16)
\end{aligned}$$

得到单位矩阵。因此，

$$\mathbf{R}_M(-\theta) = \mathbf{R}_M^{-1}(\theta) \quad (6.17)$$

6.6 延迟器的米勒矩阵

延迟器是具有两种本征偏振态的偏振元件,这两种偏振态保持入射偏振态(本征偏振态)传输,但光程长度(相位)不同。本节给出了理想延迟器的米勒矩阵公式,其中假设两种本征偏振态无损耗传输,并且元件没有二向衰减。

双折射延迟器通过将入射光分解成偏振态正交且折射率不同的两个模式来工作。一个模式相对于另一个模式有传播延迟,产生两个光程长度,由此产生光程差,即延迟,如图 5.3 所示。其他延迟机制包括从金属表面反射、多层薄膜的反射和透射、应力双折射以及与衍射光栅的相互作用。这些相互作用也常伴随着二向衰减。

延迟器的特性由本征偏振态之间的光程差(延迟量 δ)和本征偏振态(较短光程长度的偏振态(快轴)、较长光程长度的偏振态(慢轴))来表征。延迟量一般用弧度制表示,所以 $\delta = 2\pi$ 表示光程差为一个波长。需要注意的是,虽然“轴”一般用于表示线偏振态,但本征偏振态也可能为椭圆偏振或圆偏振的,仍然可用“轴”这个术语。

延迟器对斯托克斯参量的作用可通过庞加莱球的旋转来观察。以穿过延迟器两个本征偏振态的直线作为庞加莱球上的旋转轴,则旋转的幅度就是延迟量。6.8 节将详细阐述延迟器的这种性质。

在米勒矩阵运算中,延迟器由以下形式的实酉矩阵表示:

$$\mathbf{M}_{\text{延迟器}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{3} \times \text{3 旋转} & & \\ 0 & \text{矩阵} & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

其中,除了 $\mathbf{M}_{00}$ 元素,第一行和第一列都是零。实酉矩阵称为正交矩阵。正交矩阵的行构成一组正交的单位矢量,列也是这样。酉矩阵 $\mathbf{U}$ 的定义是,转置共轭矩阵与其逆矩阵相等的矩阵,

$$\mathbf{U}^\dagger = (\mathbf{U}^\mathrm{T})^* = \mathbf{U}^{-1} \quad (6.19)$$

对于一个实矩阵,其复共轭等于矩阵本身,所以正交矩阵 $\mathbf{O}$ 的转置矩阵等于它的逆矩阵,

$$\mathbf{O}^\mathrm{T} = \mathbf{O}^{-1} \quad (6.20)$$

因此, $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}^{-1}$ 可以用于检测一个米勒矩阵是否为纯延迟器。正交矩阵是旋转矩阵, 例如延迟器的米勒矩阵。右下角 3×3 的元素构成在 (S_1, S_2, S_3) 空间的旋转矩阵, 其中 (S_1, S_2, S_3) 是三个斯托克斯参量。这是延迟器在数学上旋转庞加莱球的方式。纯延迟器米勒矩阵的延迟量 δ 为

$$\delta = \arccos\left(\frac{M_{00} + M_{11} + M_{22} + M_{33}}{2} - 1\right) = \arccos\left(\frac{\text{Tr}(\mathbf{M})}{2} - 1\right) \quad (6.21)$$

Tr 表示矩阵的迹, 即对角线元素之和。延迟量为 δ 的水平线性延迟器的米勒矩阵为

$$\mathbf{LR}(\delta, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\delta & \sin\delta \\ 0 & 0 & -\sin\delta & \cos\delta \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

当 $\mathbf{LR}(\delta, 0)$ 作用于一组斯托克斯参量时, 前两个元素 S_0 和 S_1 保持不变, 它们是水平和垂直线偏振光这两种本征偏振态中的非零元素。快轴方向为 θ 的线性延迟器的米勒矩阵 $\mathbf{LR}(\delta, \theta)$ 可用式(6.11)所示的米勒矩阵旋转操作导出, 即

$$\mathbf{LR}(\delta, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta + \cos\delta \sin^2 2\theta & (1 - \cos\delta) \cos 2\theta \sin 2\theta & -\sin\delta \sin 2\theta \\ 0 & (1 - \cos\delta) \cos 2\theta \sin 2\theta & \cos\delta \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta & \cos 2\theta \sin\delta \\ 0 & \sin\delta \sin 2\theta & -\cos 2\theta \sin\delta & \cos\delta \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

延迟量为 δ 的圆延迟器的米勒矩阵为

$$\mathbf{CR}(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\delta & \sin\delta & 0 \\ 0 & -\sin\delta & \cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

这个米勒矩阵可描述旋光材料和法拉第旋转。

表 6.1 给出了四分之一波长延迟器 $\delta = \pi/2$ 和半波延迟器 $\delta = \pi$ 的米勒矩阵, 它们的快轴对应于基偏振态。

表 6.1 四分之一波长延迟器和半波延迟器在各基本偏振态下的米勒矩阵

延迟器类型	符 号	米 勒 矩 阵
水平四分之一波长线性延迟器	HQWLR	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
垂直四分之一波长线性延迟器	VQWLR	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
45°四分之一波长线性延迟器	QWLR(45°)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

续表

延迟器类型	符 号	米 勒 矩 阵
135°四分之一波长线性延迟器	QWLR(135°)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
四分之一波长右旋圆延迟器	QWRCR	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
四分之一波长左旋圆延迟器	QWLCR	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
水平或垂直的半波线性延迟器 (具有相同的米勒矩阵)	HHWLR	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
45°或 135°半波线性延迟器	HWLR(45°)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
右旋或左旋半波圆延迟器	RHWCR	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

快轴位于 θ 角的半波延迟器 **HWLR**(θ)的米勒矩阵为

$$\mathbf{HWLR}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 4\theta & \sin 4\theta & 0 \\ 0 & \sin 4\theta & -\cos 4\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

半波线性延迟器的米勒矩阵元素如图 6.1(b)所示。水平半波线性延迟器和垂直半波线性延迟器的米勒矩阵是相同的,因为这两种半波延迟器同等变换所有入射斯托克斯参量。快轴在 θ 角的四分之一波长线性延迟器的米勒矩阵 **QWLR**(θ)为

$$\mathbf{QWLR}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta & \cos 2\theta \sin 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & \cos 2\theta \sin 2\theta & \sin^2 2\theta & \cos 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta) & \frac{1}{2}\sin 4\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & \frac{1}{2}\sin 4\theta & \frac{1}{2}(1 - \cos 4\theta) & \cos 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

米勒矩阵元素如图 6.1(a)所示。所有线性延迟器的米勒矩阵 $\mathbf{LR}(\delta, \theta)$ 的元素在图 6.2 中以二维形式展示。

椭圆延迟器的米勒矩阵一般用延迟分量 $(\delta_H, \delta_{45}, \delta_R)$ 表示。延迟 δ 的大小和相应本征偏振态的斯托克斯参量为

$$\delta = \sqrt{\delta_H^2 + \delta_{45}^2 + \delta_R^2}, \quad \mathbf{S}_{\text{fast}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \delta_H/\delta \\ \delta_{45}/\delta \\ \delta_R/\delta \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

椭圆延迟器的米勒矩阵为

$$\mathbf{ER}(\delta_H, \delta_{45}, \delta_R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta_H^2 + (\delta_{45}^2 + \delta_R^2)C}{\delta^2} & \frac{\delta_{45}\delta_H T}{\delta^2} + \frac{\delta_R S}{\delta} & \frac{\delta_H\delta_R T}{\delta^2} - \frac{\delta_{45}S}{\delta} \\ 0 & \frac{\delta_{45}\delta_H T}{\delta^2} - \frac{\delta_R S}{\delta} & \frac{\delta_{45}^2 + (\delta_R^2 + \delta_H^2)C}{\delta^2} & \frac{\delta_R\delta_{45} T}{\delta^2} + \frac{\delta_H S}{\delta} \\ 0 & \frac{\delta_H\delta_R T}{\delta^2} + \frac{\delta_{45}S}{\delta} & \frac{\delta_R\delta_{45} T}{\delta^2} - \frac{\delta_H S}{\delta} & \frac{\delta_R^2 + (\delta_{45}^2 + \delta_H^2)C}{\delta^2} \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

其中 $C = \cos\delta, S = \sin\delta, T = 1 - \cos\delta$ 。半波椭圆延迟器米勒矩阵 $\mathbf{HWR}$ 简化为以下形式：

$$\mathbf{HWR}(r_1, r_2, r_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 + 2r_1^2 & 2r_2 r_1 & 2r_1 r_3 \\ 0 & 2r_2 r_1 & -1 + 2r_2^2 & 2r_2 r_3 \\ 0 & 2r_3 r_1 & 2r_2 r_3 & -1 + 2r_3^2 \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

其中 $\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} = 1, r_1 = \frac{\delta_H}{\pi}, r_2 = \frac{\delta_{45}}{\pi}, r_3 = \frac{\delta_R}{\pi}$ 。图 6.3 显示了所有四分之一波长椭圆延迟器和半波椭圆延迟器米勒矩阵元素的密度图。

延迟器米勒矩阵的延迟量参数 $(\delta_H, \delta_{45}, \delta_R)$ 可以根据式(6.27)和式(6.28)通过相加非对角元素来计算，

$$(\delta_H, \delta_{45}, \delta_R) = \frac{\delta}{2\sin\delta} (M_{23} - M_{32}, M_{31} - M_{13}, M_{12} - M_{21}) \quad (6.30)$$

在延迟量趋近于 0 时,式(6.30)可改写为

$$(\delta_H, \delta_{45}, \delta_R) = \frac{1}{2} (M_{23} - M_{32}, M_{31} - M_{13}, M_{12} - M_{21}) \quad (6.31)$$

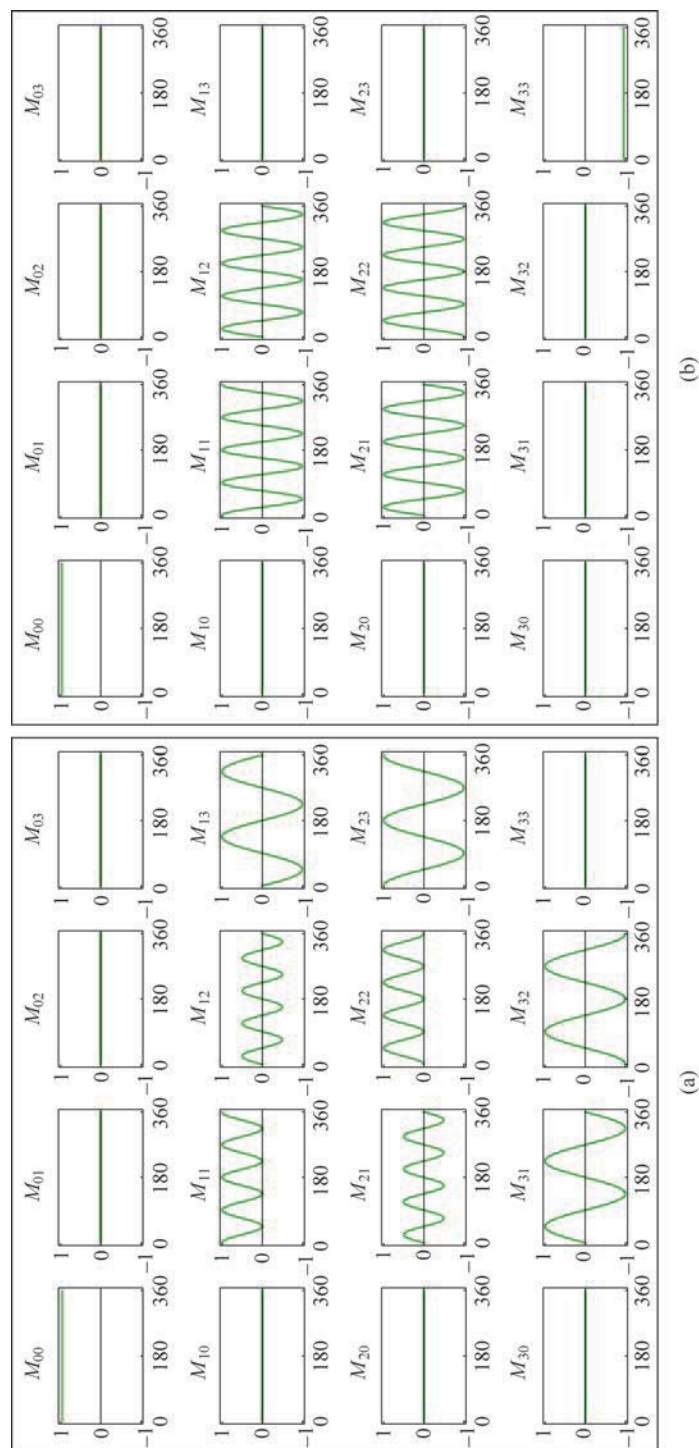


图 6.1 (a) $\lambda/4$ 线性延迟器米勒矩阵的元素。横坐标是延迟器快轴方向, 从 0° 到 360° 。(b) $\lambda/2$ 线性延迟器米勒矩阵元素与快轴方向的函数关系

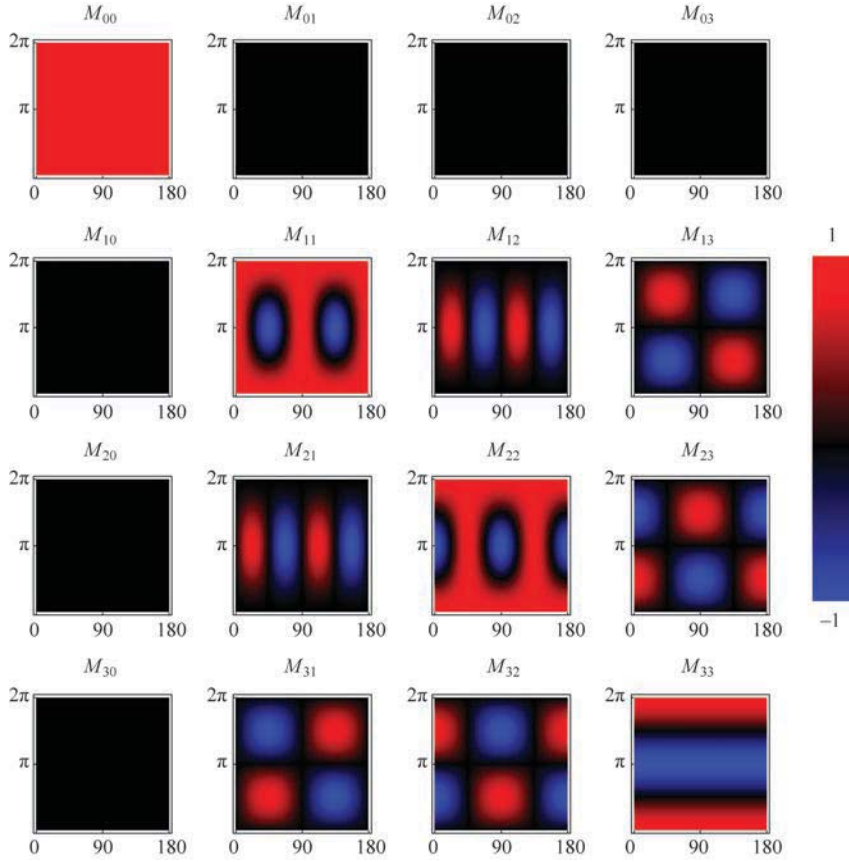


图 6.2 线性延迟器米勒矩阵元素的密度图。 y 轴是延迟量,以弧度表示。 x 轴是快轴方向,以度为单位。颜色表示米勒矩阵元素值。每个图形的底部(0 个波长)和顶部(1 个波长)表示单位矩阵, $\delta = (0, 2\pi)$ 。同样,穿过中心的水平线包含所有 $\lambda/2$ 线性偏延迟器米勒矩阵的元素, $\delta = \pi$

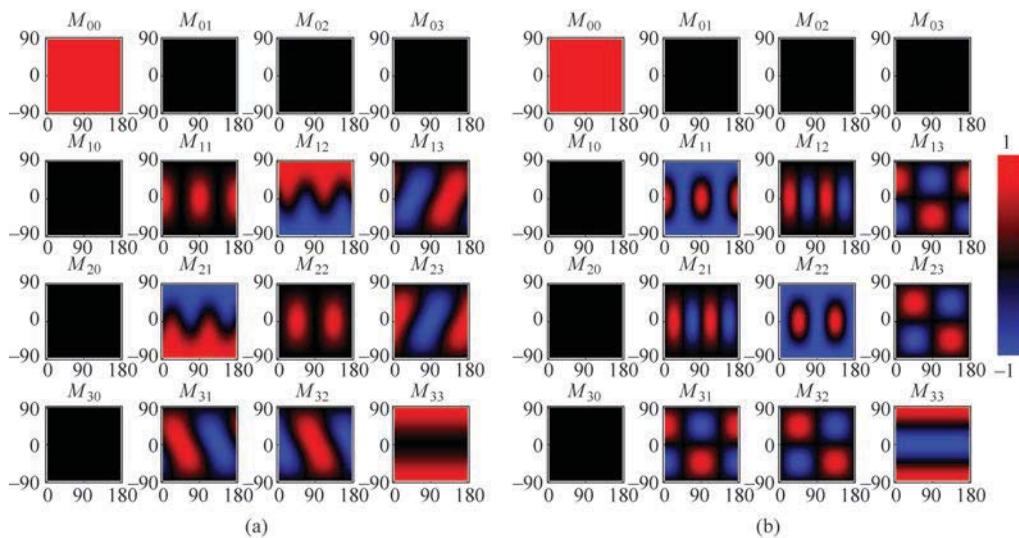


图 6.3 四分之一波长椭圆延迟器(a)和二分之一波长椭圆延迟器(b)的米勒矩阵元素密度图。 x 轴是方向。 y 轴是快轴的庞加莱球纬度,底部为左旋圆偏振,中间为线偏振,顶部为右旋圆偏振。颜色表示米勒矩阵元素值。每个方框代表一个展平的庞加莱球。线性延迟器落在过中心的线上

由于分母为零,式(6.30)不适用于半波延迟器。对于这种特殊情况,可用对角元素导出的下式表示:

$$(\delta_H, \delta_{45}, \delta_R) = \pi \left[\sqrt{\frac{M_{11}+1}{2}}, \text{sign}(M_{12}) \sqrt{\frac{M_{22}+1}{2}}, \text{sign}(M_{13}) \sqrt{\frac{M_{33}+1}{2}} \right] \quad (6.32)$$

由于平方根总是得到正值,因此非对角元素的符号用于确定延迟器轴的方向。式(6.32)总是返回正 δ_H 值的轴。对于半波延迟器,具有正交轴的延迟器具有相同的米勒矩阵。

例 6.2 米勒矩阵乘法举例

在快轴方向为 0° 的半波线性延迟器后放置快轴方向为 45° 的半波线性延迟器可以构成半波圆延迟器。

$$\begin{aligned} \text{HWLR}(45^\circ) \cdot \text{HWLR}(0^\circ) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \text{LHWCR} = \text{RHWCR} \end{aligned} \quad (6.33)$$

由于左旋和右旋半波圆延迟器的米勒矩阵相等,因此无法确定旋向。

6.7 偏振器和二向衰减器的米勒矩阵

6.7.1 基本的偏振器

偏振器只出射一个偏振态,另一正交偏振态被阻挡。理想的偏振器可以 100% 透过透射偏振态,并完全阻挡其正交偏振态。这两种偏振态是偏振器的两个本征偏振态。

例 6.3 水平线性偏振器的米勒矩阵

理想水平线偏振器的米勒矩阵 **HLP** 作用于任意的 $\mathbf{S}$, 都会产生 $S'_0 = S'_1$ 的斯托克斯参量,即水平方向的线偏光。

$$\text{HLP} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S_0 + S_1 \\ S_0 + S_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{S_0 + S_1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

由于 **HLP** 的前两行相等, $\mathbf{S}'$ 的前两个元素相等, 入射光的 S_2 和 S_3 特性丧失, 因此出射光总是水平线偏振光。水平和垂直的线偏振态是该矩阵的两个本征偏振态,

$$\begin{aligned}\mathbf{HLP} \cdot \mathbf{H} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{HLP} \cdot \mathbf{V} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (6.35)$$

特征值分别为 1 和 0, 即这两个偏振态的强度透射率。任何 4×4 矩阵都有 4 个特征矢量和特征值。**HLP** 的另外两个特征值和特征矢量如下:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \quad (6.36)$$

这两个特征矢量不是有效的斯托克斯参量, 因为 $S_0 < \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$, 这违反了斯托克斯参量的条件。因此, 这两个特征矢量不算作本征偏振态。

利用 $\mathbf{M}_R(\theta)$, 可很容易地从 **HLP** 计算出透射轴在 θ 方向的线性偏振器的米勒矩阵, 为

$$\mathbf{LP}(\theta) = \mathbf{R}_M(\theta) \cdot \mathbf{HLP} \cdot \mathbf{R}_M(-\theta)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \cos 2\theta & \cos^2 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (6.37)$$

$\mathbf{LP}(\theta)$ 透射 θ 方向的线偏振态, 并阻挡 $\theta + 90^\circ$ 方向的偏振态。

表 6.2 包含 6 个理想偏振器的米勒矩阵, 这 6 个偏振器透过 6 组基本斯托克斯参量。图 6.4 描绘了线性偏振器 16 个米勒矩阵元素与透射轴角度 θ 的函数关系。

表 6.2 各基本偏振态的偏振器米勒矩阵

偏振器类型	符 号	米 勒 矩 阵
水平线偏振器	HLP	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
垂直线偏振器	VLP	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
45°线偏振器	LP(45°)	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
135°线偏振器	LP(135°)	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
右旋圆偏振器	RCP	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
左旋圆偏振器	LCP	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

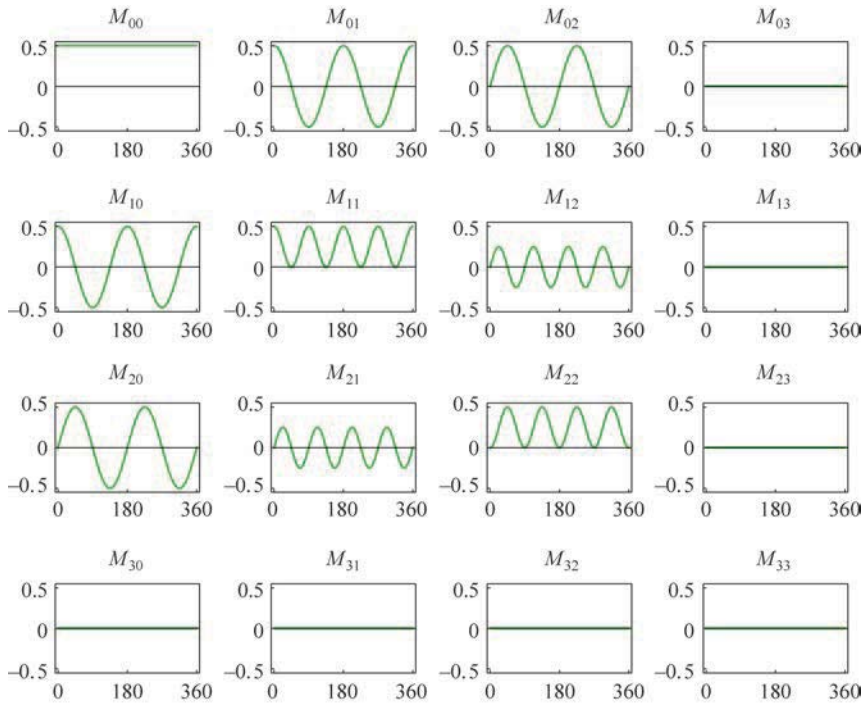
椭圆偏振器透射长轴位于 θ 方向的椭圆偏振态,透射的本征偏振态位于庞加莱球的纬度 η 处,其中 $-\pi/2 \leq \eta \leq \pi/2$ 。椭圆偏振器的米勒矩阵 $\mathbf{EP}(\theta, \eta)$ 为

$$\mathbf{EP}(\theta, \eta) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos 2\theta \cos \eta & \sin 2\theta \cos \eta & \sin \eta \\ \cos 2\theta \cos \eta & \cos^2 2\theta \cos^2 \eta & \frac{1}{2} \sin 4\theta \cos^2 \eta & \cos 2\theta \cos \eta \sin \eta \\ \sin 2\theta \cos \eta & \frac{1}{2} \sin 4\theta \cos^2 \eta & \sin^2 2\theta \cos^2 \eta & 2 \cos \theta \sin \theta \cos \eta \sin \eta \\ \sin \eta & \cos 2\theta \sin \eta \cos \eta & \sin 2\theta \cos \eta \sin \eta & \sin^2 \eta \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

6.15 节的问题 6.7 描述了推导过程。也可以认为一个椭圆偏振器透射庞加莱球坐标 (d_H, d_{45}, d_R) 表示的偏振态,并阻挡与其正交的偏振态。透过的本征偏振态为

$$\mathbf{S}_1 = (1, d_H, d_{45}, d_R), \quad d_H^2 + d_{45}^2 + d_R^2 = 1 \quad (6.39)$$

这个椭圆偏振器的米勒矩阵为

图 6.4 线性偏振器 16 个米勒矩阵元素与透射轴角度 θ 的函数关系

$$\mathbf{EP}(d_H, d_{45}, d_R) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & d_H & d_{45} & d_R \\ d_H & d_H^2 & d_H d_{45} & d_H d_R \\ d_{45} & d_H d_{45} & d_{45}^2 & d_{45} d_R \\ d_R & d_H d_R & d_R d_{45} & d_R^2 \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

6.7.2 透过率和二向衰减

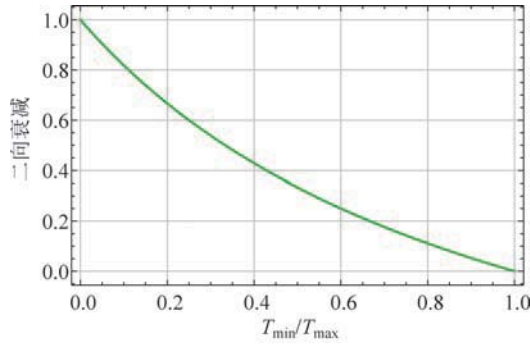
偏振器和部分偏振器由二向衰减特性表征,其描述了透射辐照度大小随入射偏振态的变化。二向衰减大小 D ,通常被简称为二向衰减率,是偏振元件或光学系统中的最大透射率 $T_{\max}$ 和最小透射率 $T_{\min}$ 的函数,

$$D = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max} + T_{\min}} = \frac{\sqrt{M_{01}^2 + M_{02}^2 + M_{03}^2}}{M_{00}}, \quad 0 \leq D \leq 1 \quad (6.41)$$

二向衰减有一个有用的性质,即 D 可以从 1(偏振器)变化到 0(均等透射所有偏振态的元件,例如延迟器或非偏振相互作用)。

米勒矩阵的透射辐照度及其二向衰减仅取决于第一行, $M_0 = (M_{00}, M_{01}, M_{02}, M_{03})$, 因为这些是唯一影响 S'_0 的元素。如图 6.5 所示,二向衰减和消光比 $T_{\min}/T_{\max}$ 是非线性的关系。

为了求得 $T_{\max}$ 和 $T_{\min}$,首先对入射斯托克斯参量进行归一化,因此有 $s_0 = 1$ 。归一化的斯托克斯参量可以由三元矢量 $\mathbf{s}$ 定义,该矢量表示的是单位庞加莱球上的偏振态坐标,

图 6.5 二向衰减和消光比($T_{\min}/T_{\max}$)之间的关系

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{\mathbf{S}}{S_0} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{s} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3) \quad (6.42)$$

对于非偏振光, $\mathbf{s}$ 的大小为零, $|\mathbf{s}| = 0$ 。对于完全偏振态, $|\mathbf{s}| = 1$ 。 $\mathbf{s}$ 的引入使得偏振态的表述与光通量无关。

米勒矩阵为 $\mathbf{M}$ 的元件, 透射率 $T(\mathbf{s})$ 是出射光通量与入射光通量之比,

$$T(\mathbf{M}, \mathbf{s}) = \frac{S'_0}{S_0} = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{S}} = M_{00} + M_{01}s_1 + M_{02}s_2 + M_{03}s_3 \quad (6.43)$$

这取决于米勒矩阵第一行与入射斯托克斯参量的点乘。透射率对入射偏振态的相关性由三元二向衰减参量 $\mathbf{d}$ 表征, 其定义为

$$\mathbf{d} = \frac{(M_{01}, M_{02}, M_{03})}{M_{00}} = (d_H, d_{45}, d_R) \quad (6.44)$$

二向衰减参量具有三个分量, 对应于斯托克斯参量的三个分量(x/y 、 $45^\circ/135^\circ$ 、右/左), 每个分量表征了透射率随每个斯托克斯参量分量的变化。二向衰减参量 $\mathbf{d}$ 通常被称为二向衰减矢量或分析器矢量, 但与斯托克斯参量相似, $\mathbf{d}$ 不是真正的矢量。二向衰减参量不可以叠加。对于斯托克斯三元矢量 $\mathbf{s}$, 透射率函数 T 为

$$T(\mathbf{M}, \mathbf{s}) = \frac{S'_0}{S_0} = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{S}} = M_{00} + M_{01}s_1 + M_{02}s_2 + M_{03}s_3 = M_{00}(1 + \mathbf{d} \cdot \mathbf{s}) \quad (6.45)$$

平均透射率为 M_{00} , 可由所有偏振的斯托克斯参量求平均值来计算。平均透射率也是非偏振入射光($\mathbf{s}_U = (0, 0, 0)$)的透射率。透射率的偏振态相关变化由入射斯托克斯三元矢量和二向衰减矢量的点乘项 $\mathbf{s} \cdot \mathbf{d}$ 决定。最大透射率 $T_{\max}$ 出现在点积最大时, 即 $\mathbf{s}$ 和 $\mathbf{d}$ 平行时, 此时 S'_0 的幅值也最大。透射率最大的入射斯托克斯参量 $\mathbf{S}_{\max}$ 和透射率最小的入射斯托克斯参量 $\mathbf{S}_{\min}$ 为

$$\mathbf{S}_{\max} = \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} D \\ d_H \\ d_{45} \\ d_R \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{S}_{\min} = \frac{-\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} D \\ -d_H \\ -d_{45} \\ -d_R \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

对应有

$$T_{\max} = M_{00}(1 + D) \quad \text{和} \quad T_{\min} = M_{00}(1 - D) \quad (6.47)$$

因此,任一米勒矩阵的二向衰减为

$$D(\mathbf{M}) = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max} + T_{\min}} = \frac{\sqrt{M_{01}^2 + M_{02}^2 + M_{03}^2}}{M_{00}} \quad (6.48)$$

对于理想偏振器,最小透射率为零, $D=1$, $T_{\min} = M_{00}(1 - D) = 0$ 。线性偏振灵敏度或线性二向衰减 $LD(\mathbf{M})$ 用于表征强度透射率随入射线偏振态的变化:

$$LD(\mathbf{M}) = \frac{\sqrt{M_{01}^2 + M_{02}^2}}{M_{00}} \quad (6.49)$$

线性偏振灵敏度常被作为遥感系统中的性能参数,遥感系统设计用于测量入射功率,与地球散射光中的任何线偏振分量无关^[3]。 $LD(\mathbf{M})=1$ 表示 $\mathbf{M}$ 是一个线性分析器; $\mathbf{M}$ 不一定只是一个线偏振器,也可能是线偏振器后还有一些其他偏振元件。

光纤光学元件和系统中的二向衰减通常用偏振相关损耗 PDL 表征,单位为分贝:

$$PDL(\mathbf{M}) = 10 \lg \frac{T_{\max}}{T_{\min}} \quad (6.50)$$

格兰汤普逊偏振器通常能达到 60dB 的 PDL。许多不同类型的偏振片也以较低成本制造和销售。偏振片是二向色性的偏振器,其对偏振方向沿着和垂直于分子吸收轴的偏振光有吸收性差异,因此它们的 PDL 具有很强的波长相关性。它们的 PDL 从最好偏振片的 50dB 以上到一些低成本偏振片的 20dB 之间不等。Polarcor^① 二向色偏振片由排列在玻璃中的纳米尺寸银结晶体构成,在近红外区域可以获得 60dB 的 PDL。

当偏振器序列的透射轴平行时,净偏振相关损耗是各元件偏振相关损耗之和。透射轴正交的两个二向衰减器的偏振相关损耗,可用一个二向衰减器的偏振相关损耗减去另一个的偏振相关损耗来计算。

6.7.3 偏振度

偏振度 $P(\mathbf{M})$ 是指以非偏振光 $\mathbf{U}$ 入射时出射光的偏振化程度 DoP ^[4],

$$P(\mathbf{M}) = \text{DoP}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{U}) = \frac{\sqrt{M_{10}^2 + M_{20}^2 + M_{30}^2}}{M_{00}} \quad (6.51)$$

出射偏振态 $\mathbf{S}_p(\mathbf{M})$ 是 $\mathbf{M}$ 的第一列,

$$\mathbf{S}_p(\mathbf{M}) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{U} = \begin{bmatrix} M_{00} & M_{01} & M_{02} & M_{03} \\ M_{10} & M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{20} & M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{30} & M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{00} \\ M_{10} \\ M_{20} \\ M_{30} \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

偏振度不一定等于二向衰减。 $\mathbf{S}_p$ 也不一定等于透射率最大的入射偏振态 $\mathbf{S}_{\max}$ 。偏振度参量或偏振度矢量定义为 $(p_H, p_{45}, p_R) = (M_{10}, M_{20}, M_{30})/M_{00}$, 即非偏振光入射时归

① Polarcor 是康宁公司的注册商标。

一化的斯托克斯参量。

6.7.4 二向衰减器

部分偏振器或齐次二向衰减器的米勒矩阵为 $\mathbf{LD}(T_x, T_y, 0)$, 其中 T_x 和 T_y 分别为沿 x 和 y 轴的强度透射率,

$$\mathbf{LD}(T_x, T_y, 0) \cdot \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} T_x + T_y & T_x - T_y & 0 & 0 \\ T_x - T_y & T_x + T_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{T_x T_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{T_x T_y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} \quad (6.53)$$

理想二向衰减器对两个正交的线性本征偏振态具有两个不同的光强透射率 $T_{\max}$ 和 $T_{\min}$, 因此命名为“二向”“衰减器”。角度 θ 方向的线性二向衰减器 $\mathbf{LD}(T_x, T_y, \theta)$ 的米勒矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{LD}(T_{\max}, T_{\min}, \theta) &= \mathbf{R}_M(\theta) \cdot \mathbf{LD}(T_{\max}, T_{\min}, 0) \cdot \mathbf{R}_M(-\theta) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A & B \cos 2\theta & B \sin 2\theta & 0 \\ B \cos 2\theta & A \cos^2 2\theta + C \sin^2 2\theta & (A - C) \cos 2\theta \sin 2\theta & 0 \\ B \sin 2\theta & (A - C) \cos 2\theta \sin 2\theta & C \cos^2 2\theta + A \sin^2 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.54)$$

其中,

$$A = T_{\max} + T_{\min}, \quad B = T_{\max} - T_{\min}, \quad C = 2\sqrt{T_{\max} T_{\min}} \quad (6.55)$$

这是用酉矩阵 $\mathbf{R}_M(\theta)$ 进行酉变换的一个例子。

图 6.6 是所有线性二向衰减器米勒矩阵 $\mathbf{LD}(1, T_{\min}, \theta)$ 的密度图。理想二向衰减器没有延迟, 但是实际上, 大多数二向衰减器都有一些延迟。一个没有延迟的纯线性二向衰减器的例子是光透射进入透明电介质中, 于是 $T_{\max}$ 和 $T_{\min}$ 由强度菲涅耳系数给出。金属表面的反射可作为一个有延迟的二向衰减器。

理想二向衰减器的米勒矩阵是厄米矩阵, 它们有实数特征值。厄米矩阵等于其转置矩阵的复共轭, 即它的厄米伴随矩阵 $\mathbf{H} = \mathbf{H}^\dagger = (\mathbf{H}^T)^*$ 。由于米勒矩阵是实数, $\mathbf{H}^* = \mathbf{H}$, 理想二向衰减器的米勒矩阵等于它们的转置矩阵,

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^T \quad (6.56)$$

并且关于对角线对称。理想的水平线性偏振器沿一个轴的透射率为零, $T_x = 1, T_y = 0$, 其米勒矩阵如下:

$$\mathbf{LD}(1, 0, 0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

一个实际的偏振器 $T_x < 1$, 因此有

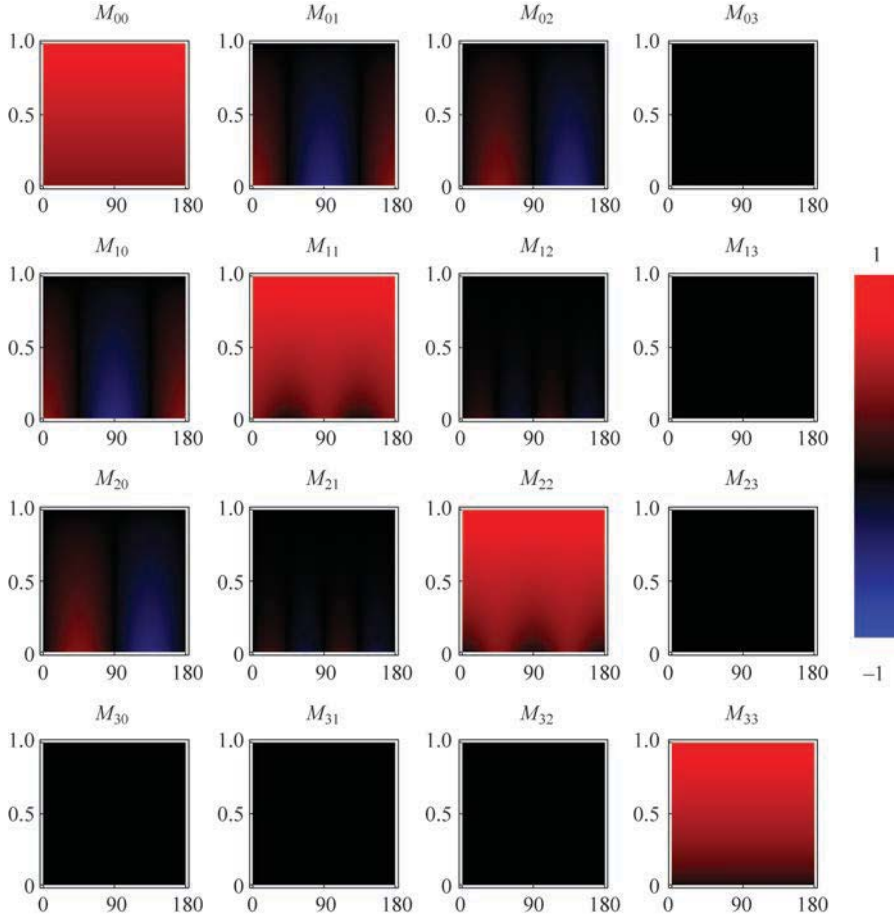


图 6.6 $T_{\max}=1$ 的所有线性二向衰减器的米勒矩阵。 x 轴是透射轴方向 θ , 从 0° 变化到 180° ,
 y 轴是 $T_{\min}$, 从底部的 0 (偏振器) 变化到顶部的 1 (具有单位矩阵的非偏振器)

$$\mathbf{LD}(T_x, 0, 0) = \frac{T_x}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

线性、椭圆或圆二向衰减器米勒矩阵 $\mathbf{D}$ 的一般方程, 用米勒矩阵的第一行表示为

$$\begin{aligned} & \mathbf{D}(d_H, d_{45}, d_R, T_{\text{Avg}}) \\ &= T_{\text{Avg}} \begin{bmatrix} 1 & d_H & d_{45} & d_R \\ d_H & A & 0 & 0 \\ d_{45} & 0 & A & 0 \\ d_R & 0 & 0 & A \end{bmatrix} + \frac{T_{\text{Avg}}(1-A)}{D^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_H^2 & d_{45}d_H & d_Hd_R \\ 0 & d_{45}d_H & d_{45}^2 & d_{45}d_R \\ 0 & d_Hd_R & d_{45}d_R & d_R^2 \end{bmatrix} \quad (6.59) \end{aligned}$$

其中, $D = \sqrt{d_H^2 + d_{45}^2 + d_R^2}$, $A = \sqrt{1 - d_H^2 - d_{45}^2 - d_R^2}$, $T_{\text{Avg}} = \frac{T_{\max} + T_{\min}}{2}$ 。

6.8 庞加莱球的操作

6.8.1 延迟器在庞加莱球面上的操作

庞加莱球被广泛使用的主要原因是它为延迟器运算提供了简单的几何描述,这在 3.13 节已进行了介绍。延迟器的基本模型是一种将光分解成两个正交偏振态(模式)并对每个模式施加不同相移的元件(图 5.3)。这个光程差就是延迟量 δ 。

延迟器的米勒矩阵包含一个 3×3 的旋转矩阵,如式(6.18)所示。椭圆延迟器的米勒矩阵 $\mathbf{ER}$ (式(6.28))用三个延迟分量($\delta_H, \delta_{45}, \delta_R$)表示,它们定义了延迟器快轴的斯托克斯参数。这个米勒矩阵作用在入射斯托克斯参数上,将它们在庞加莱球面上的初始位置绕穿过延迟器快态和慢态的轴旋转角度 δ 。对于透过双折射延迟器的入射偏振态,随着延迟器的延迟量从 0 稳定地增加到 δ ,该偏振态绕延迟器轴沿着圆弧演变。

图 6.7 显示了 45° 线偏振光入射到垂直的四分之一波长线性延迟器上时的轨迹。偏振态沿着圆弧从 $(0, 1, 0)$ 演变到 $(0, -1, 1)/\sqrt{2}$, 终止于 $(0, 0, 1)$ 。在这种情况下,是围绕 S_1 轴旋转的;偏振态演变的方向满足拇指指向快轴的左手法则。这假设庞加莱球是用右手坐标绘制的,满足^①

$$S_1 \times S_2 = S_3 \quad (6.60)$$

将左手放在快轴上方的球面上,拇指从快轴向外指,握拳,手指卷曲的方向表示 $\delta > 0$ 时偏振态绕旋转轴演变的方向。

图 6.8 显示了快轴垂直的 $\lambda/4$ 线性延迟器作用于不同的入射线偏振态。每个入射态在球面上绕延迟器轴从赤道沿圆弧移动 90° 。

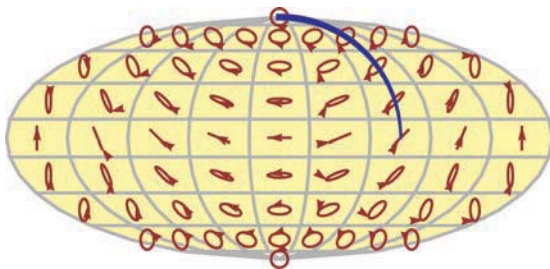


图 6.7 垂直 $\lambda/4$ 线性延迟器作用在 45° 线偏振光上,这使偏振态变为右旋圆偏振态。
演变轨迹更粗的一端朝向出射态

图 6.9 显示了快轴在 0° 方向的半波线性延迟器作用在几种线偏振态下的表现。每种线偏振态沿着一个 180° 的轨迹移动,并在赤道上结束,成为另一个线偏振态。用庞加莱球推断,很容易看出,所有的半波线性延迟器都将赤道上的一个偏振态变回到赤道上的另一个偏振态,而快慢轴固定不动,如图 6.10 所示。因此,半波线性延迟器用于旋转线偏光的方向。

^① 右手叉积很容易验证。将右手手指放在 $+S_1$ 上,扫向 $+S_2$,拇指将指向 S_3 。该测试检查坐标系是否为右手坐标系。

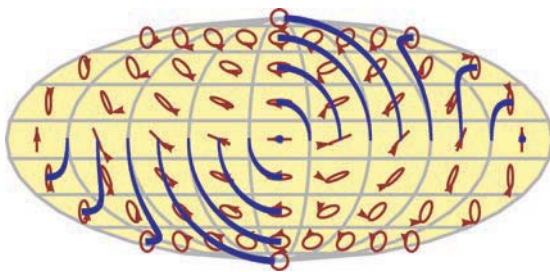


图 6.8 垂直 $\lambda/4$ 线性延迟器作用于—组线偏振态,使偏振态绕 S_1 轴旋转 90°

图 6.11 显示了一个 1λ 圆延迟器的作用($\delta=2\pi$)。其旋转轴穿过两极。对于圆延迟器,庞加莱球像地球一样绕穿过两极的轴旋转。

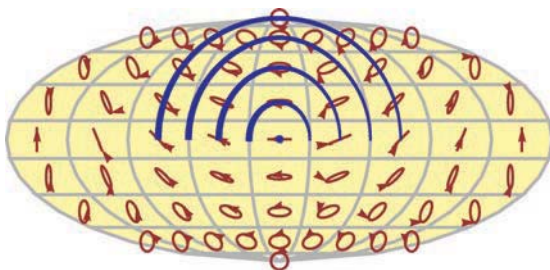


图 6.9 垂直半波线性延迟器作用于—组线偏振态。它将线偏振态围绕 S_1 轴旋转 180° ,将输入的线偏振态映射为输出的线偏振态

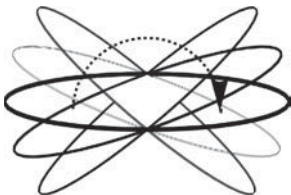


图 6.10 赤道上的一个偏振态绕穿过赤道的轴旋转 180° ,该偏振态将变回赤道上的另一个偏振态

可用庞加莱球的一系列旋转来分析延迟器序列。下面介绍几个重要的例子。图 6.12 显示了快轴方向水平的半波线性延迟器和另一个快轴方向为 45° 的半波线性延迟器对几种偏振态的作用。当右旋圆偏振光入射时,第一个延迟器将其移动到左旋圆偏振的极点处,然后第二个延迟器将其返回到右旋圆偏振的极点处。因此,右旋圆偏振光是这种延迟器组合的本征偏振态。 45° 偏振光被旋转为 135° 偏振光,然后通过快轴方向为 45° 的半波延迟器,偏振态保持不变,如图 6.12 中的黑线所示。整体旋转 180° ,因此,该延迟器组合可以充当半波圆延迟器。

对于球的任何旋转序列,表面上的两个点必定会回到它们开始的位置。因此,一系列旋转具有绕旋转轴单一旋转的整体效果。光通过一系列延迟器的传播,总的偏振变换等效于单个通常具有椭圆快轴的延迟器的作用。终止的两个偏振态(也是它们的起始位置)是组合延迟器的本征偏振态。事实上,椭圆延迟器通常最容易由一组两个或多个线性延迟器构成。

圆延迟器也可以由线性延迟器构成。考虑延迟量为 δ 的 45° 线性延迟器。当该延迟器放置在水平四分之一波长延迟器和垂直四分之一波长线性延迟器之间时, δ 延迟器的快轴和慢轴旋转到圆偏振极点,该三元复合延迟器构成延迟量为 δ 的圆延迟器。如果水平和垂

直线性延迟器的延迟量被调整为角度 μ , 则快轴和慢轴移动到庞加莱球面的纬度 $\pm\mu$ 上。

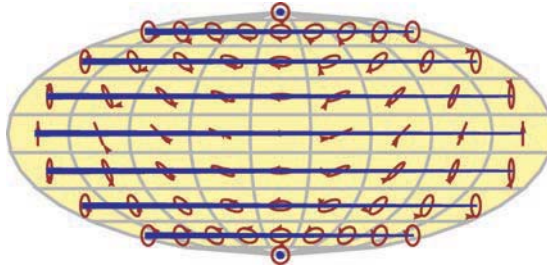


图 6.11 一个 1λ 圆延迟器的作用是将庞加莱球绕两极旋转 360° , 因此所有出射偏振态都是入射偏振态

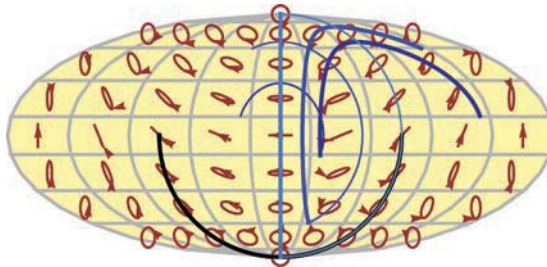


图 6.12 0° 和 45° 的两个半波线性延迟器序列是半波圆延迟器。

该序列对应于泡利矩阵乘法 $\sigma_1 \times \sigma_2 = i\sigma_3$ (式(6.108))

例 6.4 三个四分之一波长延迟器的序列

考虑三个四分之一波长延迟器的序列, 前两个快轴方向分别为 0° 、 45° , 随后是左旋圆偏振器。图 6.13 显示了庞加莱球上两个入射椭圆偏振态的轨迹, 一个是本征态 $(1, 1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$, 另一个是长轴水平的偏振态 $(1, 0.383, 0, 0.924)$ 。本征态经过一个球面三角形返回初始位置, 轨迹的第一道弧线最细, 最后一道弧线最粗。对于另一个偏振态, 光在水平四分之一波长延迟器之后变成线偏振, 然后移动为 45° 方向轻微椭圆偏振态。最后, 由于圆延迟器, 该偏振态沿着纬度圆移动, 并终结为长轴水平方向的椭圆偏振。该输出偏振态是输入偏振态绕本征偏振旋转 180° , 因此, 这个序列是半波椭圆延迟器。

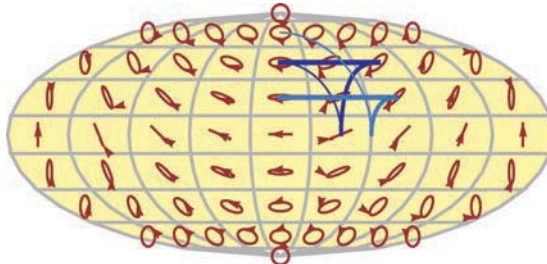


图 6.13 庞加莱球面上显示了三个 $\lambda/4$ 延迟器序列的迹线, (1) 水平的, (2) 45° 的和 (3) 左旋圆延迟器。这两个序列的弧对应于两个不同的入射偏振态。水平延迟器的迹线最细, 圆延迟器的迹线最粗。其中一组迹线序列返回其起点, 这是复合延迟器的特征矢量或本征偏振态。因为另一条迹线相对本征态对称地开始和终止, 所以三个延迟器的组合充当了一个具有椭圆本征偏振态的半波延迟器

6.8.2 旋转线性延迟器的操作

一种重要的偏振调制器是旋转的线性延迟器。考虑入射到旋转的 $\lambda/4$ 线性延迟器上的水平线偏振光,图 6.14(b)显示了延迟器快轴旋转时偏振态的演变。当快轴方向水平时,入射偏振态是本征偏振态,因此偏振态不变。当快轴方向从水平移动到 10° 时,过延迟器的偏振态沿着一个小的 90° 弧演变,沿着 45° 角远离赤道。随着延迟器角度的增大,轨迹接近 45° 经度圆。当角度达到 45° 时,偏振态移动到右旋圆偏振极点。当快轴垂直时,光回到水平偏振态,该偏振态在北半球移动了一个“8”字形的上半部分。在快轴接下来的 90° 旋转过程中,偏振轨迹在南半球移动穿过左旋圆偏振态,完成如图 6.14(b)所示的“8”字形轨迹。图 6.14(a)显示了旋转 $\lambda/8$ 线性延迟器形成的较小、较窄的“8”字形轨迹。图 6.14(c)显示了一个旋转 $3\lambda/8$ 线性延迟器的轨迹,它从球的前面开始,然后绕到球的背面。旋转 $\lambda/2$ 线性延迟器的轨迹在延迟器旋转 180° 过程中绕赤道两次。

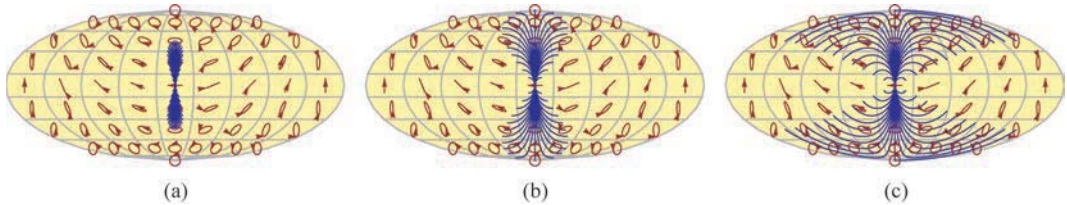


图 6.14 旋转线性延迟器对水平线偏振光的作用,显示了三个延迟值, $\lambda/8$ 波长(a)、 $\lambda/4$ 波长(b)和 $3\lambda/8$ 波长(c)。由此产生的偏振态在庞加莱球面上描绘出一个竖向的数字 8。 $1/8$ 波长延迟器在球面上产生的所有偏振态的平均距离小于 $1/4$ 波长延迟器; $3/8$ 波长接近旋转延迟器偏振仪的最佳延迟量

6.8.3 偏振器和二向衰减器的操作

透过二向色偏振器和二向衰减器的光通量比率(透射率),可以在庞加莱球面上和内部表示为垂直于二向衰减器透射轴的一系列平面。例如,理想水平线偏振器作用于任意一组归一化斯托克斯参数,该过程的米勒矩阵方程为

$$\mathbf{HLP} \cdot \hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + s_1 \\ 1 + s_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.61)$$

透射率 $(1 + s_1)/2$ 对应于庞加莱球上一系列垂直于 S_1 轴的平面,如图 6.15 所示。每个平面表示一组具有相同透射率的偏振态。穿过球中心的平面表示透射率为 $1/2$ 的斯托克斯参数,包括 45° 偏振、 135° 偏振、左右旋圆偏振和非偏振。在 $(1, 0, 0)$ 处与球面相切的平面表示透射率为 1 的偏振态(在偏振器透光轴上)。在 $(-1, 0, 0)$ 处与球面相切的平面表示透射率为零的偏振态(在偏振器消光轴上)。相同的情况适用于任何偏振器。对于二向衰减器,透射率在 $T_{\max}$ 和 $T_{\min}$ 之间线性变化。



图 6.15 对于二向衰减器,垂直于透光轴的线表示一组透过率相等的偏振态。

对于垂直于轴的平面,透射率从 $T_{\min}$ 到 $T_{\max}$ 呈线性变化

下面考虑斯托克斯参数在通过二向色性材料(如偏振片)时的演变。入射偏振态将向庞加莱球上的透射轴移动。图 6.16 显示了几种不同的入射偏振态通过二向色的二向衰减器时相应的轨迹。二向衰减在刚开始时为零,并随着传播距离的增加而增加。对于偏振入射光束,偏振态沿着大圆从吸收轴向透射轴演变。当初始偏振态更接近透射态或衰减态时,弧长更短。轴上的两个入射态(透射态和衰减态)的轨迹长度为零,因此这些偏振态不会移动。

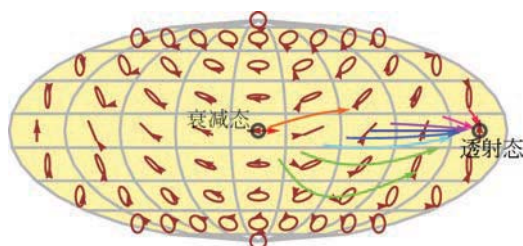


图 6.16 在庞加莱球上绘制了几个初始偏振态通过二向衰减率为 0.6 的二向色介质的偏振态演变,其中介质的透射态(透射轴)为垂直偏振的,衰减态为水平偏振的。在每个轨迹的开始,二向衰减为零。二向衰减沿箭头方向稳步增加。在每个箭头的中点,二向衰减率为 0.3;在箭头的末端或顶端,二向衰减率为 0.6。二向衰减率为 1 时,轨迹会延伸到透射态

6.8.4 偏振特性的表示

许多商用偏振分析仪使用庞加莱球表示与二向衰减特性(d_H, d_{45}, d_R)、偏振度特性(p_H, p_{45}, p_R)和延迟特性($\delta_H, \delta_{45}, \delta_R$)相关的本征态,其中下标 H、45 和 R 表示相应的斯托克斯参数分量。本节给出了两个示例。

例 6.5 偏振器序列

一个水平线偏振器后接一个 45° 线偏振器, 米勒矩阵为

$$\mathbf{LP}(45^\circ) \cdot \mathbf{LP}(0^\circ) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.62)$$

本征偏振态是垂直偏振光和 135° 偏振光, 因此, 这是一个非齐次偏振器的米勒矩阵。二向衰减参数位于首行, 为

$$(M_{01}, M_{02}, M_{03}) = (1, 0, 0) \quad (6.63)$$

偏振度参数位于左列, 为

$$(M_{10}, M_{20}, M_{30}) = (0, 1, 0) \quad (6.64)$$

这些特性用庞加莱球表示在图 6.17 中。偏振器的延迟没有定义, 因此没有标示出来。



图 6.17 特殊非齐次偏振器的偏振特性的庞加莱球表示法, 该非齐次偏振器由水平偏振器后接 45° 偏振器组成。棕色线段表示二向衰减轴, 蓝色线段表示偏振度轴

例 6.6 线性二向衰减器后接延迟器

一个水平线性二向衰减器, $T_{\max} = 1, T_{\min} = 0.5$, 二向衰减率 $D = 1/3$, 其后是一个 45° 四分之一波长线性延迟器, 则米勒矩阵为

$$\begin{aligned} & \mathbf{LR}\left(\frac{\pi}{2}, 45^\circ\right) \cdot \mathbf{LD}\left(1, \frac{1}{2}, 0^\circ\right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.65) \end{aligned}$$

具有二向衰减参数 $(1/3, 0, 0)$ 、偏振度参数 $(0, 0, 1/3)$ 和延迟参数 $(0, \pi/2, 0)$ 。这些性质表示在庞加莱球上,如图 6.18 所示。



图 6.18 式(6.65)的米勒矩阵偏振特性的庞加莱球表示。

棕色线段表示二向衰减轴,蓝色线段表示偏振度轴,绿色线段表示延迟快轴

6.9 弱偏振元件

弱偏振元件只引起偏振态微小的变化。弱偏振元件的米勒矩阵接近于单位矩阵乘以一个常数(考虑吸收或传输损耗)。弱米勒矩阵的性质比一般的米勒矩阵简单得多,因为延迟、二向衰减和退偏都接近于零。这种弱偏振元件的一些重要例子是镜头、显微镜、望远镜中的透镜表面和反射镜表面,由于菲涅耳方程、抗反射膜层或反射镜面,它们的偏振特性不为零,但二向衰减和延迟效应通常远低于 0.05。

通过将米勒矩阵关于二向衰减或延迟进行泰勒级数展开,可研究米勒矩阵的结构并获得这些弱元件的偏振性质。弱延迟器的延迟接近零。对椭圆延迟器的一般方程(式(6.28))进行泰勒级数展开并保留一阶项,得到如下简单的弱延迟器米勒矩阵,

$$\lim_{\delta_H, \delta_{45}, \delta_R \rightarrow 0} \mathbf{E}(\delta_H, \delta_{45}, \delta_R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \delta_R & -\delta_{45} \\ 0 & -\delta_R & 1 & \delta_H \\ 0 & \delta_{45} & -\delta_H & 1 \end{bmatrix} \quad (6.66)$$

类似地,对二向衰减器的一般表达式进行一阶泰勒级数展开可得弱二向衰减器米勒矩阵,

$$\lim_{d_H, d_{45}, d_R \rightarrow 0} \mathbf{D}(d_H, d_{45}, d_R, T_{\text{Avg}}) = T_{\text{Avg}} \begin{bmatrix} 1 & d_H & d_{45} & d_R \\ d_H & 1 & 0 & 0 \\ d_{45} & 0 & 1 & 0 \\ d_R & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.67)$$

将这两个表达式结合起来,就得到弱二向衰减器和延迟器的米勒矩阵,

$$\mathbf{WDR}(d_H, d_{45}, d_R, \delta_H, \delta_{45}, \delta_R, T_{\text{Avg}}) = T_{\text{Avg}} \begin{bmatrix} 1 & d_H & d_{45} & d_R \\ d_H & 1 & \delta_R & -\delta_{45} \\ d_{45} & -\delta_R & 1 & \delta_H \\ d_R & \delta_{45} & -\delta_H & 1 \end{bmatrix} \quad (6.68)$$

这三个方程只对一阶项成立。当这些参数不是无穷小的时候,高阶项就出现了,它们可以从前面给出的精确方程中计算得出。

弱二向衰减器的第一行和第一列是对称的。弱延迟器右下 3×3 元素在非对角线方向是反对称的。弱偏振元件米勒矩阵的第一行和第一列中反对称分量的出现和右下方 3×3 元素中对称分量的出现,表明存在退偏,这将在 6.11.4 节详述。

例 6.7 弱偏振的米勒矩阵

考虑一个弱偏振的米勒矩阵

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0.02 & 0 & 0.01 \\ 0.02 & 1 & -0.005 & 0 \\ 0 & 0.005 & 1 & -0.01 \\ 0.01 & 0 & 0.01 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.69)$$

二向衰减的水平分量 $d_H = 0.02$, 右旋圆分量 $d_R = 0.01$ 。二向衰减大小为

$$d = \sqrt{0.02^2 + 0.01^2} \approx 0.022 \quad (6.70)$$

具有最大透射率的偏振态的斯托克斯参量正比于

$$S_{\text{max}} \propto \begin{bmatrix} 0.022 \\ 0.02 \\ 0 \\ 0.01 \end{bmatrix} \quad (6.71)$$

延迟具有水平分量 $\delta_H = 0.01$ 和右旋圆分量 $\delta_R = 0.005$ 。因为这些参数与二向衰减参数成正比,所以矩阵是齐次的,有正交本征偏振态,由二向衰减部分和延迟部分共享。延迟大小为

$$\delta = \sqrt{0.01^2 + 0.005^2} \approx 0.011 \quad (6.72)$$

6.10 非退偏的米勒矩阵

非退偏的米勒矩阵是一系列米勒矩阵,它对于 $\text{DoP}(\mathbf{S}) = 1$ 的任意完全偏振入射光,出射时仍为完全偏振光。非退偏米勒矩阵的退偏指数为 1,这将在式(6.79)中介绍。非退偏米勒矩阵是米勒矩阵的一个子集。琼斯矩阵只能描述非退偏的相互作用。非退偏米勒矩阵是那些具有对应琼斯矩阵的米勒矩阵,因此非退偏米勒矩阵也被称为米勒-琼斯矩阵^[5]。

理想偏振器是非退偏的,当入射光束是偏振的,出射光束也是偏振的。同样,理想延迟器也是非退偏的。非退偏米勒矩阵包含所有任意序列二向衰减和延迟的米勒矩阵乘积。米勒-琼斯矩阵必须对所有 θ 和 η 满足以下条件:

$$\text{DoP}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{S}) = \text{DoP} \left(\begin{bmatrix} M_{00} & M_{01} & M_{02} & M_{03} \\ M_{10} & M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{20} & M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{30} & M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(2\theta)\cos\eta \\ \sin(2\theta)\cos\eta \\ \sin\eta \end{bmatrix} \right) = 1 \quad (6.73)$$

非退偏米勒矩阵的一个必要但不充分的条件是^[6]

$$\text{Tr}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^T) = 4M_{00}^2 \quad (6.74)$$

其中, Tr 是矩阵的迹, 即对角元素之和。 $\text{Tr}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^T)$ 等于所有矩阵元素的平方和,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^T) = & M_{00}^2 + M_{01}^2 + M_{02}^2 + M_{03}^2 + M_{10}^2 + M_{11}^2 + M_{12}^2 + M_{13}^2 + \\ & M_{20}^2 + M_{21}^2 + M_{22}^2 + M_{23}^2 + M_{30}^2 + M_{31}^2 + M_{32}^2 + M_{33}^2 \end{aligned} \quad (6.75)$$

在典型的成像光学系统中, 退偏是透镜和反射镜表面、滤光器和偏振元件不希望有的特性。退偏与散射有关, 光学表面经过精心制作和镀膜可以减小散射。对于高质量的光学表面, 退偏通常非常小。因此, 大多数光学表面都可以用非退偏米勒矩阵很好地描述。

6.11 退偏

退偏是光的偏振度(DoP)的降低。退偏最早是由大卫·布鲁斯特在 1815 年提出的^[7]。在米勒运算中, 退偏可被描述为偏振光到非偏振光的耦合。偏振入射光经过退偏器件后, 出射的斯托克斯参数 $\text{DoP} < 1$, 并且可以在数学上分解为完全偏振的和非偏振的斯托克斯参数的组合。

具有显著散射的光学元件在一定程度上会使光退偏。类似地, 粗糙的金属表面、涂漆表面和天然表面(如岩石、草地和沙子)会使光部分退偏。积分球(图 6.19)在实验室中经常被用来将光退偏成近似非偏振光, 就像乳白玻璃板那样。牛奶和其他混浊液体在退偏方面也很有效。当用激光照射积分球时, 出射光是散斑图案, 出射偏振态被扰乱, 类似退偏光束。图 6.20 显示了模拟偏振散斑图案的椭圆图。 x 偏振光形成一个散斑图案, y 偏振光形成另一个图案。它们组合在一起, 由随机偏振场中每个点的琼斯矢量描述。对于单色照明, 图案在每个点都是偏振的, 但对一个区域中的斯托克斯参数取平均会产生退偏效果。

米勒矩阵有 16 个独立自由度(DoF), 见表 6.3。在这 16 个自由度中, 一个对应于损耗, 三个对应于二向衰减, 三个对应于延迟, 其余九个自由度描述退偏。

表 6.3 偏振矩阵中的自由度

	琼斯矩阵	米勒矩阵
透过率	1	1
绝对相位	1	0
二向衰减	3	3
延迟	3	3
退偏	0	9

米勒矩阵三个对角元素 M_{11} 、 M_{22} 、 M_{33} 所体现的退偏往往在九个自由度中最显著。理想退偏器的米勒矩阵 $\mathbf{ID}$, 可将所有入射光束转换为非偏振光,

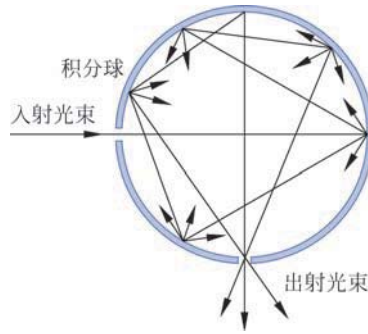


图 6.19 积分球是很好的退偏器。其内壁有高反射率的漫反射涂层。大多数光线在到达输出端口之前会有多次散射,确保每条出射光线都包含来自各种路径和散射角度的光

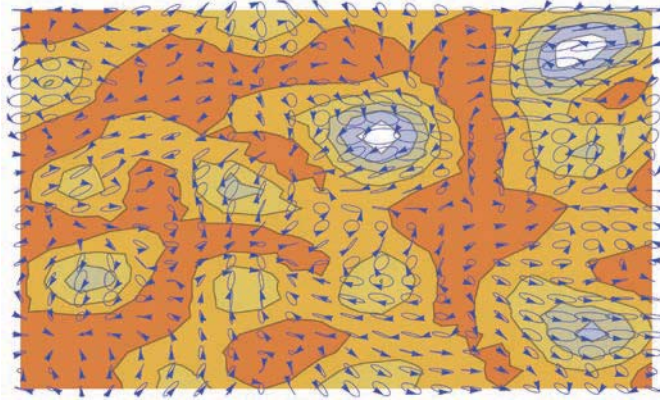


图 6.20 激光照射积分球或其他退偏器的散斑图案的模拟。因为光束是单色的,所以激光散斑图案在每个点都是偏振的。然而,每个散斑的振幅和偏振态都不同。这里,将偏振椭圆映射在强度分布的等高线图上,其中棕色最暗,白色最亮。散斑图案具有较大的低光通量区域和小得多的亮区域,即散斑^[8-9]

$$\mathbf{ID} \cdot \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.76)$$

只有非偏振光才可以从这种器件中出射。虽然这个矩阵是理想化的,但一些器件,如积分球,接近这种几乎完全退偏的条件。

部分退偏器的米勒矩阵对所有入射态退偏效果相同,

$$\mathbf{PD} \cdot \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = (1-d) \begin{bmatrix} S_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (6.77)$$

所有完全偏振入射态都以 $\text{DoP}(\mathbf{PD} \cdot \mathbf{S}) = d$ 部分偏振态出射。对角的退偏器米勒矩阵 $\mathbf{DD}$ 代表一个可变的退偏器；出射光的偏振度是入射偏振态的函数， S_1 的出射 DoP 为 a ， S_2 的为 b ， S_3 的为 c ，

$$\mathbf{DD} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad (6.78)$$

物理上，退偏与散射密切相关，常源于延迟或二向衰减在时间、空间或波长上的快速变化。

6.11.1 退偏指数和平均偏振度

两个退偏指标——退偏指数和平均偏振度，用来描述米勒矩阵对入射态的退偏程度^[10-12]。

退偏指数 $\text{DI}(\mathbf{M})$ 是归一化米勒矩阵 $\mathbf{M}/M_{00}$ 与理想退偏器的欧几里得距离，用 $\| \cdot \|$ 表示：

$$\text{DI}(\mathbf{M}) = \left\| \frac{\mathbf{M}}{M_{00}} - \mathbf{ID} \right\| = \frac{\sqrt{\left(\sum_{i,j} M_{ij}^2 \right) - M_{00}^2}}{\sqrt{3} M_{00}} \quad (6.79)$$

$\text{DI}(\mathbf{M})$ 的变化范围为 0 (理想退偏器) 到 1 (所有非退偏米勒矩阵，包括所有纯二向衰减器、纯延迟器和由它们组成的任意序列)。退偏指数方程的形式类似于斯托克斯参数的偏振度方程。

平均偏振度，或平均 DoP，是庞加莱球面上均匀分布的入射偏振光所对应出射光偏振度的算术平均值，

$$\text{平均 DoP}(\mathbf{M}) = \frac{\int_0^\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{DoP}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{S}(\theta, \eta)) \cos \eta d\eta d\theta}{2\pi} \quad (6.80)$$

其中，对于斯托克斯参数 $\mathbf{S}(\theta, \eta)$ ， θ 是主轴的方向， η 是庞加莱球上的纬度 (单位为弧度)，

$$\mathbf{S}(\theta, \eta) = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(2\theta) \cos \eta \\ \sin(2\theta) \cos \eta \\ \sin \eta \end{bmatrix} \quad (6.81)$$

平均 DoP 从 0 到 1 变化，用单个数值概括了退偏特性。当平均 DoP 等于 1 时，出射光总是完全偏振的，表示非退偏的米勒矩阵。接近 1 的值表示少量退偏。当平均 DoP 等于 0 时，出射光是完全退偏的，只有非偏振光出射。图 6.21 显示了一个孔径内具有不同偏振器的 DI 和平均 DoP，例 6.9 中给出了详细的计算。

DI 和平均 DoP 的值通常很接近。平均 DoP 是更容易理解的指标，它给出了出射光的偏振度均值 (在庞加莱球上取平均)，即期望值。DI 在米勒矩阵构形空间中具有明确的几何意义，是从理想退偏器米勒矩阵到非退偏器米勒矩阵超球面的欧几里得距离。

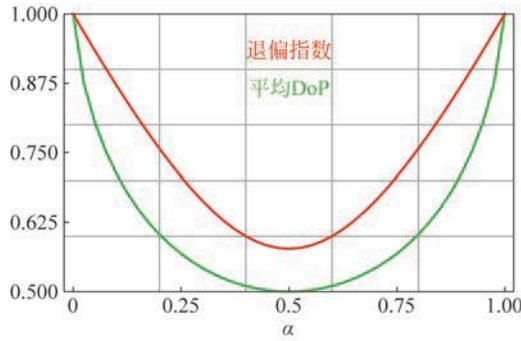


图 6.21 孔径的比例 α 部分覆盖水平偏振器, $1-\alpha$ 部分覆盖垂直偏振器, 形成的一组米勒矩阵的退偏指数(红色)和平均偏振度(绿色)

6.11.2 偏振度面和偏振度图

通过使用偏振度面和偏振度图分析偏振度随入射态的变化, 可了解退偏的九个自由度^[13]。

米勒矩阵 $\mathbf{M}$ 的 DoP 面是将每组归一化斯托克斯参数 $\mathbf{S}$ 径向内移到距离原点 $\text{DoP}(\mathbf{S}' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{S})$ 处而形成的, 其中 $\mathbf{S}$ 由庞加莱球面上的三个斯托克斯参量 (S_1, S_2, S_3) 组成。在庞加莱球面上对所有入射的 $\mathbf{S}$ 作图, 有

$$\text{DoP 面}(\mathbf{M}, \mathbf{S}) = \frac{\sqrt{S'_1(\mathbf{M}, \mathbf{S})^2 + S'_2(\mathbf{M}, \mathbf{S})^2 + S'_3(\mathbf{M}, \mathbf{S})^2}}{S'_0(\mathbf{M}, \mathbf{S})} (S_1, S_2, S_3) \quad (6.82)$$

DoP 面是标量 DoP 和矢量 (S_1, S_2, S_3) 的乘积, 形成的一个三维曲面。对于非退偏米勒矩阵, 所有入射态的出射偏振度都是 1, 因此, DoP 面是单位球。在这种情况下, 庞加莱球没有收缩。

DoP 图是将 DoP 表示为庞加莱球展平图上的等高线图。为创建 DoP 图, 把庞加莱球表面用长轴方向 θ 和圆偏振度 DoCP 参数化为

$$\mathbf{S}(\theta, \text{DoCP}) = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(2\theta)\cos(\arcsin\text{DoCP}) \\ \sin(2\theta)\cos(\arcsin\text{DoCP}) \\ \text{DoCP} \end{bmatrix} \quad (6.83)$$

米勒矩阵出射光的 DoP 被绘制为等高线图, 是 θ 和 DoCP 的函数。DoP 面和 DoP 图代表相同的信息, 即作为入射偏振态函数的出射 DoP。

举一个退偏的例子, 有一个孔径, 它的一半覆盖有水平偏振器, 另一半覆盖有垂直偏振器, 形成米勒矩阵 $\mathbf{M}_1$,

$$\mathbf{M}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.84)$$

$\mathbf{M}_1$ 的 DoP 面和 DoP 图如图 6.22 所示。当①垂直偏振光入射且仅垂直偏振光出射时和②

水平偏振光入射且仅水平偏振光出射时,出现两个 DoP 的最大值。位于庞加莱球面水平偏振态和垂直偏振态之间的中间圆上的入射偏振态,出射光是完全退偏的,并且是一半水平偏振光和一半垂直偏振光的非相干叠加。

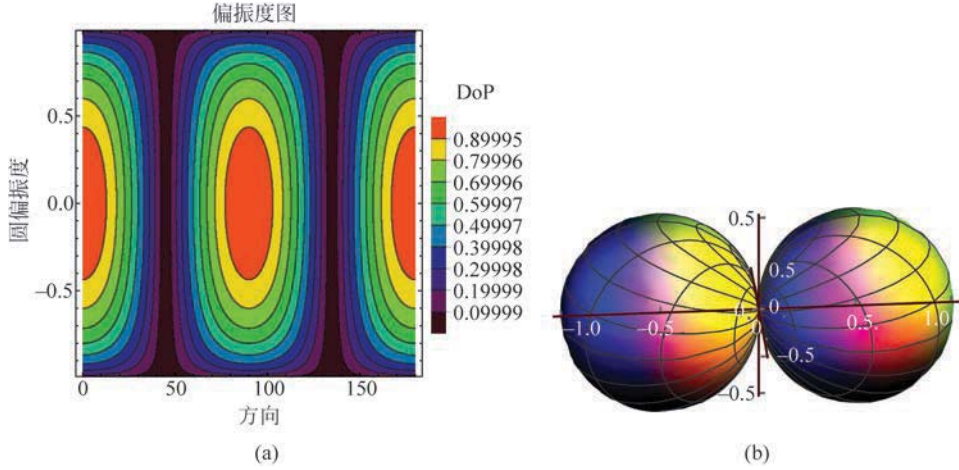


图 6.22 M_1 的偏振度图(a)和偏振度面(b), M_1 是由水平和 90° 线性偏振器组合形成的米勒矩阵

另一个例子,考虑一个米勒矩阵为 M_2 的元件,其孔径的一半覆盖有水平线性偏振器,而另一半覆盖有 45° 线性偏振器,

$$M_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.85)$$

M_2 的 DoP 面和 DoP 图如图 6.23 所示。最大 DoP 的两个偏振态 $(1, -1, 0, 0)$ 和 $(1, 0, -1, 0)$ 分别被两个偏振器阻挡。可以看出, DoP 图中的最大值不必正交。

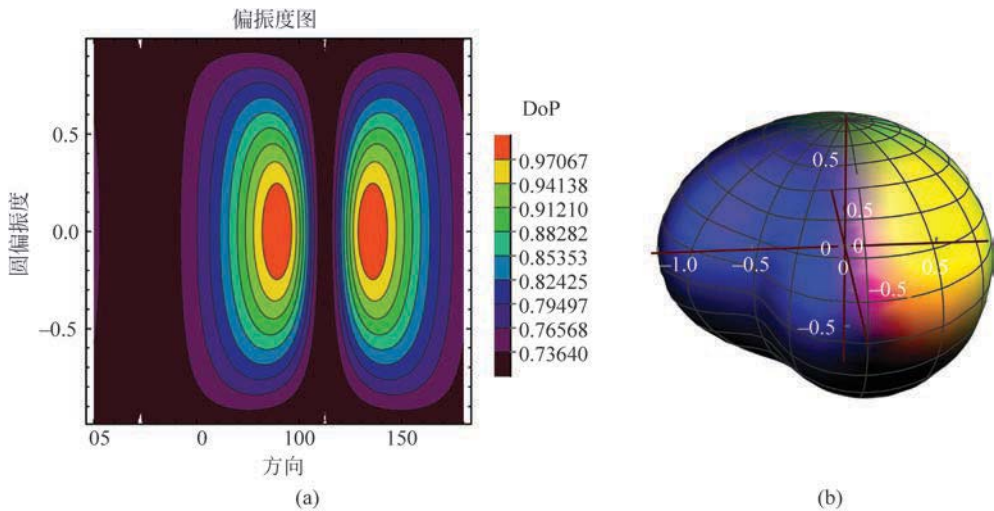


图 6.23 M_2 的偏振度图(a)和偏振度面(b), M_2 是由水平和 45° 线性偏振器组合形成的米勒矩阵

DoP 图和 DoP 面可以显示一个或两个最大值和一个或两个最小值。对于环绕庞加莱球的整圈入射态,这些最大值或最小值也可能简并。

6.11.3 米勒矩阵的物理可实现性测试

要在物理上可实现^[14-15],对于所有可能的斯托克斯参量集,米勒矩阵要能产生有效的出射斯托克斯参量;否则,米勒矩阵在物理上是不可实现的。只有 4×4 矩阵的一个子集是物理上可实现的米勒矩阵。物理上不可实现的米勒矩阵可能是米勒矩阵测量中的一个问题。偏振测量仪总是有噪声。延迟器、二向衰减器及其组合刚好位于物理可实现和物理不可实现米勒矩阵的边界上。因此,少量的噪声即可将退偏指数为 1 的米勒矩阵移动到非物理可实现的区域。Goldstein 提供了将非物理可实现的米勒矩阵移动到最接近的物理可实现矩阵的算法和例子^[16]。

对于物理上可实现的米勒矩阵,必须满足几个条件。第一,输出光通量必须是非负的, $S'_0 \geq 0$ 。第二,对于所有输入偏振态,输出偏振度必须介于 0 和 1 之间,

$$0 \leq \text{DoP}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{S}) \leq 1 \quad (6.86)$$

如果偏振度大于 1,则输出偏振态是非物理可实现的。对物理可实现性的一个检验是测试退偏指数在 0 和 1 之间,

$$0 \leq \text{DI}(\mathbf{M}) \leq 1 \quad (6.87)$$

目前已开发出了一些综合性且系统性的测试法。Givens 和 Kostinski^[17]对米勒矩阵物理可实现性的评估如下。定义洛伦兹度量矩阵 $\mathbf{G}$ 为

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (6.88)$$

然后,米勒相干矩阵为

$$\mathbf{D} = \mathbf{G}\mathbf{M}^T\mathbf{G}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (6.89)$$

其中,

$$\begin{aligned} a_{00} &= M_{00}^2 - M_{10}^2 - M_{20}^2 - M_{30}^2 \\ a_{01} &= M_{00}M_{01} - M_{10}M_{11} - M_{20}M_{21} - M_{30}M_{31} \\ a_{02} &= M_{00}M_{02} - M_{10}M_{12} - M_{20}M_{22} - M_{30}M_{32} \\ a_{03} &= M_{00}M_{03} - M_{10}M_{13} - M_{20}M_{23} - M_{30}M_{33} \\ a_{10} &= -M_{00}M_{01} + M_{10}M_{11} + M_{20}M_{21} + M_{30}M_{31} \\ a_{11} &= -M_{01}^2 + M_{11}^2 + M_{21}^2 + M_{31}^2 \\ a_{12} &= -M_{01}M_{02} + M_{11}M_{12} + M_{21}M_{22} + M_{31}M_{32} \\ a_{13} &= -M_{01}M_{03} + M_{11}M_{13} + M_{21}M_{23} + M_{31}M_{33} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{20} &= -M_{00}M_{02} + M_{10}M_{12} + M_{20}M_{22} + M_{30}M_{32} \\
a_{21} &= -M_{01}M_{02} + M_{11}M_{12} + M_{21}M_{22} + M_{31}M_{32} \\
a_{22} &= -M_{02}^2 + M_{12}^2 + M_{22}^2 + M_{32}^2 \\
a_{23} &= -M_{02}M_{03} + M_{12}M_{13} + M_{22}M_{23} + M_{32}M_{33} \\
a_{30} &= -M_{00}M_{03} + M_{10}M_{13} + M_{20}M_{23} + M_{30}M_{33} \\
a_{31} &= -M_{01}M_{03} + M_{11}M_{13} + M_{21}M_{23} + M_{31}M_{33} \\
a_{32} &= -M_{02}M_{03} + M_{12}M_{13} + M_{22}M_{23} + M_{32}M_{33} \\
a_{33} &= -M_{03}^2 + M_{13}^2 + M_{23}^2 + M_{33}^2
\end{aligned}$$

为了成为物理上可实现的米勒矩阵,① $\mathbf{D}$ 的所有特征值必须是实数,及②与最大特征向量对应的特征值必须对应一组有效的斯托克斯参量。

例 6.8 检验米勒矩阵的物理可实现性

考虑一个具有单一自由度 β 的退偏矩阵族 $\mathbf{M}_3$ 的例子,

$$\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0 & 0 \\ \beta & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \quad (6.90)$$

β (元素 M_{10}) 在什么范围内, $\mathbf{M}_3$ 是一个有效的物理可实现的米勒矩阵呢? 对应的米勒相干矩阵为

$$\mathbf{D}_3 = \begin{bmatrix} 1-\beta^2 & 0.1-0.9\beta & 0 & 0 \\ -0.1+0.9\beta & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.81 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.64 \end{bmatrix} \quad (6.91)$$

特征值为

$$\lambda = \begin{cases} 0.81 \\ 0.64 \\ 0.9 - 0.5\beta^2 - 0.5\sqrt{0.72\beta - 3.64\beta^2 + \beta^4} \\ 0.9 - 0.5\beta^2 + 0.5\sqrt{0.72\beta - 3.64\beta^2 + \beta^4} \end{cases} \quad (6.92)$$

由判别式 $0.72\beta - 3.64\beta^2 + \beta^4$ 得出 β 范围为 $0 \leq \beta \leq 0.2$ 。因此, β 只有在该范围内, 四个特征值才均为实数。容易证实, 在此范围内, 第四个特征值对应的特征向量具有物理可实现的斯托克斯参量。因此, 只有在 $0 \leq \beta \leq 0.2$ 的范围内, $\mathbf{M}_3$ 才是有效的米勒矩阵。

6.11.4 弱退偏元件

6.9 节用三个二向衰减自由度和三个延迟自由度在单位矩阵邻域描述了弱非退偏元件的米勒矩阵。这种方法很容易扩展到其余的九个自由度, 从而得到九种形式的退偏^[18]。观察退偏自由度的一种简单方法如下。对于弱米勒矩阵, 退偏自由度与下列矩阵元素的组合相关,

$$\mathbf{WDepol} = \begin{bmatrix} 1 & e_1 & e_2 & e_3 \\ -e_1 & 1-g_1 & f_3 & -f_2 \\ -e_2 & f_3 & 1-g_2 & f_1 \\ -e_3 & -f_2 & f_1 & 1-g_3 \end{bmatrix} \quad (6.93)$$

九种形式被分成三个族。 g_1, g_2, g_3 与对角线相关,被标记为对角退偏。 e_1, e_2, e_3 与二向衰减元素中的反对称值相关,被标记为幅值退偏。 f_1, f_2, f_3 与延迟元素中的对称值相关,被标记为相位退偏。幅度退偏、相位退偏和对角退偏这三种形式中的每一种都有一个与 S_1 相关的项、一个与 S_2 相关的项和一个与 S_3 相关的项。当 e, f, g 分量接近 0 时,矩阵 $\mathbf{WDepol}$ 接近单位矩阵,退偏可被视为弱的。由于这些元素的对称性, $\mathbf{WDepol}$ 没有二向衰减和延迟。随着退偏强度的增加,这些项不再是纯线性的。通过将 $\mathbf{WDepol}$ 提高到任意幂,可以生成弱极限外的具有特定退偏项的退偏矩阵,

$$\mathbf{WDepol}^N = \begin{bmatrix} 1 & e_1 & e_2 & e_3 \\ -e_1 & 1-g_1 & f_3 & f_2 \\ -e_2 & f_3 & 1-g_2 & f_1 \\ -e_3 & f_2 & f_1 & 1-g_3 \end{bmatrix}^N \quad (6.94)$$

必须注意,因为式(6.93)的矩阵只有在系数等于 0 的极限情况下才能物理可实现;因此,式(6.93)是轻微非物理可实现的,得到的矩阵需要做微小调整以达到物理可实现性。

6.11.5 米勒矩阵相加

式(6.6)所示的米勒矩阵的矩阵乘积代表了偏振元件序列。另一方面,米勒矩阵相加表示偏振元件并排共享一个孔径。无论何时,两个不同的非退偏米勒矩阵相加,必定会引入退偏。一般来说,孔径上,不同的斯托克斯参数出射时组合起来会降低偏振度。

米勒矩阵函数可以在时间或空间上积分,以模拟随时间或空间变化的偏振过程,如下面两个例子所示。

例 6.9 两个偏振器覆盖一个孔径

考虑一个孔径,其中一部分 α 被水平线偏振器覆盖,其余部分 $1-\alpha$ 被垂直线偏振器填充。得到的米勒矩阵是,

$$\begin{aligned} \alpha \mathbf{HLP} + (1-\alpha) \mathbf{VLP} &= \frac{\alpha}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{(1-\alpha)}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2\alpha-1 & 0 & 0 \\ 2\alpha-1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.95)$$

当 $\alpha=1/2$ 时,孔径的一半为水平偏振的,另一半为垂直偏振的。它们的组合起到部分退偏器的作用,退偏指数为 $1/\sqrt{3}$ 。 S_2 和 S_3 退偏,但 S_1 出射时保持不变。

例 6.10 旋转的四分之一波长线性延迟器

考虑一个快速旋转的四分之一波长线性延迟器,类似于图 6.14 中描述的情况,有一个时间平均的米勒矩阵

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \mathbf{QWLR}(\theta) d\theta &= \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(2\theta) & \cos(2\theta)\sin(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ 0 & \cos(2\theta)\sin(2\theta) & \sin^2(2\theta) & \cos(2\theta) \\ 0 & \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) & 0 \end{bmatrix} d\theta \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.96)$$

退偏指数为 $1/\sqrt{6}$ 和平均 DoP 为 $\pi/8$,二者相差约 0.016。这种米勒矩阵使圆偏振光完全退偏,并且使线偏振度减小一半。

6.12 琼斯矩阵和米勒矩阵的关联**6.12.1 使用张量积将琼斯矩阵转换为米勒矩阵**

与米勒矩阵一样,琼斯矩阵(第5章)对样品偏振进行了非常有效的表征,特别是因为琼斯矩阵具有更简单的性质,而且更容易操作和解释。将米勒矩阵映射到琼斯矩阵(反之亦然)的复杂性在于,米勒矩阵不能表示绝对相位,琼斯矩阵不能表示退偏。只有非退偏米勒矩阵或米勒-琼斯矩阵才有对应的琼斯矩阵。所有琼斯矩阵都有一个对应的米勒矩阵。然而,由于绝对相位在米勒矩阵中没有表示,许多具有不同绝对相位的琼斯矩阵可被映射为同一米勒矩阵。

琼斯矩阵和米勒矩阵都可以计算非退偏相互作用序列的偏振特性,即级联一系列二向衰减器和延迟器的效应。当这个同样的偏振元件序列由琼斯矩阵或米勒矩阵计算时,结果都包含相同的二向衰减和延迟特性。两种方法都适用。

数学小贴士 6.1 张量积

两个 2×2 矩阵的张量积 $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ 是以下矩阵^[5,19-21]

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} & a_{12} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ a_{21} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} & a_{22} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \quad (6.97)$$

通过张量积 $\mathbf{J}^T \otimes \mathbf{J}^\dagger$ 的西变换, 琼斯矩阵 $\mathbf{J}$ 被变换成等价的米勒矩阵 $\mathbf{M}$, 酉矩阵 $\mathbf{U}$ 为

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \end{bmatrix} = (\mathbf{U}^{-1})^\dagger \quad (6.98)$$

请注意, 四行中的每一行都是泡利矩阵的展平版本, 但第四行是负的 σ_3 ^①。对应于琼斯矩阵 $\mathbf{J}$ 的米勒矩阵为^②

$$\mathbf{M} = \mathbf{U} \cdot (\mathbf{J}^* \otimes \mathbf{J}) \cdot \mathbf{U}^{-1} \quad (6.99)$$

形式为 $\mathbf{J}' = e^{-i\phi} \mathbf{J}$ 的所有琼斯矩阵都变换成同样的米勒矩阵。考虑琼斯矩阵, 将它的复元素表示为极坐标形式,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} j_{xx} & j_{xy} \\ j_{yx} & j_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{xx} e^{-i\phi_{xx}} & \rho_{xy} e^{-i\phi_{xy}} \\ \rho_{yx} e^{-i\phi_{yx}} & \rho_{yy} e^{-i\phi_{yy}} \end{bmatrix} \quad (6.100)$$

张量积 $\mathbf{J}^* \otimes \mathbf{J}$ 用式(6.97)计算。

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}^* \otimes \mathbf{J}) &= \begin{bmatrix} \rho_{xx} e^{i\phi_{xx}} \begin{bmatrix} \rho_{xx} e^{-i\phi_{xx}} & \rho_{xy} e^{-i\phi_{xy}} \\ \rho_{yx} e^{-i\phi_{yx}} & \rho_{yy} e^{-i\phi_{yy}} \end{bmatrix} & \rho_{xy} e^{i\phi_{xy}} \begin{bmatrix} \rho_{xx} e^{-i\phi_{xx}} & \rho_{xy} e^{-i\phi_{xy}} \\ \rho_{yx} e^{-i\phi_{yx}} & \rho_{yy} e^{-i\phi_{yy}} \end{bmatrix} \\ \rho_{yx} e^{i\phi_{yx}} \begin{bmatrix} \rho_{xx} e^{-i\phi_{xx}} & \rho_{xy} e^{-i\phi_{xy}} \\ \rho_{yx} e^{-i\phi_{yx}} & \rho_{yy} e^{-i\phi_{yy}} \end{bmatrix} & \rho_{yy} e^{i\phi_{yy}} \begin{bmatrix} \rho_{xx} e^{-i\phi_{xx}} & \rho_{xy} e^{-i\phi_{xy}} \\ \rho_{yx} e^{-i\phi_{yx}} & \rho_{yy} e^{-i\phi_{yy}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \rho_{xx}^2 & \rho_{xx}\rho_{xy} e^{i(\phi_{xx}-\phi_{xy})} & \rho_{xy}\rho_{xx} e^{i(\phi_{xy}-\phi_{xx})} & \rho_{xy}^2 \\ \rho_{xx}\rho_{yx} e^{i(\phi_{xx}-\phi_{yx})} & \rho_{xx}\rho_{yy} e^{i(\phi_{xx}-\phi_{yy})} & \rho_{xy}\rho_{yx} e^{i(\phi_{xy}-\phi_{yz})} & \rho_{xy}\rho_{yy} e^{i(\phi_{xy}-\phi_{yy})} \\ \rho_{yx}\rho_{xx} e^{i(\phi_{yx}-\phi_{xx})} & \rho_{yx}\rho_{xy} e^{i(\phi_{yx}-\phi_{xy})} & \rho_{yy}\rho_{xx} e^{i(\phi_{yy}-\phi_{xx})} & \rho_{yy}\rho_{xy} e^{i(\phi_{yy}-\phi_{xy})} \\ \rho_{yx}^2 & \rho_{yx}\rho_{yy} e^{i(\phi_{yx}-\phi_{yy})} & \rho_{yy}\rho_{yx} e^{i(\phi_{yy}-\phi_{yx})} & \rho_{yy}^2 \end{bmatrix} \quad (6.101) \end{aligned}$$

当 $\mathbf{J}^* \otimes \mathbf{J}$ 被 $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{U}^{-1}$ 变换时, 它给出了如式(6.102)所示的米勒矩阵元素。

① 在本书的琼斯矩阵中, 正 σ_3 与左旋圆偏振相关(14.6.1节和14.6.2节)。在斯托克斯参量中, 正 S_3 与右旋圆偏振和椭圆偏振相关。因此, 这两个分量之间的转换需要一个负号。

② 在斯托克斯参量和米勒矩阵的一些工作中, 最后一个斯托克斯参数 S_3 的正值表示左旋圆偏振光, 而不是本书中的右旋圆偏振光。

$$\begin{aligned}
 U \cdot (J^* \otimes J) \cdot U^{-1} = & \begin{bmatrix} M_{00} \\ M_{01} \\ M_{02} \\ M_{03} \\ M_{10} \\ M_{11} \\ M_{12} \\ M_{13} \\ M_{20} \\ M_{21} \\ M_{22} \\ M_{23} \\ M_{30} \\ M_{31} \\ M_{32} \\ M_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2 + \rho_{yx}^2 + \rho_{yy}^2) \\ \frac{1}{2}(\rho_{xx}^2 - \rho_{xy}^2 + \rho_{yx}^2 - \rho_{yy}^2) \\ \rho_{xx}\rho_{xy}\cos(\phi_{xx} - \phi_{xy}) + \rho_{yx}\rho_{yy}\cos(\phi_{yx} - \phi_{yy}) \\ \rho_{xx}\rho_{xy}\sin(\phi_{xx} - \phi_{xy}) + \rho_{yx}\rho_{yy}\sin(\phi_{yx} - \phi_{yy}) \\ \frac{1}{2}(\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2 - \rho_{yx}^2 - \rho_{yy}^2) \\ \frac{1}{2}(\rho_{xx}^2 - \rho_{xy}^2 - \rho_{yx}^2 + \rho_{yy}^2) \\ \rho_{xx}\rho_{xy}\cos(\phi_{xx} - \phi_{xy}) - \rho_{yx}\rho_{yy}\cos(\phi_{yx} - \phi_{yy}) \\ \rho_{xx}\rho_{xy}\sin(\phi_{xx} - \phi_{xy}) - \rho_{yx}\rho_{yy}\sin(\phi_{yx} - \phi_{yy}) \\ \rho_{xx}\rho_{yx}\cos(\phi_{xx} - \phi_{yx}) + \rho_{xy}\rho_{yy}\cos(\phi_{xy} - \phi_{yy}) \\ \rho_{xx}\rho_{yx}\cos(\phi_{xx} - \phi_{yx}) - \rho_{xy}\rho_{yy}\cos(\phi_{xy} - \phi_{yy}) \\ \rho_{xy}\rho_{yx}\cos(\phi_{xy} - \phi_{yx}) + \rho_{xx}\rho_{yy}\cos(\phi_{xx} - \phi_{yy}) \\ -\rho_{xy}\rho_{yx}\sin(\phi_{xy} - \phi_{yx}) + \rho_{xx}\rho_{yy}\sin(\phi_{xx} - \phi_{yy}) \\ -\rho_{xx}\rho_{yx}\sin(\phi_{xx} - \phi_{yx}) - \rho_{xy}\rho_{yy}\sin(\phi_{xy} - \phi_{yy}) \\ -\rho_{xx}\rho_{yx}\sin(\phi_{xx} - \phi_{yx}) + \rho_{xy}\rho_{yy}\sin(\phi_{xy} - \phi_{yy}) \\ -\rho_{xy}\rho_{yx}\sin(\phi_{xy} - \phi_{yx}) - \rho_{xx}\rho_{yy}\sin(\phi_{xx} - \phi_{yy}) \\ -\rho_{xy}\rho_{yx}\cos(\phi_{xy} - \phi_{yx}) + \rho_{xx}\rho_{yy}\cos(\phi_{xx} - \phi_{yy}) \end{bmatrix} \quad (6.102)
 \end{aligned}$$

例 6.11 将琼斯矩阵转换为米勒矩阵的数值例子

考虑一个琼斯矩阵

$$J = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (6.103)$$

这个琼斯矩阵代表一个 45° 方向的线性二向衰减器, 其二向衰减率为 0.778, 后接一个 120° 的延迟器, 其方向为 22.5° , 椭圆率为 $-0.391 \approx \pi/8$ 。在泡利矩阵分解中, 该延迟器有一个 88° 的线性延迟量, 方向为 22.5° , 和一个 81° 的圆延迟量。这个延迟器之后是另一个二向衰减量为 0.778、方向为 0° 的二向衰减器。这个特殊的 J 提供了简单的变换, 不涉及琐碎的琼斯矩阵或米勒矩阵。张量积为

$$(J^* \otimes J) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} & \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ e^{-i\frac{\pi}{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} & e^{i\frac{\pi}{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (6.104)$$

上式变为

$$(\mathbf{J}^* \otimes \mathbf{J}) = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{4}\right)^2 & \left(\frac{1}{4}\right)^2 & \left(\frac{1}{4}\right)^2 & \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{4\sqrt{2}} & \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{4\sqrt{2}} & \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{4\sqrt{2}} & \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{4\sqrt{2}} \\ \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{4\sqrt{2}} & \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{4\sqrt{2}} & \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{4\sqrt{2}} & \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{4\sqrt{2}} \\ \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}} \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}} \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{i}{4\sqrt{2}} & -\frac{i}{4\sqrt{2}} & \frac{i}{4\sqrt{2}} & -\frac{i}{4\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{4\sqrt{2}} & -\frac{i}{4\sqrt{2}} & \frac{i}{4\sqrt{2}} & \frac{i}{4\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (6.105)$$

相应的米勒矩阵为

$$\mathbf{M} = \mathbf{U} \cdot (\mathbf{J}^* \otimes \mathbf{J}) \cdot \mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{16} & 0 & -\frac{7}{16} & 0 \\ -\frac{7}{16} & 0 & \frac{9}{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.106)$$

6.12.2 使用泡利矩阵将琼斯矩阵转换为米勒矩阵

将琼斯矩阵转变为米勒矩阵的一种等效方法是用两个泡利矩阵的点积来确定每个米勒矩阵元素, M_{ij}

$$M_{ij} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma_i \cdot \mathbf{J}^* \cdot \sigma_j \cdot \mathbf{J}^T) \quad (6.107)$$

其中, Tr 是矩阵的迹, 且

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad (6.108)$$

是单位矩阵和泡利矩阵。

例 6.12 用琼斯矩阵计算一个元素

用式(6.100)中的琼斯矩阵计算 M_{13} 元素。

$$\begin{aligned} M_{13} &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma_1 \cdot \mathbf{J}^* \cdot \bar{\sigma}_3 \cdot \mathbf{J}^T) \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho_{xx} e^{i\phi_{xx}} & \rho_{xy} e^{i\phi_{xy}} \\ \rho_{yx} e^{i\phi_{yx}} & \rho_{yy} e^{i\phi_{yy}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho_{xx} e^{-i\phi_{xx}} & \rho_{yx} e^{-i\phi_{yx}} \\ \rho_{xy} e^{-i\phi_{xy}} & \rho_{yy} e^{-i\phi_{yy}} \end{bmatrix} \right) \\ &= \rho_{xx} \rho_{xy} \sin(\phi_{xx} - \phi_{xy}) + \rho_{yx} \rho_{yy} \sin(\phi_{yy} - \phi_{yx}) \end{aligned} \quad (6.109)$$

这与第一种方法式(6.102)中的结果相契合。

6.12.3 将米勒矩阵转换为琼斯矩阵

非退偏米勒矩阵利用以下关系转换为等效琼斯矩阵：

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} j_{xx} & j_{xy} \\ j_{yx} & j_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{xx} e^{-i\phi_{xx}} & \rho_{xy} e^{-i\phi_{xy}} \\ \rho_{yx} e^{-i\phi_{yx}} & \rho_{yy} e^{-i\phi_{yy}} \end{bmatrix} \quad (6.110)$$

其中幅值为

$$\begin{cases} \rho_{xx} = \sqrt{\frac{M_{00} + M_{01} + M_{10} + M_{11}}{2}} \\ \rho_{xy} = \sqrt{\frac{M_{00} - M_{01} + M_{10} - M_{11}}{2}} \\ \rho_{yx} = \sqrt{\frac{M_{00} + M_{01} - M_{10} - M_{11}}{2}} \\ \rho_{yy} = \sqrt{\frac{M_{00} - M_{01} - M_{10} + M_{11}}{2}} \end{cases} \quad (6.111)$$

其相对相位为

$$\begin{cases} \phi_{xx} - \phi_{xy} = \arctan\left(\frac{M_{03} + M_{13}}{M_{02} + M_{12}}\right) \\ \phi_{yx} - \phi_{xx} = \arctan\left(\frac{M_{30} + M_{31}}{M_{20} + M_{21}}\right) \\ \phi_{yy} - \phi_{xx} = \arctan\left(\frac{M_{32} - M_{23}}{M_{22} + M_{33}}\right) \end{cases} \quad (6.112)$$

相位 ϕ_{xx} 没有确定,是其他 ϕ 的“参考相位”。由于米勒矩阵元素的数量较多,以及非退偏元素之间的约束,这些方程并不是唯一的。

当 $j_{xx}=0$ 时出现特殊情况, $\arctan$ 的分子和分母都为 0,式(6.112)中的相位方程失效。变换方程可以重构为紧密相关的形式,并使用另一个琼斯矩阵元素的相位作为“参考相位”。

例 6.13 两个线性二向衰减器的级联

两个相同的线性二向衰减器(部分线偏器)的 $T_{\max}=1.0$, $T_{\min}=0.707$ 。当第二个二向衰减器的透光轴旋转时,求米勒矩阵 $\mathbf{M}(\theta)$ 。

- θ 变化时,最大和最小二向衰减率是多少?
- 这些组合中有没有可以形成椭圆二向衰减器的?
- 作为 θ 函数的偏振度是多少?

数学表达式相对复杂,所以只有使用计算器或计算机软件来解决这个问题才有意义。
解:

- 通过将两个线性二向衰减器的表达式相乘,得到复杂的表达式

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(\theta) &= \mathbf{LD}(T_{\max}, T_{\min}, \theta) \cdot \mathbf{LD}(T_{\max}, T_{\min}, 0) \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A & B \cos(2\theta) & B \sin(2\theta) & 0 \\ B \cos(2\theta) & A \cos^2(2\theta) + C \sin^2(2\theta) & A - C \cos(2\theta) \sin(2\theta) & 0 \\ B \sin(2\theta) & (A - C) \cos(2\theta) \sin(2\theta) & C \cos^2(2\theta) + A \sin^2(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 \\ B & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} A^2 + B^2 \cos(2\theta) & 2AB \cos^2 \theta & BC \sin(2\theta) & 0 \\ 2B \cos^2 \theta [C + (A - C) \cos(2\theta)] & B^2 \cos(2\theta) + A^2 \cos^2(2\theta) + AC \sin^2(2\theta) & \frac{1}{2} (A - 2C) \sin(4\theta) & 0 \\ B[A + (A - C) \cos(2\theta)] \sin(2\theta) & [B^2 + A(A - C) \cos(2\theta)] \sin(2\theta) & C[C \cos^2(2\theta) + A \sin^2(2\theta)] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C^2 \end{bmatrix} \quad (6.113)
\end{aligned}$$

其中,

$$A = T_{\max} + T_{\min}, \quad B = T_{\max} - T_{\min}, \quad C = 2 \sqrt{T_{\max} T_{\min}} \quad (6.114)$$

代入 $T_{\max} = 1.0, T_{\min} = 0.707 = 1/\sqrt{2}$, 可得 16 个元素的表达式

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{00} \\ M_{01} \\ M_{02} \\ M_{03} \\ M_{10} \\ M_{11} \\ M_{12} \\ M_{13} \\ M_{20} \\ M_{21} \\ M_{22} \\ M_{23} \\ M_{30} \\ M_{31} \\ M_{32} \\ M_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 2\sqrt{2} + (3 - 2\sqrt{2}) \cos(2\theta) \\ 2 \cos^2 \theta \\ -2^{3/4} (-2 + \sqrt{2}) \sin(2\theta) \\ 0 \\ \cos(2\theta) + \cos^2(2\theta) + 22^{1/4} (-1 + \sqrt{2}) \sin^2(2\theta) \\ (3 - 2\sqrt{2}) \cos(2\theta) + (3 + 2\sqrt{2}) \cos^2(2\theta) + 22^{1/4} (1 + \sqrt{2}) \sin^2(2\theta) \\ -(-2\sqrt{2} + 22^{3/4}) \sin(4\theta) \\ \frac{2^{1/4}}{2^{1/4}} \\ 0 \\ [1 + (1 + 22^{1/4} - 22^{3/4}) \cos(2\theta)] \sin(2\theta) \\ -[-3 + 2\sqrt{2} + (-3 + 22^{1/4} - 2\sqrt{2} + 22^{3/4}) \cos(2\theta)] \sin(2\theta) \\ 22^{3/4} \left[2^{3/4} \cos^2(2\theta) + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sin^2(2\theta) \right] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (6.115)$$

b. 单个元件的二向衰减率是

$$D = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0.1716 \quad (6.116)$$

这是一个相当弱的部分偏振器。当两个元件的透光轴平时,出现最大的二向衰减。

$$\begin{cases} T_{\max} = 1 \times 1 = 1, & T_{\min} = 0.7 \times 0.7 = \frac{1}{2} \\ D_{\max} = (1 - 1/2)/(1 + 1/2) = 1/3 \end{cases} \quad (6.117)$$

类似地,当透光轴垂直时,出现最小的二向衰减,并且二向衰减消失

$$\begin{cases} T_{\max} = 1 \times 0.7 = 0.7, & T_{\min} = 0.7 \times 1 = 0.7 \\ D_{\min} = (0.7 - 0.7)/(0.7 + 0.7) = 0 \end{cases} \quad (6.118)$$

c. 由于 $M_{03} = 0$, 所以二向衰减总是线性的。

d. 由于 $M_{30} = 0$, 偏振度 $P(\theta)$ 是纯线性的, 如图 6.24 所示。

$$\begin{aligned} P(\theta) &= \frac{\sqrt{M_{10}^2 + M_{20}^2}}{M_{00}} \\ &= \frac{\sqrt{[\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta) + 22^{1/4}(-1 + \sqrt{2})\sin^2(2\theta)]^2 + \{[1 + (1 + 22^{1/4} - 22^{3/4})\cos(2\theta)]\sin(2\theta)\}^2}}{32 \left[\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cos(2\theta) \right]} \\ &= \frac{\sqrt{-13 + 12\sqrt{2} + 4\cos(2\theta) + (17 - 12\sqrt{2})\cos(4\theta)}}{8\sqrt{2} \left\{ \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left[\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cos 2\theta \right] \right\}} \end{aligned} \quad (6.119)$$

当非偏振光入射时, 出射光对于 $\theta = 90^\circ + n180^\circ$ 是非偏振的。

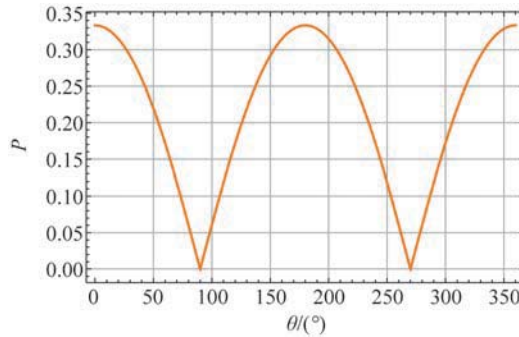


图 6.24 当第二个元件旋转时,二向衰减器组合的偏振度

6.13 用米勒矩阵实现光线追迹

米勒矩阵经常用于光线追迹,尤其是非相干光线追迹。琼斯矩阵在光线追迹成像系统更受青睐,是因为它们包含绝对相位。许多系统需要非相干光线追迹,例如照明光学系统和散射系统的模拟。在照明系统中,汽车前照灯被做成许多小透镜,光线从许多不同的路径到达被照明面的每个部分,具有差异很大的光程长度。不需要计算这些不同光线之间的干涉,因为不用评估球面波前质量。因此,对米勒矩阵或斯托克斯参数求和是合适的。类似地,在模拟光通过大气中的气溶胶、动物组织、混浊介质时,或光学系统中的散射光计算时,需要光通量、方向和偏振态,但光路长度不用于判定干涉。出于这些目的,米勒矩阵通常用于描述

这些相互作用。

倾斜光线通常发生这样的情形：一个相互作用的出射 s 分量通常与下一个相互作用的 s 分量不对齐,此时需要针对每一个这些相互作用应用米勒旋转运算(式(6.11))。每条光线通常会有不同的几何变换(这将在第 17 章中探讨),需要研究这个问题以组合来自不同光线路径的米勒矩阵,例如,在探测器像素处组合。

用于散射的米勒矩阵也可用在米勒矩阵光线追迹中。对于来自不同表面的散射或体散射,有许多不同的米勒矩阵模型^[22-23]。此处将不去描述这些米勒矩阵的计算。国家标准和技术研究所(NIST)提供了一个针对散射的米勒矩阵库^[24]。

6.13.1 折射的米勒矩阵

均匀各向同性界面(例如,典型的玻璃或金属界面)上的反射和折射具有 s 和 p 本征偏振。相关的偏振特性是二向衰减和延迟的组合,其轴与 s 和 p 平面对齐。由于光线会改变方向,因此需要一个不同的坐标系来表示全局坐标中的入射和出射斯托克斯参数。

下面假设, s 与 $+S_1$ 对齐, p 与 $-S_1$ 对齐。 T_s 是 s 的强度透射率, T_p 是 p 的强度透射率。 s 态和 p 态之间的延迟为 δ 。 T_s 、 T_p 和 δ 由菲涅耳公式(第 8 章)或薄膜公式(如 13.2 节和 13.3.1 节)确定^[4]。表征折射的米勒矩阵是二向衰减器和延迟器米勒矩阵的乘积,

$$\begin{aligned} \text{LDR}(D, \delta, 0) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} T_s + T_p & T_s - T_p & 0 & 0 \\ T_s - T_p & T_s + T_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{T_s T_p} \cos \delta & 2\sqrt{T_s T_p} \sin \delta \\ 0 & 0 & -2\sqrt{T_s T_p} \sin \delta & 2\sqrt{T_s T_p} \cos \delta \end{bmatrix} \\ &= \frac{T_s + T_p}{2} \begin{bmatrix} 1 & D & 0 & 0 \\ D & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1-D^2} \cos \delta & \sqrt{1-D^2} \sin \delta \\ 0 & 0 & -\sqrt{1-D^2} \sin \delta & \sqrt{1-D^2} \cos \delta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.120)$$

其中 D 是二向衰减率。对于未镀膜界面的透射,延迟量 δ 为 0。对于薄膜界面,例如减反膜或分束器膜,延迟是非零的。折射米勒矩阵是齐次的;本征偏振态,即 s 偏振和 p 偏振,是正交的。

6.13.2 反射的米勒矩阵

在大多数光学标注中(包括本章),反射后坐标系中的一个符号发生变化,使得在传播矢量方向改变时,保持右手坐标系。设想有一个测量透射的斯托克斯偏振测量仪。现在,为了测量反射,偏振仪绕竖向的 y 轴旋转,垂直于 z 轴(入射光沿着 z 轴传播)。通过绕 y 轴移动偏振仪来测量反射光束,可以看到 45° 分量已经改变了符号。此外,所有圆和椭圆偏振态的螺旋性(旋向)也在反射时改变符号,因为右旋圆偏振反射为左旋圆偏振,反之亦然。

反射后,斯托克斯参数的 S_2 分量($45^\circ/135^\circ$ 的线偏振光)和 S_3 分量(圆偏振光)符号改变。 S_2 分量在反射(漫反射或镜面反射)时会改变符号,因为光传播矢量的 z 分量(与样品表面法线平行的分量)会改变符号。为了保持右手坐标系,其中一个横向坐标也必须改变符

号。若选择 x 坐标改变符号,那么从样品反射或后向散射后空间坐标 (x, y, z) 转换为 $(-x, y, -z)$; z 是反射前的传播方向,反射后变为 $-z$ 。坐标的变化表明, 45° 方向偏振的光束反射后在同一全局平面内偏振,在反射后的坐标中偏振方向为 135° 。

R_s 是 s 的强度反射率, R_p 是 p 的强度反射率, δ 为延迟量,由菲涅耳公式或薄膜公式计算得到。反射的米勒矩阵为

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_{\text{refl}}(R_s, R_p, \delta) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} R_s + R_p & R_s - R_p & 0 & 0 \\ R_s - R_p & R_s + R_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{R_s R_p} \cos \delta & -2\sqrt{R_s R_p} \sin \delta \\ 0 & 0 & 2\sqrt{R_s R_p} \sin \delta & -2\sqrt{R_s R_p} \cos \delta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.121)$$

根据这种反射约定,用反射模式的偏振仪测量的样品米勒矩阵 $\mathbf{M}$,绕法线旋转该米勒矩阵的方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{refl}}(\theta) &= \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{M}_{\text{refl}} \cdot \mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \\ & \begin{bmatrix} M_{00} & M_{01} & M_{02} & M_{03} \\ M_{10} & M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{20} & M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{30} & M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.122)$$

式(6.122)可与透射米勒矩阵式(6.11)相对比。例如,透射轴方向为 20° 的透射偏振器的米勒矩阵和方向为 20° (对于入射光)的反射偏振器的米勒矩阵是不同的,因为偏振光从反射偏振器上以反射坐标系 -20° 方向出射(在入射坐标系中是 20°)。本质上,反射偏振器米勒矩阵在 20° 分析,但偏振是在 -20° 。对于方向为 0° 或 90° 的线偏振器矩阵和方向为 0° 或 90° 的线性延迟器的特殊情况,这种变换产生相同的透射和反射米勒矩阵。

弱偏振反射样品的归一化反射米勒矩阵,它们的二向衰减、延迟和退偏接近于零,接近于理想反射器的米勒矩阵,

$$\mathbf{M}_{\text{refl}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (6.123)$$

$\mathbf{M}_{\text{refl}}$ 也是没有偏振效应时反射或散射的米勒矩阵。

6.14 米勒矩阵的起源

出生于瑞士的物理学教授汉斯·米勒在 20 世纪 40 年代初提出了米勒矩阵的概念^[4],并以他的名字命名了米勒矩阵。他在一份机密报告中描述了这个概念^[25],之后解密,在

1943年他的物理课程笔记中详细描述了它^[26]。他唯一的与以他名字命名的 4×4 矩阵有关的出版物是美国光学学会的一份简短会议摘要^[27]。他的研究生南森·帕克在他的论文^[28]和相关出版物^[1]中进一步发展了米勒矩阵的概念。克拉克·琼斯随后在他的其中一篇关于琼斯运算的系列论文中比较了米勒矩阵和琼斯矩阵^[29],并参考了米勒所著的“最近解密”的报告。

在所有这些工作之前的1929年,保罗·苏蕾特已经发展了一组四个线性方程来关联入射和出射的斯托克斯参数,等效于米勒矩阵,只是没有采用矩阵形式^[30]。这些线性方程也被弗朗西斯·佩兰在1942年放入矩阵形式中^[31]。

6.15 习题集

6.1 证明下列米勒矩阵相等:

a. $\mathbf{LR}(\delta, 45^\circ)$ 和 $\mathbf{LR}(2\pi - \delta, 135^\circ)$

b. $\mathbf{LP}(\theta)$ 和 $\mathbf{LP}(\theta + \pi)$

c. $\mathbf{LD}(1, t, \pi/8)$ 和 $\mathbf{LD}(1, t, 9\pi/8)$

6.2 a. 求 0° 、 45° 、 90° 线偏振器的米勒矩阵: $\mathbf{LP}(0)$ 、 $\mathbf{LP}(\pi/4)$ 、 $\mathbf{LP}(\pi/2)$ 。

b. 计算 $\mathbf{LP}(0) \cdot \mathbf{LP}(\pi/2)$ 和 $\mathbf{LP}(0) \cdot \mathbf{LP}(\pi/4) \cdot \mathbf{LP}(\pi/2)$ 。

c. 分别求快轴方向为 0° 、 45° 、 90° 的 $\lambda/4$ 线性延迟器的米勒矩阵 $\mathbf{LR}(\pi/2, 0)$ 、 $\mathbf{LR}(\pi/2, \pi/4)$ 和 $\mathbf{LR}(\pi/2, \pi/2)$ 。

d. $\mathbf{LP}(0)$ 和 $\mathbf{LR}(\pi/2, 0)$ 满足交换律吗? 即是否有 $\mathbf{LP}(0) \cdot \mathbf{LR}(\frac{\pi}{2}, 0) = \mathbf{LR}(\frac{\pi}{2}, 0) \cdot \mathbf{LP}(0)$?

e. $\mathbf{LP}(0)$ 和 $\mathbf{LR}(\pi/2, \pi/4)$ 满足交换律吗?

6.3 求 $\mathbf{LR}(\pi/2, 0) \cdot \mathbf{LP}(\pi/4) \cdot \mathbf{LR}(\pi/2, \pi/2)$ 。证明这是一个圆偏振器。

6.4 证明快轴在 θ 方向的 $\lambda/4$ 线性延迟器的米勒矩阵和快轴在 $\theta \pm \pi/2$ 方向的 $3\lambda/4$ 线性延迟器的米勒矩阵相等。

6.5 证明在 $T_{\max} = 1$ 且 $T_{\min} = 0$ 时二向衰减器的米勒矩阵式子(式(6.59))简化为线性偏振器式子(式(6.37))。

6.6 分析米勒矩阵 $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 的性质。

a. 判断这是一个偏振器还是延迟器的米勒矩阵。

b. 透射的光通量如何随入射斯托克斯参量的变化而变化?

c. 对圆偏振光的作用是什么?

d. 作图说明轴变化时对线偏振光的作用。

在你的描述中使用本征值和本征向量。

6.7 证明椭圆偏振的斯托克斯参量 $\mathbf{S}(\theta, \eta) = (1, \cos(2\theta)\cos\eta, \sin(2\theta)\cos\eta, \sin\eta)$ 是 $\mathbf{EP}(\theta, \eta)$ 的一个本征偏振态。

- 6.8 计算式(6.38)中的椭圆偏振器米勒矩阵 $\mathbf{EP}(\theta, \eta)$, 它透射的斯托克斯参量为 $(1, \cos(2\theta)\cos\eta, \sin(2\theta)\cos\eta, \sin\eta)$ 。
- 求使线偏振态 $(1, \cos(2\theta), \sin(2\theta), 0)$ 转换为目标态 $(1, \cos(2\theta)\cos\eta, \sin(2\theta)\cos\eta, \sin\eta)$ 的线性延迟器米勒矩阵 $\mathbf{U}$ 。
 - 从线偏振器米勒矩阵 $\mathbf{LP}(\theta)$ 开始, 使用 $\mathbf{U}$ 应用酉变换将 $\mathbf{LP}(\theta)$ 转换为 $\mathbf{EP}(\theta, \eta)$ 。
 - 验证 $\mathbf{EP}(\theta, \eta)$ 的特征值与特征向量。
- 6.9
- 一个理想圆延迟器的米勒矩阵(式(6.24))的特征值与延迟量 δ 是怎样关联的?
 - 一个线性延迟器的米勒矩阵的特征值与延迟量 δ 是怎样关联的?
- 6.10 将 $\mathbf{LR}(\pi/2, 0)$ 后接 $\mathbf{LR}(\pi/2, \pi/4)$, 最后接 $\mathbf{CR}(\pi/2)$ 的米勒矩阵相乘, 求出延迟和本征偏振。
- 6.11
- 描述将任意入射斯托克斯参量转化为非偏振光的所有米勒矩阵集。哪个元素一定是零? 哪个元素可以是非零的?
 - 这个集合有几个自由度?
 - 其中哪个米勒矩阵可以完全阻挡特定入射偏振态?
- 6.12 考虑部分偏振光束, 其斯托克斯参量为 $\mathbf{S} = (1, s_1, s_2, s_3)$ 。
- 哪种二向衰减器米勒矩阵 $\mathbf{M}_D$ 可以将 $\mathbf{S}$ 转化为非偏振光?
 - 解释为什么这种二向衰减器可以减少而不是增加偏振度?
 - $\mathbf{S}$ 的偏振度和 $\mathbf{M}_D$ 的二向衰减之间是什么关系?
 - $\mathbf{M}_D$ 作用在相同 DoP 的正交偏振态上是什么效果?
- 6.13 式(6.25)中半波线性延迟器的米勒矩阵的式子中方向 θ 的周期性是什么?
- 6.14 证明式(6.28)中延迟分量为 $(\delta_H, \delta_{45}, \delta_R)$ 的半波椭圆延迟器的米勒矩阵是

$$\mathbf{HWR}(r_1, r_2, r_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 + 2r_1^2 & 2r_2r_1 & 2r_1r_3 \\ 0 & 2r_2r_1 & -1 + 2r_2^2 & 2r_2r_3 \\ 0 & 2r_3r_1 & 2r_2r_3 & -1 + 2r_3^2 \end{bmatrix}$$

其中, $\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} = 1$, $r_1 = \frac{\delta_H}{\pi}$, $r_2 = \frac{\delta_{45}}{\pi}$, $r_3 = \frac{\delta_R}{\pi}$, 上式与具有正交延迟分量 $(-\delta_H, -\delta_{45}, -\delta_R)$ 的椭圆延迟器的米勒矩阵相同。

- 6.15 针对琼斯矩阵元素 $j_{xx} = 0$ 的特殊情况, 建立一组将米勒矩阵转化为琼斯矩阵的方程式。
- 6.16 利用式(6.28)中的一般椭圆延迟器方程, 证明以下两个米勒矩阵相等:

$$\mathbf{ER}(\delta_H, \delta_{45}, \delta_R) = \mathbf{ER}\left(\frac{2\pi(\delta_H, \delta_{45}, \delta_R)}{\sqrt{\delta_H^2 + \delta_{45}^2 + \delta_R^2}} - (\delta_H, \delta_{45}, \delta_R)\right)$$

- 6.17 给定一偏振光束, 其主轴方向 θ , 庞加莱球上纬度为 η , 求一个半波线性延迟器的方向, 以将偏振态转换为正交态。
- 6.18 创建一个例子, 一个延迟器米勒矩阵乘以一组斯托克斯参量, 在庞加莱球上产生传播通过延迟器的偏振态弧, 遵从左手规则。当你的左手拇指与延迟器快轴对齐指向庞加莱球外, 偏振态绕旋转轴移动的方向沿着左手手指的方向。

- 6.19 使用庞加莱球,推导出可以将水平线偏振光转换为 45° 线偏振光的所有延迟器。转换所需的最小延迟量是多少? 快轴方向是什么?
- 6.20 将延迟量为 90° 、快轴方向为 45° 的线性延迟器放置在水平四分之一波长延迟器和垂直四分之一波长线性延迟器之间。该组合形成一个圆延迟器。这个组合的延迟量是多少? 随着中间四分之一波长延迟器的快轴从 0° 旋转到 180° , 组合的特性如何变化?
- 6.21 a. 用庞加莱球证明,当延迟量为 δ 、方向为 45° 的线性延迟器放置在水平四分之一波长线性延迟器和垂直四分之一波长线性延迟器之间时,该组件形成圆延迟器。
b. 延迟器的延迟量是多少? 用庞加莱球解释延迟量的大小。
c. 用琼斯矩阵来解决问题,证明这个序列对中间延迟器进行了酉变换。
- 6.22 考虑线性二向衰减器 $\mathbf{LD}\left(T_{\max}, T_{\min}, \frac{\pi}{4}\right)$ 。入射和出射斯托克斯参量满足什么条件,可使入射和出射偏振度相等? 解释非偏振元件、二向衰减器,如何能降低某些输入态的偏振度。
- 6.23 对于斯托克斯参量为 $(S_0, S_1, S_2, 0)$ 的部分线偏振光束,其中 $S_0 > \sqrt{S_1^2 + S_2^2}$, 证明可以透过理想偏振器的最大光量大于偏振光通量 $\sqrt{S_1^2 + S_2^2}$ 。能透过的更多的光通量是多少?
- 6.24 求解可将偏振态 $(4, 1, 1, 0)$ 转换为非偏振光的线性二向衰减器。为简单起见,设定 $T_{\max} = 1$ 。二向衰减器会增加偏振度吗? 解释这里偏振度降低的原因。
- 6.25 推导延迟量为 δ 弧度和快轴方向为 0° 的线性延迟器的米勒矩阵 $\mathbf{LR}(\delta, 0)$ 。对矩阵元素 M_{ij} 建立并求解一个至少 16 个线性方程的方程组。每四个方程的形式如下:

$$\mathbf{LR}(\delta, 0^\circ) \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S}' = \begin{bmatrix} M_{00} & M_{01} & M_{02} & M_{03} \\ M_{10} & M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{20} & M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{30} & M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix}$$

并且应该关联适当的入射和出射斯托克斯参量。需要用琼斯算法来生成入射和出射偏振态对,它具有所需的 S_2 、 S_3 分量。

- 6.26 针对二向衰减器米勒矩阵 $\mathbf{Ms}$ 族(是 s 、 t 、 u 的函数),计算并比较退偏指数和平均偏振度,其中

$$\mathbf{Ms} = \begin{bmatrix} 1 & s & t & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 6.27 a. 计算米勒矩阵族 $\mathbf{M}\alpha$ 的退偏指数,该矩阵族连接理想退偏振器和单位矩阵,是混合比 α 函数

$$\mathbf{M}\alpha = \alpha \mathbf{I} + (1 - \alpha) \mathbf{ID} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

- b. 计算米勒矩阵族的 $M\alpha$ 平均偏振度, 该矩阵族连接理想退偏振器和单位矩阵, 是混合比 α 函数。
- c. 计算部分退偏振器 $M\alpha\gamma$ 族的退偏指数, 该矩阵族将线偏振光退偏至 DoP 为 α , 将圆偏振光退偏至 γ , 是 α 和 γ 的函数, 其中

$$M\alpha\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

- d. 计算 $M\alpha\gamma$ 的平均偏振度, 它是混合比 α 的函数。
- e. α 和 γ 取何值时, 退偏指数和平均偏振度相等?
- f. 退偏指数和平均偏振度哪个更大?
- g. 在理想退偏器邻域内, 哪个线性变化, 哪个二次变化?
- 6.28 由于以下偏振元件缺陷, 预计会引起哪些形式的退偏? 相加或积分米勒矩阵来判断以下特性:
- a. 具有 45° 快轴的晶体四分之一波长线性延迟器具有楔形(厚度变化)。例如, 89° 和 91° 的延迟器相加, 或者从 89° 到 91° 进行积分。
- b. 由于拉伸处理, 快轴为 0° 的聚合物线性延迟器的快轴在 0° 附近变化。
- c. 由于拉伸处理, 透射轴为 45° 的偏振片的透射轴在 45° 附近变化。
- d. 由于厚度变化, 透射轴为 90° 的偏振片具有二向衰减的变化。
- 6.29 生产中的一个系统需要用四分之一波长线性延迟器将右旋圆偏振光转换为水平线偏振光。最终的偏振态应该位于水平线偏振光的 0.03rad 圆内。使用庞加莱球来计算延迟器大小和方向的允许误差。

6.16 参考文献

- [1] N. G. Parke, Optical algebra, J. Math. Phys. 28, 1 (1949): 131-139.
- [2] R. A. Chipman, Mueller matrices, in Handbook of Optics, Vol. I, Chapter 14, ed. M. Bass, McGraw-Hill (2009).
- [3] P. W. Maymon and R. A. Chipman, Linear Polarization Sensitivity Specifications for Spaceborne Instruments, San Diego International Society for Optics and Photonics (1992).
- [4] W. A. Shurcliff, Polarized Light, Production and Use, Cambridge, MA: Harvard University Press (1962).
- [5] C. Brosseau, Fundamentals of Polarized Light: A Statistical Optics Approach, Wiley-Interscience (1998), 228.
- [6] J. J. Gil and E. Bernabeu, Obtainment of the polarizing and retardation parameters of a non-depolarizing optical system from the polar decomposition of its Mueller matrix, Optik 76, 2 (1987): 67-71.
- [7] D. Brewster, Experiments on the depolarisation of light as exhibited by various mineral, animal, and vegetable bodies, with a reference of the phenomena to the general principles of polarization, Philos. Trans. R. Soc. London 105 (1815): 29-53.
- [8] J. Christopher Dainty, ed. Laser Speckle and Related Phenomena, Vol. 9, Springer Science & Business

- Media (2013).
- [9] R. Frieden, Probability, Statistical Optics, and Data Testing: A Problem Solving Approach, Vol. 10, Springer Science & Business Media (2012).
 - [10] J. J. Gil, and E. Bernabeu, A depolarization criterion in Mueller matrices, *J. Mod. Opt.* 32, 3 (1985): 259-261.
 - [11] J. J. Gil and E. Bernabeu, Depolarization and polarization indices of an optical system, *J. Mod. Opt.* 33, 2 (1986): 185-189.
 - [12] R. A. Chipman, Depolarization index and the average degree of polarization, *Appl. Opt.* 44, 13 (2005): 2490-2495.
 - [13] B. DeBoo, J. Sasian, and R. Chipman, Degree of polarization surfaces and maps for analysis of depolarization, *Opt. Express*, 12(20) (2004): 4941-4958.
 - [14] S. R. Cloude, Conditions for the physical realisability of matrix operators in polarimetry, *Proc. Soc. Photo - Opt. Instrum. Eng.* 1166 (1989): 177-185.
 - [15] S. Cloude, Polarisation: Applications in Remote Sensing, Oxford University Press (2010).
 - [16] D. Goldstein, Polarized Light, 3rd edition, Section 8. 4. 2, New York, NY: Marcel Dekker (2011).
 - [17] C. R. Givens and A. B. Kostinski, A simple necessary and sufficient condition on physically realizable Mueller matrices, *J. Mod. Opt.* 40, 3 (1993): 471-481.
 - [18] H. D. Noble, S. C. McClain, and R. A. Chipman, Mueller matrix roots depolarization parameters, *Appl. Opt.* 51 (2012): 735-744.
 - [19] R. Simon, The connection between Mueller and Jones matrices of polarization optics, *Opt. Commun.* 42, 5 (1982): 293-297.
 - [20] K. Kim, L. Mandel et al., Relationship between Jones and Mueller matrices for random media. *J. Opt. Soc. Am. A* 4 (1987): 433-437.
 - [21] D. Goldstein, Polarized Light, 2nd edition New York, NY: Marcel Dekker (2003), 166.
 - [22] J. C. Stover, Optical Scattering: Measurement and Analysis, SPIE Press (2012).
 - [23] T. Germer, Polarized light diffusely scattered under smooth and rough interfaces, Optical Science and Technology, SPIE's 48th Annual Meeting, International Society for Optics and Photonics (2003).
 - [24] T. Germer (http://www.nist.gov/pml/div685/grp06/scattering_scatmech.cfm, accessed February 29, 2016).
 - [25] H. Mueller, Memorandum on the polarization optics of the photoelastic shutter, Report No. 2 of the OSRD project OEMsr-576, Nov. 15, 1943. A declassified report.
 - [26] H. Mueller, Informal notes about 1943 on Course 8. 26 at Massachusetts Institute of Technology.
 - [27] H. Mueller, The foundations of optics, Proceedings of the Winter Meeting of the Optical Society of America, *J. Opt. Soc. Am.* 38 (1948): 661.
 - [28] N. G. Parke III, Matrix Optics, PhD thesis, Department of Physics, Massachusetts Institute of Technology (1948), 181.
 - [29] R. Clark Jones, A new calculus for the treatment of optical system, V. A more general formulation, and description of another calculus, *J. Opt. Soc. Am* 37(2) (1947): 107-110.
 - [30] P. Soleillet, Parameters characterising partially polarized light in fluorescence phenomena, *Ann. Phys.* 12(10) (1929): 23-97.
 - [31] F. Perrin, Polarization of light scattered by isotropic opalescent media, *J. Chem. Phys.* 10, 7 (1942): 415-427.