



教学视频

分数阶傅里叶变换作为傅里叶变换的广义变换,是处理时变信号的有力工具。同时,FRFT 与 Wigner 分布、小波变换等时频信号分析工具具有密切的关系,广泛应用于多个研究领域,如微分方程求解、光信号处理、扫频滤波器、模式识别和时频信号分析等。

正如快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform,FFT)的出现大大推动了傅里叶变换的发展一样,FRFT 的快速算法将是 FRFT 在信号处理中获得成功应用的基础。这使得对离散分数阶傅里叶变换(Discrete Fractional Fourier Transform,DFRFT)及其快速算法的研究显得尤为重要。

由 FRFT 的定义可以看出,DFRFT 的计算将比离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform,DFT)的计算复杂得多。理想的 DFRFT 应该尽可能具备连续 FRFT 所具备的所有特性。同时,离散信号的 DFRFT 可以逼近其所对应连续信号的连续 FRFT,是离散变换作为连续变换离散形式的最基本条件。此外,DFRFT 的计算复杂度要尽可能得小,即实现离散变换的计算高效性。基于上述分析,理想的 DFRFT 需满足如下准则。

- (1) 近似性: DFRFT 与连续 FRFT 的近似性。
- (2) 边界性: 1 阶运算退化为 DFT,即  $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F}$  为 DFT 算子。
- (3) 酉性:  $(\mathcal{F}^p)^H = \mathcal{F}^{-p}$ 。
- (4) 旋转相加性:  $\mathcal{F}^p \mathcal{F}^q = \mathcal{F}^{p+q}$ 。
- (5) 计算高效性。

近年来,国内外学者提出了多种 DFRFT 的定义及快速算法,然而遗憾的是,迄今为止,尚无一种定义能够很好地满足上述所有要求。目前的 DFRFT 主要分为三类:①采样型 DFRFT;②特征分解型 DFRFT;③线性加权型 DFRFT。因为采样型 DFRFT 和特征分解型 DFRFT 是实际应用中广泛使用的两类离散变换,本章将重点对这两类 DFRFT 进行系统的分析与比较。

## 5.1 采样型离散分数阶傅里叶变换

一个直接并且简单的 DFRFT 定义方法是直接采样连续 FRFT 核得到 DFRFT 核矩

阵。这方面的工作主要有：

(1) Kraniauskas 等通过在时域和分数阶傅里叶域直接采样得到 DFRFT 定义为<sup>[1-2]</sup>

$$X_{\alpha}(kF) = A_{\alpha} e^{j\frac{1}{2}\cot\alpha(kF)^2} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{j\frac{1}{2}\cot\alpha(nT)^2 - j(2\pi/N)nk} \quad (5.1)$$

其中,  $T$  为时域采样间隔,  $F = 2\pi/(NT \csc\alpha)$  是分数阶傅里叶域采样间隔。

(2) Ozaktas 推导了两种高效并且精确计算 FRFT 的方法<sup>[3]</sup>。这种算法把时域原始函数的  $N$  个采样点映射为分数阶傅里叶域的  $N$  个采样点, 并且这种算法的计算复杂度为  $O(N \log N)$ 。

(3) Pei 定义了另一种采样类型的 DFRFT, 这种方法对连续 FRFT 在时域和分数阶傅里叶域选择合适的采样间隔, 使得 DFRFT 具有可逆性<sup>[4]</sup>。更重要的是, 该 DFRFT 具有更低的计算复杂度, 在所有近似连续 FRFT 的 DFRFT 类型中, 这种 DFRFT 具有最低的计算复杂度。

因为 Ozaktas 和 Pei 的采样型算法目前使用最普遍, 所以接下来对这两种算法进行详细介绍。

### 5.1.1 Ozaktas 采样型离散分数阶傅里叶变换

Ozaktas 提出根据连续 FRFT 的积分定义式, 将 FRFT 的复杂积分变换分解成若干简单的计算步骤, 然后经过两步的离散化处理得到一个离散卷积的表达式, 这样便可以利用 FFT 来计算 FRFT。这里, 称此方法为改进的采样型分数阶傅里叶变换 (Improved DFRFT, IP-DFRFT)。具体地, 在文献<sup>[3]</sup>中, Ozaktas 分别给出了两种不同的分解方法。在两种方法的公式推导中, 都运用了技巧  $\csc\alpha - \tan(\alpha/2) = \cot\alpha$ 。首先, 我们介绍一下该算法所采用的一种特殊技巧, 即原始信号在作 FRFT 的数值计算之前先进行量纲归一化处理, 它对 FRFT 离散化的实现起到了重要作用。

#### 5.1.1.1 量纲归一化原理

首先谈谈信号的紧致性问题。若一个函数的非零值仅限定在一个有限区间内, 则称这个函数是紧致的。从理论上讲, 一个信号不可能在时域和频域同时紧致, 然而在实际中所研究的信号一般认为是时宽带宽有限的。这种理论和实际的差异并不矛盾, 因为只要信号的绝大部分能量集中在时频域的有限区域, 就可以近似认为信号在时域和频域同时紧致。

假定原始信号在时间轴和频率轴上都是紧致的, 其时域表示限定在区间  $\left[-\frac{\Delta t}{2}, \frac{\Delta t}{2}\right]$ , 而其频域表示限定在区间  $\left[-\frac{\Delta f}{2}, \frac{\Delta f}{2}\right]$ ,  $\Delta t$  和  $\Delta f$  分别表示信号的时宽和带宽。信号的时宽带宽积为  $N = \Delta t \Delta f$ , 信号的有限区间表示等价于假定信号的能量绝大部分集中在  $\left[-\frac{\Delta t}{2}, \frac{\Delta t}{2}\right] \times \left[-\frac{\Delta f}{2}, \frac{\Delta f}{2}\right]$  内。对于一给定的函数类, 这一假定可以通过选择足够大的  $\Delta t$  和  $\Delta f$  予以保证。由于原始信号的时域和频域具有不同的量纲, 而且尺度也不统一, 这给 FRFT 的离散化处理带来许多不便。分解型算法采用了一种特殊的量纲归一化技巧, 将时域和频域分别转换成无量纲的域, 并且将信号的时宽和带宽统一起来。具体方法是引入一个具有时间量纲的尺度因子  $S$ , 并定义新的尺度化坐标  $x = t/S, \nu = fS$ 。新的坐标系

$(x, \nu)$  实现了无量纲化。信号在新坐标系中被限定在区间  $[-\Delta t/(2S), \Delta t/(2S)]$  和  $[-\Delta fS/2, \Delta fS/2]$  内。为使两个区间的长度相等, 选择  $S = \sqrt{\Delta t/\Delta f}$ , 则两个区间长度都等于无量纲量  $\Delta x = \sqrt{\Delta t \Delta f}$ , 即两个区间归一化为  $[-\Delta x/2, \Delta x/2]$ 。归一化以后信号的 Wigner-Ville 分布限定在以原点为中心、直径  $\Delta x$  的圆内, 如图 5.1 所示。最后, 根据采样定理对归一化后的信号进行采样, 采样间隔为  $1/\Delta x$ , 采样点数为  $N = \Delta x^2$ 。需要注意的是, 今后出现在 FRFT 的表达式中的信号将是经过量纲归一化处理的信号。

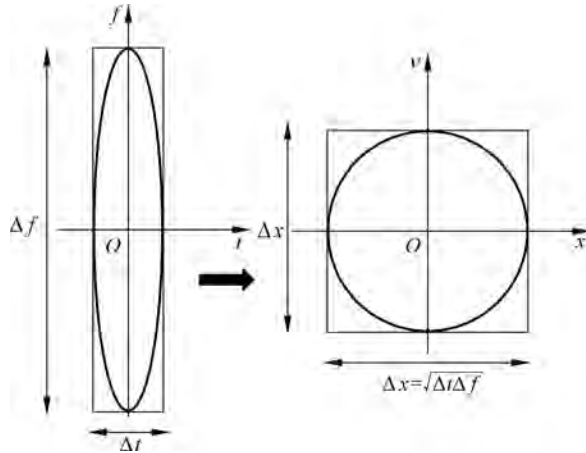


图 5.1 归一化前后信号的时频支撑区域

### 5.1.1.2 两种实用的量纲归一化方法

在 5.1.1.1 节的量纲归一化原理中, 原始连续信号首先经过量纲归一化处理, 然后再对连续函数以  $1/\Delta x$  为间隔采样得到  $N$  点样本值, 这种处理方法的特点是先量纲归一化再采样。我们在实际应用中发现, 这种处理方法只是一种原理性的方法, 在实际工程应用中不具有可操作性, 因为我们在实际工程中所能得到的往往不是原始连续信号, 而是按照一定采样率进行采样后得到的离散信号。要想将分解型算法成功地应用于实际工程计算, 就必须解决对这种实际的离散信号进行量纲归一化处理的问题。文献[5]针对此问题给出了两种实用的量纲归一化方法。

#### 1. 离散尺度化法

所谓离散尺度化法是指, 直接对离散数据作尺度伸缩变换, 使得尺度化后的离散数据正好等价于对原始连续信号作量纲归一化后再采样所得的结果, 如图 5.2 所示。其关键是要选择合适的时宽  $\Delta t$ 、带宽  $\Delta f$ 、尺度因子  $S$  以及归一化宽度  $\Delta x$ 。信号的时宽比较容易确定, 直接取为观测时间  $T$ , 即  $\Delta t = T$ , 同时以信号的中点作为时间原点, 信号的时域表示限定在区间  $[-T/2, T/2]$ 。信号的带宽确切值我们并不知道, 但是在实际中我们知道信号的采样率  $f_s$ 。根据采样定理, 采样率一定大于信号最高频率的 2 倍。信号带宽  $\Delta f$  的选取并不要求是最小值, 只要满足将信号的全部能量包含在其中即可。我们将带宽直接取为采样率是完全合理的, 即  $\Delta f = f_s$ , 信号的频域表示限定在区间  $[-f_s/2, f_s/2]$ 。在确定了信号的时宽和带宽之后, 可以得到尺度因子  $S$  和归一化宽度  $\Delta x$  分别为

$$S = \sqrt{\Delta t/\Delta f} = \sqrt{T/f_s} \quad (5.2)$$

$$\Delta x = \sqrt{\Delta t \Delta f} = \sqrt{T f_s} \quad (5.3)$$

离散数据原来的采样间隔为  $T_s = 1/f_s$ , 对离散数据作尺度变换后, 采样间隔变为

$$T'_s = 1/\sqrt{T f_s} = 1/\Delta x \quad (5.4)$$

而原来的时域区间  $[-T/2, T/2]$ , 经尺度变换后变成区间  $[-\Delta x/2, \Delta x/2]$ 。因此, 以采样频率为带宽, 以观测时间为时宽, 直接对离散数据作尺度伸缩变换, 所得结果与原始连续信号作量纲归一化后再采样所得的结果完全相同。经过这样的分析处理, 离散数据就可直接进行 FRFT 数值计算。

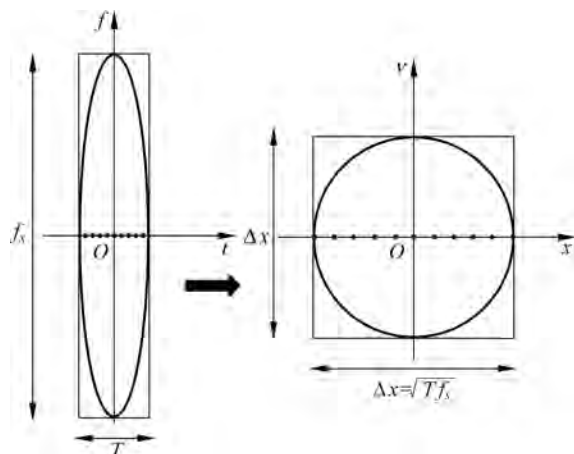


图 5.2 离散尺度化法示意图

## 2. 数据补零/截取法

离散尺度化法是通过离散数据在时间域上的伸缩来实现归一化。信号尺度的伸缩必然会导致原有信号的某些特征发生畸变, 例如对一个 chirp 信号进行尺度伸缩将使它的调频率变大或变小。数据补零/截取法可以使原有信号不发生畸变而又实现量纲归一化, 其关键仍然是选择合适的时宽  $\Delta t$ 、带宽  $\Delta f$ 、尺度因子  $S$  以及归一化宽度  $\Delta x$ 。首先将时间原点定在数据的中点。为了保证原有信号不发生畸变, 尺度因子只能选 1, 即  $S=1$ 。先将时宽定为观测时间, 即  $\Delta t=T$ , 带宽定为采样频率, 即  $\Delta f=f_s$ 。在确定归一化宽度  $\Delta x$  时, 分两种情况。第一种情况: 若带宽值大于时宽值 ( $f_s > T$ ), 则  $\Delta x$  直接取两者的大值,  $\Delta x=f_s$ 。由于原始数据的采样间隔为  $1/f_s$ , 时间区间在  $[-T/2, T/2]$ , 而归一化后要求采样间隔仍为  $1/f_s$ , 时间区间增加为  $[-f_s/2, f_s/2]$ 。因此, 通过在  $[-f_s/2, -T/2]$  和  $[f_s/2, T/2]$  区间以同样的采样间隔作数据补零来人为地增加信号的时宽, 从而实现了信号的时宽带宽归一化, 如图 5.3 所示, 这就是数据补零法实现归一化的原理。第二种情况: 当时宽值大于带宽值 ( $T > f_s$ ), 则  $\Delta x$  取两者的小值, 即  $\Delta x=f_s$ 。由于原始数据的采样间隔为  $1/f_s$ , 时间区间在  $[-T/2, T/2]$ , 而归一化后要求采样间隔仍为  $1/f_s$ , 时间区间减小为  $[-f_s/2, f_s/2]$ 。因此需要对原有数据作截取, 只取出在区间  $[-f_s/2, f_s/2]$  内的数据, 从而实现了信号的时宽带宽归一化, 如图 5.4 所示, 这就是数据截取法实现归一化的原理。

### 5.1.1.3 第一种分解方法

为了方便起见, 这里重写 FRFT 的定义式如下:

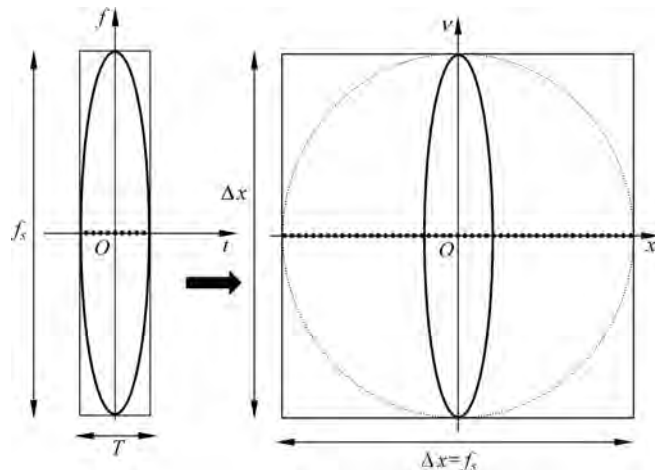


图 5.3 数据补零法示意图

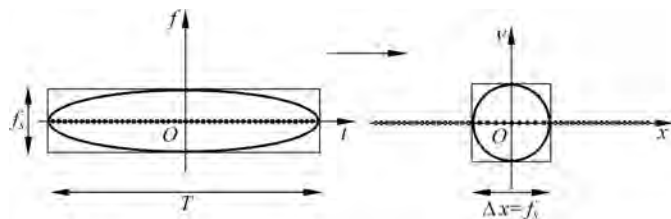


图 5.4 数据截取法示意图

$$X_p(u) = A_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [j\pi(u^2 \cot\alpha - 2ut \csc\alpha + t^2 \cot\alpha)] x(t) dt \quad (5.5)$$

其中,  $A_\alpha = \frac{\exp(-j\pi \operatorname{sgn}(\sin\alpha)/4 + j\alpha/2)}{|\sin\alpha|^{1/2}}$ ,  $\alpha = \frac{p\pi}{2}$ 。假定阶次  $p \in [-1, 1]$ , 将上式分为以下三步运算

$$g(t) = \exp[-j\pi t^2 \tan(\alpha/2)] x(t) \quad (5.6)$$

$$g'(u) = A_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[j\pi\beta(u-t)^2] g(t) dt \quad (5.7)$$

$$X_p(u) = \exp[-j\pi u^2 \tan(\alpha/2)] g'(u) \quad (5.8)$$

其中,  $g(t)$  和  $g'(u)$  是两个中间结果,  $\beta = \csc\alpha$ ,  $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ 。要实现连续 FRFT 的数值计算必须对以上每个分解步骤都进行离散化处理, 下面是具体的实现过程。

(1) 如式(5.6)所示, 信号  $x(t)$  被一个线性调频信号  $\exp[-j\pi t^2 \tan(\alpha/2)]$  所调制。为了对调制信号  $g(t)$  进行离散化处理, 首先需要确定它的带宽。因为信号的时域支撑区间为  $[-\Delta x/2, \Delta x/2]$ , 则线性调频信号的最高瞬时频率为  $|\tan(\alpha/2)| \Delta x/2$ , 它的双边带宽为  $|\tan(\alpha/2)| \Delta x$ 。因为信号  $x(t)$  与线性调频信号相乘对应于两者在频域的卷积, 因此调制信号  $g(t)$  的总的双边带宽可确定为  $[1 + |\tan(\alpha/2)|] \Delta x$ 。当角度满足  $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$  时, chirp 调制信号  $g(t)$  的带宽最高可达到原信号  $x(t)$  带宽的 2 倍, 即  $2\Delta x$ 。为了满足采样定理, 我们应当对  $g(t)$  以  $1/2\Delta x$  为间隔采样。如果  $x(t)$  的样本值的采样间隔为  $1/\Delta x$ , 那么就需要对这些样本进行二倍插值, 然后再与线性调频信号的离散采样值相乘, 以得到所希望

的  $g(t)$  的采样。关于插值的方法可以参考有关文献<sup>[6]</sup>。

(2) 如式(5.7)所示,信号  $g(t)$  与一个线性调频信号  $\exp(j\pi\beta t^2)$  作卷积。因为  $g(t)$  是带限信号,所以线性调频信号也可以用其带限形式代替而不会有任何影响,也就是

$$g'(u) = A_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[j\pi\beta(t-u)^2] g(t) dt = A_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-u) g(t) dt \quad (5.9)$$

其中

$$h(u) = \int_{-\Delta x}^{\Delta x} H(\nu) \exp(j2\pi\nu u) d\nu \quad (5.10)$$

这里

$$H(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} e^{j\pi/4} \exp(-j\pi\nu^2/\beta) \quad (5.11)$$

是线性调频信号  $\exp(j\pi\beta t^2)$  的傅里叶变换。其中,函数  $h(u)$  需要利用如下的 Fresnel 积分来求解

$$f(z) = \int_0^z \exp(\pi z^2/2) dz \quad (5.12)$$

于是,式(5.9)的离散形式为

$$g'\left(\frac{m}{2\Delta x}\right) = A_\alpha \sum_{n=-N}^N h\left(\frac{m-n}{2\Delta x}\right) g\left(\frac{n}{2\Delta x}\right) \quad (5.13)$$

这一离散卷积可以利用 FFT 快速计算。

(3) 根据式(5.8)得到 FRFT $X_p(u)$  的以  $1/2\Delta x$  为采样间隔的样本值  $X_p\left(\frac{m}{2\Delta x}\right)$ 。由于假定  $x(t)$  的所有变换都是带限的,它们位于区间  $[-\Delta x/2, \Delta x/2]$ , 所以需要对  $X_p\left(\frac{m}{2\Delta x}\right)$  进行二倍抽取,以得到离散采样  $X_p\left(\frac{m}{\Delta x}\right)$ 。

归纳起来,上述方法从唯一描述连续信号的  $x(t)$  的  $N$  个离散采样  $x\left(\frac{n}{\Delta x}\right)$  开始,最后得到唯一描述  $X_p(u)$  的  $N$  个离散采样  $X_p\left(\frac{m}{\Delta x}\right)$ 。如果令  $\bar{x}$  和  $\bar{X}_p$  分别表示  $x(t)$  和  $X_p(u)$  的  $N$  个离散样本的列向量,则整个过程可以写作

$$\bar{X}_p = \mathbf{F}_I^p \bar{x}, \quad \mathbf{F}_I^p = \mathbf{D} \mathbf{A} \mathbf{H}_{lp} \mathbf{A} \mathbf{J} \quad (5.14)$$

式中,  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{J}$  分别是对应内插和抽取运算的矩阵; 矩阵  $\mathbf{A}$  为对角矩阵,它对应为线性调频函数乘法; 矩阵  $\mathbf{H}_{lp}$  对应卷积运算。  $\mathbf{F}_I^p$  使得我们可以利用原函数的离散采样得到 FRFT 的离散采样,这是对 DFRFT 矩阵定义的基本要求。

本计算方法只适用于  $-1 \leq p \leq 1$  的情况。当阶次  $p$  位于该区间之外,则可利用 FRFT 的基本性质来得到所需结果。

#### 5.1.1.4 第二种分解方法

5.1.1.3 节介绍的第一种分解算法存在一个问题,就是它必须计算 Fresnel 积分。本节介绍另一种分解算法则避免了这个问题。FRFT 的定义式也可以改写作如下形式:

$$X_p(u) = A_\alpha \exp(j\pi\gamma u^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-j2\pi\beta ut) [\exp(j\pi\gamma t^2) f(t)] dt \quad (5.15)$$

其中,  $\gamma = \cot\alpha$ ,  $\beta = \csc\alpha$ ,  $\alpha = p\pi/2$ 。由上式可以明显看出,我们还可以将其分解成如下三个

步骤来运算:

$$g(t) = \exp(j\pi\gamma t^2) x(t) \quad (5.16)$$

$$g'(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-j2\pi\beta ut) g(t) dt \quad (5.17)$$

$$X_p(u) = A_\alpha \exp(j\pi\gamma u^2) g'(u) \quad (5.18)$$

信号  $x(t)$  首先被 chirp 信号  $\exp(j\pi\gamma t^2)$  调制。为了对调制信号  $g(t)$  进行离散化处理, 需要先确定它的带宽。因为  $x(t)$  为量纲归一化后的信号, 它在所有分数阶傅里叶域 (包括时域和频域) 上的宽度都限定在区间  $[-\Delta x/2, \Delta x/2]$  内, 或者说, 它的 Wigner 分布限定在以原点为中心、直径为  $\Delta x$  的圆内。当限定阶次在  $0.5 \leq |p| \leq 1.5$  范围时,  $|\gamma| \leq 1$ , chirp 调制信号  $\exp(j\pi\gamma t^2) x(t)$  的最高频率为  $0.5(1 + |\gamma|)\Delta x \leq \Delta x$ 。这样, 以  $1/(2\Delta x)$  为采样间隔并利用香农内插公式可将其表示为

$$\exp(j\pi\gamma t^2) x(t) = \sum_{n=-N}^N \exp(j\pi\gamma \left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2) x\left(\frac{n}{2\Delta x}\right) \operatorname{sinc}\left(2\Delta x\left(t - \frac{n}{2\Delta x}\right)\right) \quad (5.19)$$

将式(5.19)代入式(5.15), 并交换积分和求和顺序, 便得到

$$X_p(u) = A_\alpha \exp(j\pi\gamma u^2) \sum_{n=-N}^N \exp(j\pi\gamma \left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2) x\left(\frac{n}{2\Delta x}\right) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-j2\pi\beta ut) \operatorname{sinc}\left(2\Delta x\left(t - \frac{n}{2\Delta x}\right)\right) dt \quad (5.20)$$

上式中的积分项可以计算得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-j2\pi\beta ut) \operatorname{sinc}\left(2\Delta x\left(t - \frac{n}{2\Delta x}\right)\right) dt = \exp\left(-j2\pi\beta u\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)\right) \frac{1}{2\Delta x} \operatorname{rect}\left(\frac{\beta x}{2\Delta x}\right) \quad (5.21)$$

在  $0.5 \leq |p| \leq 1.5$  的范围, 矩形函数  $\operatorname{rect}\left(\frac{\beta x}{2\Delta x}\right)$  在变换函数的支撑区  $|x| \leq \Delta x/2$  将总是等于 1。于是, 我们可以写出

$$X_p(u) = \frac{A_\alpha}{2\Delta x} \sum_{n=-N}^N \exp(j\pi\gamma u^2) \exp\left(-j2\pi\beta u\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)\right) \cdot \exp\left(j\pi\gamma \left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2\right) x\left(\frac{n}{2\Delta x}\right) \quad (5.22)$$

上式中时域变量已经实现了离散化, 而分数阶傅里叶域变量仍然保持连续。接下来需要对分数阶傅里叶域变量进行离散化。以  $1/(2\Delta x)$  为采样间隔, 在  $[-\Delta x/2, \Delta x/2]$  内对分数阶傅里叶域变量采样, 即令  $x = m/(2\Delta x)$ , 代入上式得到

$$X_p\left(\frac{m}{2\Delta x}\right) = \frac{A_\alpha}{2\Delta x} \sum_{n=-N}^N \exp\left(j\pi\gamma \left(\frac{m}{2\Delta x}\right)^2 - j2\pi\beta \frac{mn}{(2\Delta x)^2} + j\pi\gamma \left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2\right) x\left(\frac{n}{2\Delta x}\right), \quad -N \leq m \leq N \quad (5.23)$$

这是一个有限求和, 使得可以利用原函数的离散样本值求出 FRFT 的离散样本值。但是如果直接以上式作计算, 计算复杂度为  $O(N^2)$ , 它的运算量仍然很大。将一个恒等式  $mn = \frac{1}{2}[m^2 + n^2 - (m-n)^2]$  代入上式并经过一些化简后可得到

$$\begin{aligned}
 F^p[x]\left(\frac{m}{2\Delta x}\right) &= \frac{A_\alpha}{2\Delta x} \exp\left(j\pi(\gamma - \beta)\left(\frac{m}{2\Delta x}\right)^2\right) \cdot \\
 &\quad \sum_{n=-N}^N \exp\left(j\pi\beta\left(\frac{m-n}{2\Delta x}\right)^2\right) \\
 &\quad \exp\left(j\pi(\gamma - \beta)\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2\right) x\left(\frac{n}{2\Delta x}\right), \quad -N \leq m \leq N
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

式中的求和部分为离散卷积形式,该卷积可以用 FFT 快速计算,其总的计算复杂度为  $O(N\log N)$ 。

和第一种方法一样,假定取二倍的插值和抽取,第二种方法也是从唯一表示函数  $x(t)$  的  $N$  个样本  $x\left(\frac{n}{\Delta x}\right)$  出发,最后得到唯一表示 FRFT $X_p(u)$  的  $N$  个样本  $X_p\left(\frac{m}{\Delta x}\right)$ 。如果令  $\bar{x}$  和  $\bar{X}_p$  分别表示  $x(t)$  和  $X_p(u)$  的  $N$  个离散样本的列向量,则第二种分解算法的整个过程可以用矩阵表示为

$$\bar{X}_p = \mathbf{F}_\parallel^p \bar{x}, \quad \mathbf{F}_\parallel^p = \mathbf{D}\mathbf{K}_p\mathbf{J} \tag{5.25}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 K_p(m, n) &= \frac{A_\alpha}{2\Delta x} \exp\left[j\pi\gamma\left(\frac{m}{2\Delta x}\right)^2 - j2\pi\beta\frac{mn}{(2\Delta x)^2} + j\pi\gamma\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2\right], \\
 |m| \leq N, |n| \leq N
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

与  $\mathbf{F}_\perp^p$  一样,  $\mathbf{F}_\parallel^p$  也使得原函数的样本值转换为其 FRFT 的样本值。

虽然上述推导过程只是在假定  $0.5 \leq p \leq 1.5$  的条件下得到的,但是我们可以利用 FRFT 的旋转相加性,很方便地将阶次范围扩展到  $0 \leq |p| \leq 0.5$  或  $1.5 \leq |p| \leq 2$  范围时的情况。利用 FRFT 的旋转相加性

$$\mathcal{F}^p = \mathcal{F}^{p-1+1} = \mathcal{F}^{p-1} \mathcal{F}^1 \tag{5.27}$$

我们可最后得到如下公式:

$$X_p\left(\frac{m}{2\Delta x}\right) = \frac{A_{\alpha'}}{2\Delta x} \sum_{n=-N}^N \exp\left[j\pi\gamma'\left(\frac{m}{2\Delta x}\right)^2 - j2\pi\beta'\frac{mn}{(2\Delta x)^2} + j\pi\gamma'\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2\right] X_1\left(\frac{n}{2\Delta x}\right) \tag{5.28}$$

其中,  $\alpha' = (p-1)\pi/2$ ,  $\gamma' = \cot\alpha'$ ,  $\beta' = \csc\alpha'$ ,  $X_1(u)$  表示  $x(t)$  的傅里叶变换。

IP-DFRFT 对连续 FRFT 具有很好的近似度,同时具有高效性。然而,IP-DFRFT 无法满足酉性与可加性,从而导致当使用 IP-DFRFT 处理信号恢复的应用时存在一些近似误差。总的来说,IP-DFRFT 仅满足理想离散傅里叶变换准则中的(1),(2)和(5)。

### 5.1.2 Pei 采样型离散分数阶傅里叶变换

这种方法由 Pei 等提出<sup>[4]</sup>。与 5.1.1 节方法不同,虽然它也是从连续 FRFT 定义式出发,但是它不对连续 FRFT 表达式分解,而直接对输入/输出变量实现采样,然后通过限定输入/输出采样间隔来保持变换的可逆性,实现了具有解析表达式(Closed-Form Expression)的采样型离散分数阶傅里叶变换(CF-DFRFT)。以下给出它的推导过程。将连续 FRFT 的定义式表达为



$$X_p(u) = \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} e^{j\frac{1}{2}u^2\cot\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jut\csc\alpha} e^{j\frac{1}{2}t^2\cot\alpha} x(t) dt \quad (5.29)$$

其中,  $p$  为变换阶次,  $\alpha = p\pi/2$ 。为了推导 DFRFT, 我们首先对连续 FRFT 的输入函数  $x(t)$  和输出函数  $X_p(u)$  进行采样, 采样间隔为  $\Delta t$  和  $\Delta u$ , 得到

$$y(n) = x(n\Delta t), \quad Y_p(m) = X_p(m\Delta u) \quad (5.30)$$

其中,  $n = -N, -N+1, \dots, N, m = -M, -M+1, \dots, M$ 。这里我们不从  $t=0$  和  $u=0$  开始采样是因为我们希望使直流成分位于中心。将上式代入连续 FRFT 定义式, 得到

$$Y_p(m) = \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} \Delta t e^{j\frac{1}{2}m^2\Delta u^2\cot\alpha} \sum_{n=-N}^N e^{-jmn\Delta t\Delta u\csc\alpha} e^{j\frac{1}{2}n^2\Delta t^2\cot\alpha} y(n) \quad (5.31)$$

以上公式可以写为

$$Y_p(m) = \sum_{n=-N}^N K_p(m, n) y(n) \quad (5.32)$$

其中

$$K_p(m, n) = \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} \Delta t e^{j\frac{1}{2}m^2\Delta u^2\cot\alpha} e^{-jmn\Delta t\Delta u\csc\alpha} e^{j\frac{1}{2}n^2\Delta t^2\cot\alpha} \quad (5.33)$$

为了使式(5.32)可逆, 当  $M \geq N$  时, 我们需要使它的逆变换等于  $K_p(m, n)$  的 Hermitian (共轭转置) 矩阵, 即

$$y(n) = \sum_{m=-M}^M K_p^*(m, n) Y_p(m) \quad (5.34)$$

联立式(5.32)和式(5.34)得到

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{m=-M}^M \sum_{k=-N}^N K_p^*(m, n) K_p(m, k) y(k) \\ &= \frac{\Delta t^2}{2\pi |\sin\alpha|} \sum_{m=-M}^M \sum_{k=-N}^N e^{j\frac{1}{2}\cot\alpha(k^2-n^2)\Delta t^2} e^{jm(n-k)\Delta t\Delta u\csc\alpha} y(k) \end{aligned} \quad (5.35)$$

为了使上式中对  $m$  的求和等于  $\delta(n-k)$ , 即

$$\sum_{m=-M}^M e^{jm(n-k)\Delta t\Delta u\csc\alpha} = \delta(n-k) \quad (5.36)$$

那么, 需要满足

$$\Delta u \Delta t = \frac{2\pi S \sin\alpha}{2M+1} \quad (5.37)$$

其中,  $|S|$  是与  $2M+1$  互为质数的整数。这样, 式(5.50)变为

$$K_p(m, n) = \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} \Delta t e^{j\frac{1}{2}m^2\Delta u^2\cot\alpha} e^{-j\frac{2\pi n m S}{2M+1}} e^{j\frac{1}{2}n^2\Delta t^2\cot\alpha} \quad (5.38)$$

这样, 得到

$$\sum_{m=-M}^M \sum_{k=-N}^N K_p^*(m, n) K_p(m, k) y(k)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2M+1}{2\pi |\sin\alpha|} \Delta t^2 y(n) \\
 &= \frac{2M+1}{2\pi \operatorname{sgn}(\sin\alpha) \sin\alpha} \Delta t^2 y(n)
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

对  $K_p(m, n)$  做归一化处理以满足式(5.35), 于是得到变换矩阵  $K_p(m, n)$  为

$$K_p(m, n) = \sqrt{\frac{\operatorname{sgn}(\sin\alpha) (\sin\alpha - j\cos\alpha)}{2M+1}} e^{\frac{j}{2}m^2 \Delta u^2 \cot\alpha} e^{-j\frac{2\pi nm S}{2M+1}} e^{\frac{j}{2}n^2 \Delta t^2 \cot\alpha} \tag{5.40}$$

为简便起见, 选择  $S = \operatorname{sgn}(\sin\alpha) = \pm 1$ , 式(5.40)改写为

$$K_p(m, n) = \sqrt{\frac{|\sin\alpha| - j\operatorname{sgn}(\sin\alpha) \cos\alpha}{2M+1}} e^{\frac{j}{2}m^2 \Delta u^2 \cot\alpha} e^{-j\frac{2\pi nm \operatorname{sgn}(\sin\alpha)}{2M+1}} e^{\frac{j}{2}n^2 \Delta t^2 \cot\alpha} \tag{5.41}$$

于是, 我们针对  $\sin\alpha > 0$  和  $\sin\alpha < 0$  得到以下两个 DFRFT 公式。

(1)  $\sin\alpha > 0$ , 即  $\alpha \in 2D\pi + (0, \pi)$ :

$$Y_p(m) = \sqrt{\frac{\sin\alpha - j\cos\alpha}{2M+1}} e^{\frac{j}{2}m^2 \Delta u^2 \cot\alpha} \sum_{n=-N}^N e^{-j\frac{2\pi nm}{2M+1}} e^{\frac{j}{2}n^2 \Delta t^2 \cot\alpha} y(n) \tag{5.42}$$

(2)  $\sin\alpha < 0$ ,  $\alpha \in 2D\pi + (-\pi, 0)$ :

$$Y_p(m) = \sqrt{\frac{-\sin\alpha + j\cos\alpha}{2M+1}} e^{\frac{j}{2}m^2 \Delta u^2 \cot\alpha} \sum_{n=-N}^N e^{j\frac{2\pi nm}{2M+1}} e^{\frac{j}{2}n^2 \Delta t^2 \cot\alpha} y(n) \tag{5.43}$$

另外, 必须满足限制条件  $M \geq N$  和

$$\Delta t \Delta u = \frac{2\pi |\sin\alpha|}{2M+1} \tag{5.44}$$

可以看到, 当  $M=N$  且  $\alpha = \pi/2$  时, 式(5.42)简化为 DFT; 当  $\alpha = -\pi/2$  时, 式(5.43)简化为 IDFT。我们也可以看到, 当  $\alpha = D\pi$ ,  $D$  为整数时,  $\Delta t$  和  $\Delta u$  没有合适的选择。即当  $\alpha = D\pi$  时, 不能用式(5.42)和式(5.43)定义 DFRFT。事实上, 这种情况可以用下式来定义

$$Y_p(m) = y(m), \quad \alpha = 2D\pi \tag{5.45}$$

$$Y_p(m) = y(-m), \quad \alpha = (2D+1)\pi \tag{5.46}$$

我们注意到, 在式(5.44)中, 如果  $|\sin\alpha|$  很小,  $\Delta t$  和  $\Delta u$  也必须很小, 采样点数将增加, 这将增加 DFRFT 的计算量。因为对于连续 FRFT 来说, 有

$$X_p(u) = \mathcal{F}^{p-1} [\mathcal{F}^1[x](t)](u) \tag{5.47}$$

所以, 当  $|\sin\alpha|$  很小时, 我们可以先作  $x(t)$  采样信号的 DFT, 然后再计算阶次为  $p-1$  的 DFRFT。因此, 我们将上面的 DFRFT 变为

$$\begin{aligned}
 Y_\alpha(m) = & C e^{-\frac{j}{2}m^2 \Delta u^2 \tan\alpha} \sum_{r=-N}^N \sum_{n=-N}^N e^{j\frac{2\pi \operatorname{sgn}(\cos\alpha) rm}{2M+1}} \times \\
 & e^{-\frac{j}{2}r^2 \Delta f^2 \tan\alpha} e^{-j\frac{2\pi nr}{2N+1}} y(n)
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

其中

$$\Delta u \Delta f = \frac{2\pi |\cos\alpha|}{2M+1} \tag{5.49}$$

$$C = \sqrt{\frac{|\cos\alpha| + j\operatorname{sgn}(\cos\alpha) \sin\alpha}{(2M+1)(2N+1)}} \tag{5.50}$$

因为  $\Delta t \Delta f = \frac{2\pi}{2N+1}$ ,  $\Delta f = \frac{2\pi}{\Delta t(2N+1)}$ , 所以在  $|\sin\alpha| \approx 0$  时, 我们可以定义修正的 DFRFT 如下:

$$Y_p(m) = C e^{-\frac{j}{2} m^2 \Delta u^2 \tan\alpha} \sum_{r=-N}^N \sum_{n=-N}^N e^{j \frac{2\pi r m \operatorname{sgn}(\cos\alpha)}{2M+1}} \cdot e^{-\frac{j 2\pi^2 r^2 \tan\alpha}{(2N+1)^2 \cdot \Delta t^2}} e^{-j \frac{2\pi n r}{2N+1}} y(n) \quad (5.51)$$

其中,  $\Delta u = (2N+1) |\cos\alpha| \frac{\Delta t}{2M+1}$ 。另外, 应当注意到, 在上面 DFRFT 推导中已经进行了归一化, 因此在利用上述的 DFRFT 计算连续 FRFT 结果时必须考虑这个归一化因子。

CF-DFRFT 通过对采样间隔的合理限制, 使其具备可逆性。在计算复杂度方面, CF-DFRFT 包含两个 chirp 乘法和 FFT 运算。因此, 它的总运算量为  $2P + \frac{P}{2} \log_2 P$ , 其中  $P = 2M+1$  为输出序列的长度。相较于 IP-DFRFT, 它具有更小的计算复杂度。总的来说, CF-DFRFT 满足理想 DFRFT 准则中的(1), (2), (3)和(5)。对于旋转相加性来说, 虽然它不满足旋转相加性, 但通过一定转换能够从一个分数阶傅里叶域得到另一个分数阶傅里叶域的结果, 具体内容可参见文献[4]。

总结说来, 采样型 DFRFT 都满足理想 DFRFT 准则中的(1), (2)和(5)。其中, CF-DFRFT 还满足准则(3)。因此, 对于采样型 DFRFT, 当我们只是为了利用离散变换去计算连续 FRFT 时是非常有用的。这种 DFRFT 把原始函数的  $N$  个采样值映射为 FRFT 的  $N$  个采样值。这种形式的 DFRFT 具有很好地逼近连续 FRFT 的精度, 并且可以利用 FFT 获得运算量为  $O(N \log N)$  的数值算法。在一些应用中, 我们只是希望 DFRFT 可以很好地逼近连续 FRFT, 而不利用旋转相加性, 这时通过把连续 FRFT 用这种 DFRFT 取代, 在连续分数阶傅里叶域推导的各种信号处理算法可以直接应用到离散信号处理上。此外, 由于这种 DFRFT 具有闭合形式, 所以在一些应用中有利于推导一些性质。由于采样型 DFRFT 的这些优点, 它广泛应用于分数阶傅里叶域非均匀采样和重构、chirp 信号检测和参数估计、分数阶傅里叶域滤波、分数阶傅里叶域多采样率理论等。

### 5.1.3 稀疏离散分数阶傅里叶变换

与传统的 DFT 相比, DFRFT 多了一个参数自由度, 分数阶次未知, 这就需要调频率的搜索, 也需要大量的去斜(De-chirp)操作以及 FFT 运算, 导致其计算量高出很多, 这成为工程实际应用上的难题。为了降低 DFRFT 的计算复杂度, 工程上采用了很多 DFRFT 的数值计算方法, 其中 Pei 采样型 DFRFT 是常使用的降低计算复杂度的算法之一。然而, 对于大数据量的输入信号, 在应用 Pei 采样型 DFRFT 算法之后, 依然难以解决计算复杂度过高的问题。

针对这一问题, 工程上常使用分段式处理的方法<sup>[7-8]</sup>。该方法的思路是, 将整个运算模块分成一个个微小的计算单元, 分布式并行处理, 最后将所得的一个个微小单元整合出最后的结果。但是, 从整体来看, 不仅总的时间资源并没有节约, 另外的划分与组合的操作过程反而增加额外计算量, 而且这种方法会降低频谱分辨率。针对这一难题, 一种



名为 Zoom-FFT 的算法<sup>[9]</sup>被提出,保持了频谱的高分辨率,但该算法会导致频域过窄的观测范围。为此,在文献[10]中寻求利用信号的稀疏特性的优势,在保证良好分辨率的同时,降低了复杂度。即使该算法需要关于信号稀疏性的先验信息,但依靠信号的稀疏特性,能在提高算法效率和保持高分辨率之间取得了良好的平衡。稀疏傅里叶变换在雷达信号处理领域取得了大量的成功应用<sup>[11-13]</sup>,利用信号稀疏性的优势为本章节的研究指明了方向。

对于常见的信号,具备稀疏性是普遍情况,例如语音信号和图像信号在小波变换下都是稀疏的。分数阶傅里叶域估计目标参数能更好地聚集加速目标回波或一般的线性调频信号能量<sup>[14-15]</sup>,因此刘升恒等提出了稀疏分数阶傅里叶变换(Sparse Fractional Fourier Transform, SFRFT)和对应的线性调频信号检测算法<sup>[16-17]</sup>。值得注意的是,文献[18]提出一种新型的简单实用型的稀疏傅里叶变换方法,因其算法的高效和实用得到了广泛的关注,也是很多改进的稀疏傅里叶算法的基础。对于频域稀疏的大数据量信号,该方法可将 DFT 的计算量降低至  $O(\log_2 N \sqrt{KN \log_2 N})$ 。我们可以将这种方法的思路引入 Pei 采样型算法,设计新型离散 SFRFT 算法,大幅降低运算的时间成本。另外,根据信号频域大值分量的数目是否已知,稀疏傅里叶变换算法可被分成确定型和随机型算法。在实际工程应用中,分数谱大值分量的数目很难提前获取,因此我们更倾向于设计随机型的稀疏分数谱估计算法。

### 5.1.3.1 随机型稀疏分数谱估计算法

对于频域大值分量未知且分数域存在稀疏性的非平稳信号,基于文献[11]提出的新型稀疏傅里叶变换算法,可优化 Pei 采样型算法的处理流程,大幅降低计算复杂度。输入信号的长度越长,我们设计的算法在计算效率方面的优势越突出,尤其对于信号长度超过  $2^{12}$  的数据有明显的优势,而这样的数据长度在分数域滤波、雷达 SAR 成像、数据加密及压缩等工程应用中是十分常见的。本节先介绍此随机型 SFRFT 算法的结构与流程,然后介绍分数旋转角的选取方法,接着分析所提的随机型稀疏分数谱估计算法与 Pei 采样型算法和稀疏傅里叶算法的关系,最后仿真分析算法性能。

#### 1. 算法流程

一般的稀疏傅里叶算法流程大致上分成采样、定位和估值这三个过程,我们依次按照这三个过程的思路,具体化所提出的随机型 SFRFT 算法,将其分成 9 个步骤。

##### (1) 对输入信号做 chirp 乘积。

假定原始输入信号  $f(n)$  是非周期信号,且在分数域稀疏,满足 Dirichlet 条件。为了减小载波中 chirp 基的影响,对原始输入信号  $f(n)$  和 chirp 做乘积

$$x(n) = f(n) e^{\frac{j}{2} \cot \alpha n^2 \Delta t^2}, \quad n \in [1, N] \quad (5.52)$$

其中,  $\alpha$  是 DFRFT 的旋转角;  $\Delta t$  是输入信号的采样间隔。

##### (2) 频谱重排。

频谱重排有两个作用: ①以极大的概率分离出大值系数<sup>[19]</sup>; ②附加相位信息。因此可以在每次的随机循环中打乱频谱邻近点间的关联,并分隔相邻的谱系数。但是,我们已知时域信号,而其频谱只有在对其作 DFT 后才已知,因此需要对时域信号重排以达到频域重排的效果。为了解释这个过程,我们需要介绍一些定义,并研究时频重排与频域的重排之间的关系。

**定义 5.1(取模运算):** 给定两个正整数  $a$  和  $b$ , 定义式  $a \bmod b$  表示的是  $a$  欧几里得除法除以  $b$  得到的余数。

**定义 5.2(模逆):** 若

$$\exists \sigma^{-1} \quad \text{s. t.} \quad (\sigma \times \sigma^{-1}) \bmod N = 1 \quad (5.53)$$

则  $\sigma \in [1, N]$  对于  $\bmod N$  可逆, 定义  $\sigma^{-1}$  是  $\sigma$  关于模  $N$  的模逆。

**定义 5.3(时域重排):** 假定  $\sigma \in [1, N]$  为重排因子, 与  $N$  互质, 且  $\bmod N$  可逆。为了避免多次重排间有关联,  $\sigma$  优先选择随机质数, 至少要为随机的奇数。对于时域信号  $x(n)$ , 定义重排操作为  $n \rightarrow \sigma n \bmod N$ , 则重排后时域信号的数学表达式为

$$s(n) = x((\sigma n) \bmod N), \quad n \in [1, N] \quad (5.54)$$

**定理 5.1(频谱重排):** 时域信号  $x(n)$  使用重排因子  $\sigma$  重排后, 相应的频域信号会根据重排因子  $\sigma^{-1}$  重排, 则时域重排信号  $s(n)$  和时域信号  $x(n)$  两者频域的关系为

$$S(m) = X((\sigma^{-1} m) \bmod N), \quad m \in [1, N] \quad (5.55)$$

**证明:** 定义符号右下的角坐标都隐含取模运算, 如对长度为  $N$  的信号  $x$ , 其包含角坐标的标注  $x_n$  指  $x(n \bmod N)$ 。则可简化 DFT 的定义:

$$X_m = \sum_{n=1}^N \omega^{nm} x_n, \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.56)$$

则对任意  $m \in [1, N]$  有

$$S_m = \text{DFT}\{s_n\} = \text{DFT}\{x_{\sigma n}\} = \sum_{n=1}^N \omega^{nm} x_{\sigma n} = \sum_{\tilde{n}=1}^N \omega^{\sigma^{-1} \tilde{n} m} x_{\tilde{n}} = x_{\sigma^{-1} m} \quad (5.57)$$

(3) 加窗。

对重排后的时域信号加窗, 以平滑地提取部分信号并减少频谱泄漏。定义平坦窗函数  $g(n), n \in [1, N]$ , 窗长为  $w$ , 其频域信号  $G(m)$  满足

$$G(m) \in \begin{cases} [1 - \delta, 1 + \delta], & m \in [-\epsilon' N \epsilon' N] \\ [0, \delta], & m \notin [-\epsilon N \epsilon N] \end{cases} \quad (5.58)$$

其中,  $\epsilon'$  和  $\epsilon$  分别表示通带和阻带的截断因子,  $\delta$  表示波纹振荡程度。对重排后的时域信号加窗后的信号  $y(n) = g(n)s(n), n \in [1, N]$ , 则  $y(n)$  的支撑集满足  $\text{supp}(y) \subseteq \text{supp}(g) = \left[-\frac{w}{2}, \frac{w}{2}\right]$ 。

(4) 时域混叠和频域的关系。

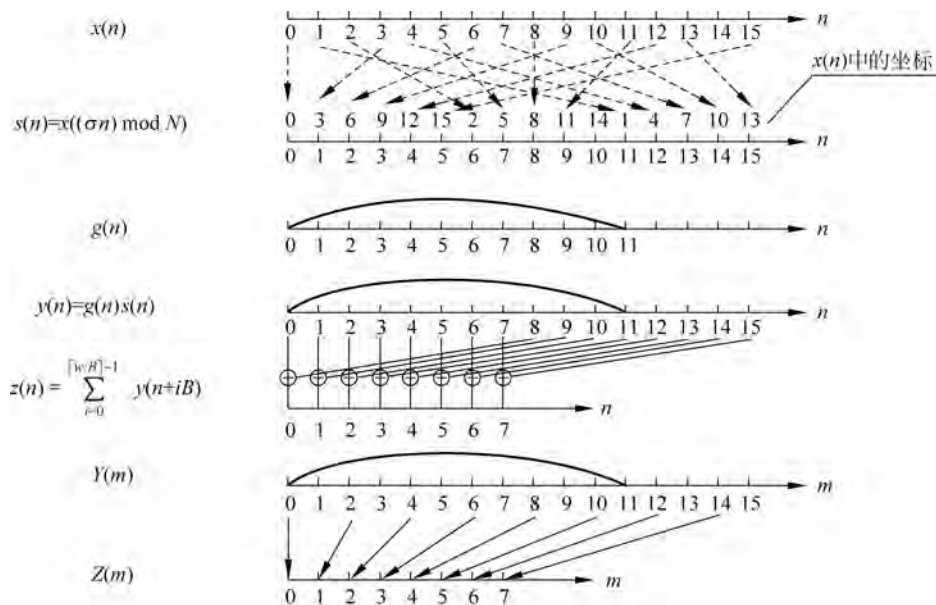
当  $\sin \alpha > 0$  时, 假定存在一个正整数  $B$  能整除  $N$ , 则可构造信号

$$Z(m) = \text{FFT}\{z(n)\} = \text{FFT}\left\{\sum_{i=0}^{\lceil w/B \rceil - 1} y(n + iB)\right\}, \quad n \in [0, B-1] \quad (5.59)$$

当  $\sin \alpha < 0$  时, 则将上式的 FFT 替换成 IFFT。根据文献[18], 可得到频域信号  $Z(m)$  和  $Y(m)$  的关系

$$Z(m) = Y(mN/B), \quad m \in [0, B-1] \quad (5.60)$$

因此, 可以得出结论, 时域信号的混叠对应其频域信号的子采样。同理, 时域信号的子采样对应频域信号的混叠。针对上述的时域重排和频域子采样的过程, 我们可以取一个例子以便于理解, 如图 5.5 所示。



参数设置:  $N=16, B=8, w=12, \sigma=3(\sigma^{-1}=11)$

图 5.5 时域重排和频域子采样对应关系的例子

(5) 哈希映射。

定义一个哈希函数

$$h_{\sigma}(m) = \lfloor ((\sigma m) \bmod N) B / N \rfloor \tag{5.61}$$

和一个偏移函数

$$o_{\sigma}(m) = (\sigma m) \bmod N - h_{\sigma}(m) N / B \tag{5.62}$$

(6) 定位循环。

定义一个集合

$$\mathcal{J} = \underset{m}{\operatorname{argmax}} |Z(m)| \tag{5.63}$$

假定该集合中含有  $Z(m)$  的  $2k$  个较大坐标值。由哈希函数, 输出原像:

$$\mathcal{I} = \{m \in [1, N] \mid h_{\sigma}(m) \in \mathcal{J}\} \tag{5.64}$$

原像集合  $\mathcal{I}$  中的元素个数为  $2kN/B$ 。定位循环认为, 改变重排因子, 根据像到原像的映射关系, 进行多次定位循环, 如果存在一些原像的位置以很大的概率保持不变, 则其对应真实大值的概率就更大。如图 5.6 所示, 我们选择不同的重排因子, 画出像到原像的对应关系, 反映出这种规律。

(7) 估值循环。

$X(m)$  中  $k$  个大值的估计值可由下述表达式计算得到

$$\hat{X}(m) = \begin{cases} \frac{Z(h_{\sigma}(m)) e^{-j\pi o_{\sigma}(m) w / N}}{G(o_{\sigma}(m))}, & m \in \mathcal{I} \\ 0, & m \in [1, N] \cap \bar{\mathcal{I}} \end{cases} \tag{5.65}$$

假定  $l$  是估值循环次数,  $l_{\text{total}}$  表示总的循环次数且  $l_{\text{total}} = l_{\text{loc}} + l_{\text{est}}$ , 正整数  $l_{\text{loc}}$  和  $l_{\text{est}}$

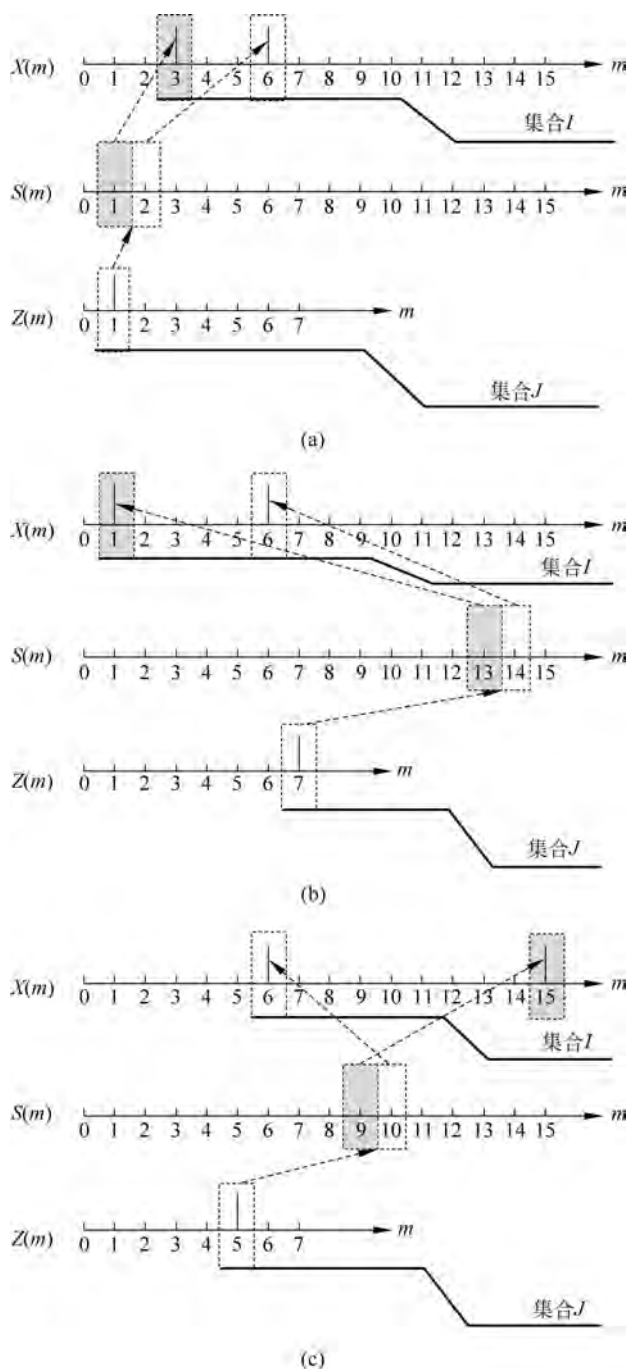


图 5.6 三次重排后定位循环的坐标映射示意图

(a) 参数设置:  $N=16, B=8, w=12, k=1, \sigma=3(\sigma^{-1}=11)$ ; (b) 参数设置:  $N=16, B=8, w=12, k=1, \sigma=5(\sigma^{-1}=13)$ ;

(c) 参数设置:  $N=16, B=8, w=12, k=1, \sigma=7(\sigma^{-1}=7)$

分别是定位循环和估值循环次数。当  $l \leq l_{\text{loc}}$  时, 执行上述步骤(2)~(6); 当  $l_{\text{loc}} \leq l \leq l_{\text{total}}$  时, 执行上述步骤(2)~(7); 当  $l > l_{\text{total}}$  时, 循环结束。

(8) 计算中值。

采用对实部和虚部分别取中值的方法, 输出  $X(m)$  的估计值:

$$\tilde{X}(m) = \underset{l_{\text{est}}}{\text{Median}}\{\Re\{\hat{X}(m)\}\} + j\underset{l_{\text{est}}}{\text{Median}}\{\Im\{\hat{X}(m)\}\} \quad (5.66)$$

(9) 频域调制。

为了将信号从傅里叶域调制到分数阶傅里叶域, 我们将式(5.66)乘上指数 chirp 函数, 最终输出结果:

$$\hat{F}_\alpha(m) = \tilde{X}(m) e^{\frac{jm^2 \Delta u^2}{2 \tan \alpha}} \sqrt{(\sin \alpha - j \cos \alpha) \text{sgn}(\sin \alpha) / M} \quad (5.67)$$

式中,  $\Delta u$  表示输出信号的采样间隔,  $M$  表示频域信号的长度。对于  $\sin \alpha < 0$  的情况(当  $\sin \alpha > 0$  时, FFT 代替 IFFT), 算法流程如图 5.7 所示。

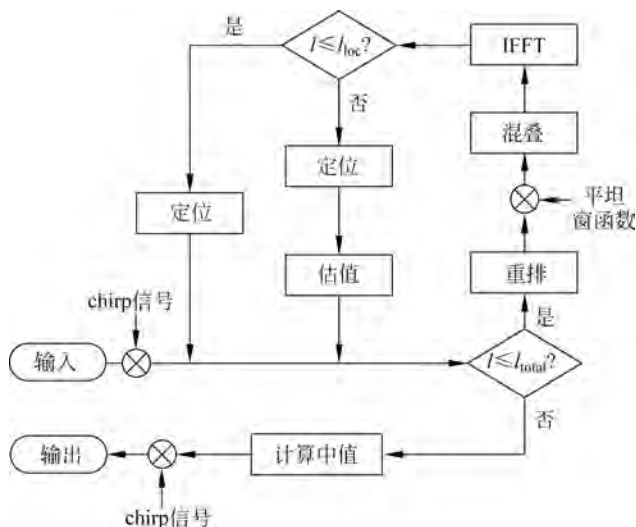


图 5.7 当  $\sin \alpha < 0$  时 SFRFT 的算法流程

## 2. 分数旋转角选取

在一些应用领域中, 分数旋转角  $\alpha$  的值是已知的, 比如在 SAR 成像和线性调频匹配滤波中。然而在其他的大多数情况, 分数旋转角  $\alpha$  的值是未知的。最大似然估计(Maximum Likelihood Estimation, MLE)是估计分数旋转角  $\alpha$  的常用方法, 例如在文献[20]中, 利用最大似然估计的离散形式, 提出离散调频傅里叶变换的方法, 准确估计出旋转角  $\alpha$  的值。但是, 最大似然函数的二维最大化过程需要巨大的计算量, 时间消耗的成本过高, 故需要找到可替代的方法。文献[21]中提出离散多项式相位变换的方法, 该方法将 chirp 信号转化成正弦波进而检测频谱大值量的位置, 可快速得到分数旋转角  $\alpha$  的估计值, 避免了 MLE 法二维函数最大化过程的时间消耗。

下面介绍基于多项式相位变换估计分数旋转角  $\alpha$  的具体过程。假设  $x(n)$  是一个关于离散实值变量  $n$  的复值函数,  $\tau$  为时延量。定义算子  $\text{DP}_1[x(n), \tau]$  和  $\text{DP}_2[x(n), \tau]$  的数学形式:

$$\text{DP}_1[x(n), \tau] = x(n) \quad (5.68)$$



$$\text{DP}_2[x(n), \tau] = x(n)x^*(n - \tau) \quad (5.69)$$

算子 $\text{DP}_2$ 表示对离散信号 $x(n)$ 取差分,相当于对其降阶一次<sup>[21]</sup>。再假定一个算子 $\text{DPT}$ 表示算子 $\text{DP}$ 的DFT,则 $\text{DPT}_2$ 表示 $\text{DP}_2$ 的DFT。对于一个离散时域信号 $s(n) = \exp\{j\pi\mu(n\Delta t)^2\}$ , $\Delta t$ 表示时域采样间隔, $\mu$ 为调频率,使用算子 $\text{DPT}_2$ 后有如下表达式

$$\text{DPT}_2[e^{j\pi\mu(n\Delta t)^2}, \omega, \tau] = \text{DFT}\{\text{DP}_2[e^{j\pi\mu(n\Delta t)^2}, \tau]\} = \text{DFT}\{e^{j2\pi\mu\tau n\Delta t - j\pi\mu(\tau\Delta t)^2}\} \quad (5.70)$$

据此表达式, $\text{DPT}_2[x(n)e^{j\pi\mu(n\Delta t)^2}, \omega, \tau]$ 的能量聚集在

$$\omega = \omega_0 = 2\pi\mu\tau\Delta t \quad (5.71)$$

在分数阶傅里叶域估计目标参数能更好地聚集加速目标回波或一般的线性调频信号能量<sup>[20-21]</sup>。另外,由文献[21],可证明当 $\tau = \frac{N}{2}$ 时估计精度最高,故可由 $\mu$ 估计出 $\alpha$ 。

但是受到信道噪声影响,以此估计出旋转角 $\alpha$ 的精度受到限制。为了解决这个问题,需要对旋转角 $\alpha$ 估计结果附近的小范围进行精细搜索,而搜索步长 $\Delta\alpha$ 取决于调频率分辨率 $\Delta\mu$ 的约束。由 $f = \mu\tau\Delta t$ 可得

$$\Delta f = \Delta\mu\tau\Delta t \quad (5.72)$$

取 $\tau = \frac{N}{2}$ ,则可得到

$$\Delta\mu = \frac{\Delta f}{\tau\Delta t} = \frac{4}{T^2} \quad (5.73)$$

其中, $T$ 为信号时长。结合原始输入信号 $f(n)$ 的表达式,可计算出搜索步长:

$$\frac{\cot\alpha}{2} = \pi\mu \Rightarrow (\cot\alpha)' \Delta\alpha = 2\pi\Delta\mu \Rightarrow |\Delta\alpha| = 8\pi\sin^2\alpha/T^2 \quad (5.74)$$

### 3. 与 Pei 采样型算法和稀疏傅里叶算法的关系

根据文献[24],对于时域信号 $x(t)$ ,有连续分数阶傅里叶的变换公式:

$$\begin{aligned} \{F^\alpha x\}(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} K_\alpha(u, t)x(t)dt, \quad 0 < |p| < 2, 0 < |\alpha| < \pi \\ &= \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - j\cot\alpha}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\frac{t^2+u^2}{2}\cot\alpha - jtu\csc\alpha} x(t)dt, & \alpha \neq D\pi \\ x(t), & \alpha = 2D\pi \\ x(-t), & \alpha = (2D \pm 1)\pi \end{cases} \end{aligned} \quad (5.75)$$

其中, $D$ 为任意整数; $K_\alpha(u, t)$ 是CFRFT的核函数,其中 $u$ 为CFRFT的频率。假设 $p$ 是CFRFT的阶次,则分数旋转角 $\alpha = p\pi/2$ 。当CFRFT阶次 $p$ 使得旋转角 $\alpha = 2D\pi + \pi/2$ 时,根据式(5.75),该CFRFT的表达式可变成传统的连续傅里叶变换公式。

再回顾一下Pei采样型算法,该算法是在连续FRFT的基础上推导出来的。该算法分别对输入的时域信号和输出的频域信号等间隔采样,采样间隔分别是 $\Delta t$ 和 $\Delta\mu$ ,且需满足约束

$$\Delta t \Delta\mu = \frac{2\pi |\sin\alpha|}{M} \quad (5.76)$$

该约束是为了保证变换的可逆性。令输入信号长度为 $N$ ,则 $M$ 必须满足 $M \geq N$ 。当 $M = N$ 时,DFRFT表达式可写成<sup>[4]</sup>

$$\{F^{\alpha}x\}(m) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\sin\alpha - j\cos\alpha}{M}} e^{\frac{j\pi^2 \Delta t^2}{2\tan\alpha}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{\frac{j}{2}n^2 \Delta t^2 \cot\alpha - \frac{j2\pi nm}{M}}, & \alpha \in 2D\pi + (0, \pi) \\ \sqrt{\frac{-\sin\alpha + j\cos\alpha}{M}} e^{\frac{j\pi^2 \Delta t^2}{2\tan\alpha}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{\frac{j}{2}n^2 \Delta t^2 \cot\alpha + \frac{j2\pi nm}{M}}, & \alpha \in 2D\pi + (-\pi, 0) \\ x(m), & \alpha = 2D\pi \\ x(-m), & \alpha = (2D+1)\pi \end{cases} \quad (5.77)$$

若  $\alpha \neq D\pi$ , 一次 FFT 运算和输入/输出的两次 chirp 乘积构成了 Pei 采样型算法的主要计算量, 只考虑复乘次数, 则 Pei 采样型算法的计算复杂度为  $O\left(2N + \frac{N}{2}\log_2 N\right)$ 。

由此可见, 即使 Pei 采样型算法是 DFRFT 最高效的算法之一, 但是其依然有较高的计算复杂度, 尤其是输入信号长度  $N$  非常大时, FFT 运算占据了很大的计算量。幸运的是, 信号稀疏是普遍情况, 可以采用稀疏傅里叶变换代替一般的 FFT 运算<sup>[18]</sup>, 进一步提高 DFRFT 的计算效率。该稀疏傅里叶变换算法是一个滤波、定位和估值的过程。滤波器是由切比雪夫函数和矩形窗函数卷积得到, 其作用是将稀疏信号的整个频域分成一个个频率单元, 并使得信号在时域和频域都具有良好的聚焦效应。定位和估值的过程与 sketching/streaming 的算法<sup>[25]</sup>类似, 这种方法的优势在于避免了传统方法所涉及的插值或迭代的操作。因此, 我们可以尝试, 以 Pei 采样型算法的流程为基础, 融入稀疏傅里叶变换的算法思路, 设计改进型的 Pei 采样型算法。

改进后的 Pei 采样型算法, 即所提的 SFRFT 算法, 其所适用的信号有一定的限制, 即要求信号具有一定的稀疏性。在应用所提的 SFRFT 算法之前, 需要判定稀疏度是否符合算法适用要求。判断的方法主要有两种, 一种是根据先验信息直接判断; 另一种则是对信号先进行试采样, 再由采样信息判断稀疏性是否适合。对于信号数据量大且非平稳, 在分数阶傅里叶域稀疏的信号, 其大值个数  $K$  最好远小于数据点数  $N$ ,  $K/N$  的值越小则稀疏性越好。经验上一般认为稀疏度满足  $K/N < 1\%$  的信号适合使用所提算法进行分析处理, 而此类信号普遍存在于很多领域, 如分数域滤波、合成孔径雷达成像, 以及 GPS 定位过程中动态信号快速获取等。

#### 4. 算法性能分析

为了分析所提 SFRFT 算法的性能, 下面分别从分辨能力、计算复杂度和鲁棒性三个方面进行仿真分析。

在第一个仿真实验中, 主要分析所提 SFRFT 算法在多旋转角情况下的分辨能力。在本次仿真实验中, 我们设置如下的仿真参数。设置信号的采样频率  $f_s = 900\text{Hz}$ , 数据长度为  $N = 2^{15}$ , 变换域的大值点数为  $K = 5$ , 子采样 FFT 的长度设为  $B = 1024$ 。假定输入信号有四个频率分量, 其初始频率分别为 100、200、300 和 300Hz, 相应的 chirp 率分别为 10、11.85、13.85 和 13.85Hz/s, 并设置相应的信噪比为 -12、-18、-24 和 -12dB。噪声服从均值为 0 的高斯分布。滤波器参数设置为  $\omega = 22883$ ,  $\delta = 10^{-6}$ ,  $\epsilon' = 2 \times 10^{-4}$  且  $\epsilon = 5 \times 10^{-4}$ 。在估值和定位循环的过程中, 设置估计循环参数  $l_{\text{loc}} = 4$ , 定位循环参数  $l_{\text{est}} = 11$ 。

本仿真实验的所有结果显示在图 5.8 中。图 5.8(a) 显示的是输入信号的频谱图。为了研究在多旋转角的情况下, SFRFT 与原 DFRFT 频谱效果的差别, 我们设置三个不同的分数旋转角  $\alpha$ , 每一行匹配不同的分量阶次, 得到图 5.8(b)~(g) 这三行两列的效果图。仿真结果说明,

我们提出的稀疏分数阶傅里叶算法在多旋转角的情况下,能够精确估计出稀疏分量的分数域的频率和幅值。另外,如果信号的分数阶傅里叶域的频率分量呈现出不聚焦或是不稀疏的特点,则其谱线的分布有连续性、低幅值的规律。图 5.8(f)和图 5.8(g)中紧邻谱线的局部放大图表明,即使在稀疏性不是十分理想的情况下,SFRFT 依然保证了良好的多分量分辨性能。

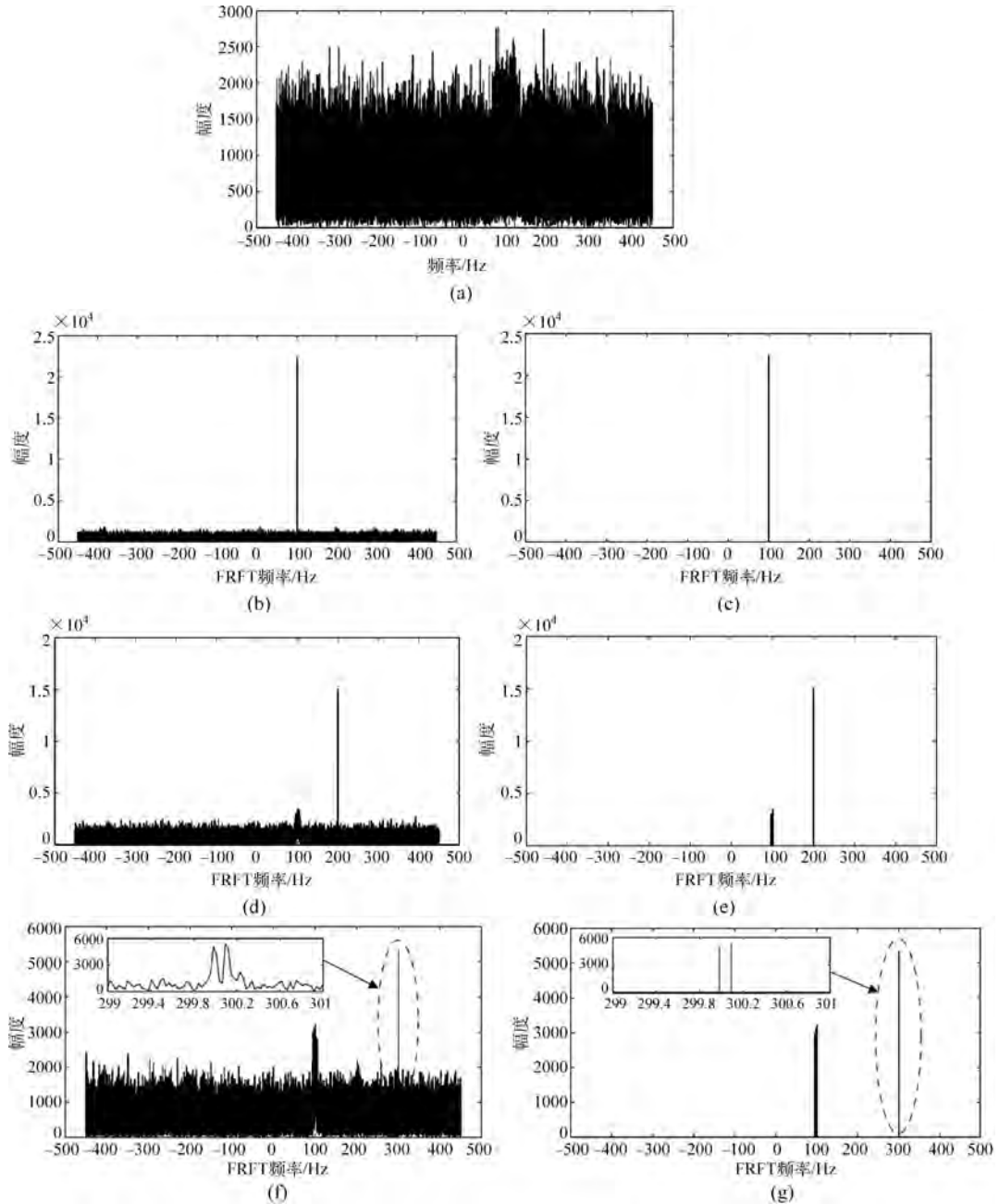


图 5.8 稀疏傅里叶变换多分量分辨性能

- (a) 输入信号频域波形; (b) 匹配第一个分量阶次的离散分数阶傅里叶变换; (c) 匹配第一个分量阶次的 SFRFT;
- (d) 匹配第二个分量阶次的离散分数阶傅里叶变换; (e) 匹配第二个分量阶次的 SFRFT;
- (f) 匹配第三个分量阶次的离散分数阶傅里叶变换; (g) 匹配第三个分量阶次的 SFRFT

在第二个仿真实验中,接着对所提 SFRFT 算法的复杂度仿真分析。以复乘次数为衡量标准,依据算法步骤的过程分析,则所提的 SFRFT 算法复乘总数为

$$M_{\text{SFRFT}} = 2N + (\omega + B \log_2 B/2) \times l_{\text{loc}} + (\omega + B \log_2 B/2 + 2k) \times l_{\text{est}} + \text{card}(\mathcal{I}) \times l_{\text{total}} \quad (5.78)$$

其中,  $\text{card}(\cdot)$  表示集合中元素的数目。基于该复乘运算总次数的表达式,可比较 SFRFT 和 Pei 采样型 DFRFT 算法的计算量。在此仿真过程中,我们设置计算大值个数为  $K=5$ , 循环次数分别设置为  $l_{\text{loc}}=3$  和  $l_{\text{est}}=8$ 。图 5.9 显示,与 SFRFT 算法相比,随着数据长度的增大,DFRFT 在计算效率上的优势越大,尤其当数据长度的量级在  $2^{13}$  及以上时。

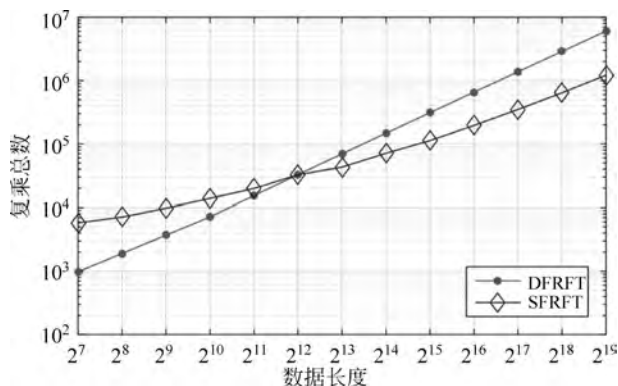


图 5.9 DFRFT 和 SFRFT 的计算复杂度比较

另外,不同于 DFRFT 算法,SFRFT 算法的计算复杂度与输入信号的稀疏度十分相关。为了研究所提 SFRFT 算法的计算复杂度与稀疏度的关系,给定输入信号的长度为  $2^{16}$ ,以分数阶傅里叶域的非零值个数为坐标变量,其数目依次从 10 变化到  $10^4$ 。相应地,随着信号稀疏度的变化,循环次数也在确保输出结果精度的情况下匹配。从图 5.10 可以看出,稀疏度越高,SFRFT 算法相对于 DFRFT 算法在计算复杂度方面的优势就更明显。但是,当分数域的非零频点个数大于  $10^3$  后,SFRFT 算法对计算效率就没有提升了,反而比 DFRFT 算法的计算量更大。

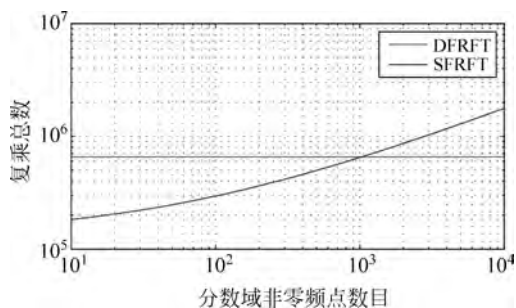


图 5.10 DFRFT 和 SFRFT 的计算复杂度与稀疏度的关系

在第三个仿真实验中,分析所提 SFRFT 算法的鲁棒性。SFRFT 算法在计算效率方面的优势与算法的鲁棒性并不冲突,SFRFT 算法在提升计算效率的同时,依然具有良好的鲁棒性<sup>[18]</sup>。下面以仿真结果证明所提 SFRFT 算法对输入噪声的鲁棒性。仿真实验的参数

设置如下,信号长度  $N=2^{15}$ ,  $k=3$ ,旋转角  $\alpha=0.01\text{rad}$ ,Monte Carlo 仿真次数为 20000,输入信噪比 SNR 变化范围设为  $[-10\text{dB}, 30\text{dB}]$ 。假设  $\varepsilon$  表示估计误差,该估计误差是用 SFRFT 的输出  $\{\mathcal{SF}^\alpha x\}(i)$  和 DFRFT 的输出  $\{\mathcal{F}^\alpha x\}(i)$  之间的差值来衡量

$$\varepsilon = \frac{1}{k} \sum_{i \in (0, N]} \left| \frac{\{\mathcal{SF}^\alpha x\}(i) - \{\mathcal{F}^\alpha x\}(i)}{\{\mathcal{F}^\alpha x\}(i)} \right| \quad (5.79)$$

以此估计误差为标准,信号比 SNR 为横坐标,得出误差变化曲线如图 5.11 所示。该估计误差的仿真结果证实了在噪声环境下 SFRFT 算法良好的鲁棒性。

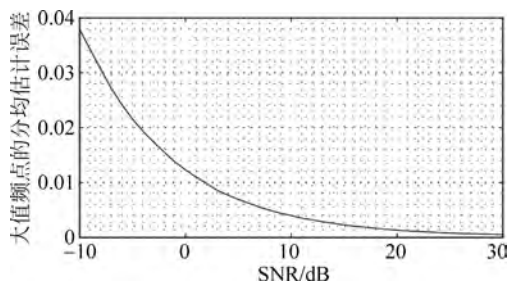


图 5.11 SFRFT 算法鲁棒性与信噪比的关系

### 5.1.3.2 随机型算法的优化

我们提出随机型稀疏分数阶傅里叶算法利用输入信号的稀疏性,使用稀疏傅里叶变换替代 FFT 过程,有效地降低了计算复杂度。然而,此随机型 SFRFT 有如下两方面的缺陷。

(1) 当输入信号的长度较短时,所提的随机型 SFRFT 算法和一般的 DFRFT 算法相比,在计算量上并没有明显的提升。

(2) 对于噪声干扰较严重的信号,频域大值量的定位估计误差会很大,大幅降低算法的估计精度。

为此,SFRFT 算法后来也陆续有优化算法提出<sup>[19,21,23,25]</sup>,其中有些算法是针对虚警率和检测概率等先验信息的优化版本<sup>[22]</sup>,并成功应用于微弱雷达目标检测<sup>[23]</sup>。我们提出优化的稀疏分数阶傅里叶变换(OSFRFT)算法,采取如下的方法应对上述的问题。

(1) 使用 Neyman-Pearson 检测处理噪声干扰的信号,实现对噪声干扰后信号的分数频域估计。

(2) 分析噪声对定位循环的影响,通过 Parzen-Rosenblatt 窗方法获得相位误差的分布,并提出定位误差的优化策略。

#### 5.1.3.2.1 简化 SFRFT

在上节稀疏分数阶傅里叶算法的基础上,我们做了简化,将该算法流程分成两个核心模块,即“hash-to-bins”过程和定位及估计循环过程。

首先介绍“hash-to-bins”过程,该过程将大值的分数阶傅里叶系数映射到子采样频谱。“hash-to-bins”过程可以分成三个步骤:重排、加窗和下采样。子采样因子  $D=N/B$ 。重排使用三个参数  $\sigma, a, b$  对输入时域信号的重新排序

$$(P_{\sigma, a, b} x)_i = x_{\sigma(i-a)} \omega^{\sigma b i} \quad (5.80)$$

其中,  $\sigma \in \{1, 3, \dots, N-1\}$  且  $a, b \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ 。根据文献[27],上述公式对应的频域次序为

$$(\hat{P}_{\sigma,a,b,x})_{\sigma(i-b)} = \hat{x}_i \omega^{\sigma a i} \quad (5.81)$$

为了表示方便,令  $\hat{x}^\dagger = \hat{P}_{\sigma,a,b,x}$  和  $q = \sigma(i-b)$ , 其中  $\hat{x}^\dagger$  表示信号重排后的频谱。那么,上述表达式可写成

$$\hat{x}_q^\dagger = \hat{x}_i \omega^{\sigma a i} \quad (5.82)$$

接着加窗,所加的窗函数与式(5.58)相同,是长度为  $D$  的平坦窗函数,则上述信号可写成

$$\hat{y}_i = \sum_{q=i-D/2}^{i+D/2-1} \hat{x}_q^\dagger \quad (5.83)$$

下一步是下采样,即信号在时域以参数  $D$  混叠,则相应的频域为  $D$  倍下采样,得到下采样频谱

$$\hat{u}_j = \hat{y}_{jD} = \sum_{q=jD-D/2}^{jD+D/2-1} \hat{x}_q^\dagger \quad (5.84)$$

由上式可知,在下采样后已重排的谱  $\hat{x}_q^\dagger$  中的系数将映射到  $\hat{u}_j$ , 其中  $q$  和  $j$  的关系为

$$j = \text{round}(q/D) \quad (5.85)$$

在下采样执行后,继续对其作  $B$  点的 FFT,所得到的  $B$  点频谱是此“hash-to-bins”过程的输出。值得注意的是,如果两个及以上的大值系数都映射到  $\hat{u}$  中的同一个位置,则大值系数的定位和估值将会发生冲突,应当尽量避免。

对于时域信号混叠后的  $B$  点频域信号,每一个大值系数对应原频域中的  $D$  个位置。Hassanieh 所提的稀疏傅里叶变换算法<sup>[27]</sup>,多次改变随机重排参数后执行定位循环,以在  $D$  个候选解中决定大值系数在原频谱中的真实位置。对于精确已知的  $k$  稀疏信号, Hassanieh 的算法可基于文献[18]设计,但是其仅使用两次“hash-to-bins”过程定位大值系数。第一次“hash-to-bins”过程中,信号不附带相位偏移,而第二次“hash-to-bins”过程中,信号被附加一个线性相位偏移项。接着,该算法利用这两次“hash-to-bins”过程之间的相位差来定位大值系数。该算法由多次迭代组成,在每次迭代中,都有部分的大值量被估计出来,然后将此时的信号减去已估计出来的大值系数所对应的部分,再将其放入下一次循环。这个减法操作在信号的频域完成,以减少每次迭代的复杂度。Hassanieh 在文献[27]中提出的另一种算法有类似的思路,但区别在于,其可用于一般信号的定位和估值。该算法设置候选集合,执行多个定位循环,在每次迭代后,候选的可能大值集合都会被缩小。

### 5.1.3.2.2 Neyman-Pearson 检测

假定输入信号是一个线性调频信号,其幅度是  $A$ 。信号的噪声  $n$  服从自适应复高斯噪声  $n \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_t^2)$ 。在 DFRFT 的过程中,当设置合适的旋转角  $\alpha$  后,信号的分数阶傅里叶频谱是稀疏的。此时,频域信号  $\hat{x}$  由复指数信号频谱和噪声频谱  $\hat{n}$  组成,其中  $\hat{n} \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_f^2)$ ,  $\sigma_f = \sqrt{N} \sigma_t$ 。令  $\hat{n}_i (i \in \{N\})$  表示噪声频谱的  $N$  个采样点。假定  $i_l$  表示信号频域中大值系数的位置,  $A_f$  是其相应的幅值,则指数信号的频谱可表示成

$$\begin{cases} \hat{s}_i = A_f, & i = i_l \\ \hat{s}_i = 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5.86)$$

Neyman-Pearson 检测的阈值设为  $\zeta$ 。为了获此阈值,需要分析“hash-to-bins”过程中的

每一步以确定噪声分布。重排过程将原频谱中的大值系数  $\hat{x}_{i_l}$  哈希映射到  $\hat{x}_{q_l}^+$ , 映射关系  $q_l = \sigma(i_l - b)$ 。加窗后的信号  $\hat{y}_i$  中的每一个位置的数都是  $\hat{x}_{q_l}^+$  中的  $D$  点之和。在下采样后, 信号  $\hat{x}_{q_l}^+$  映射到  $\hat{u}_{j_l}$ , 并有映射关系  $j_l = \text{round}(q_l/D)$ 。由于重排后信号的频谱  $\hat{x}_{q_l}^+$  服从分布  $\hat{x}_{q_l}^+ \sim A_f + \mathcal{CN}(0, \sigma_f^2)$ , 其余的  $B-1$  个点都服从均值为 0 且方差为  $\sigma_f^2$  的高斯噪声分布, 因此可得到  $\hat{u}_{j_l}$  服从的分布

$$\hat{u}_{j_l} \sim A_f + \mathcal{CN}(0, \sigma_u^2) \quad (5.87)$$

其中,  $\sigma_u = \sqrt{D}\sigma_f = \sqrt{DN}\sigma_t$ 。原信号频谱  $\hat{x}$  的信噪比是  $A_f^2/(2\sigma_f^2)$ , 在“hash-to-bins”过程后该信噪比为原来的  $1/D$ 。如果没有大值系数落入  $\hat{u}$  的第  $j$  个位置, 则  $\hat{u}_j$  的分布是个服从独立同分布的复高斯噪声之和, 即

$$\hat{u}_j \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_u^2) \quad (5.88)$$

因此, 当  $j \neq j_l$  时,  $\hat{u}_j$  的幅度服从 Rayleigh 分布。如果有大值量落入  $\hat{u}$  的第  $j$  个位置, 即  $j = j_l$ ,  $\hat{u}_j$  由幅度为  $A_f$  的信号分量和方差为  $\sigma_u^2$  的复高斯噪声组成, 故  $\hat{u}_j$  的幅度服从 Rice 分布。由此, 可总结出  $\hat{u}$  的幅度服从以下分布

$$\begin{cases} f_\rho(\rho) = \frac{\rho}{\sigma_u^2} \exp\left(-\frac{\rho^2 + A_f^2}{2\sigma_u^2}\right) I_0\left(\frac{\rho |A_f|}{\sigma_u^2}\right), & j = j_l \\ f_\rho(\rho) = \frac{\rho}{\sigma_u^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma_u^2}\right), & j \neq j_l \end{cases} \quad (5.89)$$

其中,  $\rho$  是  $\hat{u}_j$  的幅值,  $I_0(z)$  表示第一类零阶修正贝塞尔函数<sup>[28]</sup>。

$f_\rho(\rho)$  的右尾概率可由下式获得

$$\begin{cases} \Pr\{\rho > \zeta\} = P_d = Q_1\left(\frac{|A_f|}{\sigma_u}, \frac{\zeta}{\sigma_u}\right), & j = j_l \\ \Pr\{\rho > \zeta\} = P_{fa} = \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2\sigma_u^2}\right), & j \neq j_l \end{cases} \quad (5.90)$$

其中,  $Q_1(z)$  是 Marcum Q 函数<sup>[28]</sup>;  $P_d$  是检测率;  $P_{fa}$  是虚警率。

可根据期望的  $P_{fa}$  求出阈值  $\zeta$ , 故由上式可得

$$\zeta = \sigma_u T_n \quad (5.91)$$

其中,  $T_n = \sqrt{-2\ln P_{fa}}$  是由期望的  $P_{fa}$  决定的名义因子。此时可估计  $x$  中的噪声等级, 获得噪声方差  $\sigma_u$ , 并接着由上式选择阈值  $\zeta$ 。因此, 在使用 Neyman-Pearson 检测后, 我们提出的 SFRFT 算法, 则不需要精确稀疏性的先验知识。

### 5.1.3.2.3 噪声对定位循环的影响及优化策略

#### 1. 噪声对定位循环的影响

在此部分, 我们从两方面对定位循环中的噪声影响进行分析, 第一方面是分析相位误差和噪声等级之间的关系, 另一方面是分析相位误差对估计结果的影响。

第一部分我们先分析定位循环中相位误差和噪声等级之间的关系。为了建立下采样频谱  $\hat{u}$  中的相位误差和原谱  $\hat{x}$  中的噪声之间的关系, 我们需要先用  $\hat{x}$  表示  $\hat{u}$ 。根据重排特性可得到如下关系:

$$\hat{x}_{\sigma(i-b)}^\dagger = \hat{x}_i \omega^{\sigma ai} \quad (5.92)$$

重写上式为

$$\hat{x}_q^\dagger = \hat{x}_{(\sigma^{-1}q+b)} \omega^{a(q+sb)} \quad (5.93)$$

其中,  $q = \sigma(i-b)$ 。基于上述表达式,我们分别分析两次“hash-to-bins”过程中  $\hat{x}$  和  $\hat{u}$  的关系。在第一次“hash-to-bins”过程中,令  $a=0$  且  $\omega^{a(q+sb)} = 1$ 。基于式(5.93),则式(5.84)可写成

$$\hat{u}_j = \sum_{q=jD-D/2}^{jD+D/2-1} \hat{x}_q^\dagger = \sum_{q=jD-D/2}^{jD+D/2-1} \hat{x}_{(\sigma^{-1}q+b)} \quad (5.94)$$

当  $j=j_l$  时,在此求和过程中存在大值系数,则  $\hat{u}_{j_l}$  可进一步表示成

$$\hat{u}_{j_l} = \sum_{q=j_l D-D/2}^{j_l D+D/2-1} \hat{v}_{(\sigma^{-1}q+b)} + A_f \quad (5.95)$$

在第二次“hash-to-bins”过程中,  $a=1$ ,因此噪声频谱和指数信号频谱都应当乘上一个相位项,即

$$\hat{u}_{j_l}^\dagger = \sum_{q=j_l D-D/2}^{j_l D+D/2-1} \hat{v}_{(\sigma^{-1}q+b)} \omega^{(q+sb)} + A_f \omega^{(q_l+sb)} \quad (5.96)$$

其中,  $q_l = \sigma(i_l - b)$ 。由  $\omega^{(q_l+sb)} = \omega^{\sigma i_l}$  得

$$\hat{u}_{j_l}^\dagger = \omega^{\sigma i_l} \left( \sum_{q=j_l D-D/2}^{j_l D+D/2-1} \hat{v}_{(\sigma^{-1}q+b)} \omega^{(q-q_l)} + A_f \right) \quad (5.97)$$

$\hat{u}_{j_l}$  和  $\hat{u}_{j_l}^\dagger$  间的相位差是

$$\phi(\hat{u}_{j_l} / \hat{u}_{j_l}^\dagger) = \frac{2\pi\sigma i_l}{N} + \phi \left( \frac{\sum_{q=j_l D-D/2}^{j_l D+D/2-1} \hat{v}_{(\sigma^{-1}q+b)} + A_f}{\sum_{q=j_l D-D/2}^{j_l D+D/2-1} \hat{v}_{(\sigma^{-1}q+b)} \omega^{(q-q_l)} + A_f} \right) \quad (5.98)$$

其中,  $q \in \{j_l D - D/2, j_l D - D/2 + 1, \dots, j_l D + D/2 - 1\}$ ,这表明一旦输入信号  $x$  确定,则输入噪声谱的  $D$  个样本也确定了。在两次“hash-to-bins”过程中,  $\sigma$  和  $b$  被选择为相同的值。落入  $\hat{u}_{j_l}$  和  $\hat{u}_{j_l}^\dagger$  的噪声点数一样,差别在于由  $a$  导致的相位项。令  $\hat{v}_m^\dagger = \hat{v}_{(\sigma^{-1}q+b)}$ ,其中  $m \in [-D/2, D/2 - 1]$ ,则上式可变成

$$\phi(\hat{u}_{j_l} / \hat{u}_{j_l}^\dagger) = \frac{2\pi\sigma i_l}{N} + \phi \left( \frac{\sum_{m=-D/2}^{D/2-1} \hat{v}_m^\dagger + A_f}{\sum_{m=-D/2}^{D/2-1} \hat{v}_m^\dagger \omega^{(m+j_l D-q_l)} + A_f} \right) \quad (5.99)$$

其中,  $j_l D - q_l \in [-D/2, D/2 - 1]$ 表示  $\hat{u}$  在第  $j_l$  个位置上大值系数  $q_l$  的偏移量。因此,可得相位差为

$$\phi_{\text{err}} = \phi \left( \frac{\sum_{m=-D/2}^{D/2-1} \hat{v}_m^\dagger + A_f}{\sum_{m=-D/2}^{D/2-1} \hat{v}_m^\dagger \omega^{(m+j_l D-q_l)} + A_f} \right) \quad (5.100)$$



$\phi_{\text{err}}$  可视作  $\omega^{(m+j_l D-q_l)}$  的加权平均值。当  $\omega$  的指数为  $m$  时, 加权系数为  $|\hat{\nu}_m^\dagger|$ ; 当  $\omega$  的指数为 0 时, 加权系数为  $|\hat{\nu}_{-(j_l D-q_l)}^\dagger + A_f|$ 。

虽然  $\omega^{(m+j_l D-q_l)}$  和  $A_f$  被固定了, 但  $\{\hat{\nu}_{-D/2}^\dagger, \hat{\nu}_{-D/2+1}^\dagger, \dots, \hat{\nu}_{D/2-1}^\dagger\}$  是  $D$  个随机变量, 故  $\phi_{\text{err}}$  也是一个随机变量。相位误差  $\phi_{\text{err}}$  的概率密度函数(PDF)  $f(\phi_{\text{err}})$  需要进一步分析。然而, 上式中随机变量的组合是复杂的, 因此得到  $f(\phi_{\text{err}})$  准确的表达式是比较困难的。

为此, 可以采用一种非参数方法估计随机变量的概率密度函数, 即用核密度估计法来估计概率密度函数  $f(\phi_{\text{err}})$ , 称作 Parzen-Rosenblatt 窗方法。首先, 我们使用 Monte Carlo 法形成  $\hat{\nu}_m^\dagger$  的样本集, 其中  $\hat{\nu}_m^\dagger \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_f^2)$ 。接着, 我们使用式(5.100)得到样本集  $\{\phi_{\text{err}_1}, \phi_{\text{err}_2}, \dots, \phi_{\text{err}_\xi}\}$ , 其中  $\xi$  表示采样的总数目。集合中的所有元素都服从同一个未知的分布  $f(\phi_{\text{err}})$  并相互独立。因此, 可使用如下表达式估计  $f(\phi_{\text{err}})$

$$f_{\text{est}}(\phi_{\text{err}}) = \frac{1}{\xi \times h} \sum_{i=1}^{\xi} K(\phi_{\text{err}} - \phi_{\text{err}_i}) \quad (5.101)$$

其中,  $K$  是核函数,  $h$  是一个平滑参数。核函数  $K$  可选为一个标准窗, 即

$$K(\phi_{\text{err}} - \phi_{\text{err}_i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\phi_{\text{err}} - \phi_{\text{err}_i})^2}{2}\right) \quad (5.102)$$

我们在本节的第二部分, 分析相位误差对估计结果的影响。对于 Hassanieh 等在文献[27]中提出的精确“ $k$ -sparsity”信号的算法, 大值系数的索引由  $\phi(\hat{u}_{j_l}/\hat{u}_{j_l}^\dagger)$  估计而来, 根据下述关系:

$$i_{\text{est}} = \sigma^{-1}(\text{round}(\phi(\hat{u}_{j_l}/\hat{u}_{j_l}^\dagger)N/2\pi)) \bmod N \quad (5.103)$$

对于无噪声的情况, 则有

$$\hat{\nu}_m^\dagger = 0, \quad m \in [-D/2, D/2-1] \quad (5.104)$$

此时  $\phi_{\text{err}} = 0$ , 式(5.99)可写成

$$\phi(\hat{u}_{j_l}/\hat{u}_{j_l}^\dagger) = 2\pi\sigma i_l / N \quad (5.105)$$

因此, 式(5.101)获得的  $i_{\text{est}}$  和真实的索引  $i_l$  一样。

如果信号被噪声干扰, 则有  $\phi(\hat{u}_{j_l}/\hat{u}_{j_l}^\dagger) = 2\pi\sigma i_l / N + \phi_{\text{err}}$ 。当相位误差在一个确定的范围, 即  $|\phi_{\text{err}}| < (0.5 + \Gamma)2\pi/N$ , 其中  $\Gamma$  是正整数,  $\sigma i_{\text{est}}$  也将在一个确定范围, 即

$$\sigma i_{\text{est}} = \text{round}(\phi(\hat{u}_{j_l}/\hat{u}_{j_l}^\dagger)N/2\pi) \in [\sigma i_l - \Gamma, \sigma i_l + \Gamma] \quad (5.106)$$

则有

$$i_{\text{est}} \in \{i_l - \sigma^{-1}\Gamma, i_l - \sigma^{-1}(\Gamma-1), \dots, i_l + \sigma^{-1}\Gamma\} \quad (5.107)$$

当  $\Gamma=0$  时,  $|\phi_{\text{err}}| < \pi/N$ , 这意味着定位循环中没有误差。注意到  $\text{round}(\phi(\hat{u}_{j_l}/\hat{u}_{j_l}^\dagger)N/2\pi)$  和  $i_{\text{est}}$  之间的映射是非线性的, 则  $[\sigma i_l - \Gamma, \sigma i_l + \Gamma]$  中的指数在映射后将被分离, 导致估计误差被放大。如果增加一倍,  $i_{\text{est}}$  中的误差相应会扩大到  $\sigma^{-1}$  或  $N - \sigma^{-1}$ 。若误差存在,  $i_{\text{est}}$  将会偏离真实的指数  $i_l$ 。因此, 算法估计性能的精确性取决于误差校正是否有效。

## 2. 减小定位循环误差

为了解定位循环中的噪声影响, 我们设计了名为“LOC-CORR”的定位误差校正架构, 其伪代码被概括在算法 1 中。该算法由两个阶段组成, 在第一阶段中, 可由两个定位循环的相位差形成大值系数的候选集合; 在第二阶段中, 第三个定位循环被执行来找出候选

集合所包含大值系数的真实位置。下面具体介绍“LOC-CORR”的两个阶段。

---

**算法 1** 定位误差校正,命名程序为 LOC-CORR

---

输入:  $\hat{u}, \hat{u}^\dagger, x, \xi, J$

输出:  $\hat{\omega}$

1: 由式(5.109)选择  $\Gamma$ ;

2: 对于  $r$  依次取集合  $J$  中的元素执行{

$$a \leftarrow \hat{u}_r / \hat{u}_r^\dagger;$$

$$i_{\text{estr}} \leftarrow \text{round}\left(\phi(a) \frac{N}{2\pi}\right);$$

$$I_{\text{candr}} = \{i_{\text{estr}} - \sigma^{-1}\Gamma, \dots, i_{\text{estr}} + \sigma^{-1}\Gamma\};$$

3:  $I_{\text{cand}} = I_{\text{cand1}} \cup I_{\text{cand2}} \cup \dots \cup I_{\text{candR}}$ ;

4: 对于  $\sigma^\dagger$  依次取集合  $\{1, 3, \dots, N/2-1\}$  中的元素执行{▷参数搜索

cnt=1;

再对于  $i^\dagger$  依次取集合  $I_{\text{cand}}$  中的元素执行{

$$U_{\text{cand}}(\text{cnt}) = \text{round}\left\{\frac{B}{N}[(\sigma^\dagger i^\dagger) \bmod N]\right\};$$

cnt=cnt+1;

}

如果  $U_{\text{cand}}$  不包括重复的索引,则终止循环。

}

5:  $\hat{u}^\ddagger \leftarrow \text{hash-to-bins}(x, \sigma^\dagger, 0, 0, B, G)$ ; ▷第三次定位循环

6:  $J^\ddagger = \{m: \hat{u}_m^\ddagger > \zeta\}$ ; ▷第二次检测阶段

7:  $\hat{\omega} \leftarrow 0$ ;

8: 对于  $u$  依次取集合  $U_{\text{cand}}$  中的元素执行{

对于  $m$  依次取集合  $J^\ddagger$  中的元素执行{

如果  $u=m$  则{

$$i = \text{revmap}(u);$$

$$j = \text{round}\left\{\frac{B}{N}[(\sigma(i-b)) \bmod N]\right\};$$

$$\hat{\omega}_i = \hat{u}_j;$$

}

}

}

9: 返回  $\hat{\omega}$ 。

---

首先,介绍“LOC-CORR”的第一个阶段。假定  $\hat{u}$  中有  $R$  个系数在阈值以上,我们先由式(5.103)获得每个系数的位置指数,并将其记为  $\{i_{\text{est1}}, \dots, i_{\text{est}r}, \dots, i_{\text{est}R}\}$ 。对于  $x$  中的每个  $i_{\text{estr}}$ ,我们都设置一个集合  $I_{\text{candr}}$ ,其所包含的元素如下

$$I_{\text{candr}} = \{i_{\text{estr}} - \sigma^{-1}\Gamma, i_{\text{estr}} - \sigma^{-1}(\Gamma-1), \dots, i_{\text{estr}} + \sigma^{-1}\Gamma\} \quad (5.108)$$

正确的坐标指数落入集合  $I_{\text{candr}}$  的概率记为  $P_\Gamma$ ,其中

$$P_\Gamma = \Pr\{|\phi_{\text{err}}| < 2\pi(0.5 + \Gamma)/N\} \quad (5.109)$$

$P_\Gamma$  对 OSFRFT 算法的重构精度有重要作用,故应当合适选取  $\Gamma$  以维持一个确定的概率  $P_\Gamma$ 。候选集  $I_{\text{cand}}$  是所有集合的总集,即  $I_{\text{cand}} = I_{\text{cand1}} \cup I_{\text{cand2}} \dots \cup I_{\text{candR}}$ 。

然后,介绍“LOC-CORR”的第二个阶段。为了确保  $I_{\text{cand}}$  中每个位置索引在下采样后落入不同的“bins”,我们搜索第三次定位循环中合适的重排参数  $\sigma^\dagger$ 。 $\hat{u}$  中的候选集定义为  $U_{\text{cand}}$ ,故  $I_{\text{cand}}$  和  $U_{\text{cand}}$  之间有一一对应的映射关系。在重排后,索引  $i \in I_{\text{cand}}$  将被映射到  $i^\dagger = (\sigma^\dagger i) \bmod N$ 。根据式(5.85),在加窗和下采样过后,该指数将落入  $u = \text{round}(i^\dagger/D)$ 。而从  $U_{\text{cand}}$  到  $I_{\text{cand}}$  的逆映射关系可由下式定义:

$$\text{revmap}(u) = \{i; i \in I_{\text{cand}}, \text{round}\{D[(\sigma^\dagger i) \bmod N]\} = u\} \quad (5.110)$$

执行第三次定位循环获得  $\hat{u}^\dagger$  中的大值系数,记作  $J^\dagger$ 。 $U_{\text{cand}}$  和  $J^\dagger$  的交集是原频谱  $\hat{x}$  中大值系数的真实位置的索引。最后, $\hat{u}_j$  的值被分配到  $\hat{x}$  中的索引  $i = \text{revmap}(u)$ ,其中  $i$  和  $j$  之间的关系为

$$j = \text{round}\left\{\frac{B}{N}[(\sigma(i-b)) \bmod N]\right\} \quad (5.111)$$

#### 5.1.3.2.4 算法流程及性能分析

经过频谱重排、Neyman-Pearson 检测和定位误差校正,所提出的 OSFRFT 的整个算法流程显示在算法 2 中。

---

#### 算法 2 OSFRFT 算法

---

输入: 稀疏信号  $s$ ; 旋转角  $\alpha$

输出: 分数阶傅里叶域频谱  $\hat{F}$

1: 算法进程 OSFRFT( $s, \alpha$ ):

$x_i = s_i I_{\text{phase}}, i \in \{N\}$ ; ▷ 第一阶段

$\hat{x} = \text{OSFRFTInner}(x)$ ; ▷ 第二阶段

$\hat{F}_m = \hat{x}_m Q_{\text{phase}}, m \in \{N\}$ ; ▷ 第三阶段

2: 算法进程 OSFRFTInner( $x$ ):

由噪声等级和稀疏度选择  $B$ ;

接着选取阈值  $\zeta$ ;

从奇数集合  $\{1, 3, \dots, N-1\}$  随机均匀选取  $\sigma$ ;

从集合  $\{1, 2, \dots, N-1\}$  随机均匀选取  $b$ ;

选择极小值  $\delta$ ;

选择合适的窗长  $L$ ;

由窗函数公式选择合适的参数  $(0.5D, 0.6D, \delta, L)$ ;

$\hat{u} \leftarrow \text{hash-to-bins}(x, \sigma, 0, b, B, G)$ ; ▷ 第一次定位循环

$\hat{u}^\dagger \leftarrow \text{hash-to-bins}(x, \sigma, 1, b, B, G)$ ; ▷ 第二次定位循环

$J = \{j: |\hat{u}_j| > \zeta\}$ ; ▷ 第一次检测阶段

$\hat{x} \leftarrow \text{loc-corr}(J, \hat{u}, \hat{u}^\dagger, \zeta)$ ;

返回  $\hat{x}$ 。

3: 算法进程 hash-to-bins( $x, \sigma, 0, b, B, G$ ):

计算  $\hat{y}_{jD}, j = 0, \dots, B-1$ , 其中:

$y = G \times P_{\sigma, a, b}$ ;

$\hat{u}_j = \hat{y}_{jD}$ ;

返回  $\hat{u}$ 。

---

#### 1. 计算复杂度分析

OSFRFT 算法的计算复杂度由算法流程中复数乘法运算次数评估,为此可以从

OSFRFT 算法两个阶段的计算复杂度分别考虑。在 OSFRFT 算法的第一个阶段中,输入信号需要与  $I_{\text{phase}}$  相乘,需要  $N$  次复乘。OSFRFT 算法的第二阶段包括了三次定位循环,在每次循环中加窗操作和  $B$  点 FFT 操作分别需要  $L$  和  $B \log_2 B/2$  次复乘。但是,在  $\hat{x}$  中仅有  $k$  个非零系数,信号与  $Q_{\text{phase}}$  相乘,因此在第三阶段仅需要  $k$  次复乘。结合这三个阶段的复乘次数,OSFRFT 算法的总复乘次数为

$$M_{\text{OSFRFT}} = N + 3(L + B \log_2 B/2) + k \quad (5.112)$$

## 2. 精度评估参数

我们使用复原率来量化真实值和 OSFRFT 算法所得解之间的差距。复原率指的是,OSFRFT 算法输出的大值系数复原在正确位置上的概率,并将这个概率即复原率记作  $P_r$ 。 $P_r$  可由如下公式定义

$$P_r = P_d^2 P_\Gamma \quad (5.113)$$

其中,  $P_d$  和  $P_\Gamma$  分别由式(5.90)和式(5.109)给定。

## 3. $B$ 和 $\Gamma$ 的选择

为了获取适合的复原率  $P_r$ ,我们设计  $B$  和  $\Gamma$  的选取规则,其伪代码概括在算法 3 中。在算法的流程中,根据噪声等级( $A$  和  $\sigma$ )调整  $B$  和  $\Gamma$  来维持  $P_d$  和  $P_\Gamma$  足够高,以便于获取最小可接受的复原率  $P_r$ 。同时,约束  $B > (2\Gamma + 1) \times k$  需要被满足,这是为了保证  $I_{\text{cand}}$  中的系数可在子采样频谱中分成  $B$  个索引指数。

---

### 算法 3 $B$ 和 $\Gamma$ 的选取规则

---

输入:  $N, A, \sigma, k, P_r^\dagger$

输出:  $B$  和  $\Gamma$

1: 对于  $B$  依次取集合  $\{2, 4, 8, \dots, N/2\}$  中的元素,由式(5.190)计算  $P_d$ ;

2:  $\mathcal{B}^\dagger = \{B: P_d > \sqrt{P_r^\dagger}\}$ ;

3: 对  $\mathcal{B}^\dagger$  排序,得到排序后的次序以及排序后的集合  $\mathcal{B}$ ;

4: 对于集合  $\mathcal{B}$  中的每一个元素  $B$  执行{  
     由 KDE 估计  $f(\phi_{\text{err}})$ ;  
     对于  $\Gamma$  依次取集合  $\{1, 2, \dots, \lfloor B/(2k) \rfloor\}$  中的元素执行{  
         如果  $P_\Gamma > P_r^\dagger / P_d^2$ , 则终止整个循环;  
     }  
     如果  $B > (2\Gamma + 1) \times k$ , 则终止整个循环;  
 }

5: 返回  $B$  和  $\Gamma$ 。

---

## 5.1.3.2.5 仿真分析

### 1. 相位误差分析

$f(\phi_{\text{err}})$  受参数  $B$  和信噪比 SNR 影响,随后数值仿真分析这两个参数对相位误差的影响程度。设置参数:  $N = 4096, B = 256/512, \xi = 10000, j_l D - q_l = 0$ 。输入信噪比 SNR 分别设置成  $-8.1648\text{dB}$  和  $-2.1442\text{dB}$ 。如图 5.12 所示,改变参数  $B$  或输入信噪比 SNR,可画出其对应的概率分布直方图,图中的蓝色柱状为概率密度分布,红色线条是由核密度估计出的 PDF。

### 2. 调频率估计误差的影响

为了研究调频率估计误差的影响,我们先假定信号由噪声干扰的线性调频信号组成,可写成

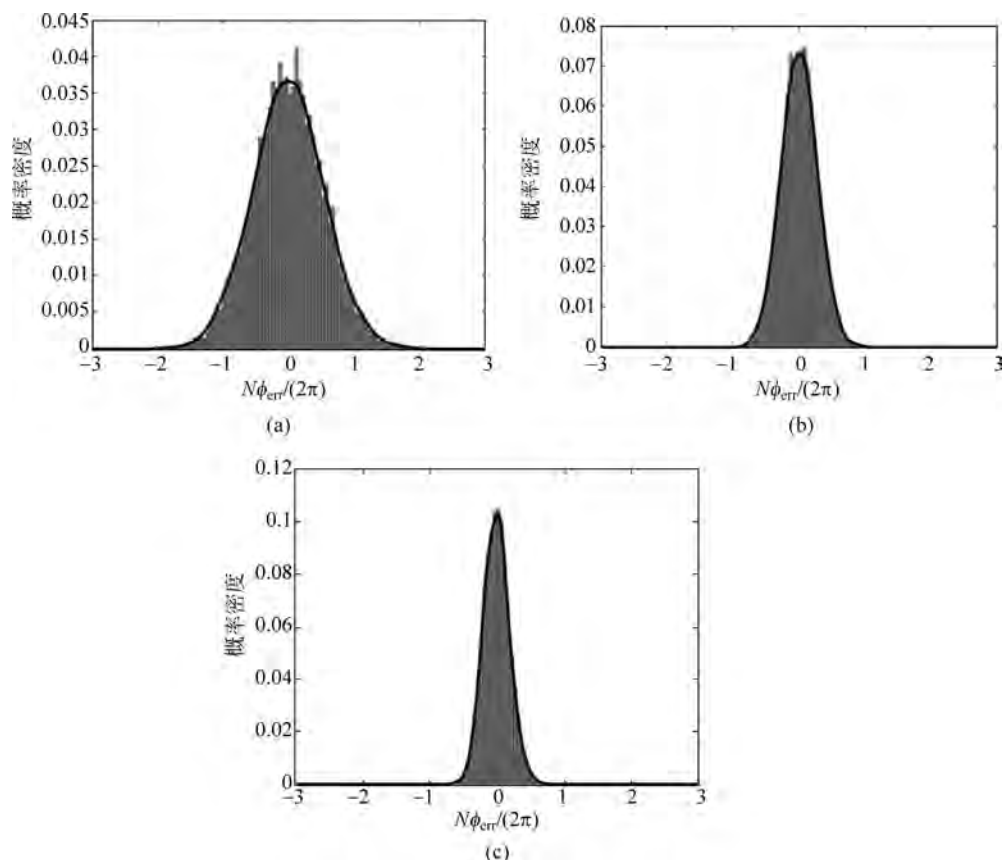


图 5.12 相位误差的概率密度分布

(a)  $B=256$ ,  $\text{SNR}=-8.1648\text{dB}$ ; (b)  $B=256$ ,  $\text{SNR}=-2.1442\text{dB}$ ; (c)  $B=512$ ,  $\text{SNR}=-8.1648\text{dB}$

$$s_i = A \exp\left(j2\pi\left(f_0 \frac{i}{f_s} + 0.5\mu\left(\frac{i}{f_s}\right)^2\right)\right) + n_i \quad (5.114)$$

其中,  $i = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$ ;  $f_0$  是线性调频信号的中心频率;  $f_s$  是采样频率;  $n$  表示复高斯噪声。文献[18]提出了一种调频率估计算法, 即离散多项式相位变换算法, 可估计出本信号模型中的调频率, 记估计值为  $\mu_{\text{est}}$ 。为了研究估计的调频率  $\mu_{\text{est}}$  与真实调频率  $\mu$  之间的差距, 我们可以记这个差值为  $\mu_{\text{err}}$ 。另外, OSFRFT 算法的旋转角  $\alpha = \text{arccot}(-\mu_{\text{est}})$ 。

在 OSFRFT 算法的第一个阶段, 信号  $s$  需要乘上二次指数项  $\exp(j(\cot\alpha)i^2\Delta t^2/2)$ 。这样, 我们可得到一个中心频率为  $f_0$ , 调频率为  $\mu_{\text{err}}$  的线性调频信号  $x_i$ , 其可写成

$$x_i = A \exp\left(j2\pi\left(f_0 \frac{i}{f_s} + 0.5\mu_{\text{err}}\left(\frac{i}{f_s}\right)^2\right)\right) + n_i \quad (5.115)$$

其中,  $i = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$ 。对于更大的  $\mu_{\text{err}}$ , 频谱幅度  $A_f$  会减小, 这会导致检测概率  $P_d$  和定位精度  $P_r$  减小, 进而使得复原率  $P_r$  降低。

在本节的仿真实验中, OSFRFT 算法被用来恢复线性调频分量, 并由 Monte Carlo 仿真估计不同  $\mu_{\text{err}}$  下的复原率。假定信号由一个线性调频分量组成, 其中心频率  $f_0 =$

101.5Hz,调频率  $\mu_0 = -15\text{Hz/s}$ 。信号长度为  $2^{12}$ ,采样频率为  $1000\text{Hz/s}$ ,信噪比  $\text{SNR} = 0\text{dB}$ 。我们测试不同的误差调频率  $\mu_{\text{err}}$ ,将其分别取为  $0.1, 0.15, 0.2, 0.25$  和  $0.3\text{Hz/s}$ 。

对于每个不同的误差调频率  $\mu_{\text{err}}$ ,取不同  $B$  和  $\Gamma$  的 OSFRFT 算法的复原率经由 Monte Carlo 仿真获取。对于每组的参数设置,我们执行 3000 次 OSFRFT 算法循环,使用下式估计复原率  $P_r$  :

$$\hat{P}_r = \frac{N_l}{k\eta} \quad (5.116)$$

其中,  $k=1$  是大值系数的数目;  $\eta=3000$  是循环总数;  $N_l$  表示频率在  $101.5\text{Hz}$  处,可正确恢复的大值系数的数目。理论上的复原率  $P_r$  可由式(5.113)计算而来。

图 5.13 中的两幅仿真图分别显示了复原率  $P_r$  与  $\mu_{\text{err}}$ 、复原率  $P_r$  与信噪比  $\text{SNR}$  之间的关系。图 5.13(a)展示了不同情况下的  $P_r$  曲线,这与由式(5.113)计算得到的理论值一致。复原率  $P_r$  随着  $\mu_{\text{err}}$  的增加而减小,这是由于频谱幅度的减小。可采用增加参数  $B$  的数值或采用定位误差校正的方法,补偿  $P_r$  减小所造成的影响。从图中可以看出,对于例子中  $\mu_{\text{err}}$  的所有值,当  $B$  设置为 256 且  $\Gamma$  设置为 2 时,复原率  $P_r$  的值在 97.5% 以上。根据式(5.112),当  $B=256, L=N/2$  且  $k=1$  时,OSFRFT 算法的复乘次数为  $M_{\text{OSFRFT}} = 13313$ 。相比之下,Pei 采样型算法需要 32768 次复乘。由此可证明,在不同  $\mu_{\text{err}}$  值的情况下,OSFRFT 算法在保持高复原率的同时,还具有更低的计算复杂度。

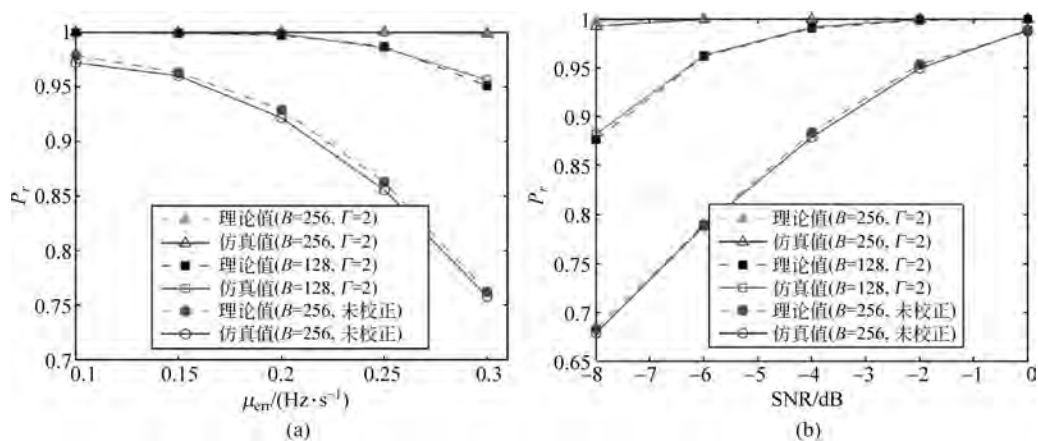


图 5.13 在不同  $\mu_{\text{err}}$  和输入信噪比下复原率  $P_r$  的变化曲线

(a) 不同的  $\mu_{\text{err}}$ ; (b) 不同的输入信噪比

### 3. SNR 的影响

本次仿真实验研究在不同 SNR 情况下 OSFRFT 算法的性能,并证明所得  $P_r$  的精度。具体地,OSFRFT 算法复原线性调频信号分量,并由 Monte Carlo 仿真估计不同信噪比下的复原率。信号参数配置:由一个线性调频分量组成,中心频率为  $101.5\text{Hz}$ ,调频率为  $-15\text{Hz/s}$ ,且信号长度为  $2^{12}$ 。信号的采样频率为  $1000\text{Hz/s}$ 。信号受白高斯噪声干扰,信噪比  $\text{SNR}$  分别取  $0, -2, -4, -6$  和  $-8$ 。算法的参数设置:  $B=128256, \Gamma=1, 2, \sigma=19, b=0, \mu_{\text{err}}=0\text{Hz/s}$ 。另外,参数  $\xi$  在不同信号比下调整以保持同样的虚警率  $P_{fa}$ ,其中  $P_{fa}=10^{-4}$ 。

对于所设置的每一个信噪比 SNR,我们都根据式(5.116)估计  $P_r$ ,估计值记作  $\hat{P}_r$ 。理论上的  $P_r$  依然由式(5.113)获取。图 5.13(b)展示了在不同输入信噪比下  $P_r$  的变化曲线。从该图可观察到,理论上的  $P_r$  和仿真的  $\hat{P}_r$  在不同的  $B$  和  $\Gamma$  下随 SNR 的变化规律具有良好的一致性,这再次证明了式(5.113)的准确性。随着 SNR 的降低,复原率  $P_r$  减小,为此可增加  $B$  的值或是采用定位误差校正的方法来增加复原率  $P_r$ 。与 5.1.3.2.4 节的例子一样,设置  $B=256$  和  $\Gamma=2$  后,在不同的信噪比下复原率  $P_{\text{err}}$  可达到 97.5% 以上。同样,可计算出 OSFRFT 算法的复乘次数为  $M_{\text{OSFRFT}}=13313$ ,这低于 Pei 采样型算法。由此可证明,所提的 OSFRFT 算法在噪声干扰下保持良好性能的同时,也降低了运算复杂度。

#### 4. 多分量分离和参数估计性能

在本节的仿真实验中,取不同的  $\alpha$  代入 OSFRFT 算法,分离出多个线性调频分量,并将其结果与 DFRFT 算法比较。信号由 4 个线性调频分量组成,其中心频率分别为 125、225、325 和 325.1Hz,相应的调频率分别是  $-8$ 、 $-10$ 、 $-12$  和  $-12$ Hz/s。信号的采样频率为 900Hz,信号的长度为  $2^{15}$ 。每个线性调频分量对应的幅度都设置为  $A=0.5$ 。噪声方差取  $\sigma_n^2=4$ ,则相应的信噪比为  $\text{SNR}=-15.0515\text{dB}$ 。OSFRFT 算法的参数设置:  $B=2048$ ,  $\sigma=19$ ,  $b=0$ ,  $\xi=7612.2$ 。相应的  $P_{fa}=10^{-6}$ ,使用定位误差校正方法,则有  $\Gamma=1$ 。

图 5.14 表明,当  $\alpha$  与一个线性调频分量的调频率一致时,其中心频率可由 DFRFT/OSFRFT 算法结果的峰值位置获取。由于第三个和第四个线性调频分量的调频率是一样的,第四个线性调频分量的中心频率可由匹配次序后的 DFRFT/SFRFT 算法的三次循环获得。在图 5.14 中,DFRFT 和 OSFRFT 算法的仿真结果相互匹配得很好,这表明线性调频分量的中心频率和幅值可由 OSFRFT 算法精确估计。第三个和第四个线性调频分量间的间隔很小,这两个分量之间的差别只有 0.1Hz,这等价于分数阶傅里叶域采样后的四个离散采样间隔。根据图 5.14(c),这两个邻近分量可由 OSFRFT 算法明显地区分出来,验证了所提 OSFRFT 算法优秀的频谱分辨率。

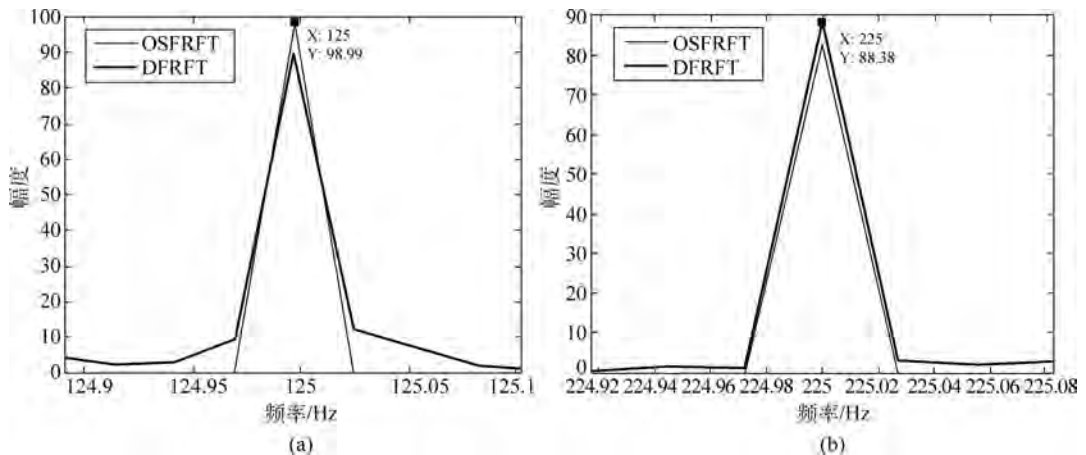


图 5.14 OSFRFT 和 DFRFT 对 4 个线性调频分量的匹配顺序

图(a)~(c)中  $\mu_{\text{err}}$  的取值分别为  $-8$ 、 $-10$  和  $-12$ Hz/s

(a) 第一个线性调频分量的匹配情况; (b) 第二个线性调频分量的匹配情况;

(c) 第三个和第四个线性调频分量的匹配情况

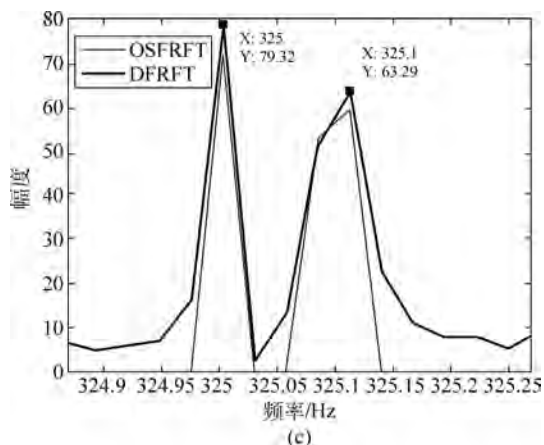
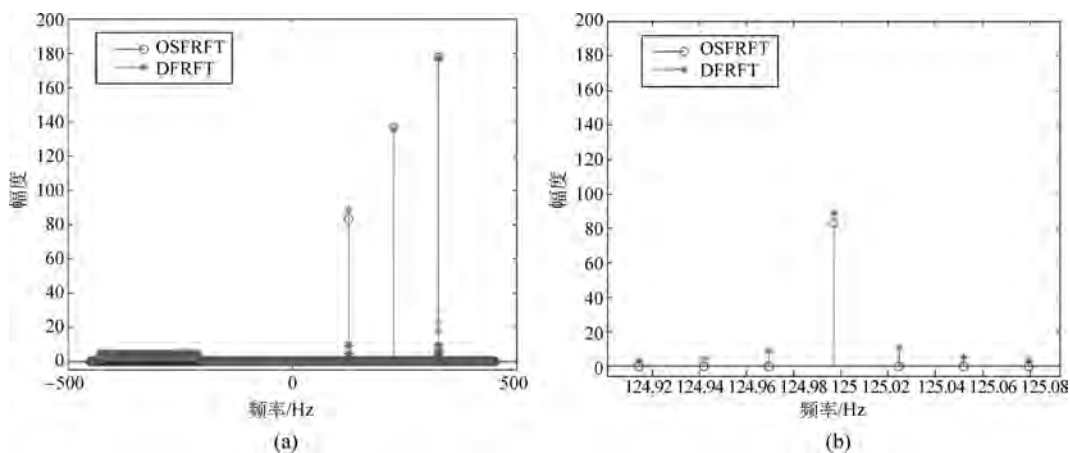


图 5.14 (续)

在本节的另一个仿真实验中,我们考虑信号的分数阶傅里叶频谱除了大值系数,还具有大量的小而非零的系数的情况,即称为非精确的“ $k$ -sparsity”情况。假设信号由三个线性调频分量和一个复指数分量组成,三个线性调频分量的中心频率分别是 125、225 和 325 Hz,其相应的幅度为 0.5、0.75 和 1,相应的调频率都设置为  $-6$  Hz/s。而所含指数信号的频率设为  $-325$  Hz,其幅度为 2。假定输入信号无噪声,采样率为 900 Hz,且输入信号的长度为  $2^{15}$ 。DFRFT/SFRFT 算法的旋转角  $\alpha$  与线性调频分量的调频率相匹配,而其他参数与之前的实验设置成一样。输入信号的仿真结果,在给定的分数阶傅里叶域展现出了非精确的“ $k$ -sparsity”情况。如之前的预期一样,在三个线性调频分量匹配的分数阶傅里叶域中,指数信号对应成了宽带分量。与之对比的是,在图 5.15(b)~(d)中,三个线性调频分量的频点位置可由 OSFRFT 算法精确估计出。但由于非零小值的干扰,估计出的大值系数的幅值与真实值稍有不同。

图 5.15 “ $k$ -sparsity”情况的数值仿真

- (a) 匹配次序后含三个分量的 OSFRFT 算法和 DFRFT 算法的分数阶傅里叶频谱;  
 (b)~(d) 对应于第一个、第二个、第三个线性调频分量的分数阶傅里叶频谱的局部细节



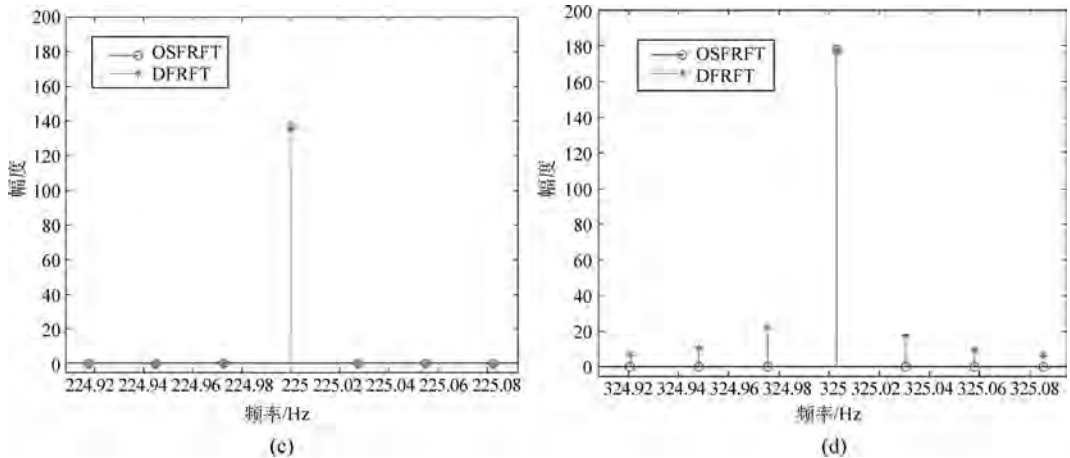


图 5.15 (续)

### 5. 计算复杂度分析

在本节的仿真实验中,我们分别比较了 DFRFT 算法、SDFRFT 算法和 OSFRFT 算法的计算复杂度。在本节的第一个仿真实验中,我们以复乘次数作为计算复杂度的评估标准。DFRFT 算法和 SDFRFT 算法的复乘次数的计算方法直接从文献[4]和[28]分别获得,而 OSFRFT 算法的复乘次数由式(5.112)计算得到,其中的参数  $B=64$ ,参数  $L=N/2$ 。

从图 5.15(a)可以看出,我们所提出的 OSFRFT 算法的复乘次数明显少于 DFRFT 算法和 SDFRFT 算法,大概减少为原来的  $1/2.5$ 。当信号的长度  $N \leq 2^{12}$  时,SDFRFT 算法的计算复杂度比 DFRFT 算法更高,说明当信号长度较小时,SDFRFT 算法在计算效率方面就没有了优势。与之对比的是,无论信号的长度如何,所提的 OSFRFT 算法在计算效率上都具有明显的优势。这是因为 SDFRFT 算法为了定位大值系数的位置,采用了多次“hash-to-bins”过程<sup>[17]</sup>。而所提的 OSFRFT 算法采用“ $k$ -sparse”算法的方法<sup>[27]</sup>,包含两次“hash-to-bins”过程,另外还需一次“hash-to-bins”过程校正由噪声干扰导致的定位误差,总计三次“hash-to-bins”过程。由于“hash-to-bins”过程占据主要的计算量,而与 SDFRFT 算法相比,所提的 OSFRFT 算法具有明显更少的“hash-to-bins”过程,故 OSFRFT 算法的计算效率有了显著的提高。

本节的第二个仿真实验比较算法的运行时间,我们设置信号的稀疏度  $k=5$ ,信噪比  $\text{SNR}=0\text{dB}$ 。OSFRFT 算法的其他参数设置成  $B=N/64$ , $\sigma=67$ , $b=0$  和  $L=N/2$ 。本次仿真运行在具有 Intel i7-4600U 2.1GHz GPU 和 8GB RAM 的笔记本电脑上,对于每个  $N$  的值执行 1000 次实验,并取这些实验运行时间的均值。如图 5.16(b)中曲线所示,与 DFRFT 算法和 SDFRFT 算法相比,所提的 OSFRFT 算法在运行时间上具有明显的优势,并且这种优势随着信号长度的增加而增大。

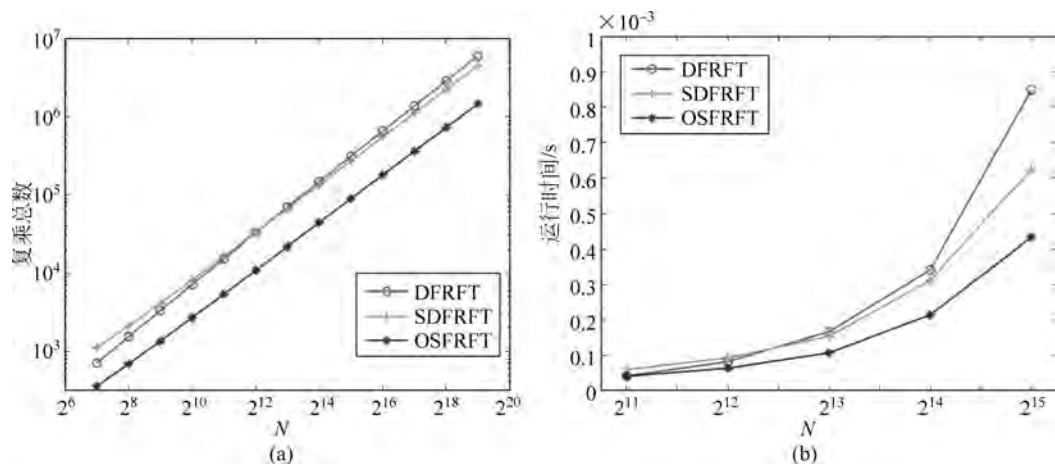


图 5.16 比较计算复杂度

(a) 复乘次数比较; (b) 运行时间比较

### 5.1.3.3 应用

本节我们验证 OSFRFT 算法在连续波雷达信号处理中的应用价值。雷达实验平台为来自 Ancortek 公司的 SDR-KIT 580B 设备, 该设备的模式选为连续波模式, 中心频率设为  $f_c = 5.8\text{GHz}$ 。在本实验中, 我们使用一个金属立方体外形的便携电源包, 将其在  $1.25\text{m}$  的高度以初始为 0 的速度释放。发射天线和接收天线安置在便携电源包的上方, 天线高度相对于地面为  $1.35\text{m}$ , 视轴垂直向下。实验场景的几何说明展示在图 5.17 中。下落过程花费了  $0.5\text{s}$ , 我们剪切  $0.09\text{s} \sim 0.41\text{s}$  的下落过程用作后处理。信号采样频率  $f_s = 25600\text{Hz}$ , 采样点数  $N =$

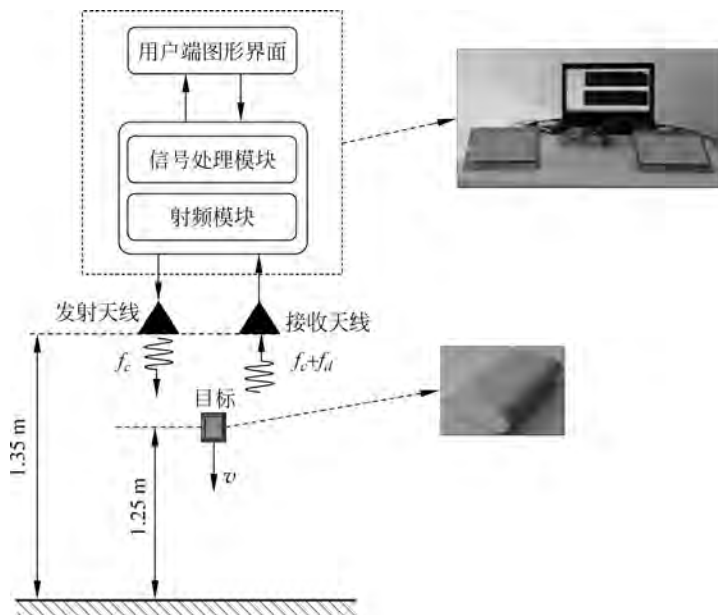


图 5.17 实验场景说明

$2^{13}$ 。对于  $i = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$ , 基带回波信号可表示成  $s_i = A \exp(j2\pi\tau_i f_c) + v_i$ , 其中,  $\tau_i$  是天线和目标之间的时延,  $v_i$  表示复高斯噪声。目标物体的自由落体可看作一个匀加速线性运动:  $\tau_i = \frac{2}{c} \times \left( -v_{\text{mid}} \frac{i}{f_s} - 0.5\zeta \left( \frac{i}{f_s} \right)^2 \right)$ , 其中  $v_{\text{mid}}$  表示在确定的中间时刻即 0.25s 时目标的瞬时速度, 变量  $\zeta$  表示目标的加速度,  $c = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}$  表示光速, 则基带回波信号可写成  $s_i = A \exp\left(j2\pi\left(-\frac{2v_{\text{mid}}f_c}{c} \times \frac{i}{f_s} - \frac{\zeta f_c}{c} \left(\frac{i}{f_s}\right)^2\right)\right) + v_i$ 。

目标运动的结果是产生中心频率  $f_{\text{mid}} = \frac{2v_{\text{mid}}f_c}{c} \text{ Hz}$  且调频率  $\mu = -\frac{2\zeta f_c}{c}$  的回波信号。DFRFT/OSFRFT 算法可用来分析回波信号并估计目标参数。我们假设目标的加速度等同于目标的自由落体速度  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ , 则相应的调频率  $\mu_{\text{est}} = -\frac{2gf_c}{c} = -378.9333 \text{ Hz/s}$ 。设置分数阶傅里叶变换的参数  $\alpha = \text{arccot}(-\mu_{\text{est}})$ , 算法参数  $B = 512, \sigma = 23$  和  $b = 0$ 。

需估计的平均信号幅度和标准噪声偏移分别设置为  $\bar{A} = 160.6455$  和  $\bar{\sigma}_i = 5.7521$ , 则输入信噪比为 25.9105dB。设置  $P_{f_{a_1}} = 10^{-6}$  和  $\zeta = 10947$ , 并使用一个缩短的切比雪夫窗, 长度为  $L = N/2$ 。我们也使用定位误差校正方法, 参数  $\Gamma$  设置为 1。FFT、DFRFT 和 OSFRFT 算法结果展现在图 5.18 中。为了归一化, FFT 结果图的幅度缩放  $\sqrt{N}$  倍。与 FFT 的结果图相比, DFRFT 的结果图更为集中。因此,  $\alpha$  与调频率相匹配, 目标能量集中在分数阶傅里叶域。根据 DFRFT 的结果, 中心的频率为  $-96.88 \text{ Hz}$ , 因此所估计的速度  $v_{\text{est}} = -96.88 \times c / (2f_c) = -2.5055 \text{ m/s}$ 。目标在中间时间点的速度  $v_{\text{mid}}$  为  $g \times 0.25 = -2.45 \text{ m/s}$ , 这证明了算法良好的速度估计精度。OSFRFT 算法在峰值附近的结果与 DFRFT 算法结果相接近。所有的大值系数都被检测并正确定位, 幅度估计误差可忽略。因此, 我们认定 OSFRFT 算法能够精确估计出大值频量的位置和幅度值。根据式(5.112),  $k = 20$ , 因此  $M_{\text{OSFRFT}} = 27532$ 。相比之下, Pei 的算法涉及 69632 个复乘次数。这表明

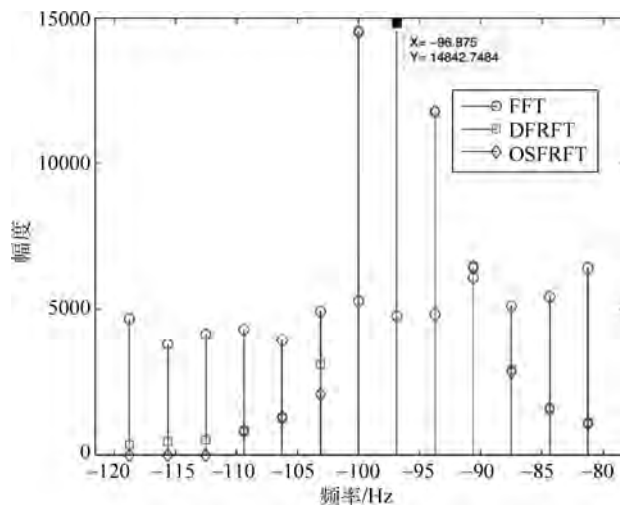


图 5.18 基于连续波雷达所收集到数据的算法比较

OSFRFT 算法复杂度低于 Pei 的算法的 1/2。此实验也证明, 对于一个相对较小的  $N$ , 使用 OSFRFT 算法, 算法复杂度可大幅降低。

## 5.2 特征分解型离散分数阶傅里叶变换

特征分解型 DFRFT 从连续傅里叶变换的特征函数(Hermite 函数)出发, 通过对 Hermite 函数的离散化近似和正交投影, 得到一组与 Hermite 函数形状相似的 DFT 矩阵的正交化离散 Hermite 特征向量。然后, 仿照连续 FRFT 的核函数谱分解表达式, 构造了离散分数阶傅里叶的变换矩阵。本节将详细介绍这种 DFRFT 的构造方法及其所依据的相关定理。

### 5.2.1 傅里叶变换的特征值与特征函数

首先给出傅里叶变换的特征值和特征函数。傅里叶变换的特征函数, 即满足方程  $Ff = \lambda f$  的解, 是 Hermite-Gaussian 函数。记为  $\psi_n(u)$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$ 。表达式为

$$\psi_n(u) = A_n H_n(\sqrt{2\pi}u) e^{-\pi u^2}, \quad A_n = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{2^n n!}} \quad (5.117)$$

式中,  $H_n(u)$  为  $n$  阶 Hermite 多项式。傅里叶变换的特征值为  $e^{-in\pi/2}$ , 即  $F\psi_n(u) = e^{-in\pi/2}\psi_n(u)$ , 全部的 Hermite-Gaussian 函数组成一个正交集。

### 5.2.2 离散傅里叶变换矩阵的特征值

DFT 矩阵  $F$  的特征值是  $e^{-j(\frac{\pi}{2})k}$   $k=0, 1, 2, \dots, N-1$ , 它有 4 个值, 即  $1, -j, -1, j$ 。它的特征值及重复度如表 5.1 所示。

表 5.1 DFT 矩阵特征值的多样性

$N$	1 的重复度	$-j$ 的重复度	$-1$ 的重复度	$j$ 的重复度
$4m$	$m+1$	$m$	$m$	$m-1$
$4m+1$	$m+1$	$m$	$m$	$m$
$4m+2$	$m+1$	$m$	$m+1$	$m$
$4m+3$	$m+1$	$m+1$	$m+1$	$m$

对 4 个特征值  $1, -j, -1, j$  来说, 每个值对应的特征向量全体组成一个特征子空间, 记为  $E_0, E_1, E_2, E_3$ , 每个特征值的重复度决定了子空间的秩。对于  $N$  维 DFT 矩阵来说, 重复度为  $M$  的特征值有  $M$  个独立的特征向量。关于 DFT 矩阵特征向量的计算有如下定理:

**定理 5.2:** 矩阵  $S$  可用于计算 DFT 矩阵  $F$  的特征向量,  $S$  的表达式为

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 2\cos\omega & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos 2\omega & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos(N-1)\omega \end{bmatrix} \quad (5.118)$$

可以证明矩阵  $S$  和  $F$  满足乘法交换性, 即  $SF = FS$ 。因此矩阵  $S$  的特征向量也是矩阵  $F$  的特征向量, 但它们对应不同的特征值。

### 5.2.3 离散傅里叶变换矩阵的 Hermite 特征向量

从前面的分析可以看到, DFT 矩阵  $F$  的特征向量不唯一(或特征分解不唯一)。那么, 我们希望能从中找到与 Hermite 函数形状相似的特征向量, 这样的向量称为 DFT 矩阵的 Hermite 特征向量。为了求 Hermite 特征向量, 我们需要给出一系列重要的定理及证明。

**定理 5.3:** 对 DFT 矩阵的 Hermite 特征向量而言, 它对应的连续函数的扩展方差应当为  $\sqrt{(N/2\pi)} T_s$ ,  $T_s$  是信号的采样间隔。连续 Hermite 函数采样后得到

$$\phi_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{N/2} T_s} h_n\left(\frac{k}{\sqrt{N/2\pi}}\right) \exp(-k^2 \pi/N) \quad (5.119)$$

**证明:** 设  $n$  阶连续 Hermite-Gaussian 函数写为

$$H_{\sigma_d, n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi} \sigma_d} h_n\left(\frac{t}{\sigma_d}\right) e^{-\left(\frac{t^2}{2\sigma_d^2}\right)} \quad (5.120)$$

它的傅里叶变换表达式为

$$H_n(f) = \frac{\sqrt{\sigma_d}}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} h_n(f\sigma_d) e^{-f^2 \sigma_d^2/2} \quad (5.121)$$

以采样周期  $T_s$  对时间采样, 式(5.120)改写为

$$H_{\sigma_d, n}(k) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi} \sigma_d} h_n\left(\frac{kT_s}{\sigma_d}\right) e^{-\left(\frac{k^2 T_s^2}{2\sigma_d^2}\right)}, \quad k=1, 2, \dots, N \quad (5.122)$$

根据采样理论, DFT 之后的频率分辨率为  $\frac{2\pi}{NT_s}$ 。以  $k \frac{2\pi}{NT_s}$  代替式(5.121)中的  $f$ :

$$H_n(k) = \frac{\sqrt{\sigma_d}}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} h_n\left(k \frac{2\pi}{NT_s} \sigma_d\right) e^{-\frac{k^2 2\pi^2 \sigma_d^2}{N^2 T_s^2}} \quad (5.123)$$

我们希望通过调整方差  $\sigma_d$  的大小, 使得 Hermite 离散向量经过 DFT 变换后保持形状不变, 即令两式的方差  $\sigma_d$  相等。式(5.122)的方差为  $\frac{\sigma_d^2}{T_s^2}$ , 式(5.123)的方差为  $\frac{N^2 T_s^2}{4\pi^2 \sigma_d^2}$ , 令两者

相等得  $\sigma_d = \sqrt{\frac{N}{2\pi}} T_s$ 。代入式(5.122)得到

$$\phi_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{N/2} T_s} h_n\left(\frac{k}{\sqrt{N/2\pi}}\right) \exp(-k^2 \pi/N)$$

上式也可看作方差为 1 的 Hermite-Gaussian 函数以采样间隔  $\sqrt{\frac{2\pi}{N}}$  进行采样得到的序列。

**定理 5.4:** 若序列  $\phi_n(k)$  是由单位方差的 Hermite-Gaussian 函数以采样间隔  $T = \sqrt{\frac{2\pi}{N}}$  进行采样得到的, 那么可以证明下列近似等式:

当  $N$  为偶数时,

$$(-j)^n \phi_n(k) \approx \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{m=-(N/2)}^{(N/2)-1} \phi_n(m) e^{-j2\pi mk/N} \quad (5.124)$$

当  $N$  为奇数时,

$$(-j)^n \phi_n(k) \approx \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{m=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \phi_n(m) e^{-j2\pi mk/N} \quad (5.125)$$

**证明:** 这里只证明  $N$  为偶数的情况,  $N$  为奇数的情况完全类似。因为当方差  $\sigma_d$  为 1 时, Hermite-Gaussian 函数  $\phi_n(t)$  是傅里叶变换的特征函数, 即

$$\mathcal{F}^1[\phi_n(t)] = e^{-jn\pi/2} \phi_n(\omega) = (-j)^n \phi_n(\omega)$$

或改写成

$$(-j)^n \phi_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(t) e^{-j\omega t} dt$$

将上式的积分区间从  $(-\infty, +\infty)$  截取为  $(-NT/2, NT/2)$ , 可得到近似等式

$$(-j)^n \phi_n(\omega) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-NT/2}^{NT/2} \phi_n(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5.126)$$

之所以可以这样取近似, 是因为当  $N$  很大时,  $NT = \sqrt{2\pi N}$  也很大, 并且高斯函数  $\exp(-t^2/2)$  的衰减很快。下面用数值积分来取代连续积分, 可得

$$\int_{-NT/2}^{NT/2} \phi_n(t) e^{-j\omega t} dt \approx \sum_{k=-(N/2)}^{(N/2)-1} \phi_n(kT) e^{-j\omega kT} T \quad (5.127)$$

因为当  $N$  很大时,  $T = \sqrt{2\pi/N}$  很小, 所以这是一个合理的近似。将式(5.126)和式(5.127)合并得到

$$(-j)^n \phi_n(\omega) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-(N/2)}^{(N/2)-1} \phi_n(kT) e^{-j\omega kT} T \approx \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{k=-(N/2)}^{(N/2)-1} \phi_n(kT) e^{-j\omega kT}$$

将式中的  $\omega$  作离散化处理, 令  $\omega = kT$  并代入上式得

$$(-j)^n \phi_n(k) \approx \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{m=-(N/2)}^{(N/2)-1} \phi_n(m) e^{-j2\pi mk/N} \quad (5.128)$$

证毕。

从以上推导过程可以看出, 式(5.124)存在两个近似误差, 分别是由式(5.125)引起的截取误差和由式(5.127)引起的数值计算误差。当  $N$  趋于无穷大时, 误差将趋于 0。因此,  $N$  越大, 式(5.126)的近似程度越好。另外, 因为 Hermite 多项式的原因, 对于  $n$  阶 Hermite 函数来说, 其随时间的衰减率正比于  $t^n e^{-t^2/2}$ 。因此, Hermite 函数的阶次越高, 其随时间的衰减也就越慢。

**定理 5.5:** 将序列  $\phi_n(k)$  按照以下方式平移得到  $\bar{\phi}_n(k)$ 。

当  $N$  为偶数时,

$$\bar{\phi}_n(k) = \begin{cases} \phi_n(k), & 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1 \\ \phi_n(k - N), & \frac{N}{2} \leq k \leq N - 1 \end{cases} \quad (5.129)$$

当  $N$  为奇数时,

$$\bar{\phi}_n(k) = \begin{cases} \phi_n(k), & 0 \leq k \leq \frac{N-1}{2} \\ \phi_n(k-N), & \frac{N+1}{2} \leq k \leq N-1 \end{cases} \quad (5.130)$$

则  $\bar{\phi}_n(k)$  的 DFT 近似为  $(-j)^n \bar{\phi}_n(k)$ , 即当  $N$  足够大时,

$$(-j)^n \bar{\phi}_n(m) \approx \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{\phi}_n(k) \exp(-j2\pi km/N) \quad (5.131)$$

证明: 这里只证明  $N$  为偶数的情况,  $N$  为奇数的情况完全类似。

$$\text{DFT}[\bar{\phi}_n(k)] = \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{k=0}^{(N/2)-1} \phi_n(k) e^{-j2\pi km/N} + \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{k=N/2}^{N-1} \phi_n(k-N) e^{-j2\pi km/N} \quad (5.132)$$

利用等式关系  $e^{-j2\pi km/N} = e^{-j2\pi(k-N)m/N}$ , 式(5.132)等号右边第二项可写为

$$\sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{k=N/2}^{N-1} \phi_n(k-N) e^{-j2\pi km/N} = \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{l=-N/2}^{-1} \phi_n(l) e^{-j2\pi lm/N} \quad (5.133)$$

将式(5.133)代入式(5.132)并根据定理 5.4, 有

$$\text{DFT}[\bar{\phi}_n(k)] = \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{k=-(N/2)}^{(N/2)-1} \phi_n(k) e^{-j2\pi km/N} \approx (-j)^n \phi_n(m) \quad (5.134)$$

其中,  $m$  取值范围为  $(0, N/2-1)$ 。利用等式

$$e^{-j2\pi km/N} = e^{-j2\pi k(m-N)/N} \quad (5.135)$$

式(5.134)可改写为

$$\text{DFT}[\bar{\phi}_n(k)] = \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{k=-(N/2)}^{(N/2)-1} \phi_n(k) e^{-j2\pi k(m-N)/N} = (-j)^n \phi_n(m-N) \quad (5.136)$$

其中,  $m$  取值范围为  $(N/2, N-1)$ 。将式(5.135)和式(5.136)两式合并

$$\text{DFT}[\bar{\phi}_n(k)] = \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{\phi}_n(k) e^{-j2\pi km/N} \approx (-j)^n \bar{\phi}_n(m) \quad (5.137)$$

证毕。

从定理 5.4 和定理 5.5 可见, Hermite 函数的采样序列近似为 DFT 矩阵的特征向量。对 Hermite 函数的采样序列作归一化, 记为

$$\mathbf{u}_n = \frac{[\bar{\phi}_n(0), \bar{\phi}_n(1), \dots, \bar{\phi}_n(N-1)]^T}{\|[\bar{\phi}_n(0), \bar{\phi}_n(1), \dots, \bar{\phi}_n(N-1)]^T\|} \quad (5.138)$$

通过  $\mathbf{S}$  矩阵可以得到 DFT 矩阵  $\mathbf{F}$  的一组实正交特征向量, 因此可以将这些特征向量作为 DFT 特征子空间的基向量, 然后计算向量  $\mathbf{u}_n$  在 DFT 特征子空间的投影, 从而得到 DFT 矩阵的 Hermite 特征向量

$$\bar{\mathbf{u}}_n = \sum_{(n-k) \bmod 4 = 0} \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_k \rangle \mathbf{v}_k \quad (5.139)$$

因为前面已经证明  $\mathbf{u}_n$  近似为 DFT 矩阵的特征向量, 因此做投影后误差不会太大, 仍然保持 Hermite 函数的形状。式(5.139)的含义是, 先利用  $\mathbf{S}$  矩阵求一组 DFT 矩阵的实正交特征向量  $\mathbf{v}_k$  作为特征空间的基, 然后求连续 Hermite 函数的离散样本在 DFT 特征空间的投影。但是, 由式(5.139)所得的向量不是特征空间的正交基。众所周知, 若要使

DFRFT 矩阵满足旋转相加性, 离散 Hermite 特征向量必须是正交的, 因此, 对式(5.139)所得的向量必须进行正交化处理。容易证明, 位于不同特征子空间的向量已经正交, 因此只需在每个子空间内部做正交化即可。总之, 它的计算流程如下:

- (1) 计算连续 Hermite 函数的取样向量  $\mathbf{u}_n$ ;
- (2) 计算矩阵  $\mathbf{S}$  的特征向量  $\mathbf{v}_k$ ;
- (3) 利用式(5.139)计算 Hermite 特征向量  $\hat{\mathbf{u}}_n$  (未正交化);
- (4) 对  $\hat{\mathbf{u}}_n$  进行正交化, 得到正交归一化的 Hermite 特征向量  $\hat{\mathbf{u}}_k$ 。

按照正交归一化的方法不同, Pei 等分别称其为 GSA 方法和 OPA 方法。GSA 方法是采用 Gram-Schmide 进行正交归一化的, 而 OPA 方法则是采用 Orthogonal Procrustes 方法进行正交归一化的<sup>[29]</sup>。

### 5.2.4 离散分数阶傅里叶变换核矩阵

连续 FRFT 的核函数谱分解表达式如下

$$K_\alpha(t, u) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-jn\alpha} H_n(t) H_n(u) \quad (5.140)$$

式中,  $H_n(t)$  表示单位方差的  $n$  阶 Hermite 函数。仿照上面连续 FRFT 核函数谱分解的形式, DFRFT 的核矩阵定义为

$$\mathbf{F}^{2\alpha/\pi} = \hat{\mathbf{U}} \mathbf{D}^{2\alpha/\pi} \hat{\mathbf{U}}^T = \begin{cases} \sum_{k=0}^{N-1} e^{jk\alpha} \hat{\mathbf{u}}_k \hat{\mathbf{u}}_k^T, & N \text{ 为偶数} \\ \sum_{k=0}^{N-2} e^{jk\alpha} \hat{\mathbf{u}}_k \hat{\mathbf{u}}_k^T + e^{j(N-1)\alpha} \hat{\mathbf{u}}_{N-1} \hat{\mathbf{u}}_{N-1}^T, & N \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (5.141)$$

式中的  $\hat{\mathbf{U}}$ , 当  $N$  为奇数时  $\hat{\mathbf{U}} = [\hat{\mathbf{u}}_0 \quad \hat{\mathbf{u}}_1 \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{u}}_{N-1}]$ , 当  $N$  为偶数时  $\hat{\mathbf{U}} = [\hat{\mathbf{u}}_0 \quad \hat{\mathbf{u}}_1 \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{u}}_{N-2} \quad \hat{\mathbf{u}}_{N-1}]$ ;  $\hat{\mathbf{u}}_k$  是归一化的 Hermite 特征向量;  $\mathbf{D}^{2\alpha/\pi}$  是对角阵, 如下方式定义

$$\mathbf{D}^{2\alpha/\pi} = \begin{bmatrix} e^{-j0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{-j\alpha} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{-j2\alpha} & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & e^{-j\alpha(N-2)} & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{-j\alpha(N-1)} \end{bmatrix}, \quad N \text{ 为奇数} \quad (5.142)$$

$$\mathbf{D}^{2\alpha/\pi} = \begin{bmatrix} e^{-j0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{-j\alpha} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{-j2\alpha} & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & e^{-j\alpha(N-2)} & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{-j\alpha N} \end{bmatrix}, \quad N \text{ 为偶数} \quad (5.143)$$



确定变换核  $F^{\frac{2\alpha}{\pi}}$  后,信号  $x(t)$  的 DFRFT 可以通过如下公式计算

$$\mathbf{X}_\alpha = F^{\frac{2\alpha}{\pi}} \mathbf{x} = \mathbf{U} \mathbf{D}^{\frac{2\alpha}{\pi}} \mathbf{U}^T \mathbf{x} \quad (5.144)$$

与连续 FRFT 相似,信号  $x(t)$  也可以通过逆 DFRFT 恢复。

$$\mathbf{x} = F^{-\frac{2\alpha}{\pi}} \mathbf{X}_\alpha = \mathbf{U} \mathbf{D}^{-\frac{2\alpha}{\pi}} \mathbf{U}^T \mathbf{X}_\alpha \quad (5.145)$$

需要注意的是,GSA 与 OPA 方法需要计算特征向量烦琐的正交归一化运算,使得计算复杂度增加,实用性能降低。

以上我们给出了特征分解型 DFRFT 的基本方法。目前,还存在很多特征分解型 DFRFT。基本思路总结为,特征分解型 DFRFT 是由分数阶特征值和相应的离散傅里叶变换矩阵  $F$  对应的特征向量所构成。离散傅里叶变换矩阵  $F$  的特征值为  $\{1, -j, -1, j\}$ , 所对应的特征向量构成 4 个特征向量空间  $\{\mathbf{E}_k, k=1, 2, 3, 4\}$ , 其所对应的多样性如表 5.1 所示。将离散傅里叶变换矩阵  $F$  对应的特征值分数化,可构造 DFRFT 矩阵所对应的特征值。接着,需要构造特征值所对应的特征向量。目前,存在多种构造特征向量的方法,本节我们凝练了特征分解型 DFRFT 的共同机理。基于此,将众多的特征分解型 DFRFT 分为两大类:基于  $F$ -可交换矩阵的 DFRFT 和基于采样 Hermite-Gaussian 函数的 DFRFT。

### 5.2.5 基于 $F$ -可交换矩阵的离散分数阶傅里叶变换

首先,若存在矩阵  $A$ , 满足  $A\mathbf{F} = \mathbf{F}A$ , 则  $A$  的特征函数与  $F$  的特征函数是等价的。基于  $F$ -可交换矩阵的离散分数阶傅里叶变换 ( $F$ -Commuting Matrix-based DFRFT, FC-DFRFT) 旨在直接利用  $F$ -可交换矩阵的正交特征向量来构造特征分解型 DFRFT 的特征向量。

根据 FRFT 和函数的谱分解表达式,Pei 首次提出了基于特征分解型 DFRFT<sup>[30]</sup>。由于可交换的矩阵具有相同的特征向量,因此可通过  $F$ -可交换矩阵  $S$  的特征向量来实现离散傅里叶变换矩阵  $F$  的特征向量。最后,对应的特征分解型 DFRFT 为

$$\mathbf{F}^p = \mathbf{V} \mathbf{D}^\alpha \mathbf{V} = \sum_{k=0, k \neq (N-1+(N)_2)}^N e^{-jk\alpha} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \quad (5.146)$$

其中,  $\mathbf{v}_k$  是由矩阵  $S$  得到的近似连续 Hermite-Gaussian 函数的特征向量,  $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_0 \quad \mathbf{v}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_{N-1}]$ ,  $(N)_2 = N \bmod 2$ 。需要注意的是,当  $N$  为偶数时,最后一个特征值分配上存在一个“跳跃”。这个规则和表 5.1 特征值的多样性是一致的。具体地,  $\mathbf{D}^\alpha$  是一个对角矩阵,定义如下:

当  $N$  为奇数时,

$$\mathbf{D}^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j\alpha} & \cdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & e^{-j(N-2)\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{-j(N-1)\alpha} \end{bmatrix} \quad (5.147)$$

当  $N$  为偶数时,

$$\mathbf{D}^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j\alpha} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & e^{-j(N-2)\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{-jN\alpha} \end{bmatrix} \quad (5.148)$$

此 DFRFT 为传统的基于  $\mathbf{F}$ -可交换矩阵的离散分数阶傅里叶变换(记为传统 FC-DFRFT),其可以很好地近似连续 FRFT,同时严格满足酉性、可加性。矩阵  $\mathbf{S}$  的具体推导见文献[31]。具体地,连续傅里叶变换的特征函数为连续 Hermite-Gaussian 函数,同时也是下面的二阶微分方程的特征函数

$$\mathcal{S}\{f(t)\} = \lambda f(t) \quad (5.149)$$

其中,  $\mathcal{S} = \mathcal{D}^2 + \mathcal{F}\mathcal{D}^2\mathcal{F}^{-1}$ ,  $\mathcal{D} = d/dt$  是微分算子,  $\mathcal{F}$  为连续傅里叶变换。因此,离散的 Hermite-Gaussian 函数可以看作连续算子  $\mathcal{S}$  的离散矩阵  $\mathbf{S}$  的特征向量。将连续  $\mathcal{S}$  中的  $\mathcal{F}$  和  $\mathcal{D}^2$  分别替换为对应的离散傅里叶变换矩阵  $\mathbf{F}$  和  $\tilde{\mathcal{D}}^2$ ,可以实现离散矩阵  $\mathbf{S}$  的推导。设  $\Delta = 1/\sqrt{N}$ ,  $\tilde{\mathcal{D}}^2$  是利用  $\mathcal{D}^2 f(t)$  的如下二阶泰勒展开式求得,连续傅里叶变换的特征函数为连续的 Hermite-Gaussian 函数,其同时也是下面的二阶微分方程的特征函数

$$\mathcal{D}^2 f(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \frac{f(t-\Delta) - 2f(t) + f(t+\Delta)}{\Delta^2} + O(\Delta^2) \quad (5.150)$$

最后,  $\mathbf{S}$  可以实现对连续算子  $\mathcal{S}$  的  $O(\Delta^2)$  近似。换言之,从  $\mathbf{S}$  矩阵获得的特征向量被直接看作连续 Hermite-Gaussian 函数的近似。这是因为  $\mathbf{S}$  的特征向量是离散的 Mathieu 函数,而这个函数会随着  $N$  的增加逼近于 Hermite 函数。根据特征向量中符号的改变数目,我们可以确定所得到的特征向量所对应的连续 Hermite-Gaussian 函数,也就是确定相应的 Hermite-Gaussian 特征向量的阶数。如果特征向量具有  $k$  个符号改变,就认为该特征向量对应第  $k$  阶 Hermite-Gaussian 函数,其相应的特征值为  $\exp(-jk\alpha)$ 。对于不同的  $N$  值,特征值的分配规则归纳于表 5.2。

表 5.2 DFRFT 特征值分配规则

$N$	DFRFT 的特征值
$4m$	$\exp(-jk\alpha), k=0,1,2,\dots,4m-2,4m$
$4m+1$	$\exp(-jk\alpha), k=0,1,2,\dots,4m-1,4m$
$4m+2$	$\exp(-jk\alpha), k=0,1,2,\dots,4m,4m+2$
$4m+3$	$\exp(-jk\alpha), k=0,1,2,\dots,4m+1,4m+2$

Pei 等构造了  $\mathbf{F}$ -可交换矩阵  $\mathbf{S}$ ,并将  $\mathbf{S}$  的特征向量直接作为连续 Hermite-Gaussian 特征函数的离散近似。在文献[32]中,Pei 等构造了新的近似三对角交换矩阵  $\mathbf{T}$ , $\mathbf{T}$  的特征向量比  $\mathbf{S}$  的特征向量更加逼近连续 Hermite-Gaussian 特征函数。此外,指出可利用  $\mathbf{S}+k\mathbf{T}$  的特征向量来构造 DFRFT 的特征向量,进一步证明利用  $\mathbf{S}+15\mathbf{T}$  的特征向量构造的 DFRFT 效果更佳。

为了使得 DFRFT 更加精确,研究学者提出了多种  $\mathbf{F}$ -可交换矩阵,其目的都是进一步

提高式(5.150)二阶微分算子 $\mathcal{D}^2$ 的离散精度。相关的工作分为两类:第一类是用较小的采样间隔对 $\mathcal{D}^2$ 进行离散化,即 $\Delta=1/(r\sqrt{N})$  ( $r>1$ )<sup>[32]</sup>;另一类是在式(5.150)中,用高阶近似对 $\mathcal{D}^2 f(t)$ 进行泰勒展开。

接下来具体分析通过对 $\mathcal{D}^2 f(t)$ 进行高阶泰勒展开构造的 $\mathbf{F}$ -可交换矩阵,从而实现特征分解型 DFRFT。文献[33]中提到,任意的 $\mathbf{F}$ -可交换矩阵都具有如下表示

$$\mathbf{K} = \mathbf{M} + \mathbf{F}\mathbf{M}\mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^2\mathbf{M}\mathbf{F}^{-2} + \mathbf{F}^3\mathbf{M}\mathbf{F}^{-3} \quad (5.151)$$

通过特定的 $\mathbf{M}$ ,可以推导出具有 $O(\Delta^{2k})$ 近似度的矩阵 $\mathbf{K}$ ,其中 $\mathbf{M}$ 可由下式推导:

$$f'' = \left( \sum_{m=1}^k (-1)^{m-1} \frac{2[(m-1)!]^2 \delta^{2m}}{(2m)!} \right) \frac{f_k}{\Delta^2} + O(\Delta^{2k}) \quad (5.152)$$

其中, $\delta^2 f_k = f_{k-1} - 2f_k + f_{k+1}$ ,表示二阶中心差分算子。 $\mathbf{F}$ -可交换矩阵 $\mathbf{S}$ 是矩阵 $\mathbf{K}$ 的特殊情况,其具有 $O(\Delta^2)$ 近似度。虽然,矩阵 $\mathbf{K}$ 可以实现对于二阶微分算子高的近似度,但其仅限于 $2k+1 \leq N$ 成立。

Pei 等用一种新的 $\mathbf{F}$ -可交换矩阵结构克服了如上的上界限制,借助 $\mathbf{K}$ 对称型矩阵 $\mathbf{M}$ (具体定义见文献[34]),式(5.151)中的 $\mathbf{F}$ -可交换矩阵 $\mathbf{K}$ 可简化为

$$\mathbf{K} = \mathbf{M} + \mathbf{F}\mathbf{M}\mathbf{F}^{-1} \quad (5.153)$$

设置 $\mathbf{M}^2 = \tilde{\mathbf{D}}^2 (\tilde{\mathbf{D}}^2)$ 可由式(5.151)求得),可构造具有 $O(\Delta^{2k})$ 近似度的矩阵 $\mathbf{M}^{2k}$

$$\mathbf{M}^{2k} = \sum_{m=1}^k (-1)^{m-1} \frac{2[(m-1)!]^2}{(2m)!} (\mathbf{M}^2)^m \quad (5.154)$$

然而,当 $k$ 很大时,此过程需要很高的计算复杂度,同时对于任意阶近似都没有闭合形式解。

在文献[35]中,Serbes 提出了具有 $O(\Delta^\infty)$ 近似度的矩阵,且具有闭合形式。在式(5.154)中,当 $k \rightarrow \infty$ ,无穷阶差分矩阵的闭合形式表达式为

$$\mathbf{M}^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{M}^{2k} = -\arccos^2[(\mathbf{M}^2 + 2)/2] \quad (5.155)$$

因此,最终的 $\mathbf{F}$ -可交换矩阵为

$$\mathbf{K} = \mathbf{M}^\infty + \mathbf{F}\mathbf{M}^\infty \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{E} + \mathbf{F}\mathbf{E}\mathbf{F}^{-1} \quad (5.156)$$

其中, $\mathbf{E}$ 为如下对角矩阵:

$$\text{diag}(\mathbf{E}) = \begin{cases} -(2\pi n/N)^2, & 0 < n < \lfloor N/2 \rfloor \\ -(2\pi(N-n)/N)^2, & \lfloor N/2 \rfloor < n < N-1 \end{cases} \quad (5.157)$$

相比于其他的基于 $\mathbf{F}$ -可交换矩阵的 DFRFT,这种方法可得到极好的 $\mathbf{F}$ -可交换矩阵,并且可交换矩阵生成的特征向量最接近连续 Hermite-Gaussian 函数。因此我们称此方法为改进 FC-DFRFT。

上述特征分解型 DFRFT 具有相同的机理,它们的目的是构造 $\mathbf{F}$ -可交换矩阵来最大限度地近似连续算子 $\mathcal{S}$ ,其关系见图 5.19。接下来,在图 5.20 中,我们比较了矩形窗函数(当 $|t| \leq 2, x(t) = 1$ ,否则, $x(t) = 0$ )的连续 FRFT 与矩形窗函数相对应的离散信号的传统 FC-DFRFT<sup>[30]</sup>和改进 FC-DFRFT<sup>[35]</sup>。连续 FRFT 所得的结果用实线表示,DFRFT 所得的实验值用圆圈表示。实验结果表明,相比较于传统 FC-DFRFT 的实验结果,改进 FC-DFRFT 的变换结果更加匹配连续 FRFT 的结果。

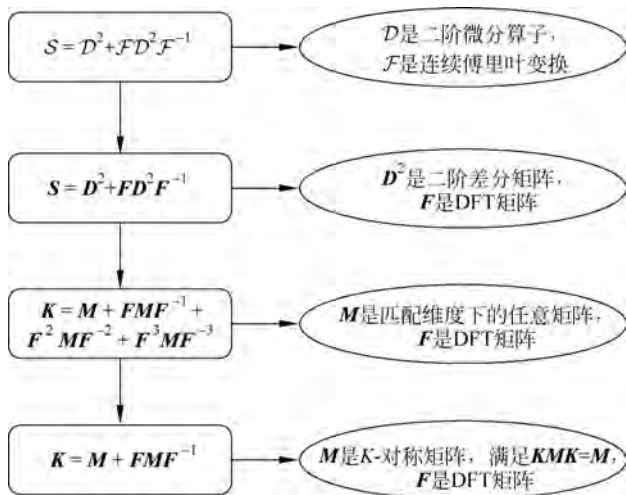


图 5.19 基于  $F$ -可交换矩阵的 DFRFT

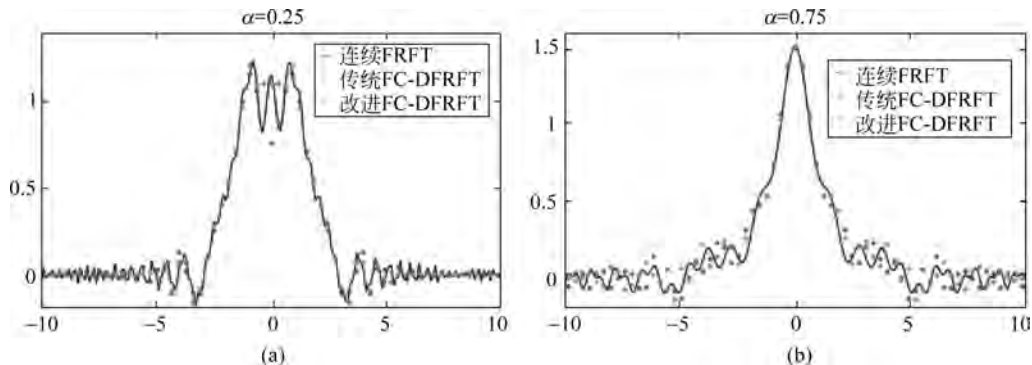


图 5.20 连续 FRFT 结果与传统 FC-DFRFT、改进 FC-DFRFT 结果的比较

(a) 矩形窗函数的  $\frac{2\alpha}{\pi} \Big|_{\alpha=0.25}$  阶 FRFT 与 DFRFT; (b) 矩形窗函数的  $\frac{2\alpha}{\pi} \Big|_{\alpha=0.75}$  阶 FRFT 与 DFRFT

### 5.2.6 基于采样 Hermite-Gaussian 函数的离散分数阶傅里叶变换

上述 DFRFT 直接利用  $F$ -可交换矩阵的特征向量作为离散傅里叶变换矩阵  $F$  的特征向量。接下来分析的 DFRFT 将  $F$ -可交换矩阵的特征向量作为一组完备的正交基, 并利用它们生成离散傅里叶变换矩阵  $F$  最终的特征向量。相关的工作分为两类: 基于正交化的方法和基于优化思想的方法。

文献[29]提出了一种新的求特征向量的方法。对于连续 Hermite-Gaussian 函数进行采样, 结果记为  $\{\bar{u}_m, m=1, 2, \dots, N\}$ 。通过证明可得  $\{\bar{u}_m\}$  为离散傅里叶变换矩阵  $F$  的近似特征向量, 即  $(-j)^m \bar{u}_m \approx F\bar{u}_m$ 。然后, 对  $\bar{u}_m$  进行修正得到严格的特征向量

$$\tilde{u}_m = \sum_{(m-k) \bmod 4 = 0} \langle \bar{u}_m, v_k \rangle v_k \quad (5.158)$$

其中,  $k = m \bmod 4$ ,  $\tilde{u}_m$  满足  $(-j)^m \tilde{u}_m \approx F\tilde{u}_m$ 。式(5.158)中的  $v_k$  是  $F$ -可交换矩阵  $S$  的特征向量, 其作为一组初始标准正交基, 生成严格的离散傅里叶变换矩阵  $F$  的特征向量。

根据表 5.2, 特征向量构成 4 个特征子空间  $\{\tilde{\mathbf{U}}_k, k=1, 2, 3, 4\}$ 。不同特征子空间的向量相互正交, 为了保证 DFRFT 的酉性与可加性, 需要对特征子空间内的向量进行正交化得到正交向量  $\{\hat{\mathbf{u}}_m\}$ 。这个过程需要用到两个方法: GSA 最小化 Hermite-Gaussian 函数的采样值与正交特征向量的误差来计算(从低阶到高阶); OPA 最小化 Hermite-Gaussian 函数构成的  $\bar{\mathbf{U}}_k$  的采样值与正交特征向量构成的子空间  $\hat{\mathbf{U}}_k$  的误差。最后, 特征分解型 DFRFT 表示为

$$\mathbf{F}^{2\alpha/\pi} = \hat{\mathbf{U}}\mathbf{D}^{2\alpha/\pi}\hat{\mathbf{U}}^T \quad (5.159)$$

此式由式(5.146)中将  $\mathbf{V}$  替换为  $\hat{\mathbf{U}}$  所得。基于 GSA 和 OPA 算法的 DFRFT 有很好的性能, 可以很好地近似连续 FRFT。

Hanna 提出序列 Sequential OPA (SOPA) 算法用来产生矩阵  $\mathbf{F}$  的近似 Hermite-Gaussian 特征向量<sup>[36]</sup>。根据谱展开理论, 矩阵  $\mathbf{F}$  可以表示为

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^4 \lambda_k \mathbf{P}_k \quad (5.160)$$

其中,  $\lambda_k$  为 DFT 矩阵的特征值;  $\mathbf{P}_k$  为在  $\mathbf{F}$  的第  $k$  个特征空间上的正交投影矩阵。对特征空间  $\mathbf{P}_k$  应用奇异值分解技术, 有

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^H, \quad k=1, 2, \dots, 4 \quad (5.161)$$

其中,  $\mathbf{V}_k$  为酉矩阵, 上标 H 表示复共轭转置。那么矩阵  $\mathbf{F}$  的第  $k$  个特征空间的标准正交基可以从  $\mathbf{V}_k$  的列中得到。然后, 类似文献[37]中提到的一样, 我们先得到 DFT 矩阵的 Hermite-Gaussian 特征向量  $\bar{\mathbf{u}}_m$ , 然后利用奇异值分解方法对得到的特征向量应用 GSA、OPA 和 SOPA 方法得到标准正交特征向量  $\hat{\mathbf{u}}_k$ 。这里, SOPA 是基于 OPA 提出的逐次估计的方法, 同时 SOPA 生成的特征向量与 GSA 所生成的特征向量是一致的。进一步考虑, GSA、OPA 和 SOPA 在不同初始特征向量情况下, 生成的最后特征向量是不变的。因此, 后续的关于生成不同的初始特征向量的研究对于最终的特征分解型 DFRFT 是没有影响的, 详见文献[38]。

下面介绍基于优化方法的特征分解型 DFRFT。Pei 等在限制  $\mathbf{F}\hat{\mathbf{u}}_m = (-j)^m \hat{\mathbf{u}}_m$  和  $\hat{\mathbf{u}}_{m_1} \hat{\mathbf{u}}_{m_2} = 0, (m_1 \neq m_2)$  条件下, 利用 Lagrange 乘法法生成特征向量  $\{\hat{\mathbf{u}}_m\}$ 。在计算过程中, 这两个限制条件通过实部和虚部分别执行。为了更有效地计算特征向量, 文献[39]使用一种直接的分批次的技术评估方法 (Direct and Batch Technique Evaluation, DBEOA)。实验证明 DBEOA 和 OPA 的性能是等价的, 其中 DBEOA 的计算复杂度更低。文献[40]致力于对 DBEOA 方法进行序列估计 (Sequential Operation of DBEOA, DSEOA)。可以证明, DSEOA、GSA 和 SOPA 的性能等价。此外, DSEOA 相较于 GSA 和 SOPA 具有更强的鲁棒性。文献[41]中提出了具有闭合形式解的 Hermite-Gaussian 函数型特征向量, 其中用到的正交化方法是 GSA, 其具有 IP-DFRFT 和传统 FC-DFRFT 相似的性能。

总的来说, 上述基于采样 Hermite-Gaussian 函数的特征分解型 DFRFT 的关系如图 5.21 所示。对于任意的初始特征向量, 由 GSA、OPA、DBEOA 和 DSEOA 生成的最后的特征向量都是相等的。和文献[29]提出的 DFRFT 相比较, 后续 DFRFT 为严格正交的离散傅里叶变换矩阵  $\mathbf{F}$  的特征向量的计算提供了不同的方法, 在如何更好地使特征向量逼近连续

Hermite-Gaussian 函数方面没有明显的提升。尽管最新的方法在计算复杂度方面有一定的减少,但是相比于整个离散变换  $O(N^2)$ ,其效果是甚微的。因此最后的计算复杂度仍然是  $O(N^2)$ 。

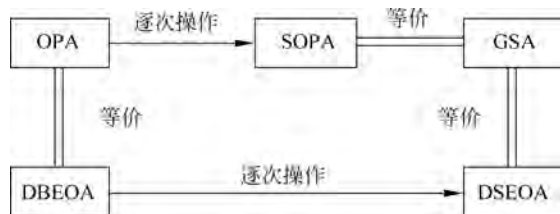


图 5.21 基于采样 Hermite-Gaussian 函数的 DFRFT 的正交方法之间的关系

上述基于采样 Hermite-Gaussian 函数的特征分解型 DFRFT 旨在解决两个问题:①通过对连续 Hermite-Gaussian 函数进行采样得到离散的向量为离散傅里叶变换矩阵  $F$  的近似特征向量;②将①中的近似特征向量转化为严格的特征向量并正交化,保证 DFRFT 具有酉性和可加性等性质。

至此,我们对主要的特征分解型 DFRFT 进行了分析。此类 DFRFT 满足理想 DFRFT 准则的(1)~(4)。由于特征向量具有正交性,因此准则(3)和(4)显然成立。此类 DFRFT 满足准则(1)和(2)。但是,特征分解型 DFRFT 具有较高的计算复杂度  $O(N^2)$ ,在高效性方面有待提升,即不满足准则(5)。

特征分解型 DFRFT 是目前为止唯一严格意义上的 DFRFT 定义,这种类型的 DFRFT 和连续 FRFT 非常接近,同时还具有称为“分数阶”的独特性质——旋转相加性。当 DFRFT 满足旋转相加性时, $p$  阶 DFRFT 的逆变换就是一  $p$  阶 DFRFT。因此,正变换和逆变换具有同样的表达式,只是相差一个参数,这样通过一个统一的计算机程序就可以容易地把分数阶傅里叶域的信号处理移植到时域。在没有实时性要求的前提下,采样型 DFRFT 的计算也可以通过特征分解型 DFRFT 完成。同时,这种特征分解型 DFRFT 还可以用于需要旋转相加性的地方,比如图像加密。这种类型的 DFRFT 的缺点是,它不能写成闭合形式,同时还缺少  $O(N\log N)$  的计算方法。

## 5.3 线性加权型离散分数阶傅里叶变换

### 5.3.1 基于离散傅里叶变换的线性组合

这种方法的思想十分简单,是研究人员最早探索出的一种 FRFT 快速算法。该算法利用 Taylor 级数展开和 Cayley-Hamilton 定理,将任意阶次的 DFRFT 表示为恒等算子、DFT、时间反转算子和 IDFT 的线性组合,即阶次依次为 0,1,2,3 的 DFRFT 的线性组合。该算法具有计算速度快的特点,且符合可逆性和旋转相加性。但是,其计算结果与连续 FRFT 有较大误差,因此使用率不高。下面简单介绍其原理。

前面讨论过,分数阶傅里叶算子是一个旋转算子,可以理解为传统傅里叶算子的分数阶幂。那么离散的 FRFT 与传统的离散傅里叶矩阵之间是什么关系呢?该算法直接给出如下式子:

$$\mathcal{F}^p[x] = \mathbf{W}^{\frac{2\alpha}{\pi}}(\mathbf{x}) \quad (5.162)$$

其中,  $\mathbf{W}$  是传统 DFT 矩阵,  $\mathbf{x}$  是信号,  $\mathcal{F}^p$  表示信号的  $p$  阶 FRFT,  $p = 2\alpha/\pi$ 。

从上式可以看出,  $\mathcal{F}^4 = \mathbf{W}^4 = \mathcal{I} = \mathbf{W}^0 = \mathbf{A}_0$ ,  $\mathcal{F}^1 = \mathbf{W}^1$ ,  $\mathcal{F}^2 = \mathbf{W}^2$ 。这些性质与连续情况下的性质相似。这几条性质可以将  $\mathcal{F}^p$  理解为  $(n, k)$  平面上的旋转算子。算子  $\mathcal{F}^p$  的 Taylor 级数展开可以写为

$$\mathcal{F}^p = a_0(\alpha) \mathcal{I} + a_1(\alpha) \mathbf{W} + a_2(\alpha) \mathbf{W}^2 + a_3(\alpha) \mathbf{W}^3 \quad (5.163)$$

我们知道, 算子  $\mathbf{W}$  是一个酉算子, 有  $N$  个正交归一化的特征向量  $\mathbf{v}_i$ , 其特征值分解可以写为

$$\mathbf{W} = \sum_{i \in N_1} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H - \sum_{i \in N_2} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H + \mathbf{j} \left( \sum_{i \in N_3} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H - \sum_{i \in N_4} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \right) \quad (5.164)$$

其中,  $N_1$  是属于  $\lambda = 1$  的特征向量索引集合,  $N_2, N_3, N_4$  是分别属于特征值为  $\lambda = -1, \lambda = \mathbf{j}, \lambda = -\mathbf{j}$  的特征向量索引集合。这里分数阶傅里叶算子  $\mathcal{F}^p$  是 DFT 矩阵  $\mathbf{W}$  的幂, 也是酉矩阵, 特征值分解可以写为

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^p = & \sum_{i \in N_1} e^{\mathbf{j}4k_1\alpha} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H - \sum_{i \in N_2} e^{\mathbf{j}(4k_2+2)\alpha} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H + \\ & \mathbf{j} \left( \sum_{i \in N_3} e^{\mathbf{j}(4k_3+1)\alpha} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H - \sum_{i \in N_4} e^{\mathbf{j}(4k_4-1)\alpha} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \right) \end{aligned} \quad (5.165)$$

其中,  $k_i \in \mathbb{Z}$ 。

这样得到的 DFRFT 算子具有以下几个性质。

- (1) 酉性:  $(\mathcal{F}^p)^H = (\mathcal{F}^p)^{-1} = \mathcal{F}^{-p}$
- (2) 角度可加性:  $\mathcal{F}^p \mathcal{F}^q = \mathcal{F}^{p+q}$
- (3) 周期性:  $\mathcal{F}^{p+4k} = \mathcal{F}^p, k \in \mathbb{Z}$

那么如何计算 DFRFT 呢? 直接计算需要对 DFT 矩阵  $\mathbf{W}$  进行特征值分解来得到分数阶算子  $\mathcal{F}^p$ , 对于较大的阶次来说这是不现实的。我们可以将分数阶傅里叶算子写成如下方程:

$$\mathcal{F}^p = \mathbf{T} \mathbf{\Lambda}^{\frac{2\alpha}{\pi}} \mathbf{T}^H = \sum_{i=0}^3 a_i(\alpha) \mathbf{W}^i \quad (5.166)$$

其中,  $\mathbf{T}$  是 DFT 矩阵  $\mathbf{W}$  的特征向量矩阵, 从而也是分数阶傅里叶算子  $\mathcal{F}^p$  的特征向量矩阵。从上式可以得到

$$\mathbf{\Lambda}^{\frac{2\alpha}{\pi}} = \sum_{i=0}^3 a_i(\alpha) \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{W}^i} \quad (5.167)$$

其中,  $\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{W}^i} = \mathbf{T}^H \mathbf{W}^i \mathbf{T}$  是一个对角矩阵。它是含 4 个未知变量  $a_i(\alpha), i = 0, 1, 2, 3$  的  $N$  个线性方程组, 其中只有 4 个是独立的。当  $N \leq 4$  时, 会有部分特征值漏掉。对  $N \geq 5$ , DFT 矩阵  $\mathbf{W}$  包含所有 4 个特征值, 并且这些系数独立于阶次  $N$ , 可以通过上面方程组算出。例如可以取  $k_i = 0, i = 1, 3, 4, 5$ , 取特征值  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = \mathbf{j}, \lambda_4 = -\mathbf{j}$ , 可以唯一确定  $a_i(\alpha), i = 0, 1, 2, 3$ 。

当  $N = 5$  时, 由方程组可以得到如下相互独立的线性方程组:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -j & -1 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0(\alpha) \\ a_1(\alpha) \\ a_2(\alpha) \\ a_3(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(j4k_1\alpha) \\ \exp[j2\alpha(2k_3+1)] \\ \exp[j\alpha(4k_4+1)] \\ \exp[j\alpha(4k_5-1)] \end{pmatrix} \quad (5.168)$$

该方程组的解(当  $k_i=0, i=1,3,4,5$  时)为

$$\begin{cases} a_0(\alpha) = \frac{1}{2} [1 + \exp(j\alpha)] \cos\alpha \\ a_1(\alpha) = \frac{1}{2} [1 - \exp(j\alpha)] \sin\alpha \\ a_2(\alpha) = -\frac{1}{2} [1 - \exp(j\alpha)] \cos\alpha \\ a_3(\alpha) = -\frac{1}{2} [1 + \exp(j\alpha)] \sin\alpha \end{cases} \quad (5.169)$$

这些系数满足上面讨论的几个性质,而且对于选定的  $k_i$  来说,它们是不同的。将系数代入式(5.166)可以得到  $\mathcal{F}^p$ 。众所周知,FFT 的计算复杂度为  $O(N\log N)$ ,所以这种算法的计算复杂度也为  $O(N\log N)$ 。

我们在讨论 FRFT 的数学定义时指出,FRFT 算子可以用传统傅里叶变换算子的特征函数的作用来定义。事实上,可以证明该算法得到的离散分数阶傅里叶算子  $\mathcal{F}^p$  并不满足连续 FRFT 算子的这种定义。

$$\mathcal{F}^p [\varphi_n] = \exp\left(-\frac{j\rho n\pi}{2}\right) \varphi_n \quad (5.170)$$

其中,  $\varphi_n$  是 DFT 矩阵的特征向量。有关证明方法这里不详细讨论。这里得到的 DFRFT 算子  $\mathcal{F}^p$  只满足当  $\alpha = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$  时的特征方程。因此,这种数字计算方法并不具备良好的理论基础,而且得到的结果与连续 FRFT 还有很大的偏差,因此得不到实际应用。

### 5.3.2 基于离散分数阶傅里叶变换的线性组合

前面的特征分解方法是基于 DFT 核矩阵的特征分解,并用 DFT 的 Hermite 特征向量来构建 DFRFT 的核矩阵。对于固定点数, DFT 的 Hermite 特征向量和 DFRFT 核矩阵可以事先计算出来,但是,输入信号与 DFRFT 核矩阵的乘积仍然需要很大的运算量,因此,特征分解方法的计算量是  $O(N^2)$ 。文献[42]在特征分解方法的基础上为了减小运算量提出了一种线性组合离散算法。它将线性组合的特定阶数从 0,1,2,3 改为从 0 开始依次间隔  $4/N$  的  $N$  个阶数,  $N$  为输入的离散样本数。利用 FRFT 的旋转相加性,该算法可以采用串行的方式实现,即前次变换的结果作为后次变换的输入,那么所需要的特定阶数离散变换的结果数目可以减少为 1 个,该算法便于超大规模集成电路(VLSI)的实现,但是它需要已知至少一个特定阶数的变换结果,且这些特定阶数依赖于输入信号的样本数目  $N$ 。

由于本算法是在特征分解方法的基础上得到的,因此这里为了方便重写特征分解方法的 DFRFT 计算公式。当计算点数  $N$  为奇数时,

$$\mathbf{X}_\alpha = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jk\alpha} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{x} \quad (5.171)$$



当计算点数  $N$  为偶数时,

$$\mathbf{X}_\alpha = \sum_{n=0}^{N-2} e^{-jk\alpha} \boldsymbol{\nu}_k \boldsymbol{\nu}_k^T \mathbf{x} + e^{-jN\alpha} \boldsymbol{\nu}_k \boldsymbol{\nu}_k^T \mathbf{x} \quad (5.172)$$

该方法的基本思想是通过一组特定角度(阶次)的 DFRFT 的加权和来计算任意角度(阶次)的 DFRFT。下面给出两个定理。

**定理 5.6:** 设  $\mathbf{x}$  表示一个  $N$  点离散信号( $N$  为奇数),则信号  $\mathbf{x}$  的  $\alpha$  角 DFRFT 可以用下式计算

$$\mathbf{X}_\alpha = \sum_{n=0}^{N-1} B_{n,\alpha} \mathbf{X}_{n\beta} \quad (5.173)$$

其中,  $\beta = 2\pi/N$ 。加权系数  $B_{n,\alpha}$  表示为

$$B_{n,\alpha} = \text{IDFT} \{ e^{-jk\alpha} \}_{k=0,1,2,\dots,N-1} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jk\alpha} e^{j(\frac{2\pi}{N})nk} \quad (5.174)$$

**证明:** 因为  $B_{n,\alpha}$  等于  $\{ e^{-jk\alpha} \}_{k=0,1,2,\dots,N-1}$  的 IDFT 变换,因此,  $B_{n,\alpha}$  的 DFT 变换就等于  $\{ e^{-jk\alpha} \}_{k=0,1,2,\dots,N-1}$ , 即

$$e^{-jk\alpha} = \sum_{n=0}^{N-1} B_{n,\alpha} e^{-j\beta nk} = \sum_{n=0}^{N-1} B_{n,\alpha} e^{-j(\frac{2\pi}{N})nk} \quad (5.175)$$

因此,特征分解方法的定义式可以转换为

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_\alpha &= \sum_{k=0}^{N-1} e^{-jk\alpha} \boldsymbol{\nu}_k \boldsymbol{\nu}_k^T \mathbf{x} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left( \sum_{n=0}^{N-1} B_{n,\alpha} e^{-j(\frac{2\pi}{N})nk} \right) \boldsymbol{\nu}_k \boldsymbol{\nu}_k^T \mathbf{x} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} B_{n,\alpha} \mathbf{X}_{n\beta} \end{aligned} \quad (5.176)$$

$B_{n,\alpha}$  可以通过求  $\{ e^{-jk\alpha} \}_{k=0,1,2,\dots,N-1}$  的 IDFT 计算得到。加权系数  $B_{n,\alpha}$  的闭式解为

$$B_{n,\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j(N-1)(\alpha-n\beta)}}{1 - e^{-j(\alpha-n\beta)}}, & \alpha \neq n\beta \\ \delta(n-k), & \alpha = n\beta \end{cases} \quad (5.177)$$

总之,对于奇数点 DFRFT 的计算可以通过求一组特定角度的 DFRFT 的加权和得到,特定角度是  $(2\pi/N)$  的整数倍,加权系数可以通过求 IDFT 得到。当信号点数为偶数时,DFRFT 特征值的分布会有一个跳跃,以上的计算方法不再成立,因此,需要针对偶数情况设计新的计算方法。

**定理 5.7:** 设  $\mathbf{x}$  表示一个  $N$  点离散信号( $N$  为偶数),则信号  $\mathbf{x}$  的  $\alpha$  角 DFRFT 可以用下式计算

$$\mathbf{X}_\alpha = \sum_{n=0}^N B_{n,\alpha} \mathbf{X}_{n\beta} \quad (5.178)$$

其中,  $\beta = 2\pi/(N+1)$ , 加权系数表示为

$$B_{n,\alpha} = \text{IDFT} \{ e^{-jk\alpha} \}_{k=0,1,2,\dots,N} = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N e^{-jk\alpha} e^{j(\frac{2\pi}{N+1})nk} \quad (5.179)$$

**证明:** 定理 5.7 和定理 5.6 相比存在两个不同点: ①定理 5.7 是  $N+1$  项相加, 定理 5.6 是  $N$  项相加; ②定理 5.6 的特定角度是  $2\pi/N$  的整数倍, 定理 5.7 的特定角度是  $2\pi/(N+1)$  的整数倍。采用与定理 5.6 类似的方法。将序列  $\{e^{-jk\alpha}\}_{k=0,1,2,\dots,N}$  表示为  $B_{n,\alpha}$  的 DFT, 即

$$e^{-jk\alpha} = \sum_{n=0}^N B_{n,\alpha} e^{-j\left(\frac{2\pi}{N+1}\right)nk} \quad (5.180)$$

将其代入式(5.106)得

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_\alpha &= \sum_{k=0}^{N-2} e^{-jk\alpha} \boldsymbol{\nu}_k \boldsymbol{\nu}_k^T \mathbf{x} + e^{-jN\alpha} \boldsymbol{\nu}_N \boldsymbol{\nu}_N^T \mathbf{x} \\ &= \sum_{k=0}^{N-2} \sum_{n=0}^N B_{n,\alpha} e^{-j\left(\frac{2\pi}{N+1}\right)kn} \boldsymbol{\nu}_k \boldsymbol{\nu}_k^T \mathbf{x} + \sum_{n=0}^N B_{n,\alpha} e^{-j\left(\frac{2\pi}{N+1}\right)Nn} \boldsymbol{\nu}_N \boldsymbol{\nu}_N^T \mathbf{x} \\ &= \sum_{n=0}^N B_{n,\alpha} \mathbf{X}_{n\beta} \end{aligned} \quad (5.181)$$

与定理 5.6 类似, 也可以求得加权系数  $B_{n,\alpha}$  的闭式解

$$B_{n,\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{N+1} \frac{1 - e^{-jN(\alpha-n\beta)}}{1 - e^{-j(\alpha-n\beta)}}, & \alpha \neq n\beta \\ \delta(n-k), & \alpha = n\beta \end{cases} \quad (5.182)$$

从定理 5.6 和定理 5.7 可以得到结论, 对于任意角度的 DFRFT 都可以表示为一组特定角度的 DFRFT 的加权和, 当信号点数  $N$  为奇数时, 特定角度为  $2\pi/N$  的整数倍; 当信号点数  $N$  为偶数时, 特定角度为  $2\pi/(N+1)$  的整数倍。不论是奇数还是偶数, 加权系数都可以通过 IDFT 运算获得。但是对于奇数需要计算  $N$  点 IDFT, 对于偶数需要计算  $N+1$  点 IDFT。可以看出不论是奇数还是偶数, 求加权系数都需要计算奇数点的 IDFT。因此, 通常计算 2 的幂次方点数的 FFT 算法不适合, 只能使用针对质数长度的 Winograd FFT 算法。

利用 DFRFT 的旋转相加性, 以上线性组合方法可以通过串行方法实现。以奇数点为例, 式(5.167)可以改写成如下形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_\alpha &= B_{N-1,\alpha} F^{(N-1)2\beta/\pi} \mathbf{x} + B_{N-2,\alpha} F^{(N-2)2\beta/\pi} \mathbf{x} + \dots + B_{1,\alpha} F^{2\beta/\pi} \mathbf{x} + B_{0,\alpha} \mathbf{x} \\ &= F^{2\beta/\pi} (\dots F^{2\beta/\pi} (F^{2\beta/\pi} (B_{N-1,\alpha} \mathbf{X}_\beta + B_{N-2,\alpha} \mathbf{x}) + B_{N-3,\alpha} \mathbf{x}) + \\ &\quad B_{N-4,\alpha} \mathbf{x} + \dots) + B_{0,\alpha} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (5.183)$$

上式表明, 任意角度的 DFRFT 可以仅通过一个特定角度的 DFRFT 来实现。如果能够快速计算出一个特定角度的 DFRFT, 就可以利用串行实现方法快速计算出任意角度的 DFRFT。另外, 由于串行实现方法具有规则的计算结构, 因此适合于 VLSI 实现。

## 5.4 特殊的离散分数阶傅里叶变换

### 5.4.1 Zoom-FRFT

以上介绍的 FRFT 分解型算法是从连续信号  $f(x)$  的  $N$  个均匀采样出发, 最后得到它的 FRFT  $f_\alpha(x)$  在整个分数阶谱区间上的  $N$  点等间隔采样值, 因此所计算的是在分数阶域

上的具有固定分辨率的全局谱。然而在许多实际应用中,人们不仅要了解信号在 FRFT 全局谱上的分布情况,更对分数阶域上的某段局部谱的细节感兴趣,因此要求 FRFT 算法应具有对局部谱进行高分辨分析的能力。针对此问题,文献[43]提出一种 FRFT 高分辨计算方法,这种算法可根据需要灵活选择变换输出的局部谱区域和分辨率,当计算的分辨率很高即采样间隔很小时,可得到局部谱的精细结构。在保持计算量不变的条件下,这种算法的作用就好像摄影中的变焦镜头,能够根据需要方便地调整谱的显示范围和分辨率,因此,文献[43]将这种 FRFT 的高分辨计算方法称为 Zoom-FRFT。

下面给出这种高分辨算法的推导过程。由 5.1.1 节 Ozaktas 采样型算法可以看出,第二种分解方法包含了两个离散化步骤:第一步利用香农内插公式对时域变量离散化;第二步对分数阶傅里叶域变量离散化。高分辨算法在第二步采用了一种更加灵活的离散化方法。假定要计算 FRFT 在局部谱区间  $[u_1, u_2]$  上的  $M$  点等间隔取样值,  $u_1, u_2$  和  $M$  的取值任意,将分数阶傅里叶域变量离散化为  $u = u_0 + m\Delta I$ ,  $-M/2 \leq m \leq M/2$ , 其中  $u_0 = (u_2 - u_1)/2$  表示区间中点,  $\Delta I = (u_2 - u_1)/(M-1)$  表示采样间隔。然后将其代入式(5.23), 得到

$$X_p(u_0 + m\Delta I) = \frac{A_\alpha}{2\Delta x} e^{j\pi\gamma(u_0 + m\Delta I)^2} \cdot \sum_{n=-N}^N e^{j\pi\beta\frac{\Delta I}{2\Delta x}(-2mn)} \left[ e^{-j2\pi\beta u_0\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)} e^{j\pi\gamma\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2} x\left(\frac{n}{2\Delta x}\right) \right] \quad (5.184)$$

其中,  $\gamma, \beta, \Delta x$  定义见 5.1.1 节。将恒等式  $-2mn = (m-n)^2 - m^2 - n^2$  代入上式, 最后整理得到

$$X_p(u_0 + m\Delta I) = \frac{A_\alpha}{2\Delta x} e^{j\pi\gamma(u_0 + m\Delta I)^2} e^{-j\pi\beta\frac{1}{2\Delta I\Delta x}(m\Delta I)^2} \sum_{n=-N}^N e^{j2\pi\beta\Delta I\Delta x\left(\frac{m-n}{2\Delta x}\right)^2} \cdot \left[ e^{j\pi\left[-2\beta x_i\left(\frac{n}{2\Delta x}\right) + (\gamma - 2\beta\Delta I\Delta x)\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2\right]} x\left(\frac{n}{2\Delta x}\right) \right] \quad (5.185)$$

式(5.185)的计算要求直接确定  $u_0$  和  $\Delta I$  两个参数的取值,这在编程实现时很不方便,我们更愿意使用它们的以  $\Delta x$  为基准的相对取值。为此我们引入了两个相对因子,一个是“平移因子” $\lambda = u_0/\Delta x$ ,  $-0.5 \leq \lambda \leq 0.5$ , 它表示局部谱中心  $u_0$  在整个谱范围  $[-\Delta x/2, \Delta x/2]$  中的相对位置;另一个是“变焦因子” $P = 1/(2\Delta I\Delta x)$ , 它表示局部谱的分辨率  $\Delta I$  相对于标准分辨率  $1/(2\Delta x)$  的放大倍数,一般取  $P$  为大于 1 的自然数。将关系式  $u_0 = \lambda\Delta x$  和  $\Delta I = 1/(2P\Delta x)$  代入式(5.185)得到

$$X_p\left(\lambda\Delta x + \frac{m}{2P\Delta x}\right) = \frac{A_\alpha}{2\Delta x} e^{j\pi\gamma\Delta x^2\lambda^2} e^{j2\pi\gamma\lambda\Delta x\left(\frac{m}{2P\Delta x}\right)} e^{j\pi(\gamma - P\beta)\left(\frac{m}{2P\Delta x}\right)^2} \cdot \sum_{n=-N}^N e^{j\pi\frac{1}{P}\beta\left(\frac{m-n}{2\Delta x}\right)^2} \left[ e^{j\pi\left(\gamma - \frac{1}{P}\beta\right)\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2} e^{-j2\pi\beta\lambda\Delta x\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)} x\left(\frac{n}{2\Delta x}\right) \right] \quad (5.186)$$

若记  $\bar{x}[n] = x\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)$ ,  $\bar{X}_{\alpha,\lambda,P}[m] = F^\alpha[x]\left(\lambda\Delta x + \frac{m}{2P\Delta x}\right)$ , 则式(5.186)可简化为

$$\bar{X}_{\alpha,\lambda,P}[m] = \frac{A_\alpha e^{j\pi\gamma N\lambda^2}}{2\sqrt{N}} e^{j\pi\left(\frac{\gamma\lambda}{P}\right)m} e^{j\pi\left(\frac{\gamma - P\beta}{4P^2N}\right)m^2} \sum_{n=-N}^N e^{j\pi\left(\frac{\beta}{4PN}\right)(m-n)^2} \cdot$$

$$\left[ e^{j\pi \left( \frac{p\gamma - \beta}{4PN} \right) n^2} e^{-j\pi(\beta)n} \bar{x}[n] \right] \quad (5.187)$$

上式中的求和部分为离散卷积形式,因此可以利用 FFT 来实现快速的数值计算。以上是当  $0.5 \leq |p| \leq 1.5$  时的计算公式,同 5.1.1 节一样可得当  $0 \leq |p| \leq 0.5$  或  $1.5 \leq |p| \leq 2$  时的计算公式。

为了直观展示利用高分辨算法实现 FRFT 局部谱高分辨分析的效果,我们通过几个仿真实例进行分析。第一个例子我们考虑 chirp 信号,假定信号含有调频率相同而中心频率不同的三个 chirp 分量,可写成如下形式:

$$x(t) = \sum_{i=1}^3 A_i \exp(j2\pi f_i t + j\pi \mu t^2) \text{rect}(t/\Delta x) \quad (5.188)$$

其中,信号幅度分别为  $A_1=2$ ,  $A_2=1$ ,  $A_3=1$ ,中心频率分别为  $f_1=2$ ,  $f_2=-1$ ,  $f_3=-0.8$ ,调频率为  $\mu \approx 0.3$ ,归一化宽度为  $\Delta x=10$ ,以  $1/\Delta x=0.1$  为间隔采样,得到  $N=100$  点信号样本,图 5.22 给出了信号的时域波形。由于 chirp 信号在与调频率相垂直的分数阶傅里叶域上具有最好的能量聚集性,因此可利用 FRFT 进行 chirp 信号的检测和参数估计,对应的 FRFT 阶次应为  $p=-0.8145$ 。我们首先利用 FRFT 标准算法计算出  $X_p(u)$  在全局区间  $[-5,5]$  内以  $1/\Delta x=0.1$  为间隔采样的  $N=100$  点样本输出,如图 5.23 所示,从中可粗略地观察到信号在整个分数阶傅里叶域上的谱分布情况。

图 5.23 中 chirp 信号的能量主要集中在  $[-2.5, -1.5]$  和  $[0.5, 1.5]$  两个窄带区域。由于采样间隔较大,显示的信号波形很粗糙。为了仔细观察局部谱内的波形细节,我们利用窄带高分辨 FRFT 算法将分辨率提高 10 倍来显示局部谱的波形,如图 5.24 和图 5.25 所示。图中的虚线表示图 5.23 中的标准分辨率谱线,实线为高分辨率谱线,它的谱分辨率比标准分辨率提高了 10 倍。

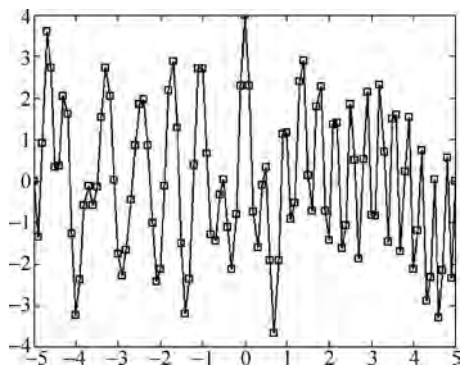


图 5.22 信号的时域波形

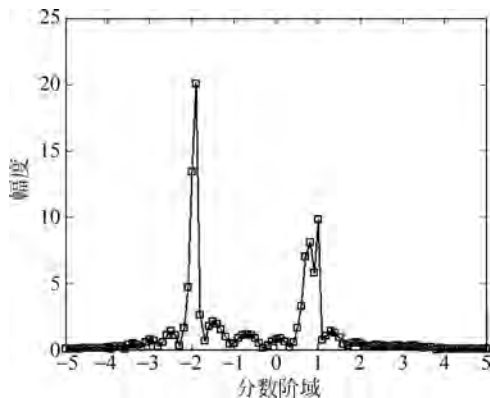


图 5.23 用 FRFT 标准算法得到的全局谱

上面的仿真实例充分展示了高分辨算法带来的优异的谱分析性能。通过高分辨分析可以使准确地观察到局部谱的每个细节,如主瓣和旁瓣的幅度、位置、宽度和过零点位置等,而标准谱线由于分辨率不够而损失掉很多细节信息。不仅如此,FRFT 高分辨算法还可以为 chirp 信号的参数估计带来好处。在基于 FRFT 的 chirp 信号检测与参数估计中,一般通过检测谱线峰值点的位置来估计 chirp 信号中心频率。由图 5.24、图 5.25 可以看出,标准谱线(虚线)的间隔较宽,很难正好采到连续谱的峰值点,这样,当以低分辨率的谱线峰值

位置来估计 chirp 信号的中心频率参数时,会造成较大的误差;反之,高分辨谱线(实线)很密,它的峰值点与连续谱的峰值位置误差很小,这样可大大提高 chirp 信号中心频率的估计精度。

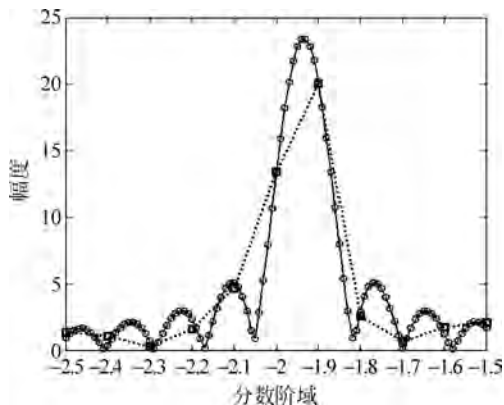


图 5.24 区间  $[-2.5, -1.5]$  的高分辨局部谱

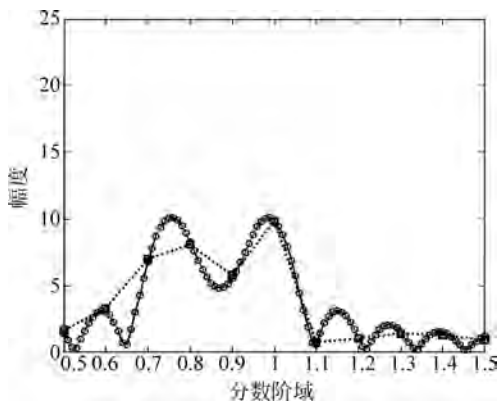


图 5.25 区间  $[0.5, 1.5]$  的高分辨局部谱

#### 5.4.2 单点快速计算

Zoom-FRFT 算法可实现任意 FRFT 局部谱的高分辨分析,但在实际应用中仍然存在一些局限,主要体现在以下几方面:①Zoom-FRFT 在输入/输出点数相差不大时具有较高的运算效率,当输出点数很少时运算效率低,也就是说,Zoom-FRFT 算法并不适合输出点数很小的场合;②虽然 Zoom-FRFT 可以根据需要灵活选择分辨率,但是分数阶谱的采样间隔只能是均匀的,若需要输出分数阶谱的若干非均匀采样值,则 Zoom-FRFT 无法实现;③在某些 FRFT 应用中,可能需要计算分数阶谱上的任意一个单采样点的值。为了更加有效地进行 FRFT 的数值计算,文献[5]又提出了一种 FRFT 单点快速计算方法。利用 FRFT 单点快速算法,我们既可以解决上述的非均匀采样点输出的问题,也可以提高少量点输出时的计算效率;同时,在应用中还可以和 Zoom-FRFT 配合使用,在运用 Zoom-FRFT 计算分数阶谱之后,再运用单点的计算方法对某个感兴趣的点单独计算。因此,这种 FRFT 单点的计算方法具有较好的实际应用价值。

由于 FRFT 单点计算中利用了 Horner 运算以实现快速计算,先对其做一简要介绍。Horner 运算是针对幂次多项式的求解而提出的一种基于循环迭代的计算方法,它实际上可以理解为一种幂次多项式从后向前逐次累加运算的过程。设一个幂次多项式表示为

$$B(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_M z^M \quad (5.189)$$

则 Horner 运算的递推过程可以表示为

<pre>Initialize S = 0 For i = M, M - 1, ..., 0 do     S = b<sub>i</sub> + Sz</pre>	(5.190)
--	---------

具体的计算过程为

设初始值为  $S=0$

当  $i=M$  时,

$$S = b_M$$

$$\begin{aligned} \text{当 } i=M-1 \text{ 时,} & \quad S=b_{M-1}+b_M z \\ \text{当 } i=M-2 \text{ 时,} & \quad S=b_{M-2}+b_{M-1} z+b_M z^2 \\ \dots\dots \end{aligned}$$

$$\text{当 } i=0 \text{ 时,} \quad S=b_0+b_1 z+b_2 z^2+\dots+b_{M-1} z^{M-1}+b_M z^M$$

当循环结束后,  $S$  值就是多项式的最终计算结果。可以看出, Horner 迭代算法的运算效率较高。因为运用直接计算的方法计算多项式, 需要  $M(M-1)/2$  次乘法和  $M-1$  次加法运算; 而运用 Horner 方法计算多项式, 只需要  $M$  次乘法和  $M-1$  次加法运算。Horner 算法已经应用于傅里叶变换的单采样点计算中<sup>[44]</sup>。

下面介绍 FRFT 单点快速计算的原理。其主要思想是将 5.1.4 节式(5.22)转化成如式(5.189)所示的幂次多项式形式, 然后利用 Horner 迭代算法进行快速计算。

先考虑一般的任意非零单点计算, 再考虑零点计算的特殊情况。若计算 FRFT 在任意非零点  $u_i \neq 0$  处的值, 将  $u = u_i$  代入式(5.22)得到

$$X_p(u_i) = \frac{A_\alpha}{2\Delta x} \exp(j\pi\gamma u_i^2) \sum_{n=-N}^N \exp(-j2\pi\beta u_i \left(\frac{n}{2\Delta x}\right)) \exp(j\pi\gamma \left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2) x\left(\frac{n}{2\Delta x}\right) \quad (5.191)$$

令

$$b_n = \exp(j\pi\gamma \left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2) x\left(\frac{n}{2\Delta x}\right) \quad (5.192)$$

$$z_i = \exp(-j \frac{\pi\beta}{\Delta x} u_i) \quad (5.193)$$

则式(5.191)的求和部分可表示为

$$B(z_i) = \sum_{n=-N}^N b_n z_i^n = z_i^{-N} (b_{-N} + b_{-N+1} z_i + \dots + b_0 z_i^N + b_1 z_i^{N+1} + \dots + b_N z_i^{2N}) \quad (5.194)$$

利用 Horner 迭代运算过程式(5.184)可快速计算出  $B(z_i)$ 。最后得到 FRFT 在分数傅里叶域  $u_i$  点处的结果为

$$X_p(u_i) = \frac{A_\alpha}{2\Delta x} \exp(j\pi\gamma u_i^2) B(z_i) = \frac{A_\alpha}{2\Delta x} \exp(j\pi\gamma u_i^2) B\left(\exp(j \frac{\pi\beta}{\Delta x} u_i)\right) \quad (5.195)$$

但是还有一个重要问题需要考虑, 即在计算多项式系数  $b_n$  时需要先算出序列

$$g_n = \exp(j\pi\gamma \left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2), \quad -N \leq n \leq N \quad (5.196)$$

若按式(5.196)直接计算序列  $g_n$ , 对每个点都要进行复指数运算, 生成序列  $g_n$  的计算量很大, 并且因为  $g_n$  并非固定序列, 它会随着  $\gamma = \cot\alpha$  改变, 因此无法将  $g_n$  事先计算好并预存在存储器中。为减小计算量, 可以采用递推的方法。因为  $g_n$  是偶序列, 只需计算其在  $0 \leq n \leq N$  范围的取值即可。生成序列  $g_n$  的递推公式推导如下: 若令  $D_n =$

$\exp(j \frac{\pi\gamma}{4\Delta x^2} (2n+1))$ , 有递推公式

$$g_{n+1} = \exp(j \frac{\pi\gamma}{4\Delta x^2} (n+1)^2) = g_n D_n \quad (5.197)$$

其中,  $g_0 = 1$ 。再令  $W = \exp\left(j \frac{\pi\gamma}{2\Delta x^2}\right)$ , 有递推公式

$$D_{n+1} = \exp\left(j \frac{\pi\gamma}{4\Delta x^2} (2(n+1)+1)\right) = D_n W \quad (5.198)$$

其中,  $D_0 = \exp\left(j \frac{\pi\gamma}{4\Delta x^2}\right)$ 。这样, 只要计算出  $D_0$  和  $W$  的值, 就可以先由递推公式(5.192)得到  $D_n$  序列, 再由式(5.197)得到  $g_n$  序列。

以上为任意非零点  $u_i \neq 0$  的计算方法, 若计算 FRFT 在零点的值, 则式(5.191)简化为

$$X_p(0) = \frac{A_a}{2\Delta x} \sum_{n=-N}^N \exp\left(j\pi\gamma \left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2\right) x\left(\frac{n}{2\Delta x}\right) = \frac{A_a}{2\Delta x} \sum_{n=-N}^N g_n x\left(\frac{n}{2\Delta x}\right) \quad (5.199)$$

可见, 零点计算不需要 Horner 迭代运算, 只要利用递推方法计算出  $g_n$  序列, 代入式(5.199)即可。

下面通过仿真实例对上述的 FRFT 单点计算方法进行分析。我们将利用 FRFT 单点快速算法来计算信号的分数阶傅里叶谱。为了方便与 Ozaktas 采样型算法所计算的分数阶傅里叶谱比较, 我们在仿真中通过对相应频点的重复计算, 得到 FRFT 的  $N$  点输出。信号则选取两种典型的信号: chirp 信号和矩形信号。分别计算其在不同阶次的变换结果。

#### 例 1: chirp 信号

从以上仿真可以看出, FRFT 的单点快速算法在输出数值较大时, 它与分解型算法所得到的结果的计算误差很小, 如图 5.26(c) 和图 5.27(c) 所示。当输出数值较小时, 单点计算的结果与分解型算法所得到的结果有一定误差, 如图 5.26(b) 和图 5.27(b) 所示。这主要是因为单点快速算法应用了 Horner 迭代算法, 会产生一定的迭代误差积累, 当输出数值较小时, 积累误差比较明显。因为在实际应用中, 我们运用单点快速算法主要是计算一些峰值点的数值, 因此在实际应用中, 因为迭代所产生的误差可以忽略。另外, 利用单点算法进行 FRFT 的谱计算时, 当同样输出  $N$  点时, 它的计算量与分解型算法的计算量相当。

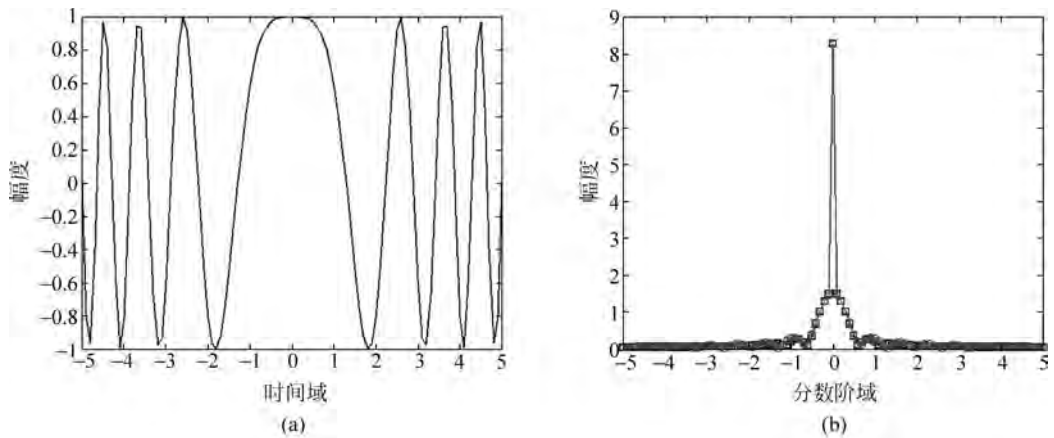


图 5.26 chirp 信号的 FRFT, 阶次为  $p = -0.81$

(a) chirp 信号 ( $\mu = 0.3$ ); (b) FRFT 全局谱; (c) FRFT 局部谱; (d) FRFT 局部谱

圆圈为单点计算结果, 方形为 Ozaktas 采样型算法的计算结果

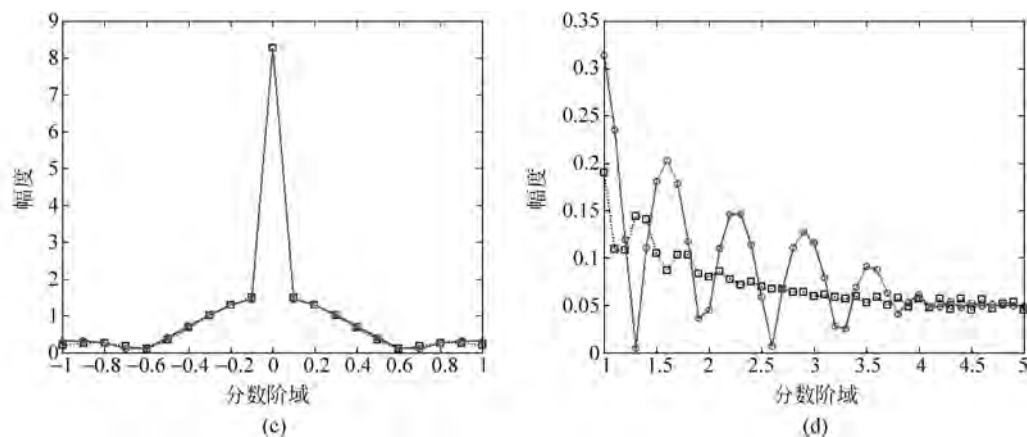


图 5.26 (续)

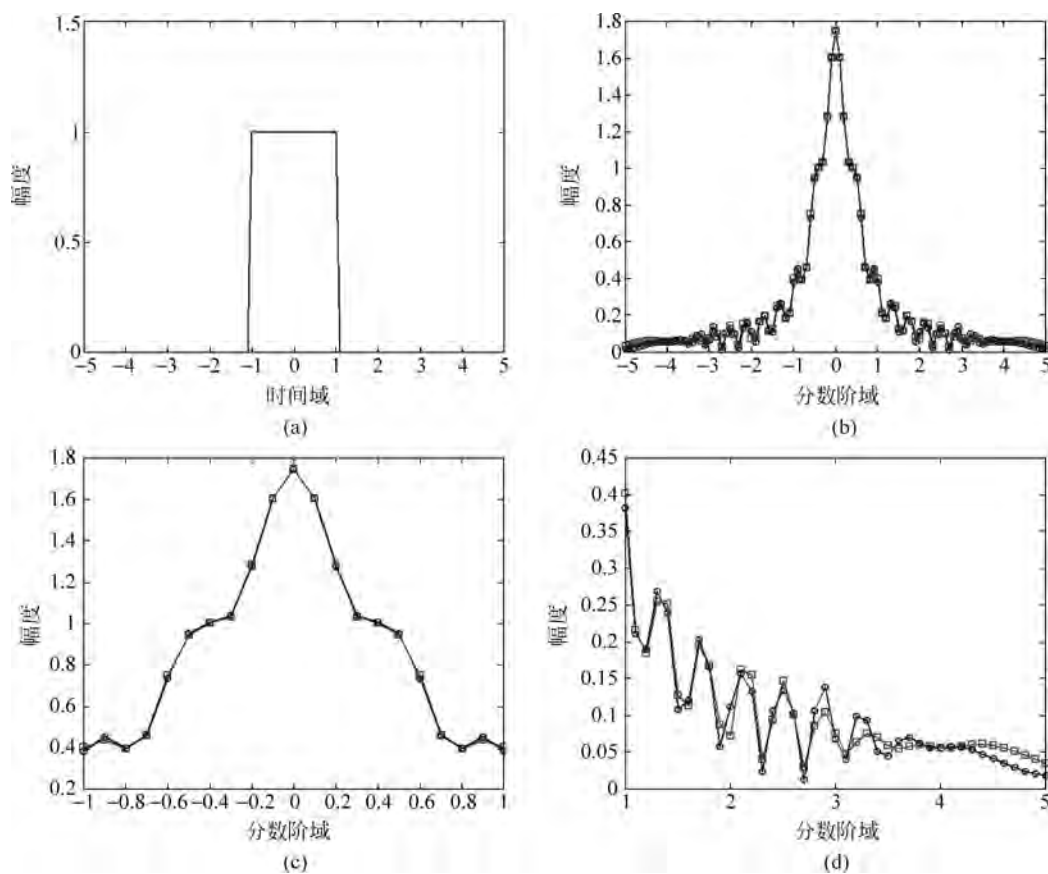


图 5.27 矩形信号的 FRFT, 阶次  $p=0.6$

(a) 矩形信号; (b) FRFT 全局谱 $[-5,5]$ ; (c) FRFT 局部谱 $[-1,1]$ ; (d) FRFT 局部谱 $[1,1.5]$

圆圈为单点计算结果, 方形为 Ozaktas 采样型算法的计算结果

### 例 2: 矩形信号





教学视频

## 5.5 其他离散分数阶变换

由于 DFT 和其他酉变换有着密切的关系,比如离散余弦变换、离散 Hadamard 变换、离散 Hartley 变换等,因此可以得到这些离散变换的分数阶变换形式。

许多离散变换的“分数阶”形式都是基于前面所讲的特征分解方法,因为这种方法使得所得到的分数阶变换具有旋转相加性,并且当变换阶数等于 1 时退化为原来的变换。这些离散变换分数阶化的统一方法是:首先研究离散变换的特征结构,以得到这些变换的特征值和特征向量,然后利用特征分解结构得到相应的分数阶形式。一旦得到了  $N \times N$  的变换矩阵  $\mathbf{K}$  的特征值  $\lambda_n$  和特征向量  $\mathbf{u}_n$ ,那么分数阶变换矩阵  $\mathbf{K}^p$  可以表示为

$$\mathbf{K}^p = \mathbf{U} \mathbf{\Delta}^p \mathbf{U}^H = \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_n^p \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^H \quad (5.200)$$

其中,矩阵  $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{\Delta}$  由标准正交特征向量  $\mathbf{u}_n$  和特征值的分数阶幂  $\lambda_n^p$  组成。注意,这里我们使用共轭转置而不是转置,是因为并不是所有变换的特征向量都是实的。

Pei 在文献[45]中引入了离散分数阶 Hartley 变换(DFRHT),并讨论了 DFRHT 的特征结构:其特征值为  $\{1, -1\}$ ,特征向量与  $\mathbf{F}$  的特征向量一样,都是 Hermite-Gaussian 特征向量。

Pei 在文献[46]中引入了离散分数阶 Hadamard 变换。其特征值为  $\{1, -1\}$ ,其特征向量通过从最初的两个特征向量利用回归算法精确地计算从阶数 2 一直到阶数  $2^n$  的 Hadamard 特征向量。

Pei 和 Cariolaro 分别从不同角度定义了离散分数阶余弦和正弦变换<sup>[47-48]</sup>。Pei 选择 DCT-I 和 DST-I 来定义离散分数阶余弦-I 变换(DFRCT-I)和离散分数阶正弦-I 变换(DFRST-I)<sup>[47]</sup>。DCT-I 和 DST-I 核矩阵的特征值为  $\{1, -1\}$ ,并且它们的特征向量可以通过 DFT 的特征向量的计算获得。对于  $N$  点的 DCT-I 特征向量  $\mathbf{u}$ ,其可以写为

$$\mathbf{u} = [v_0, \sqrt{2}v_1, \dots, \sqrt{2}v_{N-2}, v_{N-1}]^T \quad (5.201)$$

其中,  $\mathbf{v} = [v_0, v_1, \dots, v_{N-2}, v_{N-1}, v_{N-2}, \dots, v_1]^T$  是  $(2N-2)$  点的 DFT 矩阵的偶特征向量。

$N$  点的 DST-I 特征向量  $\mathbf{u}$  可以写为

$$\mathbf{u} = \sqrt{2} [v_1, v_2, \dots, v_{N-1}, v_N]^T \quad (5.202)$$

其中,  $\mathbf{v} = [0, v_0, v_1, \dots, v_N, 0, -v_N, -v_{N-1}, \dots, -v_1]^T$  是  $2(N+1)$  点 DFT 矩阵的奇特征向量。

不同于文献[47]中定义的 DFRCT, Cariolaro 从 DCT-II 中得到了实值的 DFRCT-II。DCT-II 的特征值对于不同的  $N$  是不同的,特征值的星座图是象限对称的<sup>[48]</sup>。因为 DCT-II 的特征值是不同的,所以它的特征向量是相互正交的,也就可以直接从 DCT-II 矩阵计算其特征向量。DFRCT 和 DFRST 可以用于计算偶信号和奇信号的 DFRFT,还可以用于数字水印<sup>[47,49]</sup>。读者若想对 DFRCT、DFRST 和分数阶离散广义和偏移 DFT, DHT, DCT-IV 和 DST-IV 有深入研究,可以参见文献[49-51]。

其他的离散分数阶变换可以参见文献[52-54]。在文献[30]中,基于 DFRFT 的特征分解定义了离散分数阶 Hilbert 变换。在文献[53]中定义了分数阶随机变换,这个定义同样

可以写作式(5.194)的形式,只是矩阵  $U$  的特征向量是依赖于一个随机矩阵。在文献[54]中,通过对式(5.194)中的对角矩阵  $\Delta$  取不同的分数阶幂,DFRFT 可以推广到多参数 DFRFT。文献[55]中,角度分解方法用到了其他分数阶酉变换中。

## 参考文献

- [1] Kraniuskas P, Cariolaro G, Erseghe T. Method for defining a class of fractional operations[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1998, 46: 2804-2807.
- [2] Erseghe T, Kraniuskas P, Cariolaro G. Unified fractional Fourier transform and sampling theorem [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1999, 47: 3419-3423.
- [3] Ozaktas H M, Arikan O, et al. Digital computation of the fractional Fourier transform [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1996, 44(9): 2141-2150.
- [4] Pei S C, Ding J J. Closed-form discrete fractional and affine Fourier transform[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 2000, 48(5): 1338-1353.
- [5] 赵兴浩, 邓兵, 陶然. 分数阶 Fourier 变换数字计算中的量纲归一化[J]. 北京理工大学学报, 2005, 25(4): 360-364.
- [6] Crochiere R E, Rabiner L R. Interpolation and decimation of digital signal-A tutorial review[J]. Proc. IEEE, 1981, 69(3): 300-331.
- [7] Bidet E, Castelain D, Joanblanq C. A fast single-chip implementation of 8192 complex point FFT[J]. IEEE J. Solid-State Circuits, 1995, 30(3): 300-305.
- [8] Pekurovsky D. P3DFFT: A framework for parallel computations of Fourier transforms in three dimensions[J]. SIAM J. Sci. Comput., 2012, 34(4): C192-C209.
- [9] Hoyer E A, Stork R F. The zoom FFT using complex modulation [C]//IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process. (ICASSP), 1977: 78-81.
- [10] Markel J. FFT pruning[J]. IEEE Trans. Audio Electroacoust., 1971, 19(4): 305-311.
- [11] Pang C, Liu S, Han Y. High-speed target detection algorithm based on sparse Fourier transform[J]. IEEE Access, 2018: 1-1.
- [12] Lin J, Feng Y, Liu S. Fast ISAR imaging based on sparse Fourier transform algorithm [C]//2017 Int. Conf. Advanced Infocomm Technology (ICAIT), 2017, 334-339.
- [13] Fan T, Shan T, Liu S, et al. A fast pulse compression algorithm based on sparse inverse Fourier transform [C]//2016 CIE Int. Conf. Radar, 2016, 1362-1366.
- [14] Liu S, Zhang Y D, Shan T. Detection of weak astronomical signals with frequency-hopping interference suppression[J]. Digital Signal Processing, 2018, 72: 1-8.
- [15] Liu S, Zeng Z, Zhang Y D, et al. Automatic human fall detection in fractional Fourier domain for assisted living [C]//41st IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP), 2016, 799-803.
- [16] Liu S, Shan T, Zhang Y D, et al. A fast algorithm for multi-component LFM signal analysis exploiting segmented DPT and SDFRFT [C]//IEEE International Radar Conference, 2015, 1139-1143.
- [17] Liu S, Shan T, Tao R, et al. Sparse discrete fractional Fourier transform and its applications[J]. IEEE Trans. Signal Process., 2014, 62(24): 6582-6595.
- [18] Hassanieh H, Indyk P, Katabi D. Simple and practical algorithm for sparse Fourier transform [C]//23rd Annu. ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms., 2012, 1183-1194.
- [19] Zhang H, Shan T, Liu S, et al. Parameter optimization of sparse Fourier transform for radar target detection [C]//2020 IEEE Radar Conference, 2020, 343-347.
- [20] Xia X G. Discrete Chirp-Fourier transform and its application to chirp rate estimation [J].

- IEEE Trans. Signal Process., 2000, 48(11): 3122-3133.
- [21] Peleg S, Friedlander B. Multicomponent signal analysis using the polynomial-phase transform[J]. IEEE Trans. Aerospace Electron. Syst., 1996, 32(1): 378-387.
- [22] Zhang H, Shan T, Liu S, et al. Optimized sparse fractional Fourier transform: Principle and performance analysis[J]. Signal Processing, 2020, 174: 107646.
- [23] Liu S, Zhang H, Shan T, et al. Efficient radar detection of weak maneuvering targets using a coarse-to-fine strategy[J]. IET Radar Sonar Navig., 2021, 15(2): 181-193.
- [24] Almeida L B. The fractional Fourier transform and time-frequency representations[J]. IEEE Trans. Signal Process., 1994, 42(11): 3084-3091.
- [25] Nelson J. Sketching and streaming algorithms for processing massive data[J]. XRDS: Crossroads, 2012, 19(1): 14-19.
- [26] Zhang H, Shan T, Liu S, et al. Performance evaluation and parameter optimization of sparse Fourier transform[J]. Signal Processing, 2021, 179: 107823.
- [27] Hassanieh H, Indyk P, Katabi D, et al. Nearly optimal sparse Fourier transform[C]//44th Symp. Theory Comput., 2012: 563-578.
- [28] Simon M K, Alouini M S. Some new results for integrals involving the generalized Marcum Q-function and their application to performance evaluation over fading channels[J]. IEEE Trans. Wireless Commun., 2003, 2(4): 611-615.
- [29] Pei S C, Yeh M H, Tseng C C. Discrete fractional Fourier transform based on orthogonal projections[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1999, 47(5): 1335-1347.
- [30] Pei S C, Yeh M H. Improved discrete fractional Fourier transform[J]. Optics Letters, 1997, 22(14): 1047-1049.
- [31] Dickinson B, Steiglitz K. Eigenvectors and functions of the discrete Fourier transform[J]. IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing, 1982, 30(1): 25-31.
- [32] Pei S C, Hsue W L, Ding J J. Discrete fractional Fourier transform based on new nearly tridiagonal commuting matrices[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 2006, 54: 3815-3828.
- [33] Candan Ç. On higher order approximations for Hermite-Gaussian functions and discrete fractional Fourier transforms[J]. IEEE Signal Processing Letter, 2007, 14(10): 699-702.
- [34] Pei S C, Hsue W L, Ding J J. DFT-commuting matrix with arbitrary or infinite order second derivative approximation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(1): 390-394.
- [35] Serbes A, Durak Ata L. Efficient computation of DFT commuting matrices by a closed-form infinite order approximation to the second differentiation matrix [J]. Signal Processing, 2011, 91(3): 582-589.
- [36] Hanna M T, Seif N P A, Ahmed W A E M. Hermite-Gaussian-like eigenvectors of the discrete Fourier transform matrix based on the singular value decomposition of its orthogonal projection matrices[J]. IEEE Trans. Circuits Syst. I, 2004, 51: 2245-2254.
- [37] Candan C, Kutay M A, Ozaktas H M. The discrete fractional Fourier transform[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 2000, 48: 1329-1337.
- [38] Hanna M T, Seif N P A, Ahmed W A E M. Hermite-Gaussian-like eigenvectors of the discrete Fourier transform matrix based on the direct utilization of the orthogonal projection matrices on its eigenspaces[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(7): 2815-2819.
- [39] Hanna M T. Direct batch evaluation of optimal orthonormal eigenvectors of the DFT matrix[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(5): 2138-2143.
- [40] Hanna M T. Direct sequential evaluation of optimal orthonormal eigenvectors of the discrete Fourier transform matrix by constrained optimization[J]. Digital Signal Processing, 2012, 22(4): 681-689.

- [41] Neto J R D O, Lima J B. Discrete fractional Fourier transforms based on closed-form HermiteGaussian-like DFT eigenvectors[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(23): 6171-6184.
- [42] Yeh M H, Pei S C. A method for the discrete fractional Fourier transform computation[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 2003, 51(3): 889-891.
- [43] 赵兴浩, 陶然, 邓兵, 等. 分数阶傅里叶变换的快速计算新方法[J]. 电子学报. 2007, 35(6): 1089-1093.
- [44] Orfanidis S J. 信号处理导论[M]. 清华大学出版社, Prentice Hall, 1998.
- [45] Pei S C, Tseng C C, et al. Discrete fractional Hartley and Fourier transform[J]. IEEE Trans. Circuits Syst. II, 1998, 45: 665-675.
- [46] Pei S C, Yeh M H. Discrete fractional Hadamard transform[C]. Proc. IEEE Int. Symp. , Circuits and Systems, 1999, 179-182.
- [47] Pei S C, Yeh M H. The discrete fractional cosine and sine transforms [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 2001, 49: 1198-1207.
- [48] Cariolaro G, Erseghe T, Kraniuskas P. The fractional discrete cosine transform[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 2002, 50: 902-911.
- [49] Tseng C C. Eigenvalues and eigenvectors of generalized DFT, generalized DHT, DCT-IV and DST-IV matrices[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 2002, 50: 866-877.
- [50] Pei S C, Ding J J. Generalized eigenvectors and fractionalization of offset DFTs and DCTs[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 2004, 52: 2032-2046.
- [51] Vargas-Rubio J G, Santhanam B. On the multiangle centered discrete fractional Fourier transform [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2005, 12: 273-276.
- [52] Pei S C, Yeh M H. Discrete fractional Hilbert transform [C]//Proc. IEEE Int. Symp. Signal Processing, 1998, 506-509.
- [53] Liu Z J, Zhao H F, Liu S T. A discrete fractional random transform[J]. Optics Communications, 2005, 255: 357-365.
- [54] Pei S C, Hsue W L. The multiple-parameter discrete fractional Fourier transform[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2006, 13: 329-332.
- [55] Yeh M H. Angular decompositions for the discrete fractional signal transforms [J]. Signal Processing, 2005, 85: 537-547.