第 1 章　向 量 空 间

引例　随着计算机科学和网络信息技术的发展，计算机图形学的应用领域越来越广，如虚拟仿真设计、效果图制作、动画片制作、电子游戏开发等．在计算机图形学中，通常用向量表示点，例如在日常生活中经常用到的二维码（QR code），它用某种特定的几何图形按一定规律在平面（二维）上以黑白相间的图形记录数据符号信息，通过图像输入设备或光电扫描设备自动识读以实现信息处理．在图形相应元素的位置上，用点（方点、圆点或其他形状）的出现表示二进制“1”，点的不出现表示二进制“0”，点的排列组合确定了二维码所代表的意义．二维码符号共有 40 种规格（一般为黑白色），从 21×21（版本 1）到 177×177（版本 40），每一版本符号比前一版本每边增加 4 个模块．这样，整个二维码在版本 1 情况下就可以用 21×21 个 1 或 0 组成的向量或 21 行 21 列的矩阵来描述，其他版本情况类似．

图 1.1　二维码示意图

计算机图形学中经常遇到图形的几何变换问题，包括图形的平移、旋转、缩放等．例如，图形学中需要对顶点和向量做多次空间变换，其中包括：

① 子节点相对父节点的空间位置、旋转、缩放；

② 模型空间变换到世界空间；

③ 世界空间变换到观察空间；

④ 观察空间变换到剪裁空间（视锥体剪裁）；

⑤ 剪裁空间变换到屏幕空间（三维空间投影到二维空间）．

以上变换中，前三种都可以理解为坐标系的变换，坐标系的旋转、缩放、平移．对于二维图像，如果想要平移，可以在三维空间中构建一个立方体，然后对立方体实施错切，就像一摞 A4 纸，每张纸上都画着一样的图案，一开始它们投影到桌面上的图像都是相同的，这时我们推动这摞纸使它产生错切，最上面的纸投影到桌面上的结果，就是

二维图像的平移．这样低阶的平移可以转化为高阶的错切，而错切是可以用矩阵乘法表达的！而对于前三种变换中的向量，因为它是不存在空间位置的，所以不必考虑平移的影响，向量的计算也可用三阶方阵．本章先引入向量，然后在第 3 章介绍矩阵及其运算．对于第 4、5 种变换，也并不复杂，但不属于经典线性代数入门的范围，这里不详细讨论．

线性方程组是科学研究与工程实践中应用最广泛的数学模型，很多读者以前也接触过．线性方程组的求解和行列式是线性代数最初大量研究的起源，本书以向量为起点介绍线性代数，这样对于线性方程组和其他相关问题就可以借助向量来描述，凡是线性问题都可以借用向量空间的观点来加以讨论．

1.1　*n* 维向量空间

1.1.1　*n* 维向量

线性代数中最基本且非常重要的一个概念是向量．中学阶段我们学习过有序实数对（ordered real pairs）(x, y)，然后是三元有序实数组（ordered real triplets）(x, y, z)，甚至 n 元有序实数组（ordered real n-tuples）$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$．这些有序数组在理论和实践中具有重要应用．例如有序数对 $(1, 2)$，$(4, 1)$ 和 $(5, 4)$ 分别对应平面上的三个点 A，B，C（如图 1.2 所示），$(1, -1, 3)$ 和 $(-2, 2, 2)$ 分别对应图 1.3 中的三维空间中的两个点，四元有序数组（120211090121, 18, 70, 175）可以用来描述一个学生的学号、年龄、体重和身高．

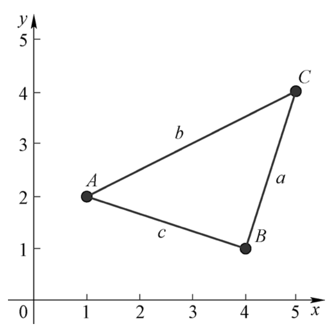


图 1.2　有序数对与平面中的点

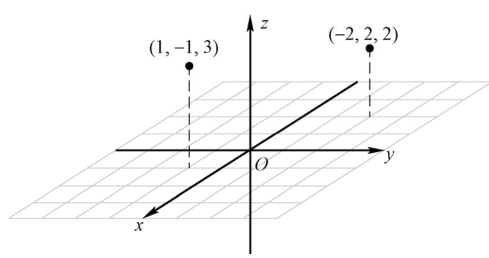


图 1.3　有序数组与空间中的点

对于物理学家和工程师而言，要定义某个向量，不仅需要它的大小，而且需要它的方向，如速度、加速度和力等．对于这些向量，几何上通常用有向线段来描述，下面给出线性代数中向量的一般定义．

定义 1.1　*n 个有序数组成的列表称为一个 n 维***向量**（vector）．

向量既可以写成一行，也可以写成一列．若把一组有序数写成一行则是**行向量**（row vector），记为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$．若把一组有序数写成一列则是**列向量**（column vector），记为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，其中上标“T”表示转置（transpose）．组成向量的每个数 x_i 称为该向量的第 i 个元素（element）或第 i 个分量（component）．

行向量与列向量除了书写形式不同之外没有什么本质不同．例如，为方便起见，此处定义中引入了向量的转置，对于任一列向量，它的转置是行向量．类似地，任一行向量的转置是列向量．

分量全为实数的向量称为**实向量**（real vector），分量为复数的向量称为**复向量**（complex vector）.如不加以特殊说明，本书中的向量均指实向量．

在使用向量时需要注意向量中元素的次序，因为每个元素代表不同的信息，不同的次序对应不同的向量．换言之，当且仅当

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, \cdots, x_n = y_n$$

时两个向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$ 相等（equal），记为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$．对于行向量也有同样的结论．

若干相同维数的向量组成一个**向量组**（vectors），通常用大写英文字母表示．例如，m 个 n 维向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 组成的向量组为

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$$

由有限个向量所组成的向量组可以构成矩阵，矩阵及其运算将在第 3 章予以阐述．

定义 1.2　n 元有序数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 的全体组成的集合

$$\mathbf{R}^n = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \,|\, x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

称为实数域上的 ***n* 维欧氏空间**（Euclidian *n*-space）.

n 元有序数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 称为空间 $\mathbf{R}^n$ 中的点，$n = 1$ 对应数轴上的点，$n = 2$ 对应平面上的点，而 $n = 3$ 对应空间中的点，这样就可以通过直角坐标系，把点、向量和有序数组、空间图形和代数方程联系起来，通过建立对应关系，给予数组和代数方程以几何直观意义，从而利用代数方法研究空间图形的性质和相互关系．因为 $n \geqslant 4$ 不再具有直观几何意义,所以下文中主要以 2 维和 3 维为例将有关向量的定义和运算推广至 $n \geqslant 4$ 维空间．

1.1.2　向量的线性运算

线性代数中关于向量的基本运算主要有两类，即向量加法（vector addition）和数乘

向量（scalar multiplication），线性代数中很多内容都基于这两种运算.

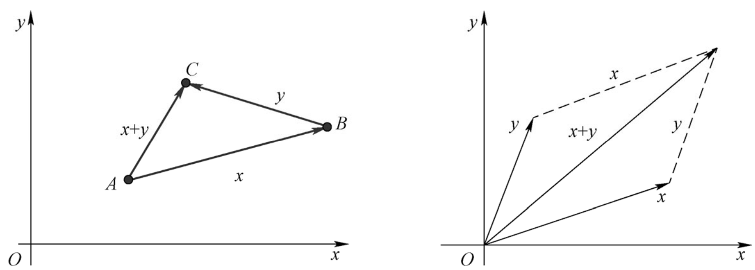
1. 向量加法

定义 1.3 两个 n 维向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$ 的和（sum）定义为

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{bmatrix}$$

注意：相加的两个向量必须具有相同的行数（或列数）.

从几何上来看，向量的加法遵循平行四边形法则（parallelogram law）或三角形法则（triangle law）. 例如图 1.4 给出了平面向量的三角形法则和平行四边形法则.



（a）三角形法则　　（b）平行四边形法则

图 1.4　平面向量的三角形法则和平行四边形法则

2. 数乘向量

定义 1.4 数 λ 和向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 的乘积（product）定义为

$$\lambda\boldsymbol{x}=\lambda\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda x_1\\\lambda x_2\\\vdots\\\lambda x_n\end{bmatrix}$$

注意：用数 λ 乘一个向量，就是把向量的每个元素都乘上 λ，而不是用 λ 只乘向量的某一个元素（或分量）. 向量乘大于 1 的数，就是将这个向量拉伸，乘小于 1 的数，就是将这个向量压缩，乘负数，就是将这个向量翻转. 拉伸（stretch）、压缩（shrink）、翻转（reverse）向量的行为，统称为比例化（scaling），而这些数值本身，称之为比例化因子（scaling factor）.

若 $\lambda=-1$，则 $\lambda\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}$ 称为向量 $\boldsymbol{x}$ 对应的负向量. 有了负向量的概念之后就可以定义向量减法（vector subtraction），即向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的差（difference）

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{y})=(x_1-y_1,\ x_2-y_2,\ \cdots,\ x_n-y_n)^{\mathrm{T}}$$

如图 1.5 所示.

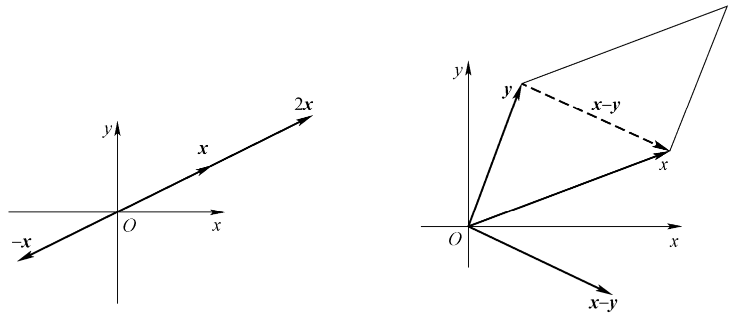


图 1.5　平面向量的数乘和减法

3. 向量线性运算的性质

向量的加法和数乘统称为向量的线性运算. 设 $\boldsymbol{x}$ ，$\boldsymbol{y}$ 与 $\boldsymbol{z}$ 为 n 维向量，α 与 β 为数，易证向量的线性运算满足下列运算规律：

① 加法交换律（commutative law）：$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ ；

② 加法结合律（associative law）：$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ ；

③ $\boldsymbol{0}$ 向量：$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x}$ ；

④ 负向量：若 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ ，则 $\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{x}$ ；

⑤ 恒等（identity）性：$1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ ；

⑥ 数乘结合律：$(\alpha\beta)\boldsymbol{x}=\alpha(\beta\boldsymbol{x})$ ；

⑦ 分配律（distributive law）：$\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$ ；$(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$.

1.1.3　向量空间的定义

定义 1.5　设 V 是一个非空集合，F 是一个数域，若集合 V 对于定义在集合 V 上的加法运算和数乘运算满足封闭性，即对于集合 V 中任意两个元素 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 和数 $\lambda\in F$ ，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ 与 $\lambda\boldsymbol{x}$ 也是集合 V 中的元素，则称集合 V 是数域 F 上的一个**向量空间**（vector space）.

若数域 F 为实数域，则称 V 是实向量空间；若数域 F 为复数域，则称 V 是复向量空间. 向量空间也称为**线性空间**（linear space），其中的元素称为它的向量. 这里向量的含义更为广泛，定义 1.3 和定义 1.4 只是这个定义中的特例.

【例 1.1】在解析几何中，从坐标原点引出的一切向量对于加法运算和数乘运算构成实数域上的一个向量空间.

【例 1.2】数域 F 按照本身的加法与乘法构成一个向量空间，即数域 F 构成一个自身上的向量空间.

【例 1.3】全体 n 维向量构成的集合对于加法运算和数乘运算构成一个向量空间.

【例 1.4】可以验证，对于 n 维向量的加法及实数与 n 维向量的乘法，集合

$$V=\left\{(0,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\,\middle|\,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\right\}$$

构成一个向量空间，而集合

$$V=\left\{(1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\,\middle|\,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\right\}$$

不构成一个向量空间（证明留作练习）.

【例 1.5】定义在闭区间 $[a,b]$ 上的一元连续函数的全体 $C[a,b]$ 按照函数的加法和实数与函数的乘法，构成一个实向量空间.

定义 1.6 设 W 是 V 的一个非空子集，若集合 W 对于定义在集合 V 上的加法和数乘两种运算满足封闭性，则称集合 W 是 V 的**一个子空间**（subspace）.

例如图 1.6 中，图 1.6（a）和图 1.6（c）因为不满足封闭性，所以不是二维空间的子空间，图 1.6（b）中没有包括 0 点，所以也不构成二维空间的子空间. 图 1.6（d）中 $\{\mathbf{0}\}$（其中 $\mathbf{0}=(0,0)^{\mathrm{T}}$）和平面上从坐标原点引出的一切向量对于向量的加法和实数与向量的乘法构成二维空间的子空间.

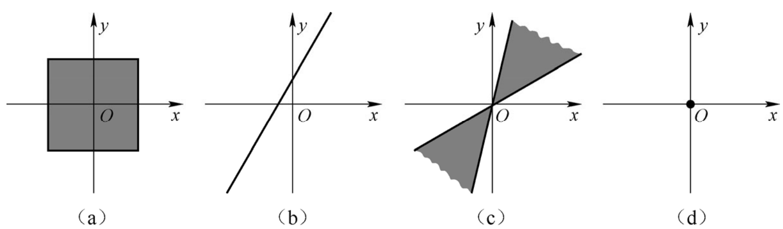


图 1.6　平面向量运算的封闭性

再例如 $\{\mathbf{0}\}$（其中 $\mathbf{0}=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$）和例 1.1 中的向量空间，以及 $\mathbf{R}^3$ 均为 $\mathbf{R}^3$ 的子空间，其中 $\{\mathbf{0}\}$ 和 $\mathbf{R}^3$ 称为 $\mathbf{R}^3$ 的**平凡子空间**（trivial subspace），其他子空间称为**非平凡子空间**（nontrivial subspace）.

1.1.4　线性组合

给定 n 维欧氏空间中的一些向量，我们知道如何将它们通过向量加法和数乘组合到一起. 这些向量的组合在理论上和应用中具有重要意义.

定义 1.7 设向量组 $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$，任取一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，称向量

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m$$

是向量组 A 的一个**线性组合**（linear combination）.

定义 1.8　给定向量组 $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 和向量 $\boldsymbol{b}$，若存在一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 使

$$\boldsymbol{b}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m$$

则称向量 $\boldsymbol{b}$ 是向量组 A 的线性组合或向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A **线性表示**（linear representation），其中实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 称为这一个组合的系数或表示的系数.

【例 1.6】 设有向量组 $\boldsymbol{a}_1=(1,2,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2=(3,4,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_3=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_4=(3,1,0)^{\mathrm{T}}$ 和向量 $\boldsymbol{b}=(-1,0,-3)^{\mathrm{T}}$，因为 $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2$，所以向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 线性表示，此时显然有 $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2+0\bullet\boldsymbol{a}_3+0\bullet\boldsymbol{a}_4$，说明向量 $\boldsymbol{b}$ 可由向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)$ 线性表示，但因为 $\boldsymbol{b}=\lambda_3\boldsymbol{a}_3+\lambda_4\boldsymbol{a}_4$ 无解 $\left(\lambda_3,\lambda_4\in\mathbf{R}\right)$，所以向量 $\boldsymbol{b}$ 不能由向量 $\boldsymbol{a}_3$ 和 $\boldsymbol{a}_4$ 线性表示.

【例 1.7】 任一 n 维向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 都可由 n 维向量组 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_2=(0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$\cdots$，$\boldsymbol{e}_n=(0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 线性表示.

实际上，有一组数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，使得

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n$$

成立，所以 $\boldsymbol{a}$ 可以由 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性表示.

【例 1.8】 设向量组 $\boldsymbol{a}_1=(1,0,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2=(-1,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_3=(3,1,2)^{\mathrm{T}}$ 和向量 $\boldsymbol{b}=(0,-3,-2)^{\mathrm{T}}$，问向量 $\boldsymbol{b}$ 能否由向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ 线性表示?

解　设向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ 线性表示，即存在一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 使 $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{b}$，它等价于

$$\begin{cases}\lambda_1-\lambda_2+3\lambda_3=0\\ \lambda_2+\lambda_3=-3\\ 4\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3=-2\end{cases}$$

通过消元法可解得方程组的解为

$$\lambda_1=1,\lambda_2=-2,\lambda_3=-1$$

则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3$，即向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ 线性表示.

从上面的几个例子可以看出向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 线性表示等价于线性方程组 $\boldsymbol{b}=x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{a}_m$ 有解 $x_1=\lambda_1,x_2=\lambda_2,\cdots,x_m=\lambda_m$.

定义 1.9　设有向量组 $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 和向量组 $B=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_s)$，如果向量组 B 的每个向量都能由向量组 A 线性表示，那么称向量组 B 能由向量组 A 线性表示. 若向量组

A 与向量组 B 能互相线性表示，则称这两个向量组**等价**，记为 $A\sim B$ 或 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)\sim(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_s)$.

例如，3 维向量组 $\boldsymbol{a}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 和 3 维向量组 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 可以互相线性表示，因而等价.

容易证明，等价向量组具有如下性质.

（1）反身性：任一向量组与它自身等价，即

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)\sim(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$$

（2）对称性：若 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s)\sim(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_t)$，则 $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_t)\sim(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s)$.

（3）传递性：若 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s)\sim(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_t)$，$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_t)\sim(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{c}_m)$，则 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s)\sim(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{c}_m)$.

定义 1.10 n 维向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 的所有线性组合对应的集合称为向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 的**生成空间**（spanning space），记为 $\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m\}$，即

$$\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m\}=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m\}$$

其中，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 为实数.

根据这个定义，向量 $\boldsymbol{b}$ 是向量组 $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 的线性组合或向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 线性表示，与向量 $\boldsymbol{b}$ 位于向量组 $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 的生成空间中等价.

在 2 维平面 $\mathbf{R}^2$ 上，非零向量 $\boldsymbol{v}$ 的生成空间是用数乘向量 $\boldsymbol{v}$ 得到的全体向量，共线的两个向量的生成空间是用数乘其中的某个向量得到的全体向量，而不共线的两个向量的生成空间恰好是全平面 $\mathbf{R}^2$，如图 1.7 所示.

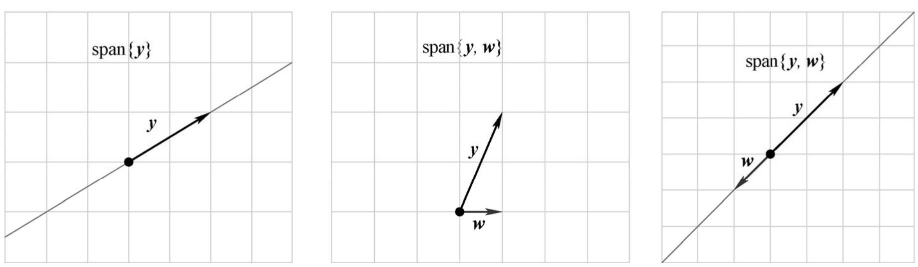


图 1.7　平面向量的生成空间

在 3 维空间 $\mathbf{R}^3$ 中，一个非零向量的生成空间是 $\mathbf{R}^3$ 中通过原点的一条直线；两个非零向量的全部线性组合，是一条过原点的直线或一个过原点的平面；三个非零向量的生成空间是一条线、一个平面或整个 3 维空间 $\mathbf{R}^3$，这与三个向量之间的关系有关，如图 1.8 所示.

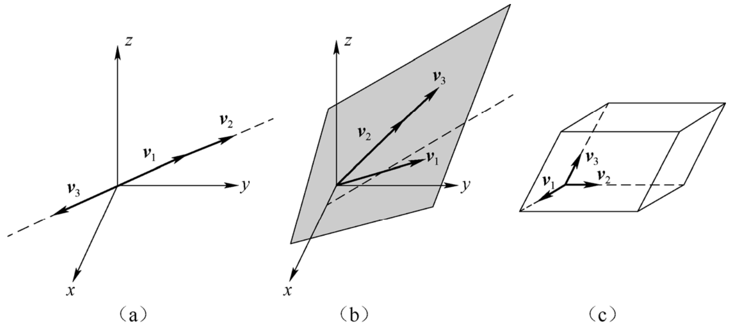


图 1.8　$\mathbf{R}^3$ 中非零向量的生成空间

需要指出的是，n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中任意有限个向量的生成空间都是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间.

【例 1.9】设向量组 $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 与 $B=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_s)$ 等价，记

$$V_1=\text{span}\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m\}=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m\}$$
$$V_2=\text{span}\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_s\}=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}=\mu_1\boldsymbol{b}_1+\mu_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+\mu_s\boldsymbol{b}_s\}$$

试证：$V_1=V_2$.

证明　任取 $\boldsymbol{x}\in V_1$，则 $\boldsymbol{x}$ 可由向量组 $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 线性表示，因为向量组 $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 可由向量组 $B=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_s)$ 线性表示，所以 $\boldsymbol{x}\in V_2$. 这就是说，若 $\boldsymbol{x}\in V_1$，则 $\boldsymbol{x}\in V_2$，因此 $V_1\subset V_2$. 同理可证 $V_2\subset V_1$，故 $V_1=V_2$.

1.2　向量的非线性运算

在线性空间中，一般只涉及向量的线性运算和向量之间的线性关系，然而在实际问题中往往会遇到诸如向量的长度，向量之间的距离、夹角等概念，此处通过引入向量的点积、叉积，建立 n 维空间中涉及的上述概念及规范正交基等基本问题.

1.2.1　向量的内积

1. 向量内积的概念

定义 1.11　向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的**内积**（inner product）或**点积**（dot product）定义为

$$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\boldsymbol{x}\bullet\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

根据定义可知向量的内积是一个数量或标量（scalar quantity），所以向量的内积又称为向量的数量积或标量积（scalar product）.

有了内积的定义之后任一线性方程

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = b$$

便可简记为$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{x} = b$，其中$\boldsymbol{a} = \left(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\right)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x} = \left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)^{\mathrm{T}}$.

设$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$是$\mathbf{R}^n$中的任意向量，$\alpha$是任意实数，则容易证明向量的内积具有如下重要的性质.

（1）对称性：$\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \bullet \boldsymbol{x}$；

（2）可加性：$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \bullet \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \bullet \boldsymbol{z}$；

（3）齐次性：$(\alpha \boldsymbol{x}) \bullet \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \bullet (\alpha \boldsymbol{y}) = \alpha (\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{y})$；

（4）非负性：$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{x} \geqslant 0$，当且仅当$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$时等号成立.

2. 向量的模

对于n维欧氏空间$\mathbf{R}^n$的任意向量$\boldsymbol{x}$来说，$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{x} \geqslant 0$，基于这一点可以引入向量长度的概念.

定义 1.12 设$\boldsymbol{x}$是n维向量空间$\mathbf{R}^n$中的一个向量，非负实数$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{x}$的算术平方根称为向量的**模**（norm）或**长度**（length），记为

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

根据向量的模的定义，零向量的长度是零，非零向量的长度是一个正数. 2 维空间和 3 维空间中的向量$\boldsymbol{a}$的模即为向量始点和终点两点之间的距离. 根据勾股定理得到的向量$\boldsymbol{a}$的模与此定义一致.

长度为 1 的向量称为**单位向量**（unit vector）. n维向量$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$，$\cdots$，$\boldsymbol{e}_n = (0, 0, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$均为单位向量，它们组成的向量组$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$称为 **$n$ 维单位坐标向量组**.

设$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$是$\mathbf{R}^n$中的任意向量，$\alpha$是任意实数，则容易验证向量的模具有如下性质.

（1）非负性：$\|\boldsymbol{x}\| \geqslant 0$；

（2）齐次性：$\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \|\boldsymbol{x}\|$；

（3）传递性：若$\|\boldsymbol{x}\| \leqslant \|\boldsymbol{y}\|$且$\|\boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{z}\|$，则$\|\boldsymbol{x}\| \leqslant \|\boldsymbol{z}\|$；

（4）三角不等式（triangle inequality）：$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

【例 1.10】设向量$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$满足$\|\boldsymbol{x}\|=2$，$\|\boldsymbol{y}\|=3$，且$\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{y} = -4$，求$\|2\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}\|$.

解 因为

$$\begin{aligned}\|2\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}\|^2 &= \langle 2\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}, 2\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}\rangle \\ &= 4\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}+6\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}+6\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}+9\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y} = 4\cdot 4+12\cdot(-4)+9\cdot 9 = 49\end{aligned}$$

所以

$$\|2\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}\|=\sqrt{49}=7$$

定义 1.13　设 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 是 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中的两个向量，称 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ 为向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的**距离**（distance），记为

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$$

可以证明，两个 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 之间的距离满足对称性和非负性（证明留作练习）.

3. 向量之间的夹角

在空间解析几何中，两个向量之间的点积定义为这两个向量的长度的乘积再乘以它们夹角的余弦．这里也可以定义两个非零向量之间的夹角，即将 2 维、3 维向量之间的夹角这个概念推广到 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中向量之间的夹角.

定义 1.14　两个 n 维非零向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 之间的**夹角**（angle）θ（$0\leqslant\theta\leqslant\pi$）定义为

$$\theta=\cos^{-1}\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|}$$

根据这个定义易得**柯西–施瓦茨不等式**（Cauchy-Schwarz inequality）

$$|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$$

即

$$|x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n|\leqslant\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}$$

定义 1.15　对于 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的任意两个非零向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$，若

$$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0$$

则称这两个向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是**垂直的**（perpendicular）或**正交的**（orthogonal），记为 $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$.

因为 $\langle\mathbf{0},\boldsymbol{x}\rangle=\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{x}=0$ 对任意向量 $\boldsymbol{x}$ 都成立，所以零向量和 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中的任意向量都正交.

另外，关于正交向量还有一个**勾股定理（或毕达哥拉斯定理）**，即 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的任意两个向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 正交的一个充要条件是

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2=\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2$$

根据两个向量之间的夹角公式可以计算向量 $\boldsymbol{x}$ 和向量 $\boldsymbol{y}$ 之间的夹角，从而就可以进一步判断这两个向量是否是同一方向、是否正交（也就是垂直）等，具体对应关系为：

① $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}>0$，方向基本相同，夹角在 0° 到 90° 之间；

② $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0$，正交，相互垂直；

③ $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}<0$，方向基本相反，夹角在 90°到 180°之间.

【例 1.11】在 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中，单位坐标向量 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{e}_2=(0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$\cdots$，$\boldsymbol{e}_n=(0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 两两正交.

平面上向量的点积 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ 是一个非常重要的概念，在向量张成的平面内，利用向量的点积可以很容易地证明平面几何的许多定理和命题，如勾股定理、菱形的对角线相互垂直、矩形的对角线相等.

另外，点积在生产生活中也具有广泛应用，例如点积可以用来度量两个向量的相似程度，通过点积可以判断两个向量是否相容、能否愉快相处．这是因为，如果两个向量差不多指向同一个方向，就会得到一个正的点积，而且方向越接近，这个值就越大（除非两个向量都非常小）．利用点积还可以判断一个多边形是面向“摄像机”还是背向“摄像机”．向量的点积与它们夹角的余弦成正比，因此在聚光灯的效果计算中，可以根据点积来得到光照效果，如果点积越大，说明夹角越小，则物体离光照的轴线越近，光照越强.

在物理学中，点积可以用来计算合力和功．若 $\boldsymbol{y}$ 为单位矢量，则点积 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ 即为 $\boldsymbol{x}$ 在方向 $\boldsymbol{y}$ 上的投影，即给出了力在这个方向上的分解．计算机图形学常用点积来进行方向判断，如两个向量的点积大于 0，则它们的方向相近；如果小于 0，则方向相反.

1.2.2 向量的投影

我们在初中就学过投影（projection），简单来说，投影就是将需要投影的东西上的每一点向要投影的平面作垂线，垂线与平面的交点的集合就是投影．有了正交投影之后，很容易把一个非零向量分解为两个正交的向量的和的形式，这是一个非常重要的数学思想．类似地可得三维投影，三维投影就是将一个向量投影到一个平面上．注意这里的投影是向量的投影，几何的投影并不一定是垂直投影．下面从二维投影来开始讨论.

定义 1.16 向量 $\boldsymbol{a}$ 在非零向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影与向量 $\boldsymbol{b}$ 同向，其大小为 $\mathrm{Prj}_b\,\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$．类似向量 $\boldsymbol{b}$ 在非零向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影与向量 $\boldsymbol{a}$ 同向，其大小为 $\mathrm{Prj}_a\,\boldsymbol{b}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}$.

向量投影是线性代数中很重要的应用，可用于寻找向量到目标投影空间的投影向量，这是线性回归的基础．另外，假设向量 $\boldsymbol{e}$ 为单位向量，那么向量 $\boldsymbol{v}$ 在单位向量 $\boldsymbol{e}$ 上的投

影向量就是向量 $\boldsymbol{v}$ 和向量 $\boldsymbol{e}$ 的点积乘以单位向量 $\boldsymbol{e}$，这表示向量 $\boldsymbol{v}$ 在单位向量 $\boldsymbol{e}$ 上的分量，也是一个向量，点积值表示 $\boldsymbol{v}$ 在单位向量 $\boldsymbol{e}$ 上的投影长度．因此如果空间中有 N 个向量，分别投影到单位向量 $\boldsymbol{e}$ 上，可以得到这 N 个向量在单位向量 $\boldsymbol{e}$ 上的投影点，分别表示点积值，这些值的方差越大，说明这些投影点越分散，能够很好地区分各个投影向量，表明 $\boldsymbol{e}$ 能够清晰地表示各个向量的特点，可以作为空间中这些向量的特征向量；假如各个投影点都集中在一起，方差越小，离散度就越小，就越难区分，则很难用 $\boldsymbol{e}$ 来区分空间中的这些向量．在主成分分析（PCA）中，找主方向，就是找到某向量，使矩阵在该向量上的投影点很分散，说明该向量带有矩阵的很多特征信息，能够将矩阵中的元素区分开来．

1.2.3　3 维向量的叉积

与点积不同，两个向量的外积，又叫叉乘、叉积或向量积，其运算结果是一个向量而不是一个标量，并且两个向量的外积与这两个向量组成的坐标平面垂直．

定义 1.17　向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的**外积**（outer product），又称为**叉积**（cross product）或**向量积**（vector product），是一个向量 $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$，其长度为

$$|\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}|=\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|\sin\theta$$

其中，θ 是向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 之间的夹角，其方向正交于 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 并且（$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$）构成右手系（right-hand system）．

设 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的任意向量，α 是任意实数，则容易验证向量的叉积具有如下重要的性质．

（1）反称性：$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{x}$；

（2）可加性：$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{z}+\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z}$；

（3）齐次性：$(\alpha\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\times(\alpha\boldsymbol{y})=\alpha(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})$；

（4）雅可比恒等式：$\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})+\boldsymbol{y}\times(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{x})+\boldsymbol{z}\times(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{0}$．

在 2 维空间中，外积的一个几何意义就是：$|\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}|$ 在数值上等于由向量 $\boldsymbol{x}$ 和向量 $\boldsymbol{y}$ 构成的平行四边形的面积．在 3 维空间中，向量 $\boldsymbol{x}$ 和向量 $\boldsymbol{y}$ 的外积是一个向量，而且位于 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 张成的平面之外，所以称为 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的外积，得到的新向量有一个更通俗易懂的叫法——**法向量**（normal vector），该向量垂直于 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 向量构成的平面．在 3 维图像学中，外积的概念非常有用，例如设 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$，则可以通过两个向量的外积，生成第三个垂直于 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的法向量 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}x_2y_3-x_3y_2\\x_3y_1-x_1y_3\\x_1y_2-x_2y_1\end{bmatrix}$，从而构建三维坐标系．

1.3　线性相关性

1.3.1　线性相关与线性无关

向量之间的线性组合是一种运算，其主体是向量，将各个向量比例化之后，相加在一起，就得到了参与运算的向量之间的一个线性组合．对于任何一个向量组，它的系数全为零的线性组合一定是零向量．而有些向量组，还存在系数不全为零的线性组合，也是零向量，例如，3 维空间中的向量组 $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}5\\2\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}4\\8\\-4\end{bmatrix}$，容易看出 $\boldsymbol{v}_3=4\boldsymbol{v}_1$，于是有 $4\boldsymbol{v}_1-0\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{0}$，即存在一组不全为零的数 4，0，–1 使得向量组 $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3)$ 的线性组合是零向量，具有这种性质的向量组称为线性相关的向量组．

下面给出 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中向量组线性相关和线性无关的定义．

定义 1.18　设 n 维向量组成的向量组 $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$，若存在一组不全为零的常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，使得

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$$

则称向量组 $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 是**线性相关的**（linearly dependent）；否则称向量组 $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 是线性无关的或线性独立的．换言之，向量组 $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ **是线性无关的**（linearly independent），是指对任意一组不全为零的常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 都有

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m\neq\boldsymbol{0}.$$

向量组 $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 是线性相关的在代数上等价于向量组 $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 中至少有一个向量能用其余向量线性表示（证明留作练习）．我们主要考虑两个或两个以上向量组成的向量组的**线性相关性**（linear dependence）．从几何上来看，平面或者立体空间中两个向量**线性相关**的充要条件是共线，即能通过比例化得到对方．

【例 1.12】考虑三个向量 $\boldsymbol{a}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2=(5,3,-2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_3=(1,3,-1)^{\mathrm{T}}$ 组成的向量组 A，因为 $3\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2+2\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$，所以向量组 A 线性相关，意味着这三个向量共面．

【例 1.13】证明

（1）一个零向量必线性相关，而一个非零向量必线性无关；

（2）含有零向量的任意一个向量组必线性相关；

（3）n 维基本单位向量组 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ 线性无关.

证明　（1）若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，那么对任意 $k \neq 0$，都有 $k\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 成立，即一个零向量线性相关；而当 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ 时，当且仅当 $k=0$ 时，$k\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 才成立，故一个非零向量线性无关.

（2）设向量组 $A=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$ 中 $\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{0}$，显然有

$$0\boldsymbol{a}_1+\cdots+0\boldsymbol{a}_{i-1}+1\boldsymbol{a}_i+0\boldsymbol{a}_{i+1}+\cdots+0\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$$

而 0, ⋯, 0, 1, 0, ⋯, 0 不全为零，所以含有零向量的向量组必然线性相关.

（3）若 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{0}$，即

$$\lambda_1(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+\lambda_2(0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+\cdots+\lambda_n(0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}=(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

化简可得

$$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)^{\mathrm{T}}=(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

即 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$，故 n 维基本单位向量组 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ 线性无关.

【例 1.14】讨论向量组 $\boldsymbol{a}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2=(0,2,5)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_3=(1,3,6)^{\mathrm{T}}$ 的线性相关性.

解　令 $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$，即

$$\lambda_1(1,1,1)^{\mathrm{T}}+\lambda_2(0,2,5)^{\mathrm{T}}+\lambda_3(1,3,6)^{\mathrm{T}}=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$$

它等价于如下线性方程组

$$\begin{cases}\lambda_1 \qquad\quad +\lambda_3=0\\ \lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0\\ \lambda_1+5\lambda_2+6\lambda_3=0\end{cases}$$

进一步可得方程组的解为 $\begin{cases}\lambda_1=\ \ \lambda_2\\ \lambda_3=-\lambda_2\end{cases}$. 若 $\lambda_2 \neq 0$，则线性方程组存在非零解，即存在一组不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使得 $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$，由定义 1.18 知向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ 线性相关.

由定义和上面的例子可以看出，若能找到一组不全为零的数，使向量组的对应线性组合等于零成立，则该向量组线性相关；若向量组的对应线性组合等于零成立，能解出或证明线性组合系数全部为零，则该向量组是线性无关的.

从前面的例子可以看出，要判断向量组是线性相关还是线性无关需要求解线性方程组. 在线性代数发展史上，线性方程组的求解是一个非常重要的部分，我们将在后续章节中分别讲述.

下面给出线性相关和线性无关的几个重要结论.

定理 1.1 若向量组中有一部分向量组成的向量组（称为部分组）线性相关，则整个向量组线性相关（部分相关，则整体相关）.

证明 设向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 中有 $r(r\leqslant m)$ 个向量组成的部分组线性相关，不妨设 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r)$ 线性相关，即存在一组不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$，使得

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{0}$$

成立，因而存在一组不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r,0,0,\cdots,0$，使

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{a}_r+0\boldsymbol{a}_{r+1}+0\boldsymbol{a}_{r+2}+\cdots+0\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$$

成立，即 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 线性相关.

例如，含有两个成比例的向量的向量组是线性相关的．因为两个成比例的向量是线性相关的，由定理 1.1 知该向量组线性相关.

推论 若向量组线性无关，则它的任意一个部分组线性无关.

例如，n 维单位向量组 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$ 线性无关，则它的任意一个部分组线性无关.

【例 1.15】 设向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ 线性无关，证明：向量组 $(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_1)$ 也线性无关.

证明 设有一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 使

$$\lambda_1(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)+\lambda_2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)+\lambda_3(\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_1)=\boldsymbol{0}$$

即

$$(\lambda_1+\lambda_3)\boldsymbol{a}_1+(\lambda_1+\lambda_2)\boldsymbol{a}_2+(\lambda_2+\lambda_3)\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$$

因为向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ 线性无关，所以有

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}$$

解此线性方程组得唯一零解 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$，所以向量组 $(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_1)$ 也线性无关.

定理 1.2 $m(m>n)$ 个 n 维向量组成的向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 必线性相关.

定理 1.3 若 n 维向量组成的向量组 $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 线性无关，则把向量组 A 中每一个向量接长后所对应的向量组也线性无关.

这两个定理的证明涉及后续知识，可在学完第 3 章后再证明.

定理 1.4 若向量组 $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 线性无关，而向量组 $B=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b})$ 线性相关，那么向量 $\boldsymbol{b}$ 可由向量组 A 线性表示且表法唯一.

证明 因为向量组 $B=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b})$ 线性相关，即存在一组不全为零的数

$k_1,\cdots,k_m,k$，使得

$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m+k\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$$

若$k=0$，则有

$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$$

进而由向量组$A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$线性无关可得

$$k_1=0,k_2=0,\cdots,k_m=0$$

产生矛盾，故$k\neq0$，从而有

$$\boldsymbol{b}=\left(-\frac{k_1}{k}\right)\boldsymbol{a}_1+\left(-\frac{k_2}{k}\right)\boldsymbol{a}_2+\cdots+\left(-\frac{k_m}{k}\right)\boldsymbol{a}_m$$

下面证明向量$\boldsymbol{b}$由向量组A线性表示的方法唯一.

若$\boldsymbol{b}=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m$且$\boldsymbol{b}=l_1\boldsymbol{a}_1+l_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{a}_m$，则有

$$(k_1-l_1)\boldsymbol{a}_1+(k_2-l_2)\boldsymbol{a}_2+\cdots+(k_m-l_m)\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$$

因为向量组$A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$线性无关，则

$$k_1-l_1=0,k_2-l_2=0,\cdots,k_m-l_m=0$$

即

$$k_1=l_1,k_2=l_2,\cdots,k_m=l_m$$

所以向量$\boldsymbol{b}$由向量组A线性表示的表示方法唯一.

【例 1.16】讨论向量组$\boldsymbol{a}_1=(1,0,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_3=(1,1,1,2)^{\mathrm{T}}$的线性相关性.

解　因为向量组$\boldsymbol{v}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{v}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{v}_3=(1,1,1)^{T}$线性无关，根据定理 1.3 可知，向量组$\boldsymbol{a}_1=(1,0,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_3=(1,1,1,2)^{\mathrm{T}}$线性无关.

【例 1.17】证明：向量组$\boldsymbol{v}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{v}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{v}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{v}=(3,-2,1)^{\mathrm{T}}$线性相关，且向量$\boldsymbol{v}$能由向量组（$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$）线性表示.

证明　由定理 1.2 可知，4 个 3 维向量$\boldsymbol{v}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{v}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{v}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{v}=(3,-2,1)^{\mathrm{T}}$组成的向量组线性相关. 因为向量组（$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$）线性无关，根据定理 1.4 可得，向量$\boldsymbol{v}$能由向量组（$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$）线性表示，且$\boldsymbol{v}=5\boldsymbol{v}_1-3\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3$表法唯一.

1.3.2 最大无关组

定义 1.19 设有向量组 A，若它的一个部分组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r)$ 满足

（1）$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r)$ 线性无关，

（2）向量组 A 中的任意一个向量都可由部分组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r)$ 线性表示，则称部分组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r)$ 是向量组 A 的一个**最（或极）大线性无关组**（maximal linearly independent set），简称为**最（或极）大无关组**.

从最大无关组的定义可以看出，一个线性无关的向量组的最大无关组就是这个向量组本身．另外，最大无关组还有如下等价定义.

定义 1.20 设向量组 A 中 r 个向量组成的向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r)$ 满足

（1）$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r)$ 线性无关，

（2）向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关，

则称向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r)$ 是向量组 A 的**一个最（或极）大线性无关组**.

显然，仅有零向量组成的向量组没有最大无关组．一般来说，向量组的最大无关组是不唯一的．最大无关组有下列性质.

性质 1 向量组 A 与它的最大无关组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r)$ 等价.

证明 由最大无关组的定义可知，任一向量组 A 可由它的最大无关组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r)$ 线性表示，又因为最大无关组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r)$ 的每一个向量都在向量组 A 中，则向量组的最大无关组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r)$ 可由 A 线性表示，故向量组 A 与它的最大无关组等价.

推论 向量组的任意两个最大无关组等价.

由向量组等价的传递性可得此结论.

性质 2 向量组的任意两个最大无关组所含向量的个数相同.

证明 设向量组 A 的两个最大无关组为

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r),(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_s)$$

由性质 1 的推论可知它们等价，再结合最大无关组的定义即可得到 $r=s$.

1.3.3 向量组的秩

由于一个向量组的所有最大无关组含有相同个数的向量，这说明最大无关组所含向量的个数反映了向量组本身的性质．因此，我们引进如下概念.

定义 1.21 向量组 $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 的最大无关组所含向量的个数，称为该向量组的**秩**（rank），记作 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 或 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$，简记为 $R(A)$.

规定：只含零向量的向量组的秩为零.

在 2 维、3 维空间中，坐标系是不唯一的，但任一坐标系中所含向量的个数是一个不变的量，向量组的秩正是这一几何事实的一般化.

如果向量组的秩是 r ，那么此向量组的任意 r 个线性无关的向量都可以是它的一个最大无关组．n 维单位坐标向量组 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$ 是线性无关的，它的最大无关组就是它本身，因此 $R(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=n$.

定理 1.5　向量组线性无关的充分必要条件是它的秩等于它所含向量的个数.

证明　必要性. 如果向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 线性无关，则它的最大无关组就是它本身，从而 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)=m$.

充分性. 如果 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)=m$ ，则向量组的最大无关组应含有 m 个向量，而这就是向量组本身，所以该向量组线性无关.

定理 1.6　相互等价的向量组的秩相等.

证明　设向量组 A 和向量组 B 等价，并且设 A' 和 B' 分别是向量组 A 和向量组 B 的最大无关组. 根据性质 1，则向量组 A 和向量组 A' 等价，向量组 B 和向量组 B' 等价. 由向量组等价的传递性可知向量组 A' 和 B' 等价，由性质 2 即得 $R(A)=R(B)$.

定理 1.6 的逆定理并不成立，即如果两个向量组的秩相等，则它们未必是等价的. 例如，对向量组 $\boldsymbol{a}_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$ ，$\boldsymbol{a}_2=(0,1,0,0)^{\mathrm{T}}$ 与向量组 $\boldsymbol{b}_1=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ ，$\boldsymbol{b}_2=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$ ，有 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=R(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=2$ ，但这两个向量组显然不是等价的.

定理 1.7　如果两个向量组的秩相等且其中一个向量组可由另一个向量组线性表示，则这两个向量组等价.（证明留作练习）

1.4　基 和 维 数

在 $\mathbf{R}^3$ 中，向量 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$ ，$\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$ ，$\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性无关的，而对于任一个三维向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ ，均有

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3$$

$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 称为 $\mathbf{R}^3$ 的一个坐标系或基，而 (x_1, x_2, x_3) 称为向量 $\boldsymbol{x}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 下的坐标，一般地，有如下的定义.

定义 1.22　n 维空间 V 中的向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 称为 V 的一个**基**（basis），如果该向量组满足以下两个条件

（1）$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 线性无关，

（2）V 中的任一向量均可由 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 线性表示.

等价地，向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 称为向量空间 V 的一个基，如果该向量组线性无关，且生成整个空间 V .

定义 1.23　n 维向量空间 V 中的向量用基线性表示的系数构成的有序数组称为该向量在给定基下的**坐标**（coordinate）.

显然，n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的基一般是不唯一的，实际上 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中任意 n 个线性无关的向量都可以作为它的基，因此同一个向量可以由不同的基来线性表示，而且该向量在不同基下的坐标也不同.

【例 1.18】 n 维单位坐标向量组 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ 是 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的一个线性无关的向量组，而对任一 n 维向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，均有 $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$，因此 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个基且称其为标准基（standard basis）.

【例 1.19】 考虑 $\mathbf{R}^n$ 中向量组 $\boldsymbol{a}_1 = (1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2 = (1,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，…，$\boldsymbol{a}_n = (1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，容易证明，这个向量组与 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ 等价，因此 $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ 也是 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个基，且对任一 n 维向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，有

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2(\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1) + \cdots + x_n(\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}_{n-1})$$

这里自然产生了一个问题：n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中不同的基所含向量的个数是否可能不同？回答是否定的.

事实上，$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ 已是 $\mathbf{R}^n$ 的基，设 $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的任一基，则向量组 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ 与向量组 $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$ 等价，又由于两个向量组均线性无关，所以 $m=n$. 正因为如此，有下面的定义

定义 1.24 n 维空间 V 的基所含向量的个数称为 V 的**维数**（dimension），记作 dim（V）.

设 V 为向量组 $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$ 所生成的向量空间，即

$$V = \mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m\} = \{\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{a}_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in \mathbf{R}\}$$

则向量组 $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$ 的一个极大线性无关组就是 V 的一个基，而且向量组 $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$ 的秩就是向量空间 V 的维数. 从上面的讨论可知 dim（$\mathbf{R}^n$）$=n$，因而把 $\mathbf{R}^n$ 称为 ***n* 维向量空间**.

【例 1.20】 在例 1.18 中，n 维向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 在基 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ 下的坐标是 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

【例 1.21】 在例 1.19 中，n 维向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 在基 $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ 下的坐标是 $(x_1 - x_2, x_2 - x_3, \cdots, x_{n-1} - x_n, x_n)$.

同一向量在不同基下的坐标有内在的联系. 设 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是向量 $\boldsymbol{x}$ 在基 $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ 下的坐标，$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 是 $\boldsymbol{x}$ 在基 $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n)$ 下的坐标，在第 3 章将介绍不同基下坐标的转换.

在几何中，往往选取两两正交的单位向量作为基，这样许多问题处理起来非常方便，下面把这个思想推广至向量空间.

定义 1.25　向量空间 V 的一组两两正交的非零向量组叫作 V 的一个**正交向量组**(orthogonal vectors).

定理 1.8　设向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 是向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个正交向量组，那么该向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 线性无关.

证明　假设存在一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，使得

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m=\mathbf{0}$$

两边与 $\boldsymbol{a}_i$ 取内积，得

$$0=\langle\boldsymbol{a}_i,\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m\rangle=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\langle\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_k\rangle=\lambda_i\langle\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_i\rangle$$

由于 $\boldsymbol{a}_i\neq\mathbf{0}$，所以 $\langle\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_i\rangle>0$ 则 $\lambda_i=0$（$i=1,2,\cdots,m$）. 因此，向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 线性无关.

定义 1.26　n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个基 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 的一个**标准正交基**(orthogonal standard basis)或**规范正交基**(orthonormal basis)，若基 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ 满足条件

（1）$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ 是一个正交向量组；

（2）$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ 都是单位向量.

显然，定义中的两个条件可描述如下

$$\langle\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j\rangle=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

【例 1.22】在 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中，$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$ 是一个标准正交基. 设 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 是向量空间 V 中的一个正交基，则 V 中任意一个向量可唯一地表示为

$$\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m$$

其中

$$\lambda_i=\frac{\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_i\rangle}{\langle\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_i\rangle}=\frac{\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_i\rangle}{\|\boldsymbol{a}_i\|^2},\quad i=1,2,\cdots,m$$

特别地，若 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 是 V 的一个规范正交基，则

$$\lambda_i = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_i \rangle,\ i = 1,2,\cdots,m$$

给定向量空间 V 中的一个基 $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$，在向量空间 V 中是否存在一个规范正交基跟它等价？对此有下面重要的结论.

定理 1.9 设 $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$ 是 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个线性无关的向量组，那么可以求出 $\mathbf{R}^n$ 的一个标准正交向量组 $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m)$，使得 $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k)$ 与 $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k)$（$k = 1,2,\cdots,m$）等价.

证明 令

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1 \rangle} \boldsymbol{b}_1$$

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2 \rangle}{\langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2 \rangle} \boldsymbol{b}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1 \rangle} \boldsymbol{b}_1$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{b}_m = \boldsymbol{a}_m - \frac{\langle \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_{m-1} \rangle}{\langle \boldsymbol{b}_{m-1}, \boldsymbol{b}_{m-1} \rangle} \boldsymbol{b}_{m-1} - \cdots - \frac{\langle \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1 \rangle} \boldsymbol{b}_1$$

则容易看出 $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k)$ 与 $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_k)$（$k = 1,2,\cdots,m$）等价.

下面来证明 $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m)$ 两两正交.

对 m 用数学归纳法.

① $\langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1 \rangle - \dfrac{\langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1 \rangle} \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1 \rangle = 0$，从而 $\boldsymbol{b}_1$ 与 $\boldsymbol{b}_2$ 正交.

② 假设 $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_{m-1})$ 两两正交. 当 $1 \leqslant i \leqslant m-1$ 时，

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{b}_m, \boldsymbol{b}_i \rangle &= \langle \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_i \rangle - \frac{\langle \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_{m-1} \rangle}{\langle \boldsymbol{b}_{m-1}, \boldsymbol{b}_{m-1} \rangle} \langle \boldsymbol{b}_{m-1}, \boldsymbol{b}_i \rangle - \cdots - \frac{\langle \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1 \rangle} \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_i \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_i \rangle - \frac{\langle \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_i \rangle}{\langle \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_i \rangle} \langle \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_i \rangle = 0\end{aligned}$$

将 $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m)$ 再单位化，即得定理中的 $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m)$.

定理 1.9 的证明中把 $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ 变成一组标准正交向量组的方法在一些教科书和文献中称作**格莱姆-施密特（Gram-Schmidt）正交化过程**.

【例 1.23】 把 $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2 = (1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_3 = (1,0,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_4 = (1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$ 变成正交的单位向量组.

解 先把它们正交化，令 $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = (1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，则

$$b_2=a_2-\frac{\langle a_2,b_1\rangle}{\langle b_1,b_1\rangle}b_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$b_3=a_3-\frac{\langle a_3,b_2\rangle}{\langle b_2,b_2\rangle}b_2-\frac{\langle a_3,b_1\rangle}{\langle b_1,b_1\rangle}b_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$b_4=a_4-\frac{\langle a_4,b_3\rangle}{\langle b_3,b_3\rangle}b_3-\frac{\langle a_4,b_2\rangle}{\langle b_2,b_2\rangle}b_2-\frac{\langle a_4,b_1\rangle}{\langle b_1,b_1\rangle}b_1=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

再单位化得

$$v_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right)^{\mathrm{T}},\quad v_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},0\right)^{\mathrm{T}}$$

$$v_3=\left(-\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{3}{\sqrt{12}}\right)^{\mathrm{T}},\quad v_4=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$$

习　题　1

1. 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,0,-1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}=(3,2,4,-1)^{\mathrm{T}}$，求：（1）$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，（2）$3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，（3）$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，（4）$\|\boldsymbol{a}\|$，$\|\boldsymbol{b}\|$，（5）向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角．

2. 设向量 $\boldsymbol{a}=(2,1,8,6)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}=(3,-5,2,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{c}=(6,6,-6,6)^{\mathrm{T}}$，计算

（1）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$　（2）$\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$　（3）$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$　（4）$3\boldsymbol{a}+7\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$　（5）$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$

（6）$\frac{3}{4}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$　（7）$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$　（8）$\langle \boldsymbol{a},2\boldsymbol{c}\rangle$　（9）$\|-2\boldsymbol{a}\|$　（10）$\left\|\frac{1}{6}\boldsymbol{c}\right\|$

3. 设向量组 $\boldsymbol{a}_1=(2,5,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2=(10,1,5,10)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_3=(4,1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 和向量 $\boldsymbol{a}$ 满足

$$3(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a})+2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a})=5(\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a})$$

求向量 $\boldsymbol{a}$．

4. 求 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{a}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 分别与基本单位向量 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_2=(0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$\cdots$，$\boldsymbol{e}_n=(0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 的夹角，并以 $n=2$ 和 $n=3$ 为例说明角度的实际意义．

5. 定义两个 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 之间的距离为 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$，证明

（1）$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ 时等号成立；

（2）$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$.

6. 用点积的性质证明平行四边形定律（parallelogram law）

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2=2\left(\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2\right)$$

并给出几何解释.

7. 用点积证明余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$.

8. 设向量组 $\boldsymbol{a}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$ ， $\boldsymbol{a}_2=(0,1,2)^{\mathrm{T}}$ ， $\boldsymbol{a}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$ ，证明

（1）向量 $\boldsymbol{b}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 能由向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ 线性表示；

（2）向量 $\boldsymbol{c}=(1,-2,2)^{\mathrm{T}}$ 不能由向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ 线性表示.

9. 已知向量 $\boldsymbol{b}=(\lambda,2,5)^{\mathrm{T}}$ ， $\boldsymbol{a}_1=(3,2,6)^{\mathrm{T}}$ ， $\boldsymbol{a}_2=(7,3,9)^{\mathrm{T}}$ ， $\boldsymbol{a}_3=(5,1,3)^{\mathrm{T}}$ ，讨论 $\boldsymbol{b}$ 是否可由向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ 线性表示.

10. 问 γ 取什么值时，向量 $\boldsymbol{a}_1=(\gamma,1)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{a}_2=(\gamma+2,\gamma)^{\mathrm{T}}$ 线性无关.

11. 证明 2 维向量 $\boldsymbol{a}_1=(\alpha,\beta)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{a}_2=(\xi,\eta)^{\mathrm{T}}$ 线性相关的充要条件是 $\alpha\eta-\beta\xi=0$.

12. 判断下列向量组的线性相关性.

（1）$\boldsymbol{a}_1=(3,1,-2)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{a}_2=(2,-3,0)^{\mathrm{T}}$

（2）$\boldsymbol{a}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{a}_3=(1,2,4)^{\mathrm{T}}$

（3）$\boldsymbol{a}_1=(3,5,1)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{a}_2=(1,0,4)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{a}_3=(5,-7,-6)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{a}_4=(1,2,0)^{\mathrm{T}}$

（4）$\boldsymbol{a}_1=(6,4,1,-1)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{a}_2=(1,0,2,3)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{a}_3=(1,4,-9,-16)^{\mathrm{T}}$

13. 向量组 $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$（ $m\geqslant 2$ ）线性相关的充分必要条件是向量组 A 中至少有一个向量能由其余向量线性表示.

14. 设向量组 $\boldsymbol{a}_1=(1,1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2=(1,0,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_3=(-1,-4,-8,k)^{\mathrm{T}}$ 线性相关，求待定常数 k .

15. 设 $\boldsymbol{a}_1=(6,\alpha+1,3)^{\mathrm{T}}$ ， $\boldsymbol{a}_2=(\alpha,2,-2)^{\mathrm{T}}$ ， $\boldsymbol{a}_3=(\alpha,1,0)^{\mathrm{T}}$ ，则当 α 为何值时，

（1）向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$ 线性相关？线性无关？

（2）向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ 线性相关？线性无关？

16. 设向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ 线性无关，向量 $\boldsymbol{b}_1$ 能由向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ 线性表示，而向量 $\boldsymbol{b}_2$ 不能由向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ 线性表示，对任意的实数 k ，问

（1）向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,k\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2)$ 是否线性相关？为什么？

（2）向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_1+k\boldsymbol{b}_2)$ 是否线性相关？为什么？

17. 设 $\boldsymbol{b}_1$=$\boldsymbol{a}_1$ ， $\boldsymbol{b}_2$=$\boldsymbol{a}_1$+$\boldsymbol{a}_2$ ， $\cdots$ ， $\boldsymbol{b}_k$=$\boldsymbol{a}_1$+$\boldsymbol{a}_2$+$\cdots\boldsymbol{a}_k$ 且 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k)$ 线性无关，证明向量

组 $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_k)$ 线性无关.

18. 设向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 线性表示且表示式唯一, 证明: $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 线性无关.

19. 证明：若 n 维单位坐标向量组 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$ 可以由 n 维向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ 线性表示，则向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ 线性无关.

20. 设向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ 线性相关, 向量组 $(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)$ 线性无关, 证明: $\boldsymbol{a}_1$ 能由 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示，而 $\boldsymbol{a}_4$ 不能由 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ 线性表示.

21. 已知向量组 $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 的秩是 r，证明：$A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 中任意 r 个线性无关的向量均构成它的一个最大无关组.

22. 设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{n\text{-}1}$ 为 $n-1$ 个线性无关的 n 维列向量，$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 是和 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{n-1}$ 均正交的 n 维列向量，证明：n 维列向量 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 线性相关.

23. 已知三维线性空间的一组基为 $\boldsymbol{a}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，求向量 $\boldsymbol{b}=(2,0,0)^{\mathrm{T}}$ 在这组基下的坐标.

24. 已知向量 $\boldsymbol{a}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，试求向量 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 使得（1）向量 $\boldsymbol{a}_1$ 与 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 正交;（2）三个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 正交.

25. 分别将以下向量组正交化、单位化.

（1）向量组 A：$\boldsymbol{a}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_3=(1,4,9)^{\mathrm{T}}$；

（2）向量组 B：$\boldsymbol{b}_1=(1,0,-1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}_2=(1,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}_3=(-1,1,1,0)^{\mathrm{T}}$.

26. 向量组 $\boldsymbol{a}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2=(0,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_3=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 在 $\mathbf{R}^3$ 中的生成空间是什么？

27. 证明：由向量组 $\boldsymbol{a}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$ 所生成的向量空间就是 $\mathbf{R}^3$.

28. 下列说法是否成立？请给出理由.

（1）若两个向量 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 线性无关，向量 $\boldsymbol{a}_3$ 属于 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 的生成空间 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\}$，则向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ 线性相关.

（2）若两个向量 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 线性无关, 向量组 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ 线性相关, 则向量 $\boldsymbol{a}_3$ 属于 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 的生成空间 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\}$.

29. 证明：集合 $W=\left\{(x,y,z)^{\mathrm{T}}\middle|x=y=z\right\}$ 是 3 维空间 $\mathbf{R}^3$ 的子空间并说明它的几何意义. W 的维数是多少?

30. 三维空间 $\mathbf{R}^3$ 是四维空间 $\mathbf{R}^4$ 的子空间吗？说明你的结论.

31. 考虑 $W=\mathbf{R}^3$，向量加法定义与通常 $\mathbf{R}^3$ 上的向量加法相同, 数乘定义为 $\lambda(x,y,z)^{\mathrm{T}}=(\lambda x,\lambda y,0)^{\mathrm{T}}$，问 W 对这两种运算是否构成向量空间？为什么？

32. 验证向量组

$$
\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_4=\begin{bmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}
$$

构成 $\mathbf{R}^4$ 的一个规范正交基.