

第5章 机器人视觉感知技术基础

5.1 视觉传感器与视觉系统

随着视觉传感器及计算机技术的飞速发展,机器视觉在三维测量、三维物体重建、物体识别、机器人导航、视觉监控、工业检测、生物医学等诸多领域得到了越来越广泛的应用。

5.1.1 视觉传感器的定义和分类

视觉传感器在传统意义上来讲就是相机,相机是一种利用光学成像原理形成影像并记录影像的设备。按照此定义,视觉传感器仅仅是用来摄影的工具。随着技术的进步,人们在相机里面又加上了集成化的算法,也就是处理单元,就变成了智能相机,但从严格意义上来说,智能相机已经不仅仅是视觉传感器了,把智能相机看作一个视觉系统更为科学。视觉传感器种类繁多且特点鲜明。下面从传统角度和成像特点对视觉传感器进行分类。

1. 传统视觉传感器的分类

按照成像的基本原理以及工作维数不同,传统视觉传感器有线阵相机和面阵相机两种。

线阵相机的像素沿一条线排列,每次得到的图像呈现为一条线,虽然也是二维图像,但是长度很长,可以达到几千像素,但是宽度只有几像素。使用这种相机通常有两种情况:一是被检测视野为细长的带状,如在滚筒上检测故障;二是需要很宽的视野和很高的精准度。线阵相机的优点是像元尺寸比较灵活,帧率高,特别适用于一维动态目标的测量。

面阵相机的像素排列为一个呈矩形的面状,一次可以获取整幅二维图像。利用面阵相机可以获取更多的信息,包括测量面积、形状、尺寸、位置甚至温度。面阵相机可以快速、准确地获取二维图像信息,而且是非常直观的测量图像。其缺点是帧率也受到了限制。

简单地说,线阵相机与面阵相机的不同主要是感光元件的工作原理不同。

前面提到,传统的视觉传感器就是相机,相机的种类有 CCD 相机、CMOS 相机、双目相机、全景相机、3D 相机等。这些相机的种类和上面所说的线阵相机和面阵相机并不冲突。例如,比较常见的 CCD 相机既有线阵 CCD 相机也有面阵 CCD 相机。下面简要介绍这几种相机。

1) CCD 相机

20 世纪 70 年代,贝尔实验室成功研制出一种基于电荷耦合器件(CCD)的传感器。CCD 是一种采用大规模集成电路工艺制作的半导体光电元件,CCD 相机就是应用了这种光电元件的相机。CCD 相机具有分辨率高、噪声小、能耗低、体积小等优良特性,在工业中很快得



到广泛应用。

2) CMOS 相机

CMOS 相机的感光元件是互补金属氧化物半导体(CMOS),它是计算机系统内的一种重要芯片,用于保存系统引导的基本资料。CMOS 相机摄影时不需要复杂的处理过程,可直接将图像半导体产生的电子转变成电压信号,因此成像速度非常快。

3) 双目相机

双目相机用两个镜头对物体进行定位,如图 5.1 所示。对物体上一个特征点,用两个位于不同位置的镜头拍摄,可分别获得该点在两个镜头像平面上的坐标。只要知道两个镜头精确的相对位置,就可以用几何方法得到该点在相机的坐标系中的坐标,即确定了特征点的位置。在双目定位过程中,两个镜头在同一平面上,并且光轴平行,就像人的两只眼睛一样。双目相机常用于收集深度数据。

4) 全景相机

全景相机(图 5.2)用于广角摄影,可实现 360°拍摄,常用于虚拟现实系统。



图 5.1 双目相机



图 5.2 全景相机

5) 3D 相机

3D 相机又称为深度相机。顾名思义,通过 3D 相机能检测出拍摄空间的景深数据,这也是其与普通相机的根本区别。普通相机记录的数据不包含图像中的物体与相机的距离。尽管通过图像的语义分析可以判断哪些物体比较远,哪些比较近,但是无法得到准确的数据。3D 相机解决了该问题,通过 3D 相机获取的数据,就能准确地知道图像中每个点与镜头的距离,再加上该点在 2D 图像中的坐标,就能获取图像中每个点的三维空间坐标。通过三维空间坐标就能还原真实场景,实现场景建模等目标。

2. 视觉传感器从成像特点角度的分类

按照成像特点,视觉传感器又可以分为黑白相机、彩色相机、红外相机等。

黑白相机只能采集到黑白图像。

彩色相机能获得彩色图像。为了实现这样的功能,在感光元件上集成一个拜耳透镜阵列,即在一个 2×2 的像素矩阵内,两个像素采集绿光,一个像素采集蓝光,一个像素采集红光,随后进行插值运算,就可以生成彩色图像了。市场上的数码相机都是按照这样的方法获得彩色图像的。

红外相机的感光部分可以接收红外线信号。所谓红外线,就是在光谱中可见光的红光以外的部分,它具有光的物理特征,但是人眼看不到。红外相机可以捕捉到红外光,所以即



便是在光照条件不好的情况下,红外相机也能拍到目标物。

3. 广义的视觉传感器

从广义来说,即从采集目标物信息的角度来说,激光雷达也是一种视觉传感器。激光雷达所采集的点云数据包含了丰富的目标物信息,如三维坐标、颜色、激光反射强度等。

5.1.2 视觉系统

如图 5.3 所示,视觉系统一般由光源、视觉传感器、图像采集系统、图像处理系统以及控制系统等模块组成。光源为视觉系统提供足够的照度,镜头将被测目标成像到视觉传感器的像平面上,并转换为全电视信号。图像采集系统将全电视信号转换为数字图像,即把每一点的亮度转换为灰度级数据,并存储为一幅或多幅图像。图像处理系统负责对图像进行处理、分析、判断和识别,最终给出检测结果。

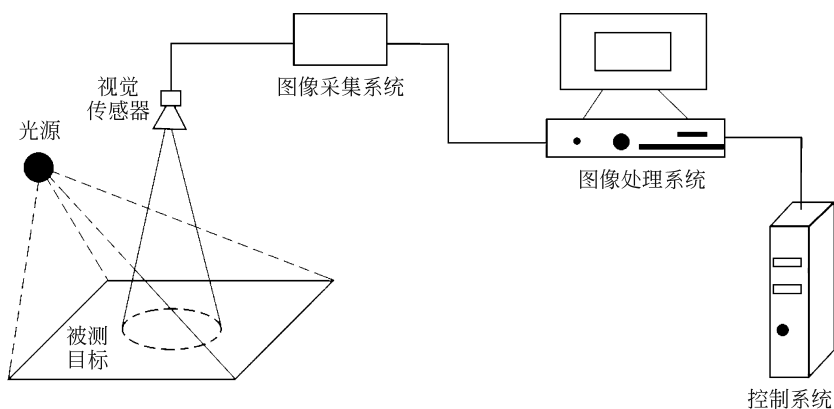


图 5.3 视觉系统的组成

控制系统作为整个视觉系统的核心,不仅要控制整个系统中各个模块的正常运行,而且承担着视觉系统结果的运算和输出。

5.2 视觉成像基本原理

传统的视觉成像模型是中心透视投影模型,也称针孔成像模型。这种模型在数学上是三维空间到平面的中心投影,由一个 3×4 的投影矩阵 $\mathbf{M}$ 描述。中心透视投影模型假设物体表面反射或者发射的光都经过一个针孔投影在像平面上。该针孔称为光心或投影中心。图 5.4 为中心透视投影模型成像原理。该模型主要由光心、像平面和光轴组成。其中,光心到像平面的像距 v 称为焦距 f ,物距 u 等于光心到被测物体的距离。物点 P 、光心 C 和对应像点 p 均在一条直线上。

根据中心透视投影模型的成像原理可知,物点 P 到光轴的距离 X 与对应像点 p 到光轴的距离 x 之间满足几何光学中相似三角形对应边之间的比例关系,即

$$\frac{X}{u} = \frac{x}{f} \quad (5.1)$$

在机器视觉应用中,空间物体表面某点的三维坐标与其在图像中对应点的坐标之间存

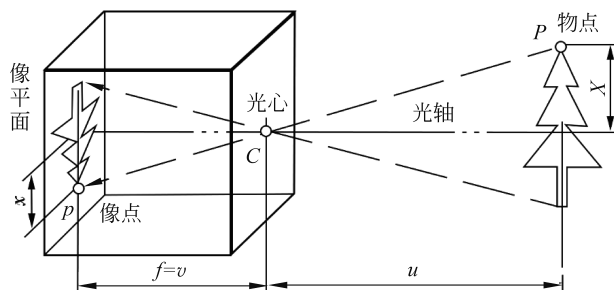


图 5.4 中心透视投影模型成像原理

在一定的关系,通过建立相机成像的几何模型便可确定这一关系,几何模型的参数就是相机参数。为此,先要建立相机常用坐标系,该坐标系包括相机坐标系、图像坐标系、像素坐标系和世界坐标系。相机坐标系、图像坐标系和像素坐标系如图 5.5 所示。

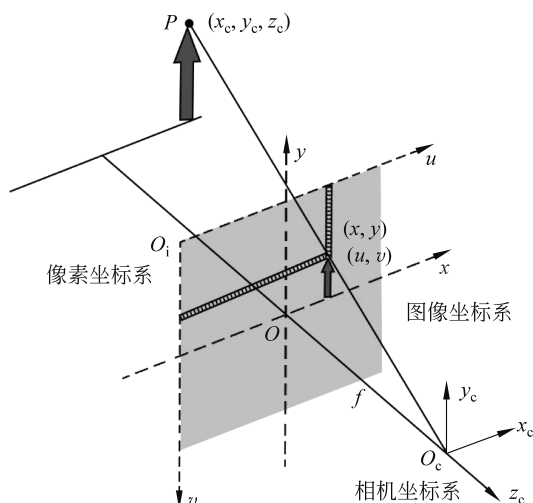


图 5.5 相机常用坐标系及成像

相机坐标系的原点 O_c 即相机光心, z_c 轴与相机光轴重合,且取摄像方向为正向, x_c 轴、 y_c 轴分别与图像坐标系的 x 轴、 y 轴平行。为了描述像素点在图像中的坐标,以成像平面的左上角顶点 O_i 为原点建立像素坐标系, u 轴和 v 轴分别平行于图像坐标系的 x 轴和 y 轴。每幅图像的存储形式是 $m \times n$ 的数组序列,其中的元素即像素,像素的坐标 (u, v) 表示该像点在像平面的行号和列号。像素坐标系以像素为单位。世界坐标系又称为全局坐标系,通常是将被测物体和相机作为一个整体考虑的坐标系。空间点 P 的位置通常用其在世界坐标系中的坐标 (x, y, z) 描述。

1. 相机坐标系与世界坐标系的关系

任意两个坐标系之间的相对关系都可以分解成一次绕坐标原点的旋转和一次平移。旋转可以有多种表达方式,如欧拉角、旋转向量、四元数等。下面采用欧拉角表示坐标系的旋转。设物点 $P(x, y, z)$ 在相机坐标系中的坐标为 (x_c, y_c, z_c) ,则可以用旋转矩阵和平移向量描述 (x_c, y_c, z_c) 与 (x, y, z) 之间的关系:



$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \mathbf{T} = \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 & r_5 \\ r_6 & r_7 & r_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

式(5.2)可改写为

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

其中, $\mathbf{R}$ 称为旋转矩阵, 它是一个 3×3 的单位正交阵, 其中的元素 $r_0 \sim r_8$ 是旋转角 $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ 的三角函数组合, 旋转角 $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ 定义为将世界坐标系变换到与相机坐标系姿态一致而分别绕 3 个坐标轴旋转的欧拉角。 $\mathbf{T} = [T_x \ T_y \ T_z]^T$, 称为平移向量, 是世界坐标系原点 O_w 在相机坐标系中的坐标, 也就是将世界坐标系原点 O_w 移至相机坐标系原点 O_c 的平移量。经过旋转和平移, 使得世界坐标系与相机坐标系重合, 如图 5.6 所示。

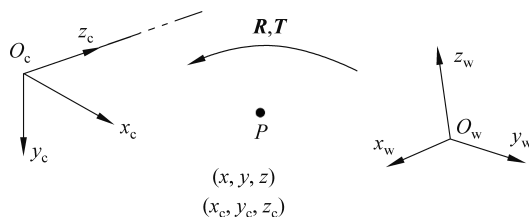


图 5.6 用旋转和平移描述世界坐标系与相机坐标系的关系

设世界坐标系绕 x_w 轴旋转 α_x 得到的旋转矩阵为 $\mathbf{R}_x$, 绕 y_w 轴旋转 α_y 得到的旋转矩阵为 $\mathbf{R}_y$, 绕 z_w 轴旋转 α_z 得到的旋转矩阵为 $\mathbf{R}_z$ 。根据坐标变换关系, $\mathbf{R}_x$ 、 $\mathbf{R}_y$ 、 $\mathbf{R}_z$ 分别为

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_x & -\sin \alpha_x \\ 0 & \sin \alpha_x & \cos \alpha_x \end{bmatrix}, \mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \cos \alpha_y & 0 & -\sin \alpha_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_y & 0 & \cos \alpha_y \end{bmatrix}, \mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos \alpha_z & -\sin \alpha_z & 0 \\ \sin \alpha_z & \cos \alpha_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

对于相对关系已经确定的两个坐标系, 旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 和平移向量 $\mathbf{T}$ 各元素的数值也是确定的。但是, 如果规定世界坐标系按不同的旋转顺序依次绕各坐标轴旋转, 会得到不同的旋转角数值和旋转矩阵表达形式。例如, 在摄影测量中常用的让世界坐标系先绕 y_w 轴转 α_y , 再绕当前的 x_w 轴转 α_x , 最后绕当前的 z_w 轴转 α_z , 则旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 为

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z \mathbf{R}_x \mathbf{R}_y \quad (5.5)$$

容易验证, 旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 是一个单位正交矩阵。交换式(5.5)中 $\mathbf{R}_x$ 、 $\mathbf{R}_y$ 、 $\mathbf{R}_z$ 的顺序, 可以得到不同旋转顺序下旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 的表达式。

2. 相机坐标系与图像坐标系的关系

如图 5.7 所示, 相机坐标系与图像坐标系的关系可根据中心透视投影模型的基本关系式[式(5.1)]推导而得, 像点 p 的图像坐标 (x, y) 与物点 P 的相机坐标系坐标 (x_c, y_c, z_c) 的关系为

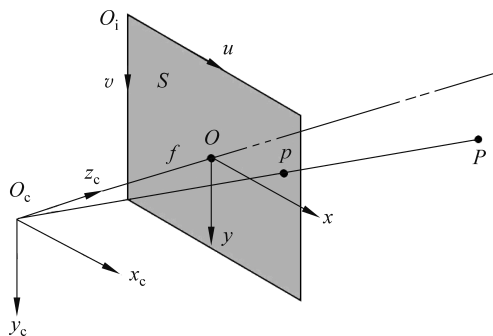


图 5.7 相机坐标系与图像坐标系的关系

$$\begin{cases} x = f \frac{x_c}{z_c} \\ y = f \frac{y_c}{z_c} \end{cases} \quad (5.6)$$

其中, f 为焦距。式(5.6)写成齐次坐标形式为

$$\mathbf{Z}_c \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

3. 像素坐标系与图像坐标系的关系

假设图像中心的像素坐标为 (u_0, v_0) , 相机中的感光器件每个像素在 x 与 y 方向上的物理尺寸是 d_x, d_y , 那么, 图像坐标系的坐标 (x, y) 与像素坐标系的坐标 (u, v) 之间的关系可以表示为

$$\begin{cases} u = \frac{x}{d_x} + u_0 \\ v = \frac{y}{d_y} + v_0 \end{cases} \quad (5.8)$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

写成齐次坐标形式为

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_x} & 0 & u_0 \\ 0 & \frac{1}{d_y} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

上面介绍的是图像坐标系和像素坐标系均为直角坐标系的情况。但是, 在大多数情况



下,像素坐标系两个坐标轴的夹角为 θ ,那么

$$\begin{cases} u = \frac{x}{d_x} - \frac{y \cot \theta}{d_x} + u_0 \\ v = \frac{y}{d_y \sin \theta} + v_0 \end{cases} \quad (5.11)$$

写成齐次坐标形式为

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_x} & -\frac{\cot \theta}{d_x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_y \sin \theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_x} & -\frac{\cot \theta}{d_x} & u_0 \\ 0 & \frac{1}{d_y \sin \theta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

4. 像素坐标系与世界坐标系的关系

通过前面几个步骤得到各个坐标系之间的转换关系,就可以进一步得出像素坐标系与世界坐标系的变换关系:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_c \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{d_x} & -\frac{\cot \theta}{d_x} & u_0 \\ 0 & \frac{1}{d_y \sin \theta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{f}{d_x} & -\frac{f \cot \theta}{d_x} & u_0 & 0 \\ 0 & \frac{f}{d_y \sin \theta} & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.13)$$

定义一个 3×4 的矩阵 $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} f_x & f_x \cot \theta & u_0 & 0 \\ 0 & \frac{f_y}{\sin \theta} & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

其中, $f_x = f/d_x$, $f_y = f/d_y$, 分别称为 x 轴和 y 轴上的归一化焦距。(u_0, v_0) 和归一化焦距 (f_x, f_y) 是相机的内参数, 描述的是相机本身的特性; 而平移向量 $\mathbf{T}$ 和旋转角、旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 是相机的外参数, 描述的是相机坐标系与世界坐标系的相对位置、姿态关系。在构成 $\mathbf{M}$ 矩阵的两个矩阵(即等号右边的两个矩阵)中, 第一个矩阵由相机内参数组成, 称为内参数矩阵; 第二个矩阵由相机外参数组成, 称为外参数矩阵。中心透视投影成像关系可用矩阵 $\mathbf{M}$ 描述:

$$\mathbf{Z}_c \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$



矩阵 $\mathbf{M}$ 描述了空间点到像素点的中心透视投影关系,称为投影矩阵。将矩阵 $\mathbf{M}$ 展开,就可以得到投影矩阵的各个元素:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & m_3 \\ m_4 & m_5 & m_6 & m_7 \\ m_8 & m_9 & m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

由于 $\mathbf{Z}_c$ 是物点 P 到图像中心 C 的距离在光轴方向上的投影,因而 $\mathbf{Z}_c \neq 0$ 。将式(5.15)展开,得到用投影矩阵各元素描述的共线方程:

$$\begin{cases} u = \frac{m_0x + m_1y + m_2z + m_3}{m_8x + m_9y + m_{10}z + m_{11}} \\ v = \frac{m_4x + m_5y + m_6z + m_7}{m_8x + m_9y + m_{10}z + m_{11}} \end{cases} \quad (5.17)$$

中心透视投影模型中的共线方程和投影矩阵是摄影测量学中最基本、最重要的关系。几乎所有摄影测量的理论方法都是从这一点出发,并以此为基础的。

值得一提的是,中心透视投影模型是线性成像关系。但实际上,由于镜头设计非常复杂,并且加工水平有限,故实际的成像系统不可能严格地满足上述线性关系,会存在图像畸变。镜头造成的图像畸变可以分为两类:径向畸变和切向畸变。只有对图像进行校正,求得畸变参数后,才能进行下一步的解算。

5.3 视觉系统标定

在机器人系统中,视觉系统的标定是一个非常重要的环节,视觉系统标定结果的稳定性直接影响机器人视觉系统定位的稳定性和精度。视觉系统的标定方法分为相机标定和机器人手眼标定。相机标定是为了求出相机的实际参数并消除由镜头带来的图像畸变;机器人手眼标定是为了求出机器人与相机之间的位置关系,即机器人基坐标系与相机坐标系之间的位置关系。相机标定是机器人手眼标定的基础,一般来说,只有进行了准确的相机标定,才能获得准确的机器人手眼关系。

5.3.1 相机标定

投影矩阵 $\mathbf{M}$ 由相机的内参数矩阵和外参数矩阵构成。内参数主要包括相机固有的内部几何与光学参数,如主点坐标(图像中心坐标)、焦距、比例因子和镜头畸变参数等;外参数反映相机坐标系相对于某一世界坐标系的三维位置、姿态关系,如旋转矩阵及平移向量。在大多数条件下,这些参数必须通过实验与计算才能得到,这个求解参数的过程就称为相机标定。

相机标定技术的研究起源于图像测量学,虽然不同应用的侧重点不同,但是使用的计算方法基本相同。鉴于相机标定技术在理论和实践中的重要意义,很多学者对其进行了广泛的研究,并基于不同的出发点和思路取得了一系列成果。每个镜头的畸变是不同的,通过相机标定可以校正由镜头引起的畸变。另外,利用一些已知的条件,可以从经过标定的相机采集的图像中恢复目标物体在世界坐标系中的位置。本节先详细介绍基本的标定方法——基



于标定板的视觉系统标定方法,再对相机标定的现状进行总结。

1. 基于标定板的视觉系统标定方法

基于标定板的视觉系统标定方法是应用最为广泛的一种相机标定方法。张正友等人将三维标定块简化为二维棋盘格标定板(图 5.8),大大降低了标定物的加工要求,同时也不损失其标定精度。下面对基于标定板的相机标定方法进行介绍。

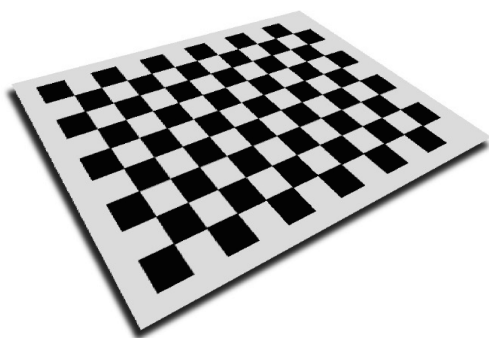


图 5.8 二维棋盘格标定板

5.2 节得到的相机模型[式(5.13)]可以改写为

$$\mathbf{Z}_c \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f}{d_x} & -\frac{f \cot \theta}{d_x} & u_0 \\ 0 & \frac{f}{d_y \sin \theta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\mathbf{R} \quad \mathbf{T}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

将内参数矩阵由矩阵 $\mathbf{K}$ 描述:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{f}{d_x} & -\frac{f \cot \theta}{d_x} & u_0 \\ 0 & \frac{f}{d_y \sin \theta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & u_0 \\ 0 & \beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

则相机模型改写为

$$\mathbf{Z}_c \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} [\mathbf{R} \quad \mathbf{T}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

假设世界坐标系平面与标定板所在的平面重合,即 $z=0$,则式(5.20)可变为

$$\mathbf{Z}_c \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} [\mathbf{R}_1 \quad \mathbf{R}_2 \quad \mathbf{R}_3 \quad \mathbf{T}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} [\mathbf{R}_1 \quad \mathbf{R}_2 \quad \mathbf{T}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

其中, $\mathbf{R}_i$ ($i=1,2,3$)表示旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 的第 i 列向量。定义单应性矩阵 $\mathbf{H}$ 为



$$\mathbf{H} = \mathbf{K} [\mathbf{R}_1 \quad \mathbf{R}_2 \quad \mathbf{T}] = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

则利用下面的约束条件可求解内参数矩阵 $\mathbf{K}$ ：

$$[\mathbf{h}_1 \quad \mathbf{h}_2 \quad \mathbf{h}_3] = \lambda \mathbf{K} [\mathbf{R}_1 \quad \mathbf{R}_2 \quad \mathbf{T}] \quad (5.23)$$

其中, λ 是任意标量。

由于 $\mathbf{R}$ 为单位正交矩阵, 所以具有以下性质：

$$\mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_2 = 0 \quad (5.24)$$

$$\mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_2 = 1 \quad (5.25)$$

利用式(5.23)~式(5.25)可以得到

$$\mathbf{h}_1^T \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_2 = 0 \quad (5.26)$$

$$\mathbf{h}_1^T \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2^T \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_2 \quad (5.27)$$

$\mathbf{h}_1$ 和 $\mathbf{h}_2$ 是通过求解单应性矩阵 $\mathbf{H}$ 求出的, 所以未知量只有矩阵 $\mathbf{K}$ 。拍摄 3 张不同标定平面的照片就可以得到 3 个不同的单应性矩阵 $\mathbf{H}$, 在两个约束条件下可以产生 6 个方程, 即可求解矩阵 $\mathbf{K}$ 中的 5 个未知量。

定义对称矩阵 $\mathbf{B}$ 为

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha^2} & -\frac{\gamma}{\alpha^2 \beta} & \frac{v_0 \gamma - u_0 \beta}{\alpha^2 \beta} \\ -\frac{\gamma}{\alpha^2 \beta} & \frac{\gamma^2}{\alpha^2 \beta^2} + \frac{1}{\beta^2} & -\frac{\gamma(v_0 \gamma - u_0 \beta)}{\alpha^2 \beta^2} - \frac{v_0}{\beta^2} \\ \frac{v_0 \gamma - u_0 \beta}{\alpha^2 \beta} & -\frac{\gamma(v_0 \gamma - u_0 \beta)}{\alpha^2 \beta^2} - \frac{v_0}{\beta^2} & \frac{(v_0 \gamma - u_0 \beta)^2}{\alpha^2 \beta^2} + \frac{v_0^2}{\beta^2} + 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.28)$$

利用内参数矩阵可以求解外参数矩阵：

$$\begin{cases} \mathbf{R}_1 = \lambda \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{R}_2 = \lambda \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_2 \\ \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{T} = \lambda \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_3 \\ \lambda = \frac{1}{\|\mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_1\|} = \frac{1}{\|\mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_2\|} \end{cases} \quad (5.29)$$

2. 相机标定研究现状总结

由于不同的应用背景对相机标定技术提出了不同的要求, 使得相机标定技术从多个角度发展出一系列不同思路的算法。例如, 在视觉系统中, 如果系统的任务只是对物体进行识别, 那么物体本身各特征点间的相对位置精度就比这个物体相对于某个参考坐标系的绝对位置重要得多; 如果系统的任务是物体的定位, 那么物体相对于某个参考坐标系的相对位置就变得尤为重要。