

第5章

无穷级数



5.1 数项级数求和

级数分有穷级数和无穷级数两类。无穷级数由无穷多项(或数)构成,把无穷多项(或数)相加,能加出一个有限数的级数叫作收敛级数,加出一个无穷大数的级数叫作发散级数。无穷级数又分为数项级数和函数项级数。数项级数的每一项都是数,函数项级数的每一项都是函数。数项无穷级数求和就是把级数的每一项加起来。

在 MATLAB 中,使用函数 `symsum()` 进行级数求和。其调用格式为:

`r=symsum(s)`,对符号表达式 s 中的符号变量 k 从 0 到 $k-1$ 级数求和。

`r=symsum(s,v)`,对符号表达式 s 中指定的符号变量 v 从 0 到 $v-1$ 级数求和。

`r=symsum(s,a,b)`,对符号表达式 s 中的符号变量 k 从 a 到 b 级数求和。

`r=symsum(s,v,a,b)`,对符号表达式 s 中指定的符号变量 v 从 a 到 b 级数求和。

函数 `symsum()` 有广泛的适应性,不管是有穷级数还是无穷级数,不管是收敛级数还是发散级数,都可用它来求和。

【例 5.1】 求级数 $\sum_{k=0}^{k-1} k^2$ 。

代码如下:

```
syms k n x v;  
y1 = symsum(k^2)
```

输出结果如下:

```
y1 =  
1/3 * k^3 - 1/2 * k^2 + 1/6 * k
```

所以, $\sum_{k=0}^{k-1} k^2 = \frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k$ 。

【例 5.2】求无穷级数 $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-3)(2n+2)}$ 。

代码如下：

```
syms k n x v;
y1 = symsum(1/((2*n-3)*(2*n+2)),n,1,inf)
```

输出结果如下：

```
y1 =
- 1/10 + 1/5 * log(2)
```

所以， $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-3)(2n+2)} = -\frac{1}{10} + \frac{1}{5}\ln 2$ 。

【例 5.3】求有限项级数 $\sum_{i=0}^{100} 3^i$ 。

代码如下：

```
syms k ;
y1 = symsum(3^k,0,100)
```

输出结果如下：

```
y1 =
773066281098016996554691694648431909053161283001
```

所以， $\sum_{i=0}^{100} 3^i = 773066281098016996554691694648431909053161283001$ 。

【例 5.4】对几何级数 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^\infty}$ 求和。

代码如下：

```
syms n ;
y1 = symsum(1/2^n,0,inf)
```

输出结果如下：

```
y1 =
2
```

所以， $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^\infty} = 2$ 。

【例 5.5】对数列 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$ 求和。

代码如下：

```
syms n ;
y1 = symsum(n/(n+1),1, + inf)
```

输出结果如下：

```
y1 =
      Inf
```

所以, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} = \infty$ 。

因此数列的和为无穷大,故此数列是发散的。

【例 5.6】 对调和级数 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 求和。

代码如下:

```
syms n ;
y1 = symsum((1/n),1, + inf)
```

输出结果如下:

```
y1 =
      Inf
```

可见,此调和级数的和 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \infty$,故此级数是发散的。

【例 5.7】 对级数 $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$ 求和。

代码如下:

```
syms n;
y1 = symsum(1/(n^2),1, inf)
```

输出结果如下:

```
y1 =
1/6 * pi^2
```

所以, $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 。

【例 5.8】 对级数 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots$ 求和。

代码如下:

```
syms n;
y1 = symsum((( - 1)^(n - 1))/n,1, inf)
```

输出结果如下:

```
y1 =
log(2)
```

所以, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ 。

【例 5.9】 对级数 $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \cdots$ 求和。

代码如下:

```
syms n ;
y1 = symsum((( - 1)^(n - 1))/n^2, 1, inf)
```

输出结果如下:

```
y1 =
1/12 * pi^2
```

所以, $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ 。

【例 5.10】 对级数 $1 + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{3^2} + \frac{7}{4^2} + \cdots + \frac{(2n-1)}{n^2} + \cdots$ 求和。

代码如下:

```
syms n ;
y1 = symsum((2 * n - 1)/n^2, 1, inf)
```

输出结果如下:

```
y1 =
3
```

所以, $1 + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{3^2} + \frac{7}{4^2} + \cdots + \frac{(2n-1)}{n^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)}{n^2} = 3$ 。

【例 5.11】 对级数 $a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{(n-1)} + \cdots$ 求和。

代码如下:

```
syms a n q
y1 = a * q^(n - 1);
y2 = symsum(y1, n, 1, inf)
```

输出结果如下:

```
y2 =
- a/(q - 1)
```

所以, $a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{(n-1)} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} aq^{(n-1)} = \frac{a}{1-q}$ 。

【例 5.12】 对级数 $\ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{5}{6}\right) + \ln\left(\frac{9}{10}\right) + \cdots + \ln\left(1 - \frac{2}{i(i+1)}\right) + \cdots$ 求和。

代码如下:

```
syms i n x
m = 1 - 2/(i * (i + 1));
n = log(m);
y1 = exp(simple(symsum(n, i, 2, inf)))
```

输出结果如下:

```
y1 =
1/3
```

$$\text{所以, } \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{5}{6}\right) + \ln\left(\frac{9}{10}\right) + \cdots + \ln\left(1 - \frac{2}{i(i+1)}\right) + \cdots = \sum_{i=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{2}{i(i+1)}\right) = \frac{1}{3}。$$

5.2 关于阶乘的计算

$1 \sim n$ 的连续自然数相乘的积,称为阶乘,用符号 $n!$ 表示,如 $2! = 1 \times 2$, $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ 。规定 $0! = 1$ 。

在 MATLAB 中,阶乘用命令 `factorial(N)` 计算。当 N 为正整数时,计算 $1 \sim N$ 这 N 个数的乘积 $N!$,相当于 `prod(1:N)`。当 N 为数组时,计算数组中每一个数的阶乘;当 N 为矩阵时,计算矩阵中每一个数的阶乘。

`factorial()` 与 `factor()` 函数的区别: `factorial(N)` 计算自然数的阶乘, `factor(N)` 是对 N 作因式分解。如, `factorial(6) = 720`, `factor(6)` 为 2 和 3。

【例 5.13】 依次计算 1, 2, 3, 4, 5, 6 的阶乘。

代码如下:

```
syms n m;
for n = 1:1:6
m = factorial(n)
end
```

输出结果如下:

```
m =
    1
m =
    2
m =
    6
m =
   24
m =
  120
m =
  720
```

由以上可以看出,当 $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 时,函数 `factorial(n)` 结果依次为 1, 2, 6, 24, 120, 720, 对应的阶乘为 $1!, 2!, 3!, 4!, 5!, 6!$ 。

【例 5.14】 试计算数组 `[2, 3, 4]` 的阶乘。

代码如下:

```
syms n m;
n = [2 3 4];
m = factorial(n)
```

输出结果如下:

```
m =
     2     6    24
```

可见,当 N 为数组时,计算数组中每一个数的阶乘。

【例 5.15】 试计算二阶与三阶矩阵的阶乘。

代码 1 如下:

```
syms n m;
n = [1 2;3 4];
m = factorial(n)
```

输出结果如下:

```
m =
     1     2
     6    24
```

代码 2 如下:

```
syms n m;
n = [1 2 3;3 2 1;4 3 2];
m = factorial(n)
```

输出结果如下:

```
m =
     1     2     6
     6     2     1
    24     6     2
```

可见,当 N 为矩阵时,计算的是矩阵中每一个数的阶乘。

```
>> factor(6)
ans =
     2     3
>> n = 5;
>> prod(1:n)
ans =
    120
```

可见, $\text{prod}(1:N)$ 计算的也是 N 的阶乘,与 $\text{factorial}(N)$ 计算自然数的阶乘一样,而 $\text{factor}(N)$ 是对 N 作因式分解。

5.3 单变量函数的泰勒幂级数展开

一个函数如果具有 $n+1$ 阶导数,则该函数可以展成泰勒级数。

泰勒级数公式为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n \quad (5-1)$$

其中,

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (5-2)$$

式(5-1)称为 $f(x)$ 按 $(x - x_0)$ 的幂展开到 n 阶的泰勒公式, R_n 的表达式(5-2)称为拉格朗日型的余项。 ξ 为 $x \sim x_0$ 的某值。

在式(5-1)中,若 $x_0 = 0$,就变为麦克劳林公式:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (5-3)$$

由此得近似公式

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \quad (5-4)$$

在 MATLAB 中,使用函数 `taylor()` 作泰勒幂级数展开。其调用格式为:

`r=taylor(f,x,k)`,按 $x=0$ 进行泰勒幂级数展开。其中,参数 f 为原函数的符号表达式, x 为自变量, k 为展开的项数,默认值为 6 项。

`r=taylor(f)`,等价于 `r=taylor(f,findsym(f),6)`,`findsym(f)` 表示寻找符号表达式中的自变量。

`r=taylor(f,x,k,a)`,按 $x=a$ 进行泰勒幂级数展开。

【例 5.16】 将 $\sin x$ 展开成泰勒级数。

代码如下:

```
syms x
y = sin(x);
r = taylor(y,x)
```

输出结果如下:

```
r =
x - 1/6 * x^3 + 1/120 * x^5
```

所以, $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$ 。

【例 5.17】 将 $\cos x$ 展开成泰勒级数。

代码如下:

```
syms x
y = cos(x);
r = taylor(y,x)
```

输出结果如下:

```
r =
1 - 1/2 * x^2 + 1/24 * x^4
```

所以, $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$ 。

【例 5.18】 将 e^x 展开成泰勒级数。

代码如下：

```
syms x
y = exp(x);
r = taylor(y, x)
```

输出结果如下：

```
r =
1 + x + 1/2 * x^2 + 1/6 * x^3 + 1/24 * x^4 + 1/120 * x^5
```

所以, $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5$ 。

【例 5.19】 将 $\frac{1}{x+1}$ 展开成泰勒级数。

代码如下：

```
syms x
y = 1/(1 + x);
r = taylor(y, x)
```

输出结果如下：

```
r =
1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5
```

所以, $\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5$ 。

【例 5.20】 将 $\ln(1+x)$ 展开成泰勒级数。

代码如下：

```
syms x
y = log(1 + x);
r = taylor(y, x)
```

输出结果如下：

```
r =
x - 1/2 * x^2 + 1/3 * x^3 - 1/4 * x^4 + 1/5 * x^5
```

所以, $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ 。

【例 5.21】 将 $\frac{1}{(x+1)^2}$ 展开成泰勒级数。

代码如下：

```
syms x
y = 1/(1 + x)^2;
r = taylor(y, x)
```

输出结果如下：

```
r =
1 - 2 * x + 3 * x^2 - 4 * x^3 + 5 * x^4 - 6 * x^5
```

所以, $\frac{1}{(x+1)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5$ 。

【例 5.22】 将 $x \cos x$ 展开成泰勒级数。

代码如下:

```
syms x
y = x * cos(x);
r = taylor(y, x)
```

输出结果如下:

```
r =
x - 1/2 * x^3 + 1/24 * x^5
```

所以, $x \cos x = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5$ 。

【例 5.23】 将 $\ln \frac{1+x}{1-x}$ 展开成泰勒级数。

代码如下:

```
syms x
y = log((1+x)/(1-x));
r = taylor(y, x)
```

输出结果如下:

```
r =
2 * x + 2/3 * x^3 + 2/5 * x^5
```

所以, $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)$ 。

【例 5.24】 将 $\ln(1+x)$ 按 $x=a$ 展开成泰勒级数。

代码如下:

```
syms k x a
y = log(1+x);
k = 3;
r = taylor(y, x, k, a)
```

输出结果如下:

```
r =
log(1+a) + 1/(1+a) * (x-a) - 1/2/(1+a)^2 * (x-a)^2
```

所以, $\ln(1+x) = \ln(1+a) + \frac{1}{1+a}(x-a) - \frac{1}{2(1+a)^2}(x-a)^2$ 。

【例 5.25】 将 $(1+x)^a$ 展开成泰勒级数。

代码如下:

```
syms k x a
y = (1 + x)^a;
r = taylor(y, x)
```

输出结果如下：

```
r =
1 + a * x + 1/2 * a * (a - 1) * x^2 + 1/6 * a * (a - 1) * (a - 2) * x^3 + 1/24 * a * (a - 1) * (a - 2) * (a - 3) * x^4 + 1/120 * a * (a - 1) * (a - 2) * (a - 3) * (a - 4) * x^5
```

所以, $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{1}{2!}a(a-1)x^2 + \frac{1}{3!}a(a-1)(a-2)x^3 + \frac{1}{4!}a(a-1)(a-2)(a-3)x^4 + \frac{1}{5!}a(a-1)(a-2)(a-3)(a-4)x^5$ 。

【例 5.26】 将 $(1+x)^3$ 展开成泰勒级数。

代码如下：

```
syms k x a
y = (1 + x)^3;
r = taylor(y, x)
```

输出结果如下：

```
r =
1 + 3 * x + 3 * x^2 + x^3
```

所以, $(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$ 。

【例 5.27】 将 $\cos x$ 展开成 10 项的泰勒级数。

代码如下：

```
syms x
y = cos(x);
r = taylor(y, x, 10)
```

输出结果如下：

```
r =
1 - 1/2 * x^2 + 1/24 * x^4 - 1/720 * x^6 + 1/40320 * x^8
```

所以, $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{40320}x^8$ 。

5.4 泰勒级数计算器

在 MATLAB 中,有一个“泰勒级数计算器”。输入命令“taylortool”,泰勒级数计算器就会显示出来。显示函数 $f = x \cos x$ 在区间 $[-2\pi, 2\pi]$ 内的图形,同时显示函数 f 的前 $N=7$ 项的泰勒多项式级数和图形。命令“taylortool('f')”则是显示函数 f 在区间 $[-2\pi, 2\pi]$ 内的图形,如图 5-1 所示。

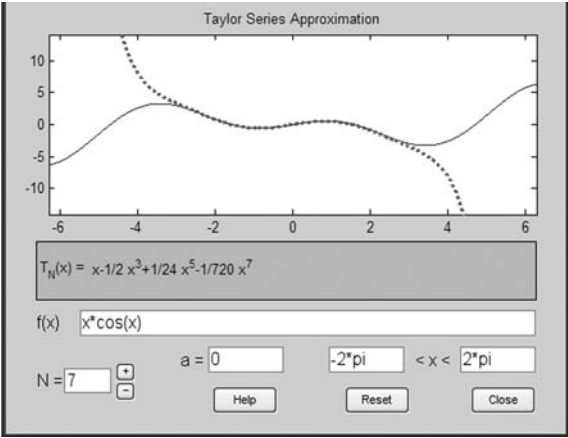


图 5-1 函数 $f(x)=x \cos x$ 泰勒展开式

该界面用于观察函数 $f(x)$ 在给定的区间上被 N 阶泰勒多项式 $T_N(x)$ 逼近的情况。界面中 N 的默认值为 7, 可以用其右侧的按键改变阶次, 也可以直接写入阶次; 界面上的 a 是级数的展开点, 默认值为 0; 函数的观察区默认设置值为 $[-2\pi, 2\pi]$ 。

图中, $f(x)=x \cos x$, 其泰勒展开式为 $T_N(x)=x-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{24}x^5-\frac{1}{720}x^7$ 。 $f(x)$ 的图形为实线, $T_N(x)$ 为虚线。

图 5-2 中, $f(x)=xe^x$, 其泰勒展开式为 $T_N(x)=x+x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{24}x^5+\frac{1}{120}x^6+\frac{1}{720}x^7$ 。 $f(x)$ 的图形为实线, $T_N(x)$ 为虚线。

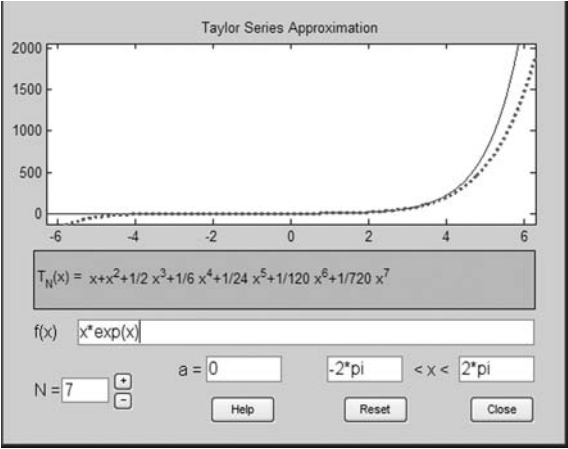


图 5-2 函数 $f(x)=xe^x$ 泰勒展开式

图 5-3 中, $f(x)=\frac{1}{x-1}$, 其泰勒展开式为 $T_N(x)=-1-x-x^2-x^3-x^4-x^5-x^6-x^7$ 。 $f(x)$ 的图形为实线, $T_N(x)$ 为虚线。

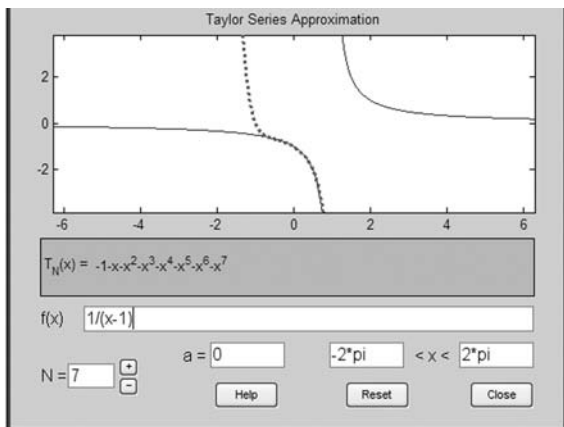


图 5-3 函数 $f(x) = \frac{1}{x-1}$ 泰勒展开式

5.5 多变量函数的泰勒级数

前面介绍过单变量的泰勒公式,本节讨论多变量的泰勒公式。二元函数的泰勒公式为

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) + \\ &\quad \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0, y_0) + \cdots + \\ &\quad \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x_0, y_0) + R_n \end{aligned} \quad (5-5)$$

其中,

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \quad (0 < \theta < 1) \quad (5-6)$$

R_n 的表达式(5-6)称为拉格朗日型的余项。

在 MATLAB 中,调用 Maple 语言中的 `mtaylor()` 函数求取多变量函数的泰勒幂级数展开。其调用格式为:

$F = \text{maple}('mtaylor', f, '[x_1, x_2, \dots]', k)$, 按 $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots$ 进行泰勒幂级数展开。其中,参数 f 为原函数的符号表达式, $x_1, x_2, \dots$ 为自变量, k 为展开的项数,默认值为 6 项。

$F = \text{maple}('mtaylor', f, '[x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n]', k)$, 按 $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$ 进行泰勒幂级数展开。其中, $k-1$ 为泰勒幂级数展开的最高阶次, f 为原多变量函数, $x_1, x_2, \dots$ 为函数表达式中的自变量。maple 函数在调用时,自变量的引号不能省略,该调用格式完全将这些信息传递给 maple。

【例 5.28】 计算函数 $z = f(x, y) = (x^2 - 2x + 3)e^{-x^2 - 2y^2 - 2xy} \sin x$ 关于原点的前 5 项泰勒幂级数展开。

代码如下:

```
syms x y
f = (x.^2 - 2 * x + 3) * exp(-x.^2 - 2 * y.^2 - 2 * x * y) * sin(x);
F = maple('mtaylor', f, '[x,y]', 5)
```

输出结果如下:

```
F =
3 * x - 2 * x^2 - 5/2 * x^3 - 6 * y * x^2 - 6 * y^2 * x + 7/3 * x^4 + 4 * y * x^3 + 4 * y^2 * x^2
```

所以, $z = f(x, y) = 3x - 2x^2 - \frac{5}{2}x^3 - 6yx^2 - 6y^2x + \frac{7}{3}x^4 + 4yx^3 + 4y^2x^2$ 。

【例 5.29】 计算函数 $z = f(x, y) = x^y$ 在点(1,4)处的三阶泰勒级数展开。

代码如下:

```
syms x y
f = x.^y;
F = maple('mtaylor', f, '[x=1,y=4]', 3)
```

输出结果如下:

```
F =
- 3 + 4 * x + 6 * (x - 1)^2 + (y - 4) * (x - 1)
```

所以, $f(x, y) = x^y = -3 + 4x + 6(x-1)^2 + (y-4)(x-1)$ 。

【例 5.30】 计算函数 $z = f(x, y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$ 在点(0,0)处的四阶泰勒级数展开。

代码如下:

```
syms x y
f = sqrt(1 + x.^2 + y.^2);
F = maple('mtaylor', f, '[x=0,y=0]', 4)
```

输出结果如下:

```
F =
1 + 1/2 * x^2 + 1/2 * y^2
```

所以, $z = f(x, y) = \sqrt{1+x^2+y^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ 。

【例 5.31】 计算函数 $z = f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 2y + 4$ 在点(-1,1)处的四阶泰勒级数展开。

代码如下:

```
syms x y
f = x.^2 + x * y + y.^2 + 3 * x - 2 * y + 4;
F = maple('mtaylor', f, '[x=-1,y=1]', 4)
```

输出结果如下:

```
F =
2 * x + 3 - y + (x + 1)^2 + (y - 1) * (x + 1) + (y - 1)^2
```

所以, $z = x^2 + xy + y^2 + 3x - 2y + 4 = 2x + 3 - y + (x+1)^2 + (y-1)(x+1) + (y-1)^2$ 。

【例 5.32】 计算函数 $z=f(x,y)=x^2+xy+y^2+3x-2y+4$ 在点 $(1,1)$ 处的四阶泰勒级数展开。

代码如下:

```
syms x y
f = x * x + x * y + y * y + 3 * x - 2 * y + 4;
F = maple('mtaylor', f, '[x = 1, y = 1]', 4)
```

输出结果如下:

```
F =
1 + 6 * x + y + (x - 1)^2 + (x - 1)(y - 1) + (y - 1)^2
```

所以, $z=x^2+xy+y^2+3x-2y+4=1+6x+y+(x-1)^2+(x-1)(y-1)+(y-1)^2$ 。

5.6 傅里叶级数

有两类级数特别重要,一类是前面已经分析过的幂级数,另一类是本节要讨论的三角级数。幂级数是非负整幂函数的无穷和,三角级数则是三角函数的无穷和。傅里叶级数就是三角级数中的一类。

收敛定理: 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数,如果它满足:

- (1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点;
- (2) 在一个周期内至多只有有限个极值点。

那么,由傅里叶系数

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n=1,2,\cdots)$$

所定出的傅里叶级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

在区间 $[-\pi, \pi]$ 收敛,并且它的和

- (1) 当 x 为 $f(x)$ 的连续点时,等于 $f(x)$;
- (2) 当 x 为 $f(x)$ 的间断点时,等于 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$;
- (3) 当 x 为区间的端点时,即当 $x=-\pi$ 或 $x=\pi$ 时,等于 $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$ 。

1. 周期为 2π 的周期函数的傅里叶级数

傅里叶级数定理: 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, $f(x)$ 在区间 $(-\pi, \pi)$ 可以展开成如下的傅里叶级数:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (5-7)$$

其中,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad (n=1, 2, \dots) \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad (n=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (5-8)$$

正弦级数: 当 $f(x)$ 是奇函数时, 傅里叶级数为只含有正弦项的正弦级数, 即

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx \quad (5-9)$$

其中,

$$\begin{aligned} a_n &= 0, \quad (n=0, 1, 2, \dots) \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (5-10)$$

余弦级数: 当 $f(x)$ 是偶函数时, 傅里叶级数为只含有余弦项的余弦级数, 即

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx \quad (5-11)$$

其中,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n=0, 1, 2, \dots) \\ b_n &= 0, \quad (n=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (5-12)$$

由傅里叶级数定理可知, 任何周期函数信号都可以看作不同振幅、不同相位的无穷多个正弦波的叠加。

【例 5.33】 $f(x)$ 以 2π 为周期, 在 $[-\pi, \pi]$ 有 $f(x) = x^2$, 试求其傅里叶展开式。

解: 先求傅里叶系数。由 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 是偶函数(图 5-4), 知 $b_n = 0$ 。

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx \end{aligned}$$

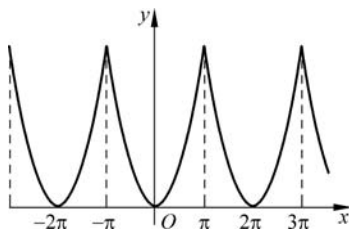


图 5-4 例 5.33 的波形

代码如下:

```
syms x n
f = x^2;
a0 = int(f, x, -pi, pi)/pi
an = int(f * cos(n * x), 'x', -pi, pi)/pi
```

输出结果如下:

$$a_0 = \frac{2}{3} \pi^2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi n^3} (-2 \sin(\pi n) + n^2 \pi^2 \sin(\pi n) + 2n\pi \cos(\pi n)) = \frac{4}{n^2} \cos(n\pi)$$

$$\text{即 } a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi n^3} (-2 \sin(n\pi) + n^2 \pi^2 \sin(n\pi) + 2n\pi \cos(n\pi)) = \frac{4}{n^2} \cos(n\pi)$$

$$= (-1)^n \frac{4}{n^2}$$

$$\text{所以, } x^2 = \frac{1}{3} \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}, x \in [-\pi, \pi]。$$

【例 5.34】 将函数

$$f(t) = E \left| \sin \frac{t}{2} \right|, \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

展开成傅里叶级数。其中, E 是正的常数。

解: 求傅里叶系数。由 $f(t)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 是偶函数(图 5-5), 知 $b_n = 0$ 。

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = \frac{E}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| \cos nt \, dt = \frac{2E}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} \cos nt \, dt$$

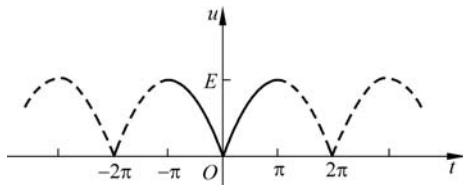


图 5-5 例 5.34 的波形

代码如下:

```
syms x n t E
f = sin(t/2);
an = (2 * E) * int(f * cos(n * t), t, 0, pi) / pi
```

输出结果如下:

$$a_n = \frac{4 * E * (2 * n * \sin(\pi * n) - 1)}{(-1 + 4 * n^2) * \pi}$$

即

$$a_n = \frac{4E(2n \sin n\pi - 1)}{\pi(4n^2 - 1)} = -\frac{4E}{\pi(4n^2 - 1)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

将求得的系数代入式(5-7), 得 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \frac{4E}{\pi} \left(\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nt}{4n^2 - 1} \right), \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

【例 5.35】 将以下周期函数展开成傅里叶级数：

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

解：这个函数满足收敛定理的条件，它在 $[-\pi, \pi]$ 内连续，在端点不连续。函数图形如图 5-6 所示，所以，对应的傅里叶级数在区间 $[-\pi, \pi]$ 内收敛于 $f(x)$ ，而在端点处收敛于 $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \frac{-\pi+0}{2} = -\frac{\pi}{2}$ 。

计算傅里叶系数如下：

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x \cos nx dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x \sin nx dx \end{aligned}$$

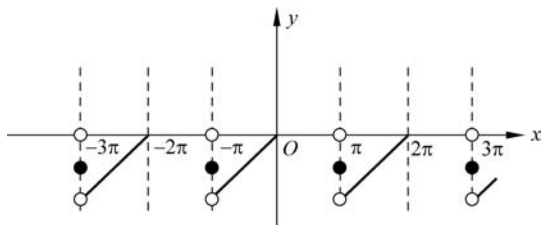


图 5-6 例 5.35 波形

代码如下：

```
syms x n
f = x;
a0 = int(f, x, -pi, 0)/pi
an = int(f * cos(n * x), x, -pi, 0)/pi
bn = int(f * sin(n * x), x, -pi, 0)/pi
```

输出结果如下：

```
a0 =
- 1/2 * pi
an =
- (cos(pi * n) + n * sin(pi * n) * pi - 1)/n^2/pi
bn =
- (- sin(pi * n) + n * cos(pi * n) * pi)/n^2/pi
```

即 $a_0 = -\frac{\pi}{2}$;

$$a_n = -\frac{\cos n\pi + n\pi \sin n\pi - 1}{n^2\pi} = \frac{1 - \cos n\pi}{n^2\pi} = \frac{1}{n^2\pi} [1 - (-1)^n]$$

即 $a_2, a_4, a_6, \dots$ 为 0, 而 $a_1 = \frac{2}{\pi 1^2}, a_3 = \frac{2}{\pi 3^2}, a_5 = \frac{2}{\pi 5^2}, \dots$;

$$b_n = \frac{\sin n\pi - n\pi \cos n\pi}{n^2\pi} = \frac{-\cos n\pi}{n} = -\frac{(-1)^n}{n}$$

即

$$b_1 = 1, \quad b_2 = -\frac{1}{2}, \quad b_3 = \frac{1}{3}, \dots$$

将这些系数代入式(5-7),就求得已给函数 $f(x)$ 的傅里叶级数为

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{1^2} \cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \dots \right) + \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots \right) \\ (-\pi < x < \pi)$$

【例 5.36】 将周期函数

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

分别展开为正弦级数和余弦级数。

解: (1) 展开为正弦级数。对函数 $f(x)$ 作奇延拓(图 5-7)。

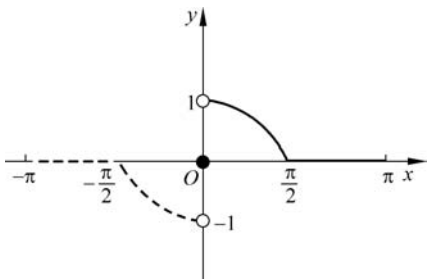


图 5-7 例 5.36 波形(正弦级数)

按照计算正弦函数的公式,有

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos x \sin nx \, dx$$

代码如下:

```
syms x n a
f = cos(x);
bn = 2 * int(f * sin(n * x), x, 0, pi/2)/pi
b1 = 2 * int(f * sin(x), x, 0, pi/2)/pi
```

输出结果如下:

```
bn =
    2 * (n - sin(1/2 * pi * n)) / (-1 + n^2) / pi
b1 =
    1/pi
```

$$\text{所以, } f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx = \frac{1}{\pi} \left[\sin x + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \left(n - \sin \frac{n\pi}{2} \right) \sin nx \right].$$

(2) 展开为余弦级数。对函数 $f(x)$ 作偶延拓(图 5-8)。

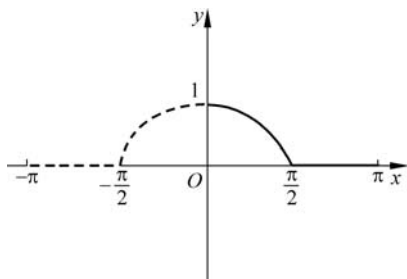


图 5-8 例 5.36 波形(余弦波形)

按照计算余弦函数的公式,有

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos x \cos nx \, dx$$

代码如下:

```
syms x n a
f = cos(x);
an = 2 * int(f * cos(n * x), x, 0, pi/2)/pi
a1 = 2 * int(f * cos(x), x, 0, pi/2)/pi
```

输出结果如下:

```
an =
- 2/(- 1 + n^2) * cos(1/2 * pi * n)/pi
a1 =
1/2
```

$$\text{所以, } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos x + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{4k^2 - 1} \cos 2kx.$$

2. 周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数

傅里叶级数定理: 设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的周期函数, $f(x)$ 在区间 $(-l, l)$ 可以展开成如下的傅里叶级数:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (x \in \mathbb{C}) \quad (5-13)$$

其中,

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, & (n=0, 1, 2, \dots) \\ b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, & (n=1, 2, \dots) \end{cases} \quad (5-14)$$

当 $f(x)$ 是奇函数时,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (x \in \mathbb{C}) \quad (5-15)$$

其中,

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=1, 2, \dots) \quad (5-16)$$

当 $f(x)$ 是偶函数时,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (x \in \mathbb{C}) \quad (5-17)$$

其中,

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (5-18)$$

【例 5.37】 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数,它在 $[-2,2)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x < 0 \\ h, & 0 \leq x < 2 \end{cases} \quad (\text{常数 } h \neq 0)$$

将 $f(x)$ 展开为傅里叶级数,并作出级数的和函数的图形。

解: 这时 $l=2$, 按照周期为 $2l$ 的函数的傅里叶级数公式[式(5-14)], 有

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^2 h \cos \frac{n\pi x}{2} dx$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_0^2 h \sin \frac{n\pi x}{2} dx$$

代码如下:

```
syms x n a h
f = h;
an = (1/2) * int(f * cos((n * pi * x)/2), x, 0, 2)
a0 = int(f, x, 0, 2)/2
bn = int(f * sin(n * pi * x)/2, x, 0, 2)/2
```

输出结果如下:

```
an =
    sin(pi * n) * h/pi/n
a0 =
    h
bn =
    -h * (-1 + cos(pi * n))/pi/n
```

$$\text{即 } a_n = \frac{h \sin n\pi}{n\pi} = 0, a_0 = 0, b_n = \frac{h}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} \frac{2h}{n\pi}, & n=1,3,5,\dots \\ 0, & n=2,4,6,\dots \end{cases}$$

将 a_n, b_n 代入式(5-13), 得

$$f(x) = \frac{h}{2} + \frac{2h}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2} + \dots \right) \\ (-\infty < x < +\infty; x \neq 0, \pm 2, \pm 4, \dots)$$

级数的和函数图形如图 5-9 所示。

【例 5.38】 将周期函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{a}{2} \\ -1, & \frac{a}{2} < x < a \end{cases}$$

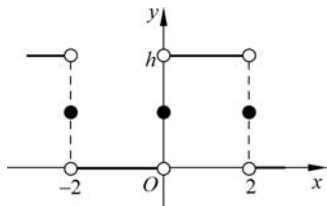


图 5-9 例 5.37 波形

展开为余弦傅里叶级数(图 5-10)。

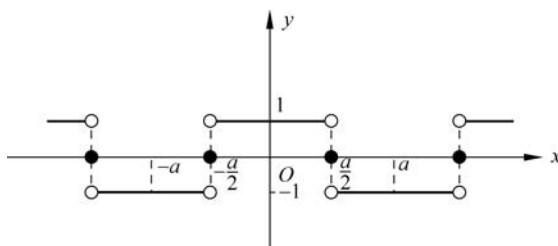


图 5-10 例 5.38 波形

解: 这时 $l=a$, 由式(5-18)得

$$a_0 = \frac{2}{a} \int_0^{\frac{a}{2}} 1 \cdot dx + \frac{2}{a} \int_{\frac{a}{2}}^a (-1) \cdot dx$$

$$a_n = \frac{2}{a} \int_0^{\frac{a}{2}} 1 \cdot \cos \frac{n\pi x}{a} dx + \frac{2}{a} \int_{\frac{a}{2}}^a (-1) \cdot \cos \frac{n\pi x}{a} dx$$

代码如下:

```
syms x n a
f = 1;
a0 = (2/a) * int(f,x,0,a/2) + (2/a) * int(f*(-1),x,a/2,a)
an = (2/a) * int(f*cos(pi*n*x/a),x,0,a/2) + (2/a) * int(-1*f*cos(pi*n*x/a),x,a/2,a)
```

输出结果如下:

```
a0 =
0
an =
2 * sin(1/2 * pi * n)/pi/n + 2 * (sin(1/2 * pi * n) - sin(pi * n))/pi/n
```

$$\text{即 } a_0 = 0, a_n = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi}{2} - \sin n\pi \right) = \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}$$

代入式(5-17), 得

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\cos \frac{\pi x}{a} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi x}{a} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi x}{a} - \dots \right) \quad \left(0 < x < \frac{a}{2}, \frac{a}{2} < x < a \right)$$

【例 5.39】 将 $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2}$ 在 $[0, \pi]$ 展开成余弦级数。

解: 根据偶延拓计算傅里叶系数

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} \right) dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} \right) \cos nx dx$$

代码如下:

```
syms x n
f = x^2/4 - pi*x/2;
a0 = 2 * int(f,x,0,pi)/pi
```

```
an = 2 * int(f * cos(n * x), x, 0, pi) / pi
```

输出结果如下:

```
a0 =
- 1/3 * pi^2
an =
- 1/2 * (- 2 * pi * n + n^2 * sin(pi * n) * pi^2 + 2 * sin(pi * n)) / n^3 / pi
```

$$\text{即 } a_0 = -\frac{\pi^2}{3}, a_n = -\frac{1}{2n^3\pi}(-2n\pi + n^2\pi^2\sin n\pi + 2\sin n\pi) = \frac{1}{n^2}$$

代入式(5-17),得

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} = -\frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

【例 5.40】 将 $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2}$ 在 $[0, \pi]$ 展开成正弦级数。

解: 根据奇延拓计算傅里叶系数

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} \right) \sin nx \, dx$$

代码如下:

```
syms x n
f = x^2/4 - pi * x/2;
bn = 2 * int(f * sin(n * x), x, 0, pi) / pi
```

输出结果如下:

```
bn =
1/2 * (- 2 + n^2 * cos(pi * n) * pi^2 + 2 * cos(pi * n)) / n^3 / pi
```

$$\text{即 } b_n = \frac{1}{2n^3\pi}(-2 + n^2\pi^2\cos n\pi + 2\cos n\pi) = \frac{(-1)^n\pi}{2n} + \frac{1}{n^3\pi}((-1)^n - 1), n=1, 2, \dots$$

因此,

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n} \sin nx - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$$

3. 傅里叶级数的复数形式

傅里叶级数的复数形式为

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{n\pi x}{l}i} \quad (x \in \mathbb{C}) \quad (5-19)$$

其中,

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-\frac{n\pi x}{l}i} dx, \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (5-20)$$

这就是傅里叶系数的复数形式。

【例 5.41】 把宽为 τ 、高为 h 、周期为 T 的矩形波(图 5-11)展开成复数形式的傅里叶级数。

解: 在一个周期 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 内矩形波的函数表达式为

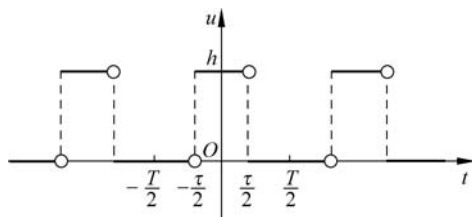


图 5-11 例 5.41 波形

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{T}{2} \leq t < -\frac{\tau}{2} \\ h, & -\frac{\tau}{2} \leq t < \frac{\tau}{2} \\ 0, & \frac{\tau}{2} \leq t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

按照式(5-20),有

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-\frac{2n\pi i}{T}t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} h e^{-\frac{2n\pi i}{T}t} dt$$

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} h dt$$

代码如下:

```
syms x n t T tao
f = h;
cn = int(f * exp(-2 * n * pi * t * i / T), t, -tao/2, tao/2) / T
c0 = int(f, t, -tao/2, tao/2) / T
```

输出结果如下:

```
cn =
-1/2 * i * h * (exp(i * n * pi * tao / T) - exp(-i * n * pi * tao / T)) / n / pi
c0 =
h * tao / T
```

$$\text{即 } c_n = -\frac{ih}{2n\pi} (e^{\frac{in\pi\tau}{T}} - e^{-\frac{in\pi\tau}{T}}) = \frac{h}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$c_0 = \frac{h\tau}{T}$$

将系数 c_n 代入式(5-19),得

$$f(t) = \frac{h\tau}{T} + \frac{h}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\tau}{T} e^{\frac{2n\pi i}{T}t} \quad \left(-\infty < t < +\infty; t \neq nT \pm \frac{\tau}{2}, n = \pm 1, \pm 2, \dots\right)$$

本章小结

本章无穷级数主要包括级数的求和、阶乘的计算、单变量函数的泰勒级数展开、多变量函数的泰勒级数展开和傅里叶级数等内容。