

一、数之源



1. 记数史上的传奇

我们这个星球的文明,有着惊人的相似。无论是东方还是西方,都有着一样的“数之初”。

1937年,人们在维斯托尼斯发现了一根大约40万年前的幼狼桡骨,上面刻有55道深痕。这是至今人们发现的最早的记数资料。图1.1.1中左图是我国北京郊区周口店出土,大约1万年前“山顶洞人”用的刻符骨管。骨管上的点圆形洞代表着数字“1”;而长圆形洞,则很可能代表数字“10”。如果考古学家最终确证是这样的话,那么左、右两图分别代表“5”和“13”。令人惊讶的是,这种古老的刻划记数法,在个别地区竟被使用到近代!图1.1.2是我国云南地区傣族20世纪50年代的一块刻木,上面的4个符号表达了以下意思:“三个人,月亮圆时,和我们见面了,今送上大中小三包土产,以表心意。”

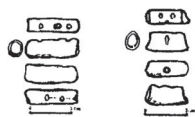


图 1.1.1

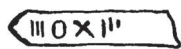


图 1.1.2

结绳记数,几乎在所有民族的文化中都曾出现过。传说古波斯王在一次打仗中,命令将士们守一座桥,要守60天。为了把“60”这个数准确地表示出来,波斯王用一根长长的皮条,在上面系了60个结。他对将士们说:“我走后你们一天解开一个结,什么时候解完了,你们的任务就完

成了,可以回家了!”我国的《易经》也曾记述过上古时期我们祖先“结绳而治”的情况。图 1.1.3 是甲骨文中的“数”字。它的右边表示右手,左边则是一根打了许多绳结的木棍。细细看去,还真有点像一只手在打结呢!



图 1.1.3

在南美的印加族,人们习惯每收进一捆庄稼,就在绳子上挽一个结,用来记录收获多少。这种习俗在一些偏僻的山村,甚至一直沿袭到现在。

久远的年代,常常会使事件笼罩上一层神秘的色彩。地球上几个最古老民族的早期数字系统,对于数学史家来说,依然存在着不少的谜。

这些数字系统,基本上是十进制的。这种进制大约是因为人们的双手都长着十个指头的缘故吧。

然而古巴比伦的楔形文字,为什么既有十进制,又有六十进制呢? 玛雅人的数字在画第一个椭圆时表示“乘以 20”,而当画第二个椭圆时为什么变成“乘以 18”? 在古埃及数字中为什么用“●”表示“100”? 这些问题的答案至今人们还不是很清楚。(图 1.1.4)



图 1.1.4

古代中国的数字,有些是象形的,如一至四。至于为什么用“百”和“千”表示百和千?人们猜测:“百”可能表示果子,而“千”表示草。纤纤细草,遍布大地;累累硕果,挂满树梢!用这两样东西代表“百”和“千”的数量,似乎有点道理。令人难以捉摸的是,为什么代表“一万”的符号,如此像一只蝎子?(图 1.1.5)莫非史前有一个时期,这种其貌不扬的小动物,曾经极度繁衍,肆虐一时?为此,上古人书其形,表其多,称为“万”。事实究竟如何,只好留待史学家去细细查考了!



图 1.1.5

现今普遍使用的阿拉伯数字,是印度人创造的。它被冠以“阿拉伯”的头衔,是一种历史的误会。欧洲人起初认为这种先进的数码来自阿拉伯。其实阿拉伯地区仅仅充当了转手而已!(图 1.1.6)

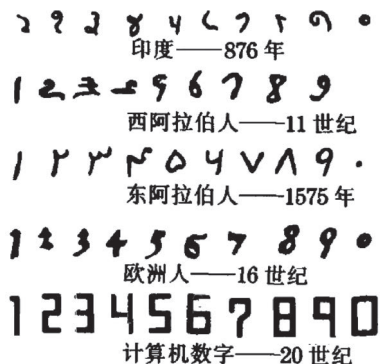


图 1.1.6

阿拉伯数字不仅简洁、明了,而且对于“0”的使用,更是一种伟大的创造!这种数字无与伦比的优点,甚至到今天人们还在逐渐体会。读者只要看一看计算器的显示屏上,是怎样显现出这些赏心悦目的数字,就必然会

有一种深刻的感受。

国外曾有人考证,阿拉伯数字的发明是基于角的数量,如图 1.1.7 所示:“1”有 1 个角,“2”有 2 个角,“3”有 3 个角……



图 1.1.7

这一观点,虽说有些牵强,但仔细琢磨似也不无道理,算得上一种别出心裁的奇异之说。

有趣的是,大自然似乎也对这种数字表示偏爱。图 1.1.8 是生长在热带地区的一种蝴蝶,它翅膀中央的图案,竟是两个颇为标准的阿拉伯数字 8 和 9。这真是天工造物!



图 1.1.8

在记数传奇的最后,我们还要提一下近代的一个大数 googol。

1940 年,美国作家 E. 卡斯纳在科普书《数学和想象》中,引进了一个叫 googol 的数。此数等于 100 个 10 连乘,即 10^{100} 。它相当于中国人讲的

“一万亿亿亿亿亿亿亿亿亿亿亿”。

不知什么缘故,这个非数学家创造出的数 googol 居然很快风靡全球,以至于如今的词典也收进了这个新词。这不能不算是 20 世纪的一件奇事!

2. 大数春秋

原始的人类对数的认识是极为粗糙的。那时部落的智者,其计数水平无论如何也难以与今天的幼儿园小朋友相抗衡。那时最高级别的数学竞赛大概会是这样的:人们期望在数的大小比较上一决雌雄!某甲先报了一个他认为最大的数“二”,不料某乙智商颇“高”,居然报出一个比“二”还大一的数“三”,这是那个时代人们对“大数”认识的极限。某甲苦思冥想,实在想不出什么更大的数。他本想说“许多”,因为他认为“许多”要比“三”大。但“许多”是数吗?他茫然了,终于表示认输!

到了上古时期,人们仍满足于一些不大的数。因为对于日常生活,这已经足够了!罗马数字中的最大记号是“M”,它代表着 1000。倘若古罗马人想用自己的记数法表示现今罗马城人口的话,那将是一项艰巨的工作。因为,他要一个接一个地写上数以千计的“M”才行!

在古埃及,人们认为 10000 是极大的数,这样的数已经模糊得令人难以想象,所以称为“黑暗”。几个世纪以后界限放宽到 100000000,即“黑暗中的黑暗”,并认为这是人类智慧的边界。

从对 3000 多年前的殷墟的考古中,人们在兽骨和龟板上的刻字里发现了许多数字,其中最大的达“三万”。图 1.2.1 是出土的殷墟甲骨上的数目字。

印度是“大数”传说的故乡。据说,舍罕王打算重赏象棋发明人宰相西萨·班。这位聪明的大臣跪在国王面前说:“陛下,请您在这张棋盘的第一个小格内,赏我一粒麦子;在第二个小格内给两粒;第三个小格内给四粒;以后每一小格都比前一小格加一倍。陛下啊,把这样摆满棋盘 64 个格子的麦粒,都赏赐给您的仆人吧!”



图 1.2.1

西萨·班宰相要求的麦粒总数为

$$2^{64} - 1 = 18446744073709551615$$

这相当于当今世界 500 年小麦产量的总和!

这个故事的最终结局人们并不清楚。猜想西萨·班聪明反被聪明误，最后因这笔无法兑现的奖赏，而被舍罕王砍掉了脑袋。

另一个大数传说与“世界末日”问题有关。传说在印度的贝拿勒斯圣庙里安放着一块黄铜板，板上插着 3 根针(图 1.2.2)。最初，其中的一根针从上到下串有由小到大的 64 叶金片。据说当时梵天曾经授言：无论黑夜白天，都要有一个僧侣值班，把金片在 3 根针上移来移去，但小片永远要在大片上面。当所有的 64 叶金片，都从起先的那根针，移到另一根针上时，“世界的末日”便将来临!

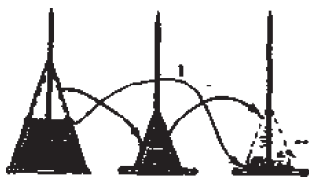


图 1.2.2

计算的结果表明，要把 64 叶金片都移到另一根针上去，需要移动的次数，恰好与西萨·班要求的麦粒数相等。如果一秒钟移一次的话，则需要

移动约 5800 亿年！这远远超过了整个太阳系的存在时间！

在古希腊的科学家中，阿基米德的智慧是无与伦比的。他找到了一种表示大数的方法，并用此表示出整个宇宙所能装下的砂粒数。这个数字相当于 10^{63} 。

然而阿基米德当时所认识的宇宙半径约为今天人们认识的宇宙半径的 $\frac{1}{38700000000}$ 。由此算来，现今宇宙所能装下的砂粒数应为 5.82×10^{94} 。

数是量的抽象，量则是数的载体。人类对现实量的认识随着时代的进步而逐渐深化。

迄今为止，人类所认识的空间尺度最小的物质是“夸克”。夸克的直径约为 10^{-18} 米，而今天人类认识的宇宙可见边界的直径，却远达 930 亿光年，即约 10^{27} 米，相比之下可测长度跨越了 45 个数量级。

时间只能从过去走到现在，又从现在奔向将来！一个 Ω 介子的寿命，少到只有 10^{-22} 秒，而红矮星的寿命却高达 3×10^{18} 秒，可测时间竟跨越了 40 个数量级。

在质量方面，一个电子质量约为 10^{-30} 千克，而宇宙总质量却多达 10^{53} 千克，相比之下可计质量跨越了 83 个数量级。

但所有上述这些，都还没有超过按阿基米德方法算出的现今宇宙砂粒数。

目前，在有意义的大数中，“梅森素数”稳居榜首！

1644 年，法国数学家 M. 梅森 (M. Mersenne) 指出，在形如 $2^p - 1$ 的式子中存在着许多素数。为方便叙述，我们把 $M_p = 2^p - 1$ 称为“梅森数”，而把梅森数中的素数称为“梅森素数”。

梅森本人列出了 9 个“梅森素数”，它们是

$M_2, M_3, M_5, M_7, M_{13}, M_{17}, M_{19}, M_{31}, M_{127}$ 。

人们至今仍不知道，梅森是用什么办法判定他找到的这些数是素数的。但梅森曾经断言 M_{67} 和 M_{257} 是素数，后来被否定了。同时梅森还漏

掉了 M_{127} 之前的 3 个素数 M_{39} 、 M_{61} 和 M_{107} 。

1962 年,人们借助电子计算机,又找到了 8 个梅森素数,其中最小的一个是 $M_{521} \approx 6.86 \times 10^{156}$,它已大大超过了 googol! 没过多久,美国伊利诺伊大学的数学家又找到了 3 个更大的梅森素数,其中最大的是 M_{11213} ,这个数为

$$M_{11213} \approx 2.81 \times 10^{3375}$$

这更是 googol 望尘莫及的!

M_{11213} 的冠军宝座尚未坐热便宣告下台,取而代之的是 M_{19937} 。此后,每过几年,冠军宝座都会轮番易手,到 1996 年 11 月冠军尚属 $M_{1398269}$,而到 1998 年 1 月,却又换成了 $M_{3021377}$ 。2018 年第 50 个梅森素数 $M_{77232917}$ 刚被找到,在同年 12 月 7 日,人们又找到了第 51 个梅森素数 $M_{82589933}$,它有 24862048 位,如果用普通字号将它打印下来,其长度将超过 100 千米。

$M_{82589933}$ 的后承完全数为

$$2^{82589932} (2^{82589933} - 1)$$

这一长达 49724095 位的大数,是目前人类认识的有意义的数中的最高纪录!

3. π 的史诗

π 是圆周长与直径的比值。一部计算圆周率 π 的历史,被誉为人类“文明的标志”。

在上古时期,人们普遍认为圆周长等于直径的 3 倍。我国早期的数学著作《周髀算经》里,就有“径一周三”之说。古希伯来人似乎也是这样认为的。据传当时他们要建造一个熔池,规定:“池为圆形,对径为十腕尺,池高为五腕尺,其周长为三十腕尺。”可见,当时的希伯来人也认为 $\pi=3$ 。

在历史上科学地确定 π 值,要首推古希腊著名科学家阿基米德。公元

前 3 世纪,阿基米德极耐心地计算了圆内接正 96 边形的周长,发现 π 的值略小于 $\frac{22}{7}$,而略大于 $\frac{223}{71}$,从而得出 $\pi=3.14$ 。



阿基米德(公元前 287—前 212)

263 年前后,我国魏晋时期的数学家刘徽,利用“割圆术”计算了圆内接正 3072 边形的面积,求得

$$\pi \approx \frac{3927}{1250} = 3.1416$$

在此之前,我国东汉时期的科学家张衡,曾主张在实用中取

$$\pi \approx \sqrt{10} = 3.16$$

刘徽之后又过了大约 200 年,我国南北朝时期杰出的数学家祖冲之,用至今人们还不太清楚的方法,确定了 π 的真值介于 3.1415926 与 3.1415927 之间。他还主张用 $\frac{22}{7}$ 作为 π 的粗略近似值(疏率),而用 $\frac{355}{113}$ 作为 π 的精确近似值(密率)。祖冲之求得的 π 值,具有很高的精确度。如果用它来由 $C=2\pi r$ 计算地球赤道的周长,其误差将不会超过 3 米!

祖冲之确定的 π 值的纪录,保持了近 1000 年! 直至 1427 年,中亚数学家阿尔·卡西计算了圆内接和外切正 $3 \times 2^{28} = 805306368$ 边形的周长后,得出 π 的更精确值,精确到小数点后 17 位:

$$\pi \approx 3.14159265358979323$$