数学培优竞赛新思维

数学培优竞赛讲座

（高二年级）

主　编　朱华伟
编　者　朱华伟　邱际春

清华大学出版社
北　京

内容简介

本书以高考数学难题、著名大学强基计划招生和国内外高中数学竞赛为背景，按照普通高中高二年级数学教科书的进度分专题编写，在内容的安排上力求与课堂教学同步，在夯实基础的同时，通过新颖、有趣的数学问题，构建通往高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛的捷径；在有利于学生把高中数学教科书的知识巩固深化的同时，恰到好处地为学生拓宽著名大学强基计划招生和竞赛数学的知识；以著名大学强基计划招生和高中数学竞赛中的热点、难点问题为载体，介绍竞赛数学中令人耳目一新的解题方法与技巧，激发学生创新与发现的灵感，开发智力，提高水平去参加高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛.

本书配套《数学培优竞赛一讲一练（高二年级）》（ISBN：9787302608585）可以帮助学生自我检测，《数学培优竞赛一讲一练》与《数学培优竞赛讲座》配套使用，能达到更好的学习效果.

本书可供高中准备参加高考数学、大学自主招生和高中数学竞赛的学生学习使用，也可供中学数学教师、数学爱好者、高等师范院校数学教育专业大学生、研究生及数学教师参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

数学培优竞赛讲座. 高二年级 / 朱华伟主编. —北京：清华大学出版社，2022.8
（数学培优竞赛新思维）
ISBN 978-7-302-61144-8

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①朱… Ⅲ. ①中学数学课－高中－教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 106850 号

责任编辑：王　定
封面设计：周晓亮
版式设计：思创景点
责任校对：成凤进
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-83470000　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：26.5　　**字　　数**：594 千字
版　　次：2022 年 8 月第 1 版　　**印　　次**：2022 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：89.80 元

产品编号：095772-01

前　言

从 1985 年我国第一次派队参加国际数学奥林匹克竞赛(简称 IMO)以来,中国代表队参加了 36 次 IMO(1985 年派两名队员参赛,1998 年因故没有参赛),22 次获总分第一(有 13 次六位队员都得金牌),八次第二,两次第三,第四、六、八名各一次,212 人次参赛,共获金牌 168 块,银牌 36 块,铜牌 6 块. 早在 1994 年,中国科学院数学物理学部王梓坤院士就写道:近年来,我国中学生在 IMO 中"连续获得团体冠军,个人金牌数也名列前茅,消息传来,全国振奋. 我国数学,现在有能人,后继有强手,国内外华人无不欢欣鼓舞". 这对青少年学好数学无疑是极大的鼓舞和鞭策,极大地激发了青少年学习数学的热情.

为了给对数学有兴趣的高中生提供一个扩展知识视野、提高解题能力和培养创新精神的平台,我们以高考数学难题、著名大学强基计划招生和国内外高中数学竞赛为背景,根据多年辅导高中生参加高考数学、大学自主招生、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛所积累下来的经验、体会和素材,编写了这套《数学培优竞赛讲座》(高一年级、高二年级、高三年级),以及配套的《数学培优竞赛一讲一练》(高一年级、高二年级、高三年级).

《数学培优竞赛讲座》按照普通高中数学教科书的进度分专题编写,在内容的安排上力求与课堂教学同步,采用从课内到课外逐步引申扩充、由浅入深、由易到难、循序渐进的教学方法;在夯实基础的同时,通过新颖、有趣的数学问题,构建通往高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛的捷径;在学生力所能及的范围内帮助学生扩展知识视野,提高思维能力;在有利于学生把高中数学教材的知识巩固深化的同时,又恰到好处地为学生拓宽有关强基计划和竞赛数学的知识;以高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛中的热点、难点问题为载体,介绍竞赛数学中令人耳目一新的解题方法与技巧,激发学生创新与发现的灵感,帮助学生开发智力,提高水平去参加高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛.

《数学培优竞赛讲座》以专题讲座的形式编写,每讲的主要栏目如下.

数学名言欣赏:以名人名言开宗明义,开启每讲的数学学习之旅.

知识方法述要:详细归纳相关的知识、方法与技巧,突出重点、难点和考点. 对于高中数学教科书没有的内容,尽可能给出新知识、新方法的产生背景. 给出知识、方法与技巧尽可能系统、完整.

例题精讲:含"分析""解"和"评注",从易到难,拾级而上,由基础题、提高题、综合题组成. 本丛书中很多例题的解答之后有评注,评注的作用是对某些问题或解答过程中意犹未尽之处进行阐述分析,以起到画龙点睛的效果;对可进一步深入研究的问题予以拓展引申,意在引导学生去创造;对一题多解的问题提出相关的解法,发现特技与通法之间的联系. 总之,评注的目的在于,一方面揭示问题的背景和来源,另一方面启迪学生发现解决问题的思路及通过合理猜测提出新问题的方法,使学生不仅知其然,更知其所以然,以期达到授之以渔的目的.

强化训练:含选择题、填空题、解答题,为方便自学,在书后每题均给出了详细解答过程.

《数学培优竞赛一讲一练》是《数学培优竞赛讲座》的配套练习册,可以为使用者提供自我检测;书后附有详细解答,可以检验使用者对数学知识的理解水平和掌握程度.《数学培优竞赛一讲一练》与《数学培优竞赛讲座》配套使用,能达到更好的学习效果.

本丛书注重数学基础知识的巩固提高和数学思想方法的渗透,凸显科学精神和人文精神的融合,加强对学生学习兴趣、创新精神、应用意识和分析问题解决问题能力的培养.希望通过本丛书的学习,能够使学生发现数学的美丽和魅力,体会数学的思想和方法,感受数学的智慧和创新,体验经过不懈的探索而获得成功的兴奋和快乐,进而激发学习数学的兴趣.

数学大师陈省身为2002年8月在北京举行的第24届国际数学家大会题词:“数学好玩.”我们深信本书能让学生品味到数学的无穷乐趣.著名数学家陈景润说:“数学的世界是变幻无穷的世界,其中的乐趣只有那些坚持不懈的人才能体会得到!”

本丛书是高中生参加数学竞赛的宝典,是冲刺著名大学强基计划招生、破解高考数学压轴题的利器,是中学数学教师进行数学竞赛辅导、进修的益友.

在本丛书的编写过程中,笔者参考并引用了有关资料中的优秀题目,为求简明,书中未一一注明出处,在此,谨向原题编者表示感谢.由于笔者水平有限,书中难免会有疏漏之处,诚挚欢迎读者批评与指正.

朱华伟

2022年1月于深圳中学新校区

目　　录

第 1 讲　等差数列与等比数列 …… 1
第 2 讲　数学归纳法(一) …… 10
第 3 讲　数列求和与数列极限 …… 19
第 4 讲　递推数列 …… 28
第 5 讲　递推方法 …… 38
第 6 讲　数列的性质 …… 46
第 7 讲　空间向量及其应用 …… 54
第 8 讲　直线与圆 …… 69
第 9 讲　椭圆 …… 78
第 10 讲　双曲线 …… 93
第 11 讲　抛物线 …… 110
第 12 讲　参数方程与极坐标 …… 128
第 13 讲　曲线系 …… 142
第 14 讲　解析几何的综合问题 …… 153
第 15 讲　解析法 …… 170
第 16 讲　三个基本计数原理 …… 182
第 17 讲　排列与组合 …… 189
第 18 讲　映射与计数 …… 199
第 19 讲　二项式定理与组合恒等式 …… 205
第 20 讲　概率与统计 …… 213
第 21 讲　证明不等式的基本方法 …… 233
第 22 讲　证明不等式的常用技巧 …… 240
第 23 讲　平均值不等式 …… 247
第 24 讲　柯西不等式 …… 255
第 25 讲　排序不等式 …… 264
第 26 讲　导数及其应用 …… 272
第 27 讲　凸函数与琴生不等式 …… 278
第 28 讲　含参数的不等式 …… 289
第 29 讲　不等关系在解题中的应用 …… 297
第 30 讲　数学归纳法(二) …… 303

强化训练参考答案 …… 311

第 1 讲　等差数列与等比数列

哪里有数，哪里就有美.

——普罗克洛斯(希腊)

知识方法述要

等差数列与等比数列是数列中最基础、最常见、最重要的两种类型. 在解决等差数列、等比数列的有关问题中，重要的数学思想方法有方程的思想、函数的思想、化归的思想，即列解关于五个基本量 a_1，d(或 q)，n，a_n 及 S_n 的方程、研究 a_n 与 S_n 关于 n 的函数的性质、将某些非等差(等比) 数列问题转化为等差(等比) 数列问题求解.

一、等差数列

1. 通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$，a_1 为首项，d 为公差；或者 $a_n=a_m+(n-m)d$.

数列$\{a_n\}$ 是等差数列$\Leftrightarrow 2a_n=a_{n+1}+a_{n-1}$. 若 a，A，b 成等差数列，则等差中项 $A=\dfrac{a+b}{2}$.

前 n 项和 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，或 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n$，是关于 n 的二次函数.

反之，若数列$\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=An^2+Bn$(A，B 为已知常数)，则数列$\{a_n\}$ 是等差数列.

等差数列的通项公式及前 n 项和公式中，对 a_1，d，n，a_n 及 S_n，只要已知这五个元素中的任意三个，便可求出其余两个.

2. 若$\{a_n\}$ 是等差数列，则 $k+l=m+n\Leftrightarrow a_k+a_l=a_m+a_n$. 特别地，当 $m+n=2p$ 时，有 $a_m+a_n=2a_p$.

3. 若$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 为等差数列，则$\{\lambda a_n+b_n\}$，$\{\lambda_1a_n+\lambda_2b_n\}$ 都为等差数列.

若$\{a_n\}$ 是等差数列，则 S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，$\cdots$ 也为等差数列.

4. S_n 最值的求法

方法 1　因等差数列($d\neq 0$) 前 n 项和是关于 n 的二次函数，所以可转化为求二次函数的最值(要注意数列的特殊性 $n\in\mathbf{N}_+$). 利用二次函数的对称性，n 取离二次函数对称轴最近的整数时，S_n 取最大值(或最小值). 若 $S_p=S_q$，则其对称轴为 $n=\dfrac{p+q}{2}$.

方法2 (1)“首正”的递减等差数列中,前 n 项和的最大值是所有非负项之和. 即当 $a_1>0,d<0$,由 $\begin{cases}a_n\geqslant 0,\\ a_{n+1}\leqslant 0,\end{cases}$ 可得 S_n 达到最大值时 n 的值.

(2)“首负”的递增等差数列中,前 n 项和的最小值是所有非正项之和. 即当 $a_1<0$,$d>0$,由 $\begin{cases}a_n\leqslant 0,\\ a_{n+1}\geqslant 0,\end{cases}$ 可得 S_n 达到最小值时 n 的值,或求 $\{a_n\}$ 中正负分界项.

二、等比数列

1. 通项公式为 $a_n=a_1q^{n-1}$,a_1 为首项,q 为公比;或者 $a_n=a_mq^{n-m}$,即有 $q^{n-m}=\dfrac{a_n}{a_m}$.

数列 $\{a_n\}$ 是等比数列 $\Leftrightarrow a_n^2=a_{n-1}\cdot a_{n+1}$. 若 a,G,b 成等比数列,则等比中项 $G=\pm\sqrt{ab}$.

等比数列的前 n 项和 S_n 公式:

(1) 当 $q=1$ 时,$S_n=na_1$;

(2) 当 $q\neq 1$ 时,$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$.

等比数列的通项公式及前 n 和公式中,涉及五个元素:a_1,q,na_n 及 S_n,只要已知这五个元素中的任意三个,便可求出其余两个.

2. 若 $\{a_n\}$ 是等比数列,则 $k+l=m+n\Leftrightarrow a_k\cdot a_l=a_m\cdot a_n$. 特别地,当 $m+n=2k$ 时,有 $a_n\cdot a_m=a_k^2$.

3. 若数列 $\{a_n\}$ 为等比数列,则每隔 $k(k\in\mathbf{N}_+)$ 项取出一项,即 $a_m,a_{m+k},a_{m+2k},a_{m+3k},\cdots$ 仍为等比数列.

若 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列,则数列 $\{\log_a a_n\}$ 是等差数列.

若 $\{a_n\}$ 为等比数列,则数列 $S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n},\cdots$ 是等比数列.

三、高阶等差数列

给定的数列 $\{a_n\}$,把它的连续两项 a_{n+1} 与 a_n 的差 $(a_{n+1}-a_n)$ 记为 b_n,得到一个新数列 $\{b_n\}$,把数列 $\{b_n\}$ 称为原数列 $\{a_n\}$ 的一阶差数列;如果 $c_n=b_{n+1}-b_n$,则称数列 $\{c_n\}$ 是数列 $\{b_n\}$ 的一阶差数列,$\{c_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的二阶差数列;依次类推,可以得到数列 $\{a_n\}$ 的 p 阶差数列,其中 $p\in\mathbf{N}_+$.

如果某一数列的 p 阶差数列是一个非零常数列,则称该数列为 p 阶等差数列. 其实一阶等差数列就是我们通常说的等差数列;高阶等差数列是二阶或二阶以上等差数列的统称.

1. 高阶等差数列的性质

(1) 如果数列 $\{a_n\}$ 是 p 阶等差数列,则它的一阶差数列是 $p-1$ 阶等差数列;

(2) 数列 $\{a_n\}$ 是 p 阶等差数列的充要条件是:数列 $\{a_n\}$ 的通项是关于 n 的 p 次多项式;

(3) 如果数列 $\{a_n\}$ 是 p 阶等差数列,则其前 n 项之和 S_n 是关于 n 的 $p+1$ 次多项式.

这些性质,可以利用数学归纳来证明.

2. 求解高阶等差数列的通项与前 n 项和的方法

(1) 累差法:$a_n = a_1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)$.

(2) 待定系数法:对于 $p(p \geqslant 2)$ 阶等差数列,根据性质(2)和性质(3),其通项与前 n 项和分别是关于 n 的 p 次与 $p+1$ 次多项式,可以先设出多项式的表达式,再根据已知条件列方程组求多项式的系数.

(3) 裂项相消法:其出发点是 a_n 能写成 $a_n = f(n+1) - f(n)$.

(4) 化归法:将高阶等差数列的问题转化为易求的同阶等差数列或低阶等差数列的问题,达到简化的目的.

例题精讲

【例 1-1】 将 25 个数排成 5 行 5 列:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{matrix}$$

已知第1行 $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}$ 成等差数列,而每一列 $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, a_{4j}, a_{5j}(1 \leqslant j \leqslant 5)$ 都成等比数列,且 5 个公比全相等.若 $a_{24} = 4, a_{41} = -2, a_{43} = 10$,求 $a_{11} \times a_{55}$ 的值.

解: 由题意可知每一行上的数都成等差数列,但这五个等差数列的公差不一定相等.

由 $a_{41} = -2, a_{43} = 10$ 知 $a_{42} = \dfrac{10 + (-2)}{2} = 4$,且公差为 6,所以 $a_{44} = 16, a_{45} = 22$.

由 $a_{24} = 4, a_{44} = 16$ 知公比 $q = \pm 2$.

若 $q = 2$,则 $a_{11} = \dfrac{a_{41}}{q^3} = -\dfrac{1}{4}, a_{55} = 22 \times 2 = 4 \times 11$,所以 $a_{11} \times a_{55} = -11$;

若 $q = -2$,则 $a_{11} = \dfrac{a_{41}}{q^3} = \dfrac{1}{4}, a_{55} = 22 \times (-2) = 4 \times (-11)$,所以 $a_{11} \times a_{55} = -11$.

综上所述,$a_{11} \times a_{55} = -11$.

【例 1-2】 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足条件 $a_1 = b_1$,当 $n \geqslant 2$ 时,

$$b_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + 3 + \cdots + n}.$$

求证:$\{b_n\}$ 是等差数列的充要条件是 $\{a_n\}$ 为等差数列.

分析 若 $\{a_n\}$ 为等差数列,可将 $\{b_n\}$ 化简,进而说明它也为等差数列;若 $\{b_n\}$ 为等差数列,可求出 $\{a_n\}$ 的通项公式,进而说明它也为等差数列.

证明: 充分性:设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列,则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i a_i &= \sum_{i=1}^{n} i\left[a_1+(i-1)d\right]\\ &= a_1\sum_{i=1}^{n} i + d\sum_{i=1}^{n} i^2 - d\sum_{i=1}^{n} i\\ &= (a_1-d)\frac{n(n+1)}{2} + d\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= \frac{n(n+1)}{2}\left(a_1-d+\frac{2n+1}{3}\right),\end{aligned}$$

即 $b_n=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} i a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} i}=a_1-d+\dfrac{2n+1}{3}$,所以$\{b_n\}$为等差数列.

必要性:设$\{b_n\}$是公差为 d 的等差数列,则

$$\sum_{i=1}^{n} i a_i = \frac{1}{2}n(n+1)b_n,$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i a_i = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)b_{n+1},$$

两式相减得

$$(n+1)a_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)\left[(n+2)b_{n+1}-nb_n\right],$$

从而

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left[(n+2)b_{n+1}-nb_n\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[(n+2)(d+b_n)-nb_n\right] = \frac{1}{2}\left[(n+2)d+2b_n\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[(n+2)d+2a_1+(n-1)d\right] = a_1+\frac{2n+1}{2}d,\end{aligned}$$

所以$\{a_n\}$为等差数列.

评注 证明一个数列$\{a_n\}$是等差数列的基本方法是根据等差数列的定义,证明 $a_n-a_{n-1}=d$(常数)对于所有 $n\geqslant 2$ 的正整数都成立,其等价条件是 $2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}$ 等. 充分性证明过程中用到常见公式:

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

【例 1-3】 数列$\{a_n\}$的二阶差数列的各项均为 16,且 $a_{63}=a_{89}=10$,求 a_{51}.

解:设$\{a_n\}$的一阶差数列是$\{b_n\}$,则$\{b_n\}$是公差为 16 的等差数列. 设其首项为 a,则 $b_n=a+16(n-1)$.

所以 $a_n=a_1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=a_1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}b_k=a_1+(n-1)a+8(n-1)(n-2)$,

这是关于 n 的二次多项式,其二次项系数为 8,且 $a_{63}=a_{89}=10$,

所以 $$a_n=8(n-63)(n-89)+10,$$

从而 $$a_{51}=8(51-63)(51-89)+10=3658.$$

评注　本题的解法是累差法,这是一种常用的方法.根据高阶等差数列的性质,本题也可以用待定系数法求解,两种解法的实质相同,都能用上二次函数的性质:若二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x_1)=f(x_2)=d$,则可设 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)+d$.

【例 1-4】　已知 $f(x)$ 为二次函数,且 $a,f(a),f(f(a)),f(f(f(a)))$ 成正项等比数列,求证:$f(a)=a$.

分析　要证明 $f(a)=a$,只需证明题中等比数列的公比 $q=1$.

证法 1: 设 $f(x)=mx^2+nx+t(m\neq 0)$,数列 $a,f(a),f(f(a)),f(f(f(a)))$ 的公比为 $q(q>0)$,则

$$f(a)=aq,f(f(a))=f(aq)=aq^2,f(f(f(a)))=f(aq^2)=aq^3,$$

所以

$$\begin{cases}ma^2+na+t=aq,\\ m(aq)^2+naq+t=aq^2,\\ m(aq^2)^2+naq^2+t=aq^3,\end{cases}$$

于是

$$\begin{cases}ma^2(1-q^2)+na(1-q)=aq(1-q),\\ ma^2q^2(1-q^2)+naq(1-q)=aq^2(1-q),\end{cases}$$

若 $q=1$,则 $f(a)=a$;

若 $q\neq 1$,则 $\begin{cases}ma(1+q)+n=q,\\ maq(1+q)+n=q,\end{cases}$ 解得 $q=1$,这与 $q\neq 1$ 矛盾,不符合.

所以 $f(a)=a$.

证法 2: 不妨设 $f(a)\neq a$,则由 $a,f(a),f(f(a)),f(f(f(a)))$ 成等比数列得

$$\frac{f(a)}{a}=\frac{f(f(a))}{f(a)}=\frac{f(f(f(a)))}{f(f(a))},$$

又因 $f(a)\neq a$,则 $q=\dfrac{f(a)}{a}\neq 1$,所以 $f(f(a))\neq a$,即 $f(f(a))\neq f(a)$.

所以

$$\frac{f(f(a))-f(a)}{f(a)-a}=\frac{f(f(f(a)))-f(f(a))}{f(f(a))-f(a)},$$

从而,三点 $A(a,f(a)),B(f(a),f(f(a))),C(f(f(a)),f(f(f(a))))$ 满足 $k_{AB}=k_{BC}$,所以 A,B,C 三点共线,与 A,B,C 三点在抛物线上矛盾,所以 $f(a)=a$.

评注　证法 2 利用分式的合比分比性质及反证法.

【例 1-5】　证明:多项式 $(1+x+\cdots+x^n)^2-x^n$(其中 $n>1$ 是正整数)是两个多项式的乘积.

证明:因为 $1+x+\cdots+x^n=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$,所以

$$\begin{aligned}(1+x+\cdots+x^n)^2-x^n&=\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)^2-x^n\\&=\frac{x^{2n+2}-2x^{n+1}+1}{x^2-2x+1}-x^n\\&=\frac{x^{2n+2}-x^{n+2}-x^n+1}{x^2-2x+1}\\&=\frac{(x^{n+2}-1)(x^n-1)}{(x-1)^2}\\&=(1+x+\cdots+x^{n-1})(1+x+\cdots+x^{n+1}).\end{aligned}$$

【例 1-6】 已知数列$\{a_n\}$为等差数列,且$a_2=5$,$a_8=23$.数列$\{b_n\}$是各项均为正数的等比数列,$b_1=2$,且对任意正整数s,t都有$b_{s+t}=b_s\cdot b_t$成立.

(1) 求数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的通项公式;

(2) 求证:数列$\{b_n\}$中有无数多项在数列$\{a_n\}$中.

分析 有关等比数列与等差数列的公共项问题,可以从同余的角度出发,因为等差数列的所有项模掉公差后是同余的.

解:(1) 设数列$\{a_n\}$的公差为d,则$d=\dfrac{a_8-a_2}{8-2}=3$,$a_1=a_2-d=2$,所以$a_n=3n-1$.设数列$\{b_n\}$的公比为q,由条件$b_{s+t}=b_s\cdot b_t$得,$2\times q^{s+t-1}=(2\times q^{s-1})(2\times q^{t-1})$,解得$q=2$,从而$b_n=2^n$.

(2) 证明:假设b_k在数列$\{a_n\}$中,则存在正整数n,使得$2^k=3n-1$,$n=\dfrac{2^k+1}{3}$.

由于当k为正奇数时,有$2^k+1\equiv(-1)^k+1\equiv 0\pmod 3$,即$n=\dfrac{2^k+1}{3}$为整数.

所以,数列$\{b_n\}$中的奇数项都在数列$\{a_n\}$中,从而数列$\{b_n\}$中有无数多项在数列$\{a_n\}$中.

【例 1-7】 设数列$\{b_n\}$满足$b_1=1$,$b_n>0$,其前n项乘积$T_n=(a^{n-1}b_n)^n$,其中a是大于1的常数.

(1) 求证:$\{b_n\}$是等比数列;

(2) 求$\{b_n\}$中所有不同两项的乘积之和.

分析 (2) 中的求和需要变形:$\sum\limits_{i\neq j}b_ib_j=\dfrac{1}{2}\left(\left(\sum b_i\right)^2-\sum b_i^2\right)$.

解:(1) 证明:由$T_n=(a^{n-1}b_n)^n$,知$T_{n-1}=(a^{n-2}b_{n-1})^{n-1}(n\geqslant 2)$,所以

$$\frac{T_n}{T_{n-1}}=b_n=\frac{(a^{n-1}b_n)^n}{(a^{n-2}b_{n-1})^{n-1}}=\frac{a^{2(n-1)}\cdot b_n^n}{b_{n-1}^{n-1}},$$

则$\left(\dfrac{b_n}{b_{n-1}}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{2(n-1)}$,所以$\dfrac{b_n}{b_{n-1}}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^2$.

故$\{b_n\}$是等比数列，且公比为$\frac{1}{a^2}$.

(2) 由(1)知，$b_n=1\cdot\left(\frac{1}{a^2}\right)^{n-1}=\frac{1}{a^{2(n-1)}}$. $\{b_n\}$中所有不同两项的乘积之和为$\sum\limits_{i\neq j}b_ib_j$.

注意到$\sum\limits_{i\neq j}b_ib_j=\frac{1}{2}\left[\left(\sum b_i\right)^2-\sum b_i^2\right]$，而$\sum b_i=\frac{1}{1-\frac{1}{a^2}}$，$\sum b_i^2=\frac{1}{1-\frac{1}{a^4}}$，所以

$$\sum_{i\neq j}b_ib_j=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1-\frac{1}{a^2}}\right)^2-\frac{1}{1-\frac{1}{a^4}}\right]=\frac{a^4}{(a^2-1)^2(a^2+1)}.$$

【例 1-8】　对于怎样的n，存在等差数列$a_1,a_2,a_3,\cdots$和等比数列$b_1,b_2,b_3,\cdots$，使得

$$a_1<b_1<a_2<b_2<a_3<\cdots<a_n<b_n<a_{n+1}.$$

证明：我们来证明，对于任意的自然数n能够选择足够小的$a>0$，使得以a为公差的等差数列$1+\frac{a}{2}$，$\left(1+\frac{a}{2}\right)+a,\cdots,\left(1+\frac{a}{2}\right)+na$和以$1+a$为公比的等比数列$(1+a)$，$(1+a)^2,\cdots,(1+a)^n$满足题设条件.

利用恒等式$q^k-1=(q-1)(q^{k-1}+q^{k-2}+\cdots+1)$.

用$q=1+a$代入之，对于所有的$k\geqslant1$，得到

$$(1+a)^k=1+a[(1+a)^{k-1}+(1+a)^{k-2}+\cdots+1],\qquad ①$$

选取足够小的a，使得$(1+a)^n<1+\frac{1}{2n}$. 这时，对于所有的$k=1,\cdots,n$，有

$$(1+a)^{k-1}+(1+a)^{k-2}+\cdots+1<k(1+a)^n<k\left(1+\frac{1}{2n}\right)\leqslant k+\frac{1}{2}.$$

对于这样的a，根据式①，对于所有的$k=1,\cdots,n$成立不等式

$$\left(1+\frac{a}{2}\right)+(k-1)a<1+ka<(1+a)^k<1+a\left(k+\frac{1}{2}\right)=\left(1+\frac{a}{2}\right)+ka.$$

也就是说，所指等比数列的第k项在等差数列的第k项和$k+1$项之间，此即为所证.

强化训练

1. 在等差数列$\{a_n\}$中，若$\frac{a_{11}}{a_{10}}<-1$，且它的前n项和S_n有最大值，当S_n取最小正值时，求n.

2. 设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是正数构成的等差数列. 求证：

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

3. 正数数列$\{a_n\}$的项对任意正整数n满足

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}=\frac{np}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{n+1}}}.$$

其中 p 是正常数. 求证:数列$\{a_n\}$是等差数列.

4. 求证:若 $\sin(\beta+\gamma-\alpha)$,$\sin(\gamma+\alpha-\beta)$,$\sin(\alpha+\beta-\gamma)$ 成等差数列,则 $\tan\alpha$,$\tan\beta$,$\tan\gamma$ 在均有定义的情况下,也成等差数列.

5. 等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,$a_1=1+\sqrt{2}$,$S_3=9+3\sqrt{2}$.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项 a_n 与前 n 项和 S_n;

(2) 设 $b_n=\dfrac{S_n}{n}(n\in\mathbf{N}_+)$,求证:数列$\{b_n\}$中任意不同的三项都不可能成为等比数列.

6. 已知数列$\{a_n\}$中,$a_1=2$,前 n 项之和为 S_n. 若

$$(n^2+1)\cdot a_{n+1}=(2n+1)\cdot S_n+n^4+2n^3+3n^2+2n+2,$$

试求 S_n 及 a_n 的表达式(用关于 n 的最简式子表示).

7. 表 1-1 给出一个“等差数阵”:

表 1-1

4	7	( )	( )	( )	…	a_{1j}	…
7	12	( )	( )	( )	…	a_{2j}	…
( )	( )	( )	( )	( )	…	a_{3j}	…
( )	( )	( )	( )	( )	…	a_{4j}	…
…	…	…	…	…	…	…	…
a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	…	a_{ij}	…
…	…	…	…	…	…	…	…

其中每行、每列都是等差数列,a_{ij} 表示位于第 i 行第 j 列的数.

(1) 写出 a_{ij} 的计算公式以及 2008 这个数在等差数阵中所在的位置.

(2) 证明:正整数 N 在该等差数列阵中的充要条件是 $2N+1$ 可以分解成两个不是 1 的正整数之积.

8. 设数列$\{a_n\}$是由正数组成的等比数列,S_n 是其前 n 项和.

(1) 证明:$\dfrac{\lg S_n+\lg S_{n+2}}{2}<\lg S_{n+1}$;

(2) 是否存在常数 $c>0$,使得$\dfrac{\lg(S_n-c)+\lg(S_{n+2}-c)}{2}=\lg(S_{n+1}-c)$成立? 证明你的结论.

9. 设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n. 已知 $a_1=1$,$\dfrac{2S_n}{n}=a_{n+1}-\dfrac{1}{3}n^2-n-\dfrac{2}{3}$,$n\in\mathbf{N}_+$.

(1) 求 a_2 的值;

(2) 求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(3) 证明:对一切正整数 n,有$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{7}{4}$.

10. 已知 $d\neq 0$,$\dfrac{a}{d}\geqslant 0$,求证:等差数列

$$a+d, a+2d, \cdots, a+nd, \cdots$$

有三项成等比数列的充要条件是$\frac{a}{d}$ 为有理数.

11. 从数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$ 中不难分出长度为 3 的等差数列:$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$. 能否从这个数列中选取等差数列,使它的:

(1) 长度为 4?

(2) 长度为 5?

(3) 长度为 k? 这里 k 为任意正整数.

12. 对哪些大于 2 的整数 n,存在正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,使得

$$a_1a_2, a_2a_3, \cdots, a_na_1$$

是一个非常值的等差数列?

13. 定义集合 $A=\{n+n! \mid n \text{ 为正整数}\}$,$B$ 为 A 在正整数集中的补集.

(1) 证明:不能在 B 中取得一个有无限项的公差不是 0 的等差数列.

(2) 是否能在 B 中找到一个有无限多项的等比数列?

14. 将正整数的集合分拆成 $n \geqslant 1$ 个等差数列,其首项分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,公差分别为 $d_1, d_2, \cdots, d_n$. 求证:$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{d_k}=\frac{n+1}{2}$.