

数学培优竞赛新思维

数学培优竞赛一讲一练

(高一年级)

主编 朱华伟

编者 朱华伟 金春来 程汉波

清华大学出版社

北 京

内容简介

本书是《数学培优竞赛讲座(高一年级)》(ISBN:9787302608578)的配套练习册,为读者提供自我检测.在内容上以高考数学难题、著名大学强基计划招生和国内外高中数学竞赛为背景,按照普通高中高一年级数学教科书的进度分专题编写,力求与课堂教学同步,在夯实基础的同时,通过新颖、有趣的数学问题,构建通往高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛的捷径;在有利于学生把高中数学教科书的知识巩固深化的同时,恰到好处地为学生拓宽著名大学强基计划招生和竞赛数学的知识;以著名大学强基计划招生和高中数学竞赛中的热点、难点问题为载体,介绍竞赛数学中令人耳目一新的解题方法与技巧,激发学生创新与发现的灵感,开发智力,提高水平去参加高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛.

本书附有参考答案及解析,为学生提供解题思路、方法和技巧,以检验学生对数学知识的理解水平和掌握程度.

本书可供高中准备参加高考数学、大学自主招生和高中数学竞赛的学生学习使用,也可供中学数学教师、数学爱好者、高等师范院校数学教育专业大学生、研究生及数学教师参考使用.

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售.

版权所有,侵权必究. 举报: 010-62782989, beiqinquan@tup.tsinghua.edu.cn.

图书在版编目(CIP)数据

数学培优竞赛一讲一练. 高一年级 / 朱华伟主编. —北京:清华大学出版社, 2022.8

(数学培优竞赛新思维)

ISBN 978-7-302-60860-8

I. ①数… II. ①朱… III. ①中学数学课—高中—教学参考资料 IV. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 081521 号

责任编辑:王 定

封面设计:周晓亮

版式设计:思创景点

责任校对:成凤进

责任印制:朱雨萌

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

邮 编:100084

社 总 机:010-83470000

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:天津安泰印刷有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm

印 张:10.75

字 数:241 千字

版 次:2022 年 8 月第 1 版

印 次:2022 年 8 月第 1 次印刷

定 价:45.00 元

产品编号:095773-01

前言

从 1985 年我国第一次派队参加国际数学奥林匹克竞赛(简称 IMO)以来,中国代表队参加了 36 次 IMO(1985 年派两名队员参赛,1998 年因故没有参赛),22 次获总分第一(有 13 次六位队员都得金牌),8 次第二,2 次第三,第四、六、八名各 1 次,212 人次参赛,共获金牌 168 块,银牌 36 块,铜牌 6 块.早在 1994 年,中国科学院数学物理学部王梓坤院士就写道:近年来我国中学生在 IMO 中“连续获得团体冠军,个人金牌数也名列前茅,消息传来,全国振奋.我国数学,现在有能人,后继有强手,国内外华人无不欢欣鼓舞”.这对青少年学好数学无疑是极大的鼓舞和鞭策,极大地激发了青少年学习数学的热情.

为了给对数学有兴趣的高中生提供一个扩展知识视野、提高解题能力和培养创新精神的平台,我们以高考数学难题、著名大学强基计划招生和国内外高中数学竞赛为背景,根据多年辅导高中生参加高考数学、大学自主招生、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛所积累下来的经验、体会和素材,编写了这套《数学培优竞赛讲座》(高一年级、高二年级、高三年级),以及配套的《数学培优竞赛一讲一练》(高一年级、高二年级、高三年级).

《数学培优竞赛讲座》按照普通高中数学教科书的进度分专题编写,在内容的安排上力求与课堂教学同步,采用从课内到课外逐步引申扩充、由浅入深、由易到难、循序渐进的教学方法;在夯实基础的同时,通过新颖、有趣的数学问题,构建通往高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛的捷径;在学生力所能及的范围内帮助学生扩展知识视野,提高思维能力;在有利于学生把高中数学教材的知识巩固深化的同时,又恰到好处地为学生拓宽有关强基计划和竞赛数学的知识;以高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛中的热点、难点问题为载体,介绍竞赛数学中令人耳目一新的解题方法与技巧,激发学生创新与发现的灵感,帮助学生开发智力,提高水平去参加高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛.

《数学培优竞赛讲座》以专题讲座的形式编写,每讲的主要栏目如下.

数学名言欣赏:以名人名言开宗明义,开启每讲的数学学习之旅.

知识方法述要:详细归纳相关的知识、方法与技巧,突出重点、难点和考点.对于高中数学教科书没有的内容,尽可能给出新知识、新方法的产生背景.

例题精讲:含“分析”“解”和“评注”,从易到难,拾级而上,由基础题、提高题、综合题组成.本丛书中很多例题的解答之后有评注,评注的作用是对某些问题或解答过程中意犹未尽之处进行阐述分析,以起到画龙点睛的效果;对可进一步深入研究的问题予以拓展引申,意在引导学生去创造;对一题多解的问题提出相关的解法,发现特技与通法之间的联系.总之,评注的目的在于,一方面揭示问题的背景和来源,另一方面启迪学生发现解决问题的思路及通过合理猜测提出新问题的方法,使学生不仅知其然,更知其所以然,以期达到授之以渔的目的.



强化训练:含选择题、填空题、解答题,为方便自学,在书后每题均给出详细解答过程.

《数学培优竞赛一讲一练》是《数学培优竞赛讲座》的配套练习册,可以为学生提供自我检测;书后附有详细解答,可以检验学生对数学知识的理解水平和掌握程度.《数学培优竞赛一讲一练》与《数学培优竞赛讲座》配套使用,能达到更好的学习效果.

本丛书注重数学基础知识的巩固提高和数学思想方法的渗透,凸显科学精神和人文精神的融合,加强对学生学习兴趣、创新精神、应用意识和分析问题解决问题能力的培养.希望通过本丛书的学习,能够使学生发现数学的美丽和魅力,体会数学的思想和方法,感受数学的智慧和创新,体验经过不懈的探索而获得成功的兴奋和快乐,进而激发学习数学的兴趣.

数学大师陈省身教授为 2002 年 8 月在北京举行的第 24 届国际数学家大会题词:“数学好玩.”我们深信本书能让学生品味到数学的无穷乐趣.著名数学家陈景润教授说:“数学的世界是变幻无穷的世界,其中的乐趣只有那些坚持不懈的人才能体会得到!”

本丛书是高中生参加数学竞赛的宝典,是冲刺著名大学强基计划招生、破解高考数学压轴题的利器,是中学数学教师进行数学竞赛辅导、进修的益友.

在本丛书的编写过程中,笔者参考并引用了有关资料中的优秀题目,为求简明,书中未一一注明出处,在此,谨向原题编者表示感谢.由于笔者水平有限,书中难免会有疏漏之处,诚挚欢迎读者批评与指正.

2022 年 1 月于深圳中学新校区

目 录

第 1 讲	集合与逻辑	1
第 2 讲	基本不等式	3
第 3 讲	二次函数	5
第 4 讲	函数的概念、图像与性质	7
第 5 讲	幂函数、指数函数与对数函数	9
第 6 讲	绝对值	11
第 7 讲	不等式的解法	13
第 8 讲	三角函数的概念、图像与性质	15
第 9 讲	三角恒等变换	17
第 10 讲	三角不等式	19
第 11 讲	三角函数的最值	21
第 12 讲	反三角函数与三角方程	23
第 13 讲	三角代换	25
第 14 讲	正弦定理与余弦定理	27
第 15 讲	三角与几何	29
第 16 讲	平面向量	32
第 17 讲	向量与几何	34
第 18 讲	复数的概念、运算与几何意义	37
第 19 讲	复数的三角形式、单位根及其应用	39
第 20 讲	复数与几何	41
第 21 讲	直线与平面	44
第 22 讲	空间角与距离	46
第 23 讲	截面、折叠与展开	48
第 24 讲	多面体与旋转体	51
第 25 讲	概率统计初步	53
第 26 讲	圆	56
第 27 讲	面积问题与面积方法	59
第 28 讲	共线点与共点线	62
第 29 讲	圆幂与根轴	65
第 30 讲	平面几何中的著名定理	68



第 31 讲	几何变换(一).....	71
第 32 讲	几何变换(二).....	74
第 33 讲	调和结构与配极变换.....	77
第 34 讲	交比的定义、性质及其应用	80
参考答案		83

第1讲 集合与逻辑

一、填空题

1. 设集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, 若 A 中所有三元子集的三个元素之和组成的集合为 $B = \{-1, 3, 5, 8\}$, 则集合 $A =$ _____.

2. 已知 $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}_+, A = \{x^2 + x + 1, -x, -x - 1\}, B = \left\{-y, -\frac{y}{2}, y + 1\right\}$. 若 $A = B$, 则 $x^2 + y^2 =$ _____.

3. 在集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, 2011\}$ 中, 末位数字为 1 的元素个数为_____.

4. 设 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 为正整数, 任取其中四个数求和, 得到集合 $\{44, 45, 46, 47\}$, 则这五个数 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的值从小到大依次为_____.

5. 如果集合 A, B 同时满足 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}, A \cap B = \{1\}, A \neq \{1\}, B \neq \{1\}$, 就称有序集对 (A, B) 为“好集对”. 这里有序集对 (A, B) 意指, 当 $A \neq B$ 时, (A, B) 和 (B, A) 是不同的集对. 那么“好集对”一共有_____个.

6. 设 S 为 $\{1, 2, 3, \dots, 30\}$ 的一个子集, 且 S 中任意两个不同元素的和都不能被 5 整除. 请问: 集合 S 中最多能有_____个元素.

7. 设 a_1, a_2, a_3, a_4 是四个有理数, 使得

$$\{a_i a_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\} = \left\{-24, -2, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{8}, 1, 3\right\},$$

则 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 的值为_____.

8. 已知 A 与 B 是集合 $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ 的两个子集, 满足: A 与 B 的元素个数相同, 且 $A \cap B$ 为空集. 若 $n \in A$, 总有 $2n + 2 \in B$, 则集合 $A \cup B$ 的元素个数最多为_____.

二、解答题

9. 已知集合 $A = \{(x, y) \mid ax + y = 1\}, B = \{(x, y) \mid x + ay = 1\}, C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, 则

(1) 当 a 取何值时, $(A \cup B) \cap C$ 是一个二元集?

(2) 当 a 取何值时, $(A \cup B) \cap C$ 是一个三元集?



10. 判断下面命题是否正确:

设 A, B 是坐标平面上两个点集, $C_r = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$. 若对任何 $r \geq 0$ 都有 $C_r \cup A \subseteq C_r \cup B$, 则必有 $A \subseteq B$.

11. 设 S 是一些互不相同的四元数组 (a_1, a_2, a_3, a_4) 的集合, 其中 $a_i = 0$ 或 $1, i = 1, 2, 3,$

4. 已知 S 的元素个数不超过 15, 且满足: 若 $(a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4) \in S$, 则

$$(\max\{a_1, b_1\}, \max\{a_2, b_2\}, \max\{a_3, b_3\}, \max\{a_4, b_4\}) \in S$$

且

$$(\min\{a_1, b_1\}, \min\{a_2, b_2\}, \min\{a_3, b_3\}, \min\{a_4, b_4\}) \in S.$$

求 S 的元素个数的最大值.



第 2 讲 基本不等式

1. 设 $a, b, c, d > 0$, 求证: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geqslant ae + be + ce + de$.

2. 设 a, b 是正数, 求证: $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^3 \geqslant 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 2$.

3. 已知正数 a, b, c 满足 $a^2 + ab + ac + bc = 6 + 2\sqrt{5}$, 求 $3a + b + 2c$ 的最小值.

4. 求函数 $f(x, y, z) = x^z + y^z - (xy)^{\frac{z}{4}}$, $x, y, z \in \mathbf{R}$ 的最小值.

5. 设 $x, y, z > 0$, 求证: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geqslant \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}$.

6. 设 $a, b, c \in \mathbf{R}_+$, 且 $a + b + c = 1$, 求证:

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geqslant 8(1-a)(1-b)(1-c).$$

7. 已知 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 都是正数, 求证: $(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n) \geqslant 3^n$.



8. 正数 x, y, z 满足 $9xyz + xy + yz + zx = 4$, 求证:

(1) $xy + yz + zx \geq \frac{4}{3}$;

(2) $x + y + z \geq 2$.

9. 设 u, v, w 为正实数, 满足条件 $u\sqrt{vw} + v\sqrt{wu} + w\sqrt{uv} \geq 1$, 试求 $u + v + w$ 的最小值.

10. 设 $x, y, z \in \mathbf{R}$, 且 $x + y + z = 0$, 求证: $6(x^3 + y^3 + z^3)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)^3$.

11. 已知 a, b, c, d 是非负实数, 且 $a + b + c + d = 4$, 求

$$\frac{a}{b^3 + 4} + \frac{b}{c^3 + 4} + \frac{c}{d^3 + 4} + \frac{d}{a^3 + 4}$$

的最小值.