

数学培优竞赛新思维

# 数学培优竞赛一讲一练

## (高三年级)

主 编 朱华伟  
编 者 朱华伟 付云皓 郑 焕

清华大学出版社  
北 京

## 内容简介

本书是《数学培优竞赛讲座(高三年级)》(ISBN:9787302608561)的配套练习册,为读者提供自我检测.在内容上以高考数学难题、著名大学强基计划招生和国内外高中数学竞赛为背景,按照普通高中高三年级数学教科书的进度分专题编写,力求与课堂教学同步,在夯实基础的同时,通过新颖、有趣的数学问题,构建通往高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛的捷径;在有利于学生把高中数学教科书的知识巩固深化的同时,恰到好处地为学生拓宽著名大学强基计划招生和竞赛数学的知识;以著名大学强基计划招生和高中数学竞赛中的热点、难点问题为载体,介绍竞赛数学中令人耳目一新的解题方法与技巧,激发学生创新与发现的灵感,开发智力,提高水平去参加高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛.

本书附有参考答案及解析,为学生提供解题思路、方法和技巧,以检验学生对数学知识的理解水平和掌握程度.

本书可供高中准备参加高考数学、大学自主招生和高中数学竞赛的学生学习使用,也可供中学数学教师、数学爱好者、高等师范院校数学教育专业大学生、研究生及数学教师参考使用.

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售.

版权所有,侵权必究. 举报: 010-62782989, beiqinquan@tup.tsinghua.edu.cn.

## 图书在版编目(CIP)数据

数学培优竞赛一讲一练. 高三年级 / 朱华伟主编. — 北京:清华大学出版社, 2022.8

(数学培优竞赛新思维)

ISBN 978-7-302-60859-2

I. ①数… II. ①朱… III. ①中学数学课—高中—教学参考资料 IV. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 081528 号

责任编辑:王 定

封面设计:周晓亮

版式设计:思创景点

责任校对:成凤进

责任印制:朱雨萌

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社 总 机:010-83470000 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:北京同文印刷有限责任公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:9 字 数:202 千字

版 次:2022 年 8 月第 1 版 印 次:2022 年 8 月第 1 次印刷

定 价:39.80 元

---

产品编号:095774-01

# 前言

从 1985 年我国第一次派队参加国际数学奥林匹克竞赛(简称 IMO)以来,中国代表队参加了 36 次 IMO(1985 年派两名队员参赛,1998 年因故没有参赛),22 次获总分第一(有 13 次六位队员都得金牌),8 次第二,2 次第三,第四、六、八名各 1 次,212 人次参赛,共获金牌 168 块,银牌 36 块,铜牌 6 块.早在 1994 年,中国科学院数学物理学部王梓坤院士就写道:近年来,我国中学生在 IMO 中“连续获得团体冠军,个人金牌数也名列前茅,消息传来,全国振奋.我国数学,现在有能人,后继有强手,国内外华人无不欢欣鼓舞”.这对青少年学好数学无疑是极大的鼓舞和鞭策,极大地激发了青少年学习数学的热情.

为了给对数学有兴趣的高中生提供一个扩展知识视野、提高解题能力和培养创新精神的平台,我们以高考数学难题、著名大学强基计划招生和国内外高中数学竞赛为背景,根据多年辅导高中生参加高考数学、大学自主招生、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛所积累下来的经验、体会和素材,编写了这套《数学培优竞赛讲座》(高一年级、高二年级、高三年级),以及配套的《数学培优竞赛一讲一练》(高一年级、高二年级、高三年级).

《数学培优竞赛讲座》按照普通高中数学教科书的进度分专题编写,在内容的安排上力求与课堂教学同步,采用从课内到课外逐步引申扩充、由浅入深、由易到难、循序渐进的教学方法;在夯实基础的同时,通过新颖、有趣的数学问题,构建通往高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛的捷径;在学生力所能及的范围内帮助学生扩展知识视野,提高思维能力;在有利于学生把高中数学教材的知识巩固深化的同时,又恰到好处地为学生拓宽有关强基计划和竞赛数学的知识;以高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛中的热点、难点问题为载体,介绍竞赛数学中令人耳目一新的解题方法与技巧,激发学生创新与发现的灵感,帮助学生开发智力,提高水平去参加高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛.

《数学培优竞赛讲座》以专题讲座的形式编写,每讲的主要栏目如下.

数学名言欣赏:以名人名言开宗明义,开启每讲的数学学习之旅.

知识方法述要:详细归纳相关的知识、方法与技巧,突出重点、难点和考点.对于高中数学教科书没有的内容,尽可能给出新知识、新方法的产生背景.知识、方法与技巧尽可能系统、完整.

例题精讲:含“分析”“解”和“评注”,从易到难,拾级而上,由基础题、提高题、综合题组成.本丛书中很多例题的解答之后有评注,评注的作用是对某些问题或解答过程中意犹未尽之处进行阐述分析,以起到画龙点睛的效果;对可进一步深入研究的问题予以拓展引申,意在引导学生去创造;对一题多解的问题提出相关的解法,发现特技与通法之间的联系.总之,评注的目的在于,一方面揭示问题的背景和来源,另一方面启迪学生发现解决问题的思路及通过合理猜



测提出新问题的方法,使学生不仅知其然,更知其所以然,以期达到授之以渔的目的.

强化训练:含选择题、填空题、解答题,为方便自学,在书后每题均给出详细解答过程.

《数学培优竞赛一讲一练》是《数学培优竞赛讲座》的配套练习册,可以为使用者提供自我检测;书后附有详细解答,可以检验使用者对数学知识的理解水平和掌握程度.《数学培优竞赛一讲一练》与《数学培优竞赛讲座》配套使用,能达到更好的学习效果.

本丛书注重数学基础知识的巩固提高和数学思想方法的渗透,凸显科学精神和人文精神的融合,加强对学生学习兴趣、创新精神、应用意识和分析问题解决问题能力的培养.希望通过本丛书的学习,能够使学生发现数学的美丽和魅力,体会数学的思想和方法,感受数学的智慧和创新,体验经过不懈的探索而获得成功的兴奋和快乐,进而激发学习数学的兴趣.

数学大师陈省身教授为 2002 年 8 月在北京举行的第 24 届国际数学家大会题词:“数学好玩.”我们深信本书能让学生品味到数学的无穷乐趣.著名数学家陈景润教授说:“数学的世界是变幻无穷的世界,其中的乐趣只有那些坚持不懈的人才能体会得到!”

本丛书是高中生参加数学竞赛的宝典,是冲刺著名大学强基计划招生、破解高考数学压轴题的利器,是中学数学教师进行数学竞赛辅导、进修的益友.

在本丛书的编写过程中,笔者参考并引用了有关资料中的优秀题目,为求简明,书中未一一注明出处,在此,谨向原题编者表示感谢.由于笔者水平有限,书中难免会有疏漏之处,诚挚欢迎读者批评与指正.

李华伟

2022 年 1 月于深圳中学新校区

# 目 录

|        |                    |    |
|--------|--------------------|----|
| 第 1 讲  | 整除                 | 1  |
| 第 2 讲  | 函数 $[x]$ 与 $\{x\}$ | 3  |
| 第 3 讲  | 素数、合数与算术基本定理       | 5  |
| 第 4 讲  | 同余                 | 7  |
| 第 5 讲  | 数论中的著名定理           | 9  |
| 第 6 讲  | 不定方程               | 11 |
| 第 7 讲  | 二次剩余               | 13 |
| 第 8 讲  | 多项式的运算             | 15 |
| 第 9 讲  | 多项式的根              | 17 |
| 第 10 讲 | 多项式的整除             | 19 |
| 第 11 讲 | 整系数多项式             | 21 |
| 第 12 讲 | 函数迭代               | 23 |
| 第 13 讲 | 函数方程               | 25 |
| 第 14 讲 | 计数方法               | 27 |
| 第 15 讲 | 母函数                | 29 |
| 第 16 讲 | 反证法                | 31 |
| 第 17 讲 | 抽屉原理               | 33 |
| 第 18 讲 | 极端原理               | 35 |
| 第 19 讲 | 图论初步               | 37 |
| 第 20 讲 | 染色问题与染色方法          | 39 |
| 第 21 讲 | 操作问题               | 41 |
| 第 22 讲 | 子集族与集合的划分          | 43 |
| 第 23 讲 | 格点与表格              | 45 |
| 第 24 讲 | 组合几何               | 47 |
| 第 25 讲 | 组合极值               | 50 |
| 第 26 讲 | 组合数论               | 52 |
| 第 27 讲 | 存在性问题              | 54 |
| 参考答案   |                    | 56 |



# 第 1 讲 整 除

1. 一个糖果店里卖的糖果有 3 种包装,其中小包有 6 颗,中包有 9 颗,大包有 20 颗. 如果只能整包购买糖果,问:最多不能购买到的糖果数是多少颗?

2. 求 3 个不同的正整数  $a, b, c$ , 使得  $\frac{11}{a} + \frac{11}{b} + \frac{11}{c} = \frac{143}{210}$ , 且  $[a, b, c]$  最小.

3. 设  $m, n$  为给定的正整数, 且  $mn \mid m^2 + n^2 + m$ , 求证:  $m$  是一个完全平方数.

4. 求证: 对任何正整数  $n$  和  $k$ , 数  $f(n, k) = 2n^{3k} + 4n^k + 10$  都不能分解成若干个连续正整数之积.

5. 若一个四位数为完全平方数, 且每位数码减去相同的值后, 得到的四位数还是完全平方数, 求所有这样的四位数之和. (不同的四位数减去的值可以不一样)

6. 已知一个凸四边形的各边长均为整数, 并且任何一边的长都能整除其余三边长度之和. 求证: 这个四边形必有两边相等.



7. 斐波那契数列定义如下:  $f_1 = f_2 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2} (n > 2)$ . 假设正整数  $a, b$  满足条件:  $\min\left\{\frac{f_n}{f_{n-1}}, \frac{f_{n+1}}{f_n}\right\} < \frac{a}{b} < \max\left\{\frac{f_n}{f_{n-1}}, \frac{f_{n+1}}{f_n}\right\}$ . 求证:  $b \geq f_{n+1}$ .

8. 设  $a, b, m, n$  为正整数, 且  $a > 1, (a, b) = 1$ . 求证: 如果  $a^n + b^n \mid a^m + b^m$ , 那么  $n \mid m$ .

9. 求出所有具有下列性质的正整数  $n$ : 存在数列  $\{x_n\}$  使  $1, 2, \dots, n$  各出现一次并且对于  $k = 1, 2, \dots, n$ , 有  $k \mid x_1 + x_2 + \dots + x_k$ .

10. 已知数列  $\{a_n\}$  且  $a_0 = 2, a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ . 求证: 若  $p$  是  $a_{2k} - 2$  的素因子, 则  $p$  也是  $a_{2k+1} - 1$  的素因子.

11. 求所有的正整数  $x, y$ , 使  $\frac{x^3 + y^3 - x^2 y^2}{(x + y)^2}$  是一个非负整数.

12. 证明: 存在无穷多对正整数  $a, b (a > b)$  满足下列性质:

(1)  $(a, b) = 1$ ;

(2)  $a \mid b^2 - 5, b \mid a^2 - 5$ .



## 第2讲 函数 $[x]$ 与 $\{x\}$

### 一、填空题

1. 和式  $\sum_{n=0}^{502} \left[ \frac{305n}{503} \right]$  的值为\_\_\_\_\_.

2. 方程  $[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + \cdots + [\sqrt[3]{x^3 - 1}] = 400$  的正整数解为\_\_\_\_\_.

3. 已知  $\{x\} = x - [x]$  ( $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数), 设方程  $\frac{1}{2013} - 2012x = \{x\}$  的两个不同实数解为  $x_1, x_2$ , 则  $2013^2 \times (x_1 + x_2) =$ \_\_\_\_\_.

4. 若  $a$  为正数,  $[a]$  表示  $a$  的整数部分, 而  $\{a\} = a - [a]$ , 如果  $a, [a], \{a\}$  顺次组成等比数列, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

5. 设  $N = 2^{4012}$ , 则不超过  $\sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}}$  的最大整数为\_\_\_\_\_.

6. 用  $a_n$  表示最接近  $\sqrt{n}$  的正整数, 这里  $n \in \mathbf{N}_+$ . 记  $S = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2000}}$ , 则  $[S] =$ \_\_\_\_\_.

### 二、解答题

7. 设  $n$  是正整数, 计算和式  $\sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{n + 2^k}{2^{k+1}} \right]$ .

8. 求证: 对任意  $n \in \mathbf{N}$ , 有  $[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+2}]$ .

9. 求证: 方程  $[x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] = 12\,345$  没有实数解.