

数学培优竞赛新思维

数学培优竞赛一讲一练

(高二年级)

主 编 朱华伟
编 者 朱华伟 邱际春

清华大学出版社
北 京

内容简介

本书是《数学培优竞赛讲座(高二年级)》(ISBN:9787302611448)的配套练习册,为读者提供自我检测.在内容上以高考数学难题、著名大学强基计划招生和国内外高中数学竞赛为背景,按照普通高中高二年级数学教科书的进度分专题编写,力求与课堂教学同步,在夯实基础的同时,通过新颖、有趣的数学问题,构建通往高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛的捷径;在有利于学生把高中数学教科书的知识巩固深化的同时,恰到好处地为学生拓宽著名大学强基计划招生和竞赛数学的知识;以著名大学强基计划招生和高中数学竞赛中的热点、难点问题为载体,介绍竞赛数学中令人耳目一新的解题方法与技巧,激发学生创新与发现的灵感,开发智力,提高水平去参加高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛.

本书附有参考答案及解析,为学生提供解题思路、方法和技巧,以检验学生对数学知识的理解水平和掌握程度.

本书可供高中准备参加高考数学、大学自主招生和高中数学竞赛的学生学习使用,也可供中学数学教师、数学爱好者、高等师范院校数学教育专业大学生、研究生及数学教师参考使用.

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售.

版权所有,侵权必究. 举报: 010-62782989, beiqinquan@tup.tsinghua.edu.cn.

图书在版编目(CIP)数据

数学培优竞赛一讲一练. 高二年级 / 朱华伟主编. — 北京: 清华大学出版社, 2022.8

(数学培优竞赛新思维)

ISBN 978-7-302-60858-5

I. ①数… II. ①朱… III. ①中学数学课—高中—教学参考资料 IV. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 081529 号

责任编辑: 王 定

封面设计: 周晓亮

版式设计: 思创景点

责任校对: 成凤进

责任印制: 刘海龙

出版发行: 清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址: 北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编: 100084

社 总 机: 010-83470000 邮 购: 010-62786544

投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者: 北京鑫海金澳胶印有限公司

经 销: 全国新华书店

开 本: 185mm×260mm 印 张: 11.25 字 数: 252 千字

版 次: 2022 年 8 月第 1 版 印 次: 2022 年 8 月第 1 次印刷

定 价: 45.00 元

产品编号: 095775-01

前言

从 1985 年我国第一次派队参加国际数学奥林匹克竞赛(简称 IMO)以来,中国代表队参加了 36 次 IMO(1985 年派两名队员参赛,1998 年因故没有参赛),22 次获总分第一(有 13 次六位队员都得金牌),八次第二,两次第三,第四、六、八名各一次,212 人次参赛,共获金牌 168 块、银牌 36 块、铜牌 6 块.早在 1994 年,中国科学院数学物理学部王梓坤院士就写道:近年来,我国中学生在 IMO 中“连续获得团体冠军,个人金牌数也名列前茅,消息传来,全国振奋.我国数学,现在有能人,后继有强手,国内外华人无不欢欣鼓舞”.这对青少年学好数学无疑是极大的鼓舞和鞭策,极大地激发了青少年学习数学的热情.

为了给对数学有兴趣的高中生提供一个扩展知识视野、提高解题能力和培养创新精神的平台,我们以高考数学难题、著名大学强基计划招生和国内外高中数学竞赛为背景,根据多年辅导高中生参加高考数学、大学自主招生、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛所积累下来的经验、体会和素材,编写了这套《数学培优竞赛讲座》(高一年级、高二年级、高三年级),以及配套的《数学培优竞赛一讲一练》(高一年级、高二年级、高三年级).

《数学培优竞赛讲座》按照普通高中数学教科书的进度分专题编写,在内容的安排上力求与课堂教学同步,采用从课内到课外逐步引申扩充、由浅入深、由易到难、循序渐进的教学方法;在夯实基础的同时,通过新颖、有趣的数学问题,构建通往高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛的捷径;在学生力所能及的范围内帮助学生扩展知识视野,提高思维能力;在有利于学生把高中数学教材的知识巩固深化的同时,又恰到好处地为学生拓宽有关强基计划和竞赛数学的知识;以高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛中的热点、难点问题为载体,介绍竞赛数学中令人耳目一新的解题方法与技巧,激发学生创新与发现的灵感,帮助学生开发智力,提高水平去参加高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛.

《数学培优竞赛讲座》以专题讲座的形式编写,每讲的主要栏目如下.

数学名言欣赏:以名人名言开宗明义,开启每讲的数学学习之旅.

知识方法述要:详细归纳相关的知识、方法与技巧,突出重点、难点和考点.对于高中数学教科书没有的内容,尽可能给出新知识、新方法的产生背景.知识、方法与技巧尽可能系统、完整.

例题精讲:含“分析”“解”和“评注”,从易到难,拾级而上,由基础题、提高题、综合题组成.本丛书中很多例题的解答之后有评注,评注的作用是对某些问题或解答过程中意犹未尽之处进行阐述分析,以起到画龙点睛的效果;对可进一步深入研究的问题予以拓展引申,意在引导学生去创造;对一题多解的问题提出相关的解法,发现特技与通法之间的联系.总之,评注的目的在于,一方面揭示问题的背景和来源,另一方面启迪学生发现解决问题的思路及通过合理猜



测提出新问题的方法,使学生不仅知其然,更知其所以然,以期达到授之以渔的目的.

强化训练:含填空题、解答题,为方便自学,在书后每题均给出详细解答过程.

《数学培优竞赛一讲一练》是《数学培优竞赛讲座》的配套练习册,可以为使用者提供自我检测;书后附有详细解答,可以检验使用者对数学知识的理解水平和掌握程度.《数学培优竞赛一讲一练》与《数学培优竞赛讲座》配套使用,能达到更好的学习效果.

本丛书注重数学基础知识的巩固提高和数学思想方法的渗透,凸显科学精神和人文精神的融合,加强对学生学习兴趣、创新精神、应用意识和分析问题、解决问题能力的培养.希望通过本丛书的学习,能够使学生发现数学的美丽和魅力,体会数学的思想和方法,感受数学的智慧和创新,体验经过不懈的探索而获得成功的兴奋和快乐,进而激发学习数学的兴趣.

数学大师陈省身教授为 2002 年 8 月在北京举行的第 24 届国际数学家大会题词:“数学好玩”.我们深信本书能让学生品味到数学的无穷乐趣.著名数学家陈景润说:“数学的世界是变幻无穷的世界,其中的乐趣只有那些坚持不懈的人才能体会得到!”

本丛书是高中生参加数学竞赛的宝典,是冲刺著名大学强基计划招生、破解高考数学压轴题的利器,是中学数学教师进行数学竞赛辅导、进修的益友.

在本丛书的编写过程中,笔者参考并引用了有关资料中的优秀题目,为求简明,书中未一一注明出处,在此,谨向原题编者表示感谢.由于笔者水平有限,书中难免会有疏漏之处,诚挚欢迎读者批评与指正.

李华伟

2022 年 1 月于深圳中学新校区

目 录

第 1 讲	等差数列与等比数列	1
第 2 讲	数学归纳法(一)	3
第 3 讲	数列求和与数列极限	5
第 4 讲	递推数列	7
第 5 讲	递推方法	9
第 6 讲	数列的性质	12
第 7 讲	空间向量及其应用	14
第 8 讲	直线和圆	16
第 9 讲	椭圆	18
第 10 讲	双曲线	20
第 11 讲	抛物线	22
第 12 讲	参数方程与极坐标	24
第 13 讲	曲线系	26
第 14 讲	解析几何的综合问题	28
第 15 讲	解析法	30
第 16 讲	三个基本计数原理	32
第 17 讲	排列与组合	34
第 18 讲	映射与计数	36
第 19 讲	二项式定理与组合恒等式	38
第 20 讲	概率与统计	40
第 21 讲	证明不等式的基本方法	43
第 22 讲	证明不等式的常用技巧	45
第 23 讲	平均值不等式	47
第 24 讲	柯西不等式	49
第 25 讲	排序不等式	51
第 26 讲	导数及其应用	53
第 27 讲	凸函数与琴生不等式	55
第 28 讲	含参数的不等式	58
第 29 讲	不等关系在解题中的应用	60
第 30 讲	数学归纳法(二)	63
参考答案	参考答案	66



第 1 讲 等差数列与等比数列

一、填空题

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $3a_{n+1} + a_n = 4 (n \geq 1)$ 且 $a_1 = 9$, 其前 n 项之和为 S_n , 则满足不等式 $|S_n - n - 6| < \frac{1}{125}$ 的最小整数 n 是_____.

2. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 记 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n, T_n . 若 $a_3 = b_3, a_4 = b_4$, 且 $\frac{S_5 - S_3}{T_4 - T_2} = 5$, 则 $\frac{a_5 + a_3}{b_5 + b_3} =$ _____.

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足递推关系式 $a_{n+1} = 2a_n + 2^n - 1 (n \in \mathbf{N}_+)$, 且 $\left\{\frac{a_n + \lambda}{2^n}\right\}$ 为等差数列, 则 λ 的值是_____.

4. 设有四个数的数列为 a_1, a_2, a_3, a_4 , 前三个数构成一个等比数列, 其和为 k , 后三个数构成一个等差数列, 其和为 9, 且公差非零. 对于任意固定的 k , 若满足条件的数列个数大于 1, 则 k 应满足的条件是_____.

5. 已知 $(x^2 - 2x + m)(x^2 - 2x + n) = 0$ 的四个根组成一个首项为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列, 则 $|m - n| =$ _____.

6. 已知 $\{a_n\}$ 为正项等比数列, 且 $a_4 + a_3 - a_1 - a_2 = 5$, 则 $a_5 + a_6$ 的最小值为_____.

7. 一个正实数, 若其小数部分、整数部分和自身成等比数列, 则这个正实数是_____.

8. 一个三阶等差数列 $\{a_n\}$ 的前四项依次为 30, 72, 140, 240, 则其通项公式为 $a_n =$ _____.

二、解答题

9. 已知 $a_1, a_2, \dots, a_{13}$ 成等差数列,

$$M = \{a_i + a_j + a_k \mid 1 \leq i < j < k \leq 13\},$$

问: $0, \frac{7}{2}, \frac{16}{3}$ 是否可以同时在 M 中? 证明你的结论.



10. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 若 $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = n \cdot 2^{n+3}$, 且 $a_1 = 8$.

(1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 是否存在 $r, s \in \mathbf{N}_+$, 使得 $a_r^2 - b_s = 2013$, 若存在, 求出所有满足条件的 r, s ; 若不存在, 请说明理由.

11. 证明以下命题:

(1) 对任一正整数 a , 都存在整数 $b, c (b < c)$, 使得 a^2, b^2, c^2 成等差数列.

(2) 存在无穷多个互不相似的三角形 $\triangle_n$, 其边长 a_n, b_n, c_n 为正整数且 a_n^2, b_n^2, c_n^2 成等差数列.



第 2 讲 数学归纳法(一)

1. (卡特兰恒等式) 求证: 对于任意正整数 n , 有恒等式

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

成立.

2. (伯努利不等式) 已知 n 为正整数, $x > -1$, 求证: $(1+x)^n \geq 1+nx$.

3. 作幂塔 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$, 定义 $a_0 = 1, a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n} (n \in \mathbf{N})$, 证明: 数列 a_n 单调递增且有上界 2.

4. 如图 2-1 所示, 有一列曲线 $P_0, P_1, P_2, \cdots$, 已知 P_0 所围成的图形是面积为 1 的正三角形, P_{k+1} 是对 P_k 进行如下操作得到: 将 P_k 的每条边三等分, 以每边中间部分的线段为边, 向外作等边三角形, 再将中间部分的线段去掉 ($k = 0, 1, 2, \cdots$), 记 S_n 为曲线 P_n 所围成图形的面积.

求数列 $\{S_n\}$ 的通项公式.

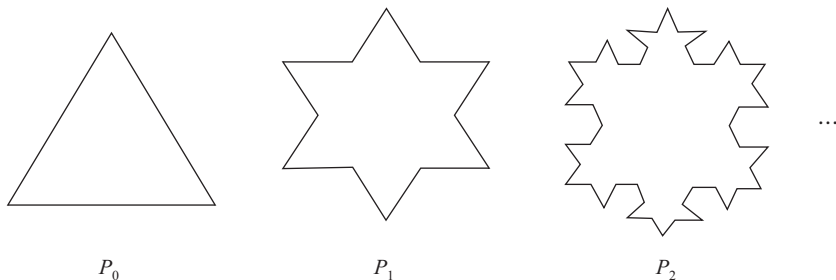


图 2-1



5. 试问,是否存在正整数 m , 它的各位数字之和为 2022, 而 m^2 的各位数字之和为 2022^2 ?

6. 2021 个点分布在一个圆的圆周上, 每个点都标上 $+1$ 或 -1 . 如果自某点开始, 按任一方向绕圆周前进到任何一点时, 所经过的数字的和都是正数, 则称该点是一个好点. 证明: 如果标作 -1 的点数少于 674, 则圆周上至少有一个好点.

7. 已知对任意的 $n \in \mathbf{N}_+$, 有 $a_n > 0$, 且 $\sum_{j=1}^n a_j^3 = \left(\sum_{j=1}^n a_j\right)^2$, 求证: $a_n = n$.

8. 证明: 任意正的真分数 $\frac{m}{n}$ 都可以表示成不同的正整数的倒数之和.

9. 将 n 颗石子随意分成两堆, 记下两堆石子数的乘积; 再将其中一堆分成两堆, 记下这两堆石子数的乘积; 再将这三堆中的一堆分成两堆, 记下这两堆石子数的乘积; 这样一直进行下去, 直到分成 n 堆, 每堆一颗石子为止, 求这些乘积之和.

10. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长都是有理数.

(1) 求证: $\cos A$ 是有理数;

(2) 求证: 对任意正整数 n , $\cos nA$ 是有理数.

11. 对正整数 $n \geq 2$, 求证: 任何正整数 m ($1 \leq m \leq n^2$, $m \neq 2$, $m \neq n^2 - 2$) 可以写成集合 $\{1, 3, \dots, 2n-1\}$ 中不同数的和(这个集合包含前 n 个正奇数), 并证明 $n^2 - 2$ 不能这样写.