数学培优竞赛新思维

数学培优竞赛讲座

（高三年级）

主　编　朱华伟

编　者　朱华伟　付云皓　郑　焕

清华大学出版社

北　京

内 容 简 介

本书以高考数学难题、著名大学强基计划招生和国内外高中数学竞赛为背景，按照普通高中高三年级数学教科书的进度分专题编写，在内容的安排上力求与课堂教学同步，在夯实基础的同时，通过新颖、有趣的数学问题，构建通往高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛的捷径；在有利于学生把高中数学教科书的知识巩固深化的同时，恰到好处地为学生拓宽著名大学强基计划招生和竞赛数学的知识；以著名大学强基计划招生和高中数学竞赛中的热点、难点问题为载体，介绍竞赛数学中令人耳目一新的解题方法与技巧，激发学生创新与发现的灵感，开发智力，提高水平去参加高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛.

本书配套《数学培优竞赛一讲一练(高三年级)》(ISBN9787302608592)可以帮助学生自我检测，《数学培优竞赛一讲一练》与《数学培优竞赛讲座》配套使用，能达到更好的学习效果.

本书可供高中准备参加高考数学、大学自主招生和高中数学竞赛的学生学习使用，也可供中学数学教师、数学爱好者、高等师范院校数学教育专业大学生、研究生及数学教师参考使用.

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签，无标签者不得销售。

版权所有，侵权必究。举报：010-62782989，beiqinquan@tup.tsinghua.edu.cn。

图书在版编目(CIP)数据

数学培优竞赛讲座. 高三年级 / 朱华伟主编. —北京：清华大学出版社，2022.8
(数学培优竞赛新思维)
ISBN 978-7-302-60856-1

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①朱…　Ⅲ. ①中学数学课－高中－教学参考资料　Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 081520 号

责任编辑： 王　定
封面设计： 周晓亮
版式设计： 思创景点
责任校对： 成凤进
责任印制： 朱雨萌

出版发行： 清华大学出版社
网　　址： http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址： 北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编：** 100084
社 总 机： 010-83470000　　**邮　　购：** 010-62786544
投稿与读者服务： 010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈： 010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者： 北京同文印刷有限责任公司
经　　销： 全国新华书店
开　　本： 185mm×260mm　　**印　　张：** 16　　**字　　数：** 356 千字
版　　次： 2022 年 8 月第 1 版　　**印　　次：** 2022 年 8 月第 1 次印刷
定　　价： 69.80 元

产品编号：095777-01

前　　言

从 1985 年我国第一次派队参加国际数学奥林匹克竞赛(简称 IMO)以来,中国代表队参加了 36 次 IMO(1985 年派两名队员参赛,1998 年因故没有参赛),22 次获总分第一(有 13 次六位队员都得金牌),8 次第二,2 次第三,第四、六、八名各 1 次,212 人次参赛,共获金牌 168 块,银牌 36 块,铜牌 6 块. 早在 1994 年,中国科学院数学物理学部王梓坤院士就写道:近年来,我国中学生在 IMO 中“连续获得团体冠军,个人金牌数也名列前茅,消息传来,全国振奋. 我国数学,现在有能人,后继有强手,国内外华人无不欢欣鼓舞”. 这对青少年学好数学无疑是极大的鼓舞和鞭策,极大地激发了青少年学习数学的热情.

为了给对数学有兴趣的高中生提供一个扩展知识视野、提高解题能力和培养创新精神的平台,我们以高考数学难题、著名大学强基计划招生和国内外高中数学竞赛为背景,根据多年辅导高中生参加高考数学、大学自主招生、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛所积累下来的经验、体会和素材,编写了这套《数学培优竞赛讲座》(高一年级、高二年级、高三年级),以及配套的《数学培优竞赛一讲一练》(高一年级、高二年级、高三年级).

《数学培优竞赛讲座》按照普通高中数学教科书的进度分专题编写,在内容的安排上力求与课堂教学同步,采用从课内到课外逐步引申扩充、由浅入深、由易到难、循序渐进的教学方法;在夯实基础的同时,通过新颖、有趣的数学问题,构建通往高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛的捷径;在学生力所能及的范围内帮助学生扩展知识视野,提高思维能力;在有利于学生把高中数学教材的知识巩固深化的同时,又恰到好处地为学生拓宽有关强基计划和竞赛数学的知识;以高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛中的热点、难点问题为载体,介绍竞赛数学中令人耳目一新的解题方法与技巧,激发学生创新与发现的灵感,帮助学生开发智力,提高水平去参加高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛.

《数学培优竞赛讲座》以专题讲座的形式编写,每讲的主要栏目如下.

数学名言欣赏:以名人名言开宗明义,开启每讲的数学学习之旅.

知识方法述要:详细归纳相关的知识、方法与技巧,突出重点、难点和考点. 对于高中数学教科书没有的内容,尽可能给出新知识、新方法的产生背景. 给出知识、方法与技巧尽可能系统、完整.

例题精讲:含“分析”“解”和“评注”,从易到难,拾级而上,由基础题、提高题、综合题组成. 本丛书中很多例题的解答之后有评注,评注的作用是对某些问题或解答过程中意犹未尽之处进行阐述分析,以起到画龙点睛的效果;对可进一步深入研究的问题予以拓展引申,意在引导学生去创造;对一题多解的问题提出相关的解法,发现特技与通法之间的联系. 总之,评注的目的在于,一方面揭示问题的背景和来源,另一方面启迪学生发现解决问题的思路及通过合理猜测提出新问题的方法,使学生不仅知其然,更知其所以然,以期达到授之以渔的目的.

强化训练:含选择题、填空题、解答题,为方便自学,在书后每题均给出详细解答过程.

《数学培优竞赛一讲一练》是《数学培优竞赛讲座》的配套练习册,可以为使用者提供自我检测;书后附有详细解答,可以检验使用者对数学知识的理解水平和掌握程度.《数学培优竞赛一讲一练》与《数学培优竞赛讲座》配套使用,能达到更好的学习效果.

本丛书注重数学基础知识的巩固提高和数学思想方法的渗透,凸显科学精神和人文精神的融合,加强对学生学习兴趣、创新精神、应用意识和分析问题解决问题能力的培养.希望通过本丛书的学习,能够使学生发现数学的美丽和魅力,体会数学的思想和方法,感受数学的智慧和创新,体验经过不懈的探索而获得成功的兴奋和快乐,进而激发学习数学的兴趣.

数学大师陈省身教授为2002年8月在北京举行的第24届国际数学家大会题词:“数学好玩.”我们深信本书能让学生品味到数学的无穷乐趣.著名数学家陈景润说:“数学的世界是变幻无穷的世界,其中的乐趣只有那些坚持不懈的人才能体会得到!”

本丛书是高中生参加数学竞赛的宝典,是冲刺著名大学强基计划招生、破解高考数学压轴题的利器,是中学数学教师进行数学竞赛辅导、进修的益友.

在本丛书的编写过程中,笔者参考并引用了有关资料中的优秀题目,为求简明,书中未一一注明出处,在此,谨向原题编者表示感谢.由于笔者水平有限,书中难免会有疏漏之处,诚挚欢迎读者批评与指正.

朱华伟

2022年1月于深圳中学新校区

目　录

第 1 讲　整　　除

> 数学，科学的女皇；数论，数学的女皇.
>
> ——C. F. 高斯（德国）

知识方法述要

1. 整除的定义

设 a,b 是整数（$b\neq 0$），若存在整数 q，使 $a=bq$，则称 b 整除 a，或 a 能被 b 整除，记为 $b\mid a$，这时 b 叫作 a 的因数或约数，a 叫作 b 的倍数. a 不能被 b 整除，记作 $b\nmid a$.

2. 整除的基本性质

（1）自反性：对所有非零整数 a，a 整除 a.

（2）传递性：若 $a\mid b$，$b\mid c$，则 $a\mid c$.

（3）若 $a,b,c,m\in\mathbf{Z}$，且 $a\mid b$，$a\mid c$，则 $a\mid(b\pm c)$，$a\mid mb$，$a\mid mc$，$a\mid m(b\pm c)$.

一般地，若 $a,b_i,x_i\in\mathbf{Z}(i=1,2,\cdots,n)$，且 $a\mid b_i$，则 $a\mid\sum\limits_{i=1}^{n}b_ix_i$.

（4）若 $a\mid b$，且 $b\neq 0$，则 $|a|\leqslant|b|$.

（5）n 个连续整数的乘积一定能被 $n!$ 整除.

性质（1）～（4）可以直接用整除的定义来证明. 性质（5）可以利用组合计数的方法证明，也可以通过比较所包含的素因子的次数来证明. 性质（4）比较显而易见，在估计或约束参数的范围很常用.

3. 带余除法

设 a,b 为整数，$b>0$，则有且仅有一对整数 q,r，使得

$$a=bq+r(0\leqslant r<b) \qquad ①$$

成立，当且仅当 $r=0$ 时，$b\mid a$；当 $r\neq 0$ 时，q 为 a 被 b 除的商，r 为 a 被 b 除的余数.

实际上，取 bq 为不超过 a 的 b 之最大倍数，则 q 满足 $bq\leqslant a<b(q+1)$. 令 $r=a-bq$，则有 $0\leqslant r<b$.

若还有整数 q_1 和 r_1 使得 $a=bq_1+r_1$，且 $0\leqslant r_1<b$，则由 ① 可得 $b(q-q_1)=r_1-r$，于是 $b\mid(r_1-r)$，但是 $0\leqslant|r_1-r|<b$，所以 $r_1-r=0$，即 $r_1=r$，于是 $q_1=q$. 这就证明了唯一性.

4. 最大公因数和最小公倍数的定义

（1）设 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是 k 个整数，如果 $d\mid a_1$，$d\mid a_2$，$\cdots$，$d\mid a_k$，那么 d 就称为 $a_1,a_2,\cdots,$

a_k 的公因数. 若 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是k 个不全为零的整数,我们把 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 的公因数中最大的数称为 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 的最大公因数,记作$(a_1, a_2, \cdots, a_k)$. 若$(a_1, a_2, \cdots, a_k)=1$,则称 $a_1, a_2,\cdots,a_k$ 是既约的,也称 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是互素的.

(2) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是k 个均不等于零的整数,如果 $a_1 \mid l$ 且 $a_2 \mid l,\cdots,a_k \mid l$,则称 l 是 $a_1, a_2,\cdots,a_k$ 的公倍数. 我们把 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 的正的公倍数中最小的数称为 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 的最小公倍数,记作$[a_1, a_2, \cdots, a_k]$.

5. 最大公因数和最小公倍数的基本性质

(1) 设正整数 $a,b(a>b)$ 满足 $a=bq+r(0\leqslant r<b)$,其中 q,r 均为整数,则$(a, b)=(b, r)$.

(2) (欧几里得算法) 设 a,b 为整数,$b>0$,按下列方式反复做带余除法,有限步之后必然停止(即余数为 0).

用 a 除以 b: $a=bq_0+r_0, 0<r_0<b$;

用 b 除以 r_0: $b=r_0q_1+r_1, 0<r_1<r_0$;

用 r_0 除以 r_1: $r_0=r_1q_2+r_2, 0<r_2<r_1$;

……

用 r_{n-2} 除以 r_{n-1}: $r_{n-2}=r_{n-1}q_n+r_n, 0<r_n<r_{n-1}$;

用 r_{n-1} 除以 r_n: $r_{n-1}=r_nq_{n+1}$.

则$(a, b)=r_n$.

(3) (裴蜀定理) 设 a, b 是整数,则$(a, b)=d$ 的必要条件是:存在整数 u, v,使得

$$ua+vb=d.$$

特别地,$(a, b)=1$ 的充要条件是:存在整数 u,v,使得 $ua+vb=1$.

(4) 若$(a, b)=1$,且 $a \mid bc$,则 $a \mid c$.

(5) $(a,b)[a, b]=ab$.

(6) 当且仅当 $a_j \mid c(1\leqslant j\leqslant k)$ 时,$[a_1, a_2, \cdots, a_k] \mid c$.

性质(1) 的证明:设$(a, b)=d$,$(b, r)=d_0$,则 $d \mid a$,$d \mid b$,所以 $d \mid r=a-bq$. 因此 d 是 b 与 r 的公因数,从而 $d\leqslant d_0$. 同理可得 $d_0\leqslant d$,所以 $d=d_0$,即$(a, b)=(b, r)$.

根据性质(1) 可证明性质(2) 成立. 性质(3) 可由欧几里得算法倒推回去求出裴蜀系数 u, v.

性质(4) 的证明:因为$(a,b)=1$,由裴蜀定理可知,存在整数 u,v,使得 $ua+vb=1$,因此 $uac+vbc=c$. 因为等式左边是 a 的倍数,所以 $a \mid c$.

性质(5) 的证明:设$(a,b)=d$,则 $a=da_0$,$b=db_0$,且$(a_0,b_0)=1$,从而$[a,b]=da_0b_0$,所以$(a,b)[a,b]=d^2a_0b_0=ab$.

性质(6) 的证明:设 $c=[a_1,a_2,\cdots,a_k]q+r$,$0\leqslant r<[a_1,a_2,\cdots,a_k]$. 由整除的性质可知,$a_j \mid r(1\leqslant j\leqslant k)$. 从而 r 为 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 的公倍数,因为$[a_1,a_2,\cdots,a_k]$为最小公倍数,所以 $r=0$.

例题精讲

【例 1-1】 求证：如果 u 和 v 是整数，u^2+uv+v^2 能被 9 整除，那么 u 和 v 都能被 3 整除.

证明：依题设，由

$$u^2+uv+v^2=(u-v)^2+3uv$$

可被 9 整除知 $3\mid(u-v)^2$，进而有 $3\mid u-v$，于是，$9\mid(u-v)^2$，又有 $3\mid uv$，从而 u 与 v 之一能被 3 整除. 再由 $u-v$ 能被 3 整除可知 u,v 都能被 3 整除.

【例 1-2】 已知 x,y,z 是互不相等的正整数，$xyz\mid(xy-1)(yz-1)(zx-1)$，求 x,y,z.

解：本题等价于求使 $\dfrac{(xy-1)(yz-1)(zx-1)}{xyz}=xyz-(x+y+z)+\dfrac{xy+yz+zx-1}{xyz}$ 为整数的 x,y,z. 不妨设 $x>y>z$，则 $xyz<xy+yz+zx-1<3xy\Rightarrow z<3$.

当 $z=1$ 时，$\dfrac{xy+yz+zx-1}{xyz}=\dfrac{xy+y+x-1}{xy}=1+\dfrac{y+x-1}{xy}$，而 $xy-(x+y-1)=(x-1)(y-1)>0$，所以此种情况无解；

当 $z=2$ 时，$\dfrac{xy+yz+zx-1}{xyz}=\dfrac{xy+2y+2x-1}{2xy}$，可知 $2xy\leqslant xy+2x+2y-1\Leftrightarrow(x-2)(y-2)\leqslant 3$，可知 $y=3$，则 $x=4$ 或者 $x=5$，验证可得 $x=5$ 满足条件，所以所有解为

$$(x,y,z)=(2,3,5),(2,5,3),(3,2,5),(3,5,2),(5,2,3),(5,3,2).$$

【例 1-3】 设 m，n 是正整数，且 $m<n$. 求证：对于任意连续 n 个正整数，总存在两个不同正整数的乘积为 mn 的倍数.

证明：连续 n 个正整数中肯定有 n 的倍数和 m 的倍数，分别设为 x，y，若 $x\neq y$，xy 即为所求. 否则 $x=y$，考虑 (n,m)，因为 $(n,m)\leqslant\dfrac{n}{2}$，所以这连续 n 个数中肯定有两个不同整数被 (n,m) 整除，取其中不同于 x 的整数 z，则 xz 即为所求（x 为 m，n 的公倍数，最小公倍数与最大公因数的乘积等于两个数的乘积）.

【例 1-4】 设 n 为正整数. 定义数列如下：$a_1=n$，对每个 $k>1$，令 a_k 是满足 $0\leqslant a_k\leqslant k-1$ 且 $a_1+a_2+\cdots+a_k$ 能被 k 整除的唯一整数. 例如 $n=9$ 时，得到的数列为 9，1，2，0，3，3，3，…. 求证：对任意正整数 n，数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 从某一项起为常数.

解法 1：设 $s_k=a_1+a_2+\cdots+a_k=kb$，$b$ 为正整数. 如果 $b\leqslant k$，那么 $a_1+a_2+\cdots+a_k+b=(k+1)b$ 能被 $k+1$ 整除，因此 $a_{k+1}=b$，而且 $s_{k+1}=(k+1)b$. 同理，$a_{k+2}=b$，$a_{k+3}=b$，…，即从第 $k+1$ 项起，数列 $\{a_m\}$ 为常数. 由于 $s_{k+1}\leqslant s_k+k$，所以 $s_n\leqslant n+1+2+\cdots+(n-1)=n+\dfrac{(n-1)n}{2}<n^2$，即在上面取 $k=n$ 即可.

解法 2：$s_{k+1}\leqslant s_k+k$，所以 $\dfrac{s_{k+1}}{k+1}<\dfrac{s_{k+1}}{k}\leqslant\dfrac{s_k+k}{k}=\dfrac{s_k}{k}+1$. 由于 $\dfrac{s_{k+1}}{k+1}$，$\dfrac{s_k}{k}$ 都是整数，所以

$\frac{s_{k+1}}{k+1} \leqslant \frac{s_k}{k}$,即$\{\frac{s_k}{k}\}$单调递减.因此,存在正整数$N$,当$k > N$时,$\{\frac{s_k}{k}\}$为常数数列,从而$\frac{s_{k+1}}{k+1} = \frac{s_k}{k}$,即$a_{k+1} = s_{k+1} - s_k = \frac{k+1}{k}s_k - s_k = \frac{s_k}{k}$,所以当$k > N$时,$\{a_k\}$为常数数列.

由解法1可以知道$N < n$.

评注 在解法2中,可以先根据前面几项去找规律,发现s_k与k的比值在递降,s_k从某项开始比值小于k,并且从这一项开始,s_k与k的比值与常数项相等.

【例 1-5】 求所有正整数m,n满足$m^2 - n$整除$m + n^2$,并且$n^2 - m$整除$n + m^2$.

分析 根据对称性,不妨设$n \geqslant m$并估计n的大体范围.

解:不妨设$n \geqslant m$,则$(m+1)^2 - (m+1) = m + m^2$,对于$n > m+1$,显然$n^2 - m > n + m^2$成立.因此,$n > m+1$时,满足条件的整数$m$,$n$不存在,只需要考虑$n = m$与$n = m+1$.

若$n = m$,则$n^2 - n$整除$n^2 + n$.若$n > 3$,则$n^2 > 3n \Rightarrow 2(n^2 - n) > n^2 + n$,显然$n^2 - n < n^2 + n$.所以$n > 3$,$n^2 - n$不能整除$n^2 + n$.所以,$n = 2$与$n = 3$且经验证满足要求.

若$n = m+1$,求$m^2 - m - 1$整除$m^2 + 3m + 1$的m.若$m \geqslant 6$,则$m(m-5) > 3 \Rightarrow 2(m^2 - m - 1) > m^2 + 3m + 3$.又$m^2 - m - 1 < m^2 + 3m + 1$,所以$m^2 - m - 1$不能整除$m^2 + 3m + 1$.对于$m = 1,2,3,4,5$,逐一验证得:$m = 1$或$m = 2$.

综上所述,解为$(m,n) = (2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(3,2),(2,3)$.

评注 利用不等式缩小变量取值范围,且对较小数逐一验证是数论中常用的思想方法.

【例 1-6】 设整数$k \geqslant 14$,P_k是小于k的最大素数.若$P_k \geqslant \frac{3}{4}k$,$n$是一个合数.

求证:若$n > 2P_k$,则$n \mid (n-k)!$

证明:因为n是合数,设$n = ab(2 \leqslant a \leqslant b)$.

若$a \geqslant 3$:

(1) 假设$a \neq b$,则$n > 2P_k \geqslant \frac{3}{2}k$,$b \leqslant \frac{n}{3}$.从而$k < \frac{2}{3}n$,所以$n - k > \frac{n}{3} \geqslant b > a$.所以$n \mid (n-k)!$.

(2) 假设$a = b$,则$n = a^2$,$n - k > \frac{n}{3} = \frac{a^2}{3}$.因为$k \geqslant 14$,所以$P_k \geqslant 13$,$n \geqslant 26$,$a \geqslant 6$,从而$\frac{a^2}{3} \geqslant 2a$,所以$n - k > 2a$,$n \mid (n-k)!$.

若$a = 2$:

(1) 因为$n \geqslant 26$,假设b不是素数,则可设$b = b_1 b_2 (1 < b_1 \leqslant b_2)$,因为$b \geqslant 13$,所以$b_2 \geqslant 4$,又$ab_1 \geqslant 4$,可归入$a \geqslant 3$的情况讨论.

(2) 假设b是素数,则$b = \frac{n}{2} > P_k$,因为P_k是小于k的最大素数,则$b > k$,从而$n - k = 2b - k > b$.所以$n \mid (n-k)!$.

综上所述,$n \mid (n-k)!$.

【例 1-7】 项链 A 由 14 颗珠子组成,项链 B 由 19 颗珠子组成. 求证:对于每个正奇数 n,均可将 33 颗珠子标以 $n, n+1, \cdots, n+32$,使得上述每个整数恰好各用一次,并且相邻的珠子所标的数互素.

证明:设项链 A 上的珠子依次标上数字:$n+m, n+m+1, \cdots, n+m+13$,其中 $m \in \mathbf{N}$,且 $1 \leqslant m \leqslant 18$,由于连续两个正整数互素,所以只需要满足

$$(n+m,\ n+m+13)=1,$$

即

$$(n+m,\ 13)=1. \qquad ①$$

将项链 B 上的珠子依次标上数字:$n+m+14, \cdots, n+32, n, n+1 \cdots, n+m-1$,只需要满足

$$(n+32,\ n)=1, \qquad ②$$

$$(n+m+14,\ n+m-1)=1, \qquad ③$$

③ 等价于

$$(n+m-1,\ 15)=1. \qquad ④$$

注意到 ② 等价于$(n,32)=1$,而 n 为奇数,可见 ② 恒成立. 为满足 ①④,只需要满足 $n+m$ 不能被 13 整除且被 3 和 5 除时余数不为 1. 在 m 可取的 18 个数中,至多有 6 个数被 3 除余 1,有 4 个数被 5 除余 1,有 2 个数能被 13 整除. 因此,存在 m 满足题设要求.

评注 区间 $1 \leqslant m \leqslant 18$ 可缩短为 $1 \leqslant m \leqslant 5$. 因此时在 m 可取的 5 个值中,能使 $n+m$ 被 3 除余 1 的至多有 2 个,被 5 除余 1 的至多有 1 个,被 13 整除的至多有 1 个,存在满足题设要求的 m.

【例 1-8】 对任意给定的正整数 $k(k>1)$,记 $n, n+1, \cdots, n+k$ 的最小公倍数为 $Q(n)$,$n \in \mathbf{N}_+$,求证:存在无穷多个 n,使得 $Q(n) > Q(n+1)$.

证明:令 $n = r \cdot k! - 1$,$r \geqslant 3$,$r \in \mathbf{N}$,下面证明对这样的 n 有 $Q(n) > Q(n+1)$.

记 $m = [n+1,\ n+2,\ \cdots,\ n+k]$,由于当 $j=1,\ 2,\ 3, \cdots,\ k$ 时,$(n,\ j)=(j,\ 1)=1$,从而有$(n,\ n+j)=1$,$j=1,\ 2,\ 3, \cdots,\ k$. 于是 $Q(n)=mn$.

另外,$n+k+1 = rk! + k$ 能被 k 整除,m 能被 $n+1 = rk!$ 整除,从而能被 k 整除,因此 $\dfrac{m(n+k+1)}{k}$ 不仅能被 m 整除,也能被 $n+k+1$ 整除.

所以 $Q(n+1) = [n+1, n+2, \cdots, n+k, n+k+1] = [m, n+k+1] \leqslant \dfrac{m(n+k+1)}{k}$,

从而在 $r \geqslant 3, k \geqslant 2$ 时,$Q(n+1) \leqslant \dfrac{m(n+k+1)}{2} = \dfrac{mn}{2}\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right) \leqslant \dfrac{mn}{2}\left(1+\dfrac{k+1}{3k-1}\right) < mn = Q(n)$.

评注 首先 $Q(n)=[m,\ n]$,为了使 $Q(n)$ 尽量大,应令$(m,\ n)=1$,从而可得$(n, n+j) = (n, j)=1$,由此联想到构造 $n = r \cdot k! \pm 1$,为了使$(m, n+k+1) \neq 1$,取 $n = r \cdot k! - 1$.

强化训练

1. 求被 3 除余 2,被 5 整除,且被 7 除余 4 的最小正整数.

2. 设 $a,b,c,d,u\in\mathbf{Z}$,且 $ac,bc+ad,bd$ 都能被 u 整除,求证:$u\mid bc,u\mid ad$.

3. 已知正整数 a,b 使得$\dfrac{a+1}{b}+\dfrac{b+1}{a}$是整数,求证:$a,b$ 的最大公因数不超过$\sqrt{a+b}$.

4. 正整数 N 的末两位是 28,各位数字之和也是 28,而且 N 能被 28 整除. 求 N 的最小值.

5. 试确定使 ab^2+b+7 整除 a^2b+a+b 的全部正整数对(a,b).

6. 设 a,b 为满足不等式 $a>b>2$ 的整数,而 $2a+2b+ab-1$ 能被 $2ab$ 整除.

(1) 求证:$(2a-1)(2b-1)(ab-1)$ 也能被 $2ab$ 整除.

(2) 求所有的 a,b.

7. 求数列 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列 $a_1,a_2,\cdots a_n$,这些排列对 $1\leqslant i\leqslant n$ 有性质 $i+1\mid 2(a_1+a_2+\cdots+a_i)$.

8. 当 p,q 都为奇数时,关于 x 的方程 $x^2+2px+2q=0$ 是否有有理数根,证明之.

9. 设整数 m,n 满足 $m\geqslant n$ 与 $m^3+n^3+1=4mn$. 求 $m-n$ 的最大值.

10. 求证:对于任何大于 2 的整数 k,总能找到 k 个不同的正整数,从而使这些数中的任意两个数之积能被这两个数之差整除.

11. 已知 a,b 是非负整数,问是否存在整数 p,q 使对任意正整数 n,都有 $p+na$ 与 $q+nb$ 互素?

12. 求出所有的有序正整数对(m,n),使得$\dfrac{n^3+1}{mn-1}$是整数.