

第1章 预备知识

从有限走向无限——“世界最大旅馆”

数学故事

“世界最大旅馆”——希尔伯特旅馆问题是伟大的数学家大卫·希尔伯特假设出来的,它体现了数学中无限的思想,也反映了有限和无限的区别与联系。

现实中的旅馆房间数量是有限的,当所有的房间都客满时,如果来一位新客,就无法入住。而如果设想一家旅馆,它的房间数量是无限的,当所有的房间也都客满时,如果来了一位新客,是否可以入住呢?

希尔伯特旅馆(图1.1)的老板回答是:“不成问题!”接着他就把1号房间的旅客移到2号房间,2号房间的旅客移到3号房间,3号房间的旅客移到4号房间……这样,新客就被安排住进了已被腾空的1号房间。

我们再进一步设想,还是这家有无限个房间的旅馆,各个房间也都住满了客人。这时又来了无穷多位客人,是否可以入住呢?

老板回答:“不成问题!”于是他把1号房间的旅客移到2号房间,2号房间的旅客移到4号房间,3号房间的旅客移到6号房间……也就是将原来的客人都移到了双号房间入住,然后继续下去。所有的单号房间都腾了出来,新来的无穷多位客人就可以顺利入住了,问题完美地得到解决。

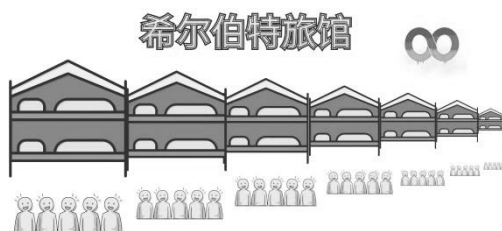


图 1.1

数学思想

哲学上,有限和无限体现了对立统一的辩证思想。数学上,有限和无限也有着千丝万

续的联系。高等数学从主要研究有限的初等数学发展而来,建立了许多研究无限的理论方法,微积分中的极限、微分和积分就是研究无限的有力工具。那么,有限与无限之间的区别与联系又是什么呢?从希尔伯特旅馆的假设中我们可以看出,有限的旅馆在客满后无法安排入住,而无限的旅馆完美解决了这个问题,这就是有限与无限的区别。

这些论述与研究揭示了有限和无限的关系,同时也开启了人类对微积分中无穷、极限、“无限分割”等的探讨,这些都是微积分的中心思想,对微积分的发展有着深远的意义。在极限中,无限的数列的和得到了有限的结果;微分的核心是无穷分割;在定积分中,用无限的“直”代替有限的“曲”来解决面积问题。因此可以看出,有限和无限贯穿整个微积分发展的全过程,是微积分中重要的思想,我们在学习微积分时要时刻发现与体会微积分中的有限和无限的思想,理解高等数学中的无限理论。

数学人物



图 1.2

大卫·希尔伯特(图 1.2)是德国伟大的数学家,他中学时代就对数学表现出了浓厚的兴趣,后来与爱因斯坦的老师闵可夫斯基结为好友,共同进入哥尼斯堡大学深造,并进行数学方面的研究。他在代数、几何、基础数学等多个领域都作出了巨大的贡献,出版的《几何基础》成为近代公理化方法的代表作。数学中也有很多以希尔伯特命名的数学定义或定理,他在数学方面的才华以及他对数学的贡献被世人所称赞,被后人称为“数学世界的亚历山大”。

1900年,第二届数学家大会在法国巴黎举行,会上希尔伯特做了名为“数学问题”的著名演讲,演讲的内容根据当时数学方面的研究成果和研究趋势提出了著名的23个“希尔伯特问题”,这23个问题中包括数学基础问题、数论问题、代数和几何问题及数学分析问题。这些问题约有一半已经得到解决,但也有些问题至今仍未解决,这些问题对现代数学的研究产生了深远的影响,推动了现代数学的发展。据统计,在国际最高数学奖——菲尔茨奖中,至少有将近三分之二的获奖人的工作与希尔伯特问题有关。中国著名的数学家陈景润在哥德巴赫猜想的证明中取得了领先世界的成果,证明出了“陈氏定理”,这正是希尔伯特问题中的第8个问题。

1.1 函 数

问题导入

引例 1 出租车定价问题

某市出租车收费标准:起步价为10元(3千米以内),3千米~15千米为2元每千米,15千米以外为3元每千米。那么可以通过上述收费标准得到行驶路程 x 与车费 y 之间的

关系式为

$$y = \begin{cases} 10, & x \leq 3 \\ 10 + (x - 3) \times 2, & 3 < x \leq 15 \\ 34 + (x - 15) \times 3, & x > 15 \end{cases}$$

那么行驶路程 x 每取到一个数值, 都可以通过关系式计算出应支付的车费。

引例2 生产成本问题

某工厂每天生产某种产品的件数为 x 件, 机械设备等固定成本为 1000 元, 生产每件产品所花费的人工费和原材料费用共为 10 元, 那么每天产量 x 与每天的生产成本 y 之间的对应关系为

$$y = 1000 + 10x$$

如果该工厂每天的产量为 $[0, 2000]$, 那么 x 每取到一个数值, 都可以通过上述关系式计算出当天的生产成本。

上述两个例子有一个共同点: 其中一个变量的任意取值, 都有另一个变量的一个相应值与其对应, 这种对应关系称为函数。

知识归纳

1.1.1 函数的概念

1. 函数的定义

【定义 1.1】 设 x, y 是两个变量, D 是实数集的一个子集合, 如果对 D 中每一个数值 x , 按照某种对应法则 f , 都有唯一确定的一个数值 y 和它对应, 则称变量 y 是变量 x 的 **函数**, 记作

$$y = f(x)$$

并称 x 为 **自变量**, y 为 **因变量** 或自变量 x 的 **函数**, x 的取值范围 D 叫作函数 $f(x)$ 的 **定义域**。

说明:

(1) **定义域** D 是自变量 x 的取值范围, 也就是使函数 $y = f(x)$ 有意义的一个数集。

(2) 当 x 的取值 $x_0 \in D$ 时, 与 x_0 相对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 的 **函数值**, 记作

$$f(x_0) \quad \text{或} \quad y|_{x=x_0}$$

当 x 遍取数集 D 中的所有数值时, 对应的函数值全体所构成的集合称为函数 $f(x)$ 的 **值域**。

(3) 决定一个函数的两个因素是定义域 D 和对应法则 f 。每一个函数值都可由一个 $x \in D$ 通过 f 而唯一确定, 所以只要给定定义域 D 和对应法则 f , 函数值域也就相应地被确定了。



函数——定义域

(4) 如果两个函数的定义域 D 和对应法则 f 完全相同,那么这两个函数相同。

2. 函数的表示方法

(1) 公式法又称为解析式法,能够准确地反映自变量与函数之间的相依关系。如 $y = 1000 + 10x$ 。

(2) 列表法如表 1.1 所示。列表法一目了然,使用起来非常方便,但列出的对应点有限,不易看出自变量与函数之间的对应规律。

表 1.1

x	1	2	3	4	5
y	3	5	7	9	11

(3) 图像法形象直观,但只能表达两个变量之间的函数关系。正弦函数图形如图 1-3 所示。

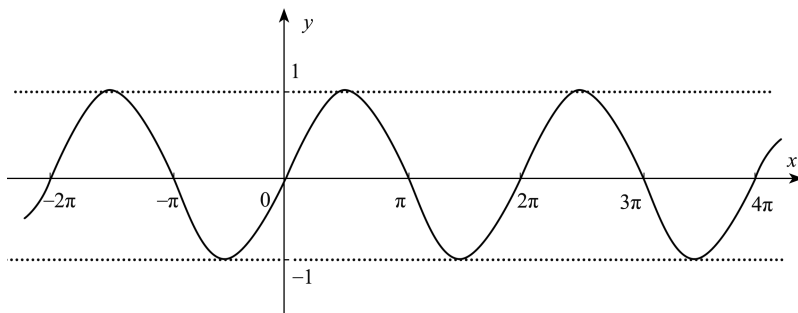


图 1.3

3. 定义域的求解

求解定义域的过程中需要注意以下几点。

- (1) 分式的分母不能为 0。
- (2) 偶次根式中被开方式不能小于 0。
- (3) 对数的真数位置必须大于 0。
- (4) 同时包含以上情况时需要求交集。
- (5) 对于现实问题要根据实际需求进行分析。

 相关例题见例 1.1~例 1.3。

1.1.2 函数的性质

1. 奇偶性

对函数 $y = x^3$ 而言,当自变量 x 取一对相反的数值时,相对应的一对函数值 y 也恰恰是相反数。如 x 取 -2 和 2 ,对应的 y 是 -8 和 8 ,即满足 $f(-x) = -f(x)$ 。

对函数 $y = x^2$ 而言,当自变量 x 取一对相反的数值时,相对应的一对函数值 y 相等。如 x 取 -2 和 2 ,对应的 y 都是 4 ,即满足 $f(-x) = f(x)$ 。

以上函数所具有的特性,就是函数的奇偶性。

【定义 1.2】 设函数 $f(x)$ 的定义域是以原点为对称的数集 D , 若对所有的 $x \in D$, 恒有

(1) $f(-x) = -f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**, 如图 1.4 所示。

(2) $f(-x) = f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**, 如图 1.5 所示。

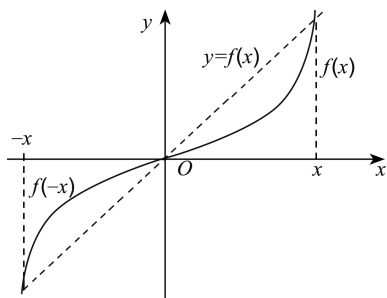


图 1.4

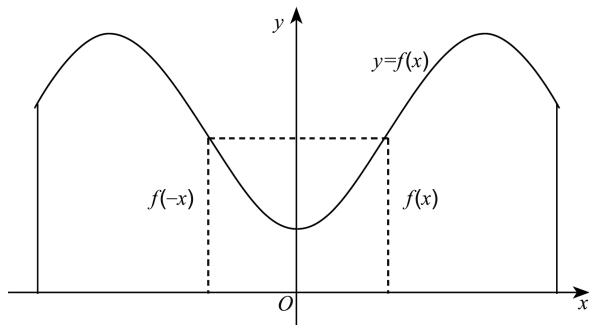


图 1.5

注意:

(1) 既非奇函数也非偶函数的函数, 称为非奇非偶函数, 如 $f(x) = x^2 + x$ 。

(2) 奇函数的图形关于原点对称, 偶函数的图形关于 y 轴对称。

2. 单调性

【定义 1.3】 设函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内有定义, 若对开区间 (a, b) 内任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时恒有:

(1) $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加;

(2) $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调减少。

如图 1.6 所示, 函数单调增加, 说明函数值随自变量的增大而增大, 函数曲线由左到右单调递增。

如图 1.7 所示, 函数单调减少, 说明函数值随自变量的增大而减少, 函数曲线由左到右单调递减。

3. 周期性

正弦函数 $y = \sin x$ 是周期函数, 即有

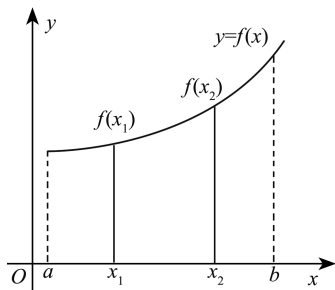


图 1.6

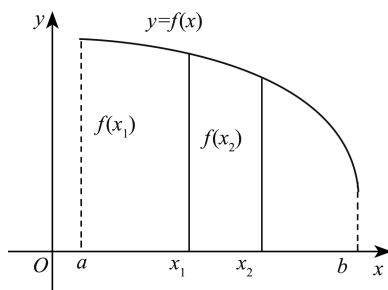


图 1.7

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

这里 $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ 都是 $y = \sin x$ 的周期, 而 2π 是最小正周期, 一般就称正弦函数的周期是 2π 。

【定义 1.4】 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 若存在一个不为零的常数 T , 使得对每一个 $x \in D$, 都有 $x \pm T \in D$, 且恒成立

$$f(x \pm T) = f(x)$$

则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**, 常数 T 为函数 $f(x)$ 的**周期**。

类似地, 余弦函数 $y = \cos x$, 正切函数 $y = \tan x$, 余切函数 $y = \cot x$ 都是周期函数。

4. 有界性

【定义 1.5】 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 若存在正数 M , 使得对于任意的 $x \in I$, 都满足

$$|f(x)| \leq M$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上为**有界函数**, 否则为**无界函数**。

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上, 正弦函数 $y = \sin x$ 的图像(图 1.8)介于两条直线 $y = -1$ 和 $y = 1$ 之间, 即 $|\sin x| \leq 1$, 从而 $y = \sin x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内为有界函数。

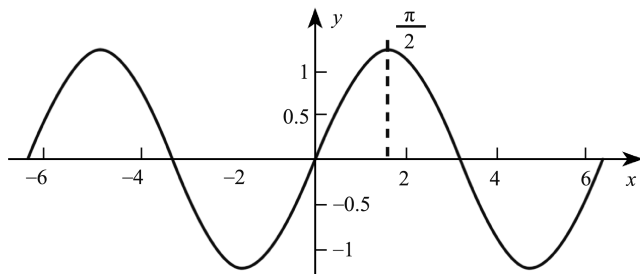


图 1.8

1.1.3 初等函数

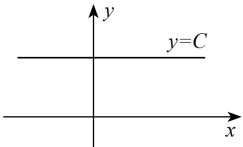
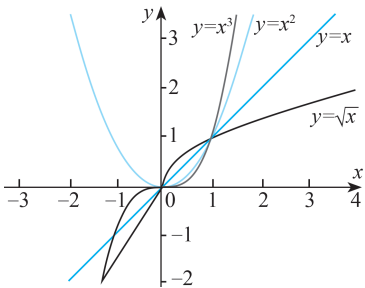
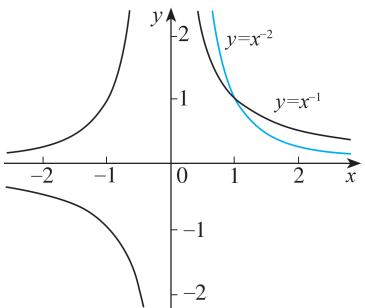
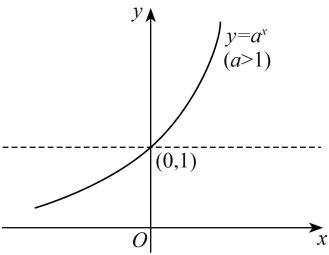
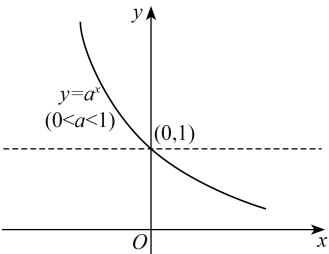
1. 基本初等函数

- (1) 常函数 $y = C$ (C 是常数)。
- (2) 幂函数 $y = x^a$ (a 是常数)。
- (3) 指数函数 $y = a^x$ (a 是常数且 $a > 0, a \neq 1$)。
- (4) 对数函数 $y = \log_a x$ (a 是常数且 $a > 0, a \neq 1$)。
- (5) 三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$ 。
- (6) 反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$ 。

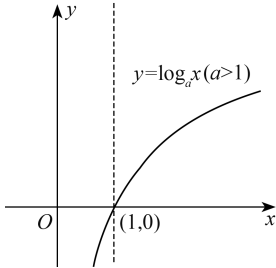
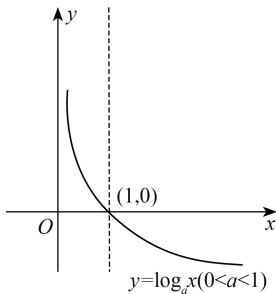
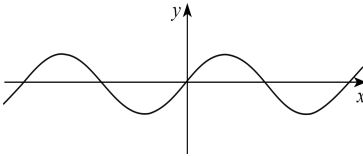
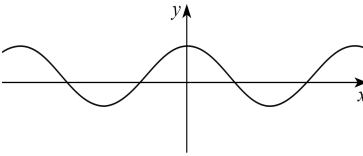
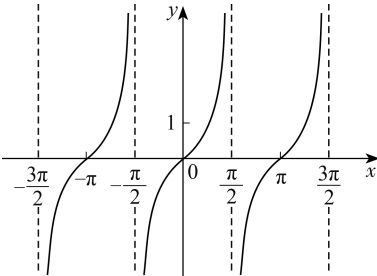
以上六种函数统称为**基本初等函数**。

有关基本初等函数的图像及主要性质如表 1.2 所示。

表 1.2

名称	函数	定义域和值域	图 像	特 性
常函数	$y = C$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in \{C\}$		偶函数, 有界
幂函数	$y = x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数, 单调增加
	$y = x^2$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [0, +\infty)$		偶函数, 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少, 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加
	$y = x^3$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数, 单调增加
	$y = \sqrt{x}$	$x \in [0, +\infty)$ $y \in [0, +\infty)$		非奇非偶函数, 单调增加
	$y = x^{-1}$	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ $y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$		奇函数, 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 内都是单调减少
	$y = x^{-2}$	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ $y \in (0, +\infty)$		偶函数, 在 $(-\infty, 0)$ 内单调增加, 在 $(0, +\infty)$ 内单调减少
指数函数	$y = a^x$ ($a > 1$)	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, +\infty)$		非奇非偶函数, 单调增加
	$y = a^x$ ($0 < a < 1$)	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, +\infty)$		非奇非偶函数, 单调减少

续表

名称	函数	定义域和值域	图 像	特 性
对数函数	$y = \log_a x$ ($a > 1$)	$x \in (0, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		非奇非偶函数, 单调增加
	$y = \log_a x$ ($0 < a < 1$)	$x \in (0, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		非奇非偶函数, 单调减少
三角函数	$y = \sin x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [-1, 1]$		奇函数, 周期 2π , $\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加, $\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少, $k \in \mathbb{Z}$
	$y = \cos x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [-1, 1]$		偶函数, 周期 2π , $(2k\pi, 2k\pi + \pi)$ 内单调减少, $(2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi)$ 内单调增加, $k \in \mathbb{Z}$
	$y = \tan x$	$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数, 周期 π , $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加, $k \in \mathbb{Z}$

续表

名称	函数	定义域和值域	图 像	特 性
三角函数	$y=\cot x$	$x \neq k\pi (k \in \mathbf{Z})$ $y \in (-\infty, +\infty)$		偶函数, 周期 $\pi, (k\pi, k\pi + \pi)$ 内单调减少, $k \in \mathbf{Z}$
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x \in [-1, 1]$ $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$		奇函数, 单调增加, 有界
	$y=\arccos x$	$x \in [-1, 1]$ $y \in (0, \pi)$		非奇非偶函数, 单调减少, 有界
	$y=\arctan x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$		奇函数, 单调增加, 有界
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, \pi)$		非奇非偶函数, 单调减少, 有界

2. 常用简单函数

(1) **一次函数**。形如 $y = kx + b$ 的函数称为一次函数，一次函数的图像是一条直线，如图 1.9 所示，其中， k 称为斜率， b 称为截距。当 $b = 0$ 时，一次函数也称为正比例函数。

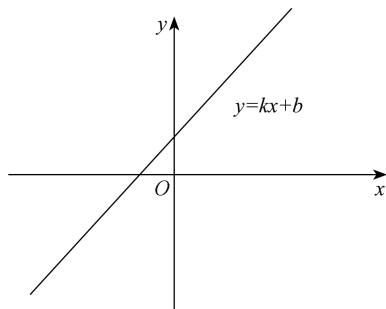


图 1.9

(2) **二次函数**。形如 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a \neq 0$) 的函数称为二次函数。二次函数的图像为抛物线，如表 1.3 所示。

表 1.3

函数	二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a \neq 0$)	
图像		
开口方向	开口向上	开口向下
对称轴	$x = -\frac{b}{2a}$	
顶点坐标	$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$	

3. 复合函数



函数——函数的复合

通过加、减、乘、除运算，两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可以组合成新的函数，如 $y = f(x) + g(x)$ 。

此外，还有其他方法也可以将两个函数组合成为一个新的函数。

例如：假设 $y = f(u) = \sqrt{u}$, $u = g(x) = x^2 + 1$ ，因为 y 是 u 的函数，而 u 是 x 的函数，可以看出 y 最终可以是 x 的函数，即

$$y = f(u) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2 + 1}$$

这个过程叫作复合。充分理解函数的复合概念非常重要。

又如:对于函数 $y = \sqrt{\sin x}$, 我们知道 x 为自变量, y 为 x 的函数。为了确定 y 值, 对于给定的 x 值, 应先计算 $\sin x$, 令 $u = \sin x$, 再由已得到的 u 值计算 $\sqrt{u}$, 从而得到 y 值 $y = \sqrt{u}$ 。这里可把 $y = \sqrt{u}$ 理解为 y 是 u 的函数; 把 $u = \sin x$ 理解为 u 是 x 的函数。那么函数 $y = \sqrt{\sin x}$ 就是把函数 $u = \sin x$ 代入函数 $y = \sqrt{u}$ 中得到的。以上将两个或两个以上的函数组合成一个新的函数的方法具有一般性, 这就是复合函数。

【定义 1.6】 已知两个函数

$$y = f(u), u \text{ 是自变量, } y \text{ 是因变量, } u \in D_1, y \in Z;$$

$$u = g(x), x \text{ 是自变量, } u \text{ 是因变量, } x \in D_2, u \in Z_1。$$

若 $Z_1 \cap D_1 \neq \emptyset$, 则函数 $y = f[g(x)]$ 就是由函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 经过复合而成的复合函数。通常称 $y = f(u)$ 为外层函数, $u = g(x)$ 为内层函数或中间变量, 如图 1.10 所示。

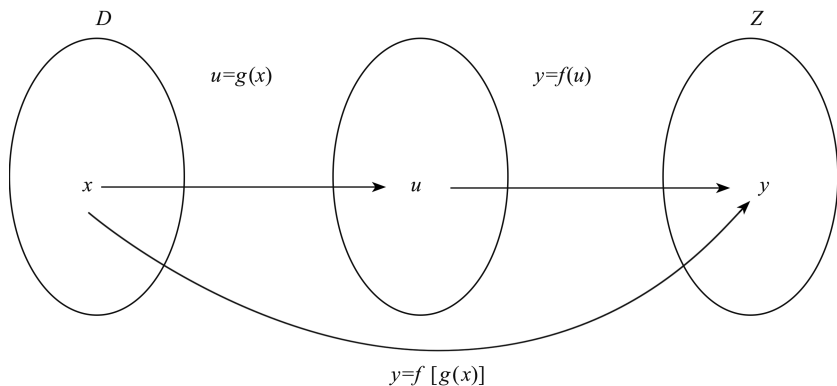


图 1.10

说明: 并不是任意两个函数都能构成一个复合函数, 根据定义 1.6, 只有满足条件 $Z_1 \cap D_1 \neq \emptyset$ 的两个函数才能构成一个复合函数。如 $y = \ln u$ 和 $u = (-x^2 - 1)$ 就不能构成复合函数。

注意: 复合函数涉及以下两方面问题。

- (1) 将几个简单函数复合成一个复合函数的问题。
- (2) 将一个复合函数分解成几个简单函数的问题。

 相关例题见例 1.4 和例 1.5。

4. 初等函数

【定义 1.7】 由基本初等函数经过有限次四则运算和复合过程所构成的, 并且能够用一个解析式表示的函数统称为初等函数。

例如: $y = \sqrt{x^2 - 5} + \cos \ln(x^2) - a^{3x}$, $y = 5x^3 - 2x^2 + 3$ 都是初等函数。

注意: 分段函数一般不是初等函数, 但也有例外。



函数——复合
函数的拆分

例如:由于分段函数 $f(x)=|x|=\begin{cases} -x, & x<0 \\ x, & x\geq 0 \end{cases}$ 可以用一个数学式子 $y=\sqrt{x^2}$ 表示,所以它也是初等函数。

1.1.4 分段函数

有些函数,对于其定义域区间内自变量 x 的不同取值,不能用一个统一的数学解析式表示,而要用两个或两个以上的式子表示,这类函数称为**分段函数**。

例如:函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & -2\leq x<0 \\ 3, & x=0 \\ x+1, & 0<x\leq 3 \end{cases}$ 与“引例1出租车定价问题”中的 $y=\begin{cases} 10, & x\leq 3 \\ 10+(x-3)\times 2, & 3<x\leq 15 \\ 34+(x-15)\times 3, & x>15 \end{cases}$ 都是分段函数。

说明:

- (1) 分段函数的定义域是各段函数自变量取值范围的并集。
- (2) 求分段函数在某点 x_0 处的函数值,要根据 x_0 所属的范围选择相应的解析式求函数的值 $f(x_0)$ 。

 相关例题见例1.6。

典型例题

例 1.1 试确定函数 $y=\frac{x-1}{x+3}+\sqrt{16-x^2}$ 的定义域。

解: 要使 $y=\frac{x-1}{x+3}+\sqrt{16-x^2}$ 有意义,只需 $x+3\neq 0$ 且 $16-x^2\geq 0$,即 $x\neq -3$ 且 $-4\leq x\leq 4$,所以函数的定义域为 $[-4, -3)\cup(-3, 4]$ 。

例 1.2 试确定函数 $y=\ln(x+3)$ 的定义域。

解: 要使 $y=\ln(x+3)$ 有意义,只需 $x+3>0$,即 $x>-3$,所以函数的定义域为 $(-3, +\infty)$ 。

例 1.3 下列每组中各对函数是否为相同函数?为什么?

- (1) $y=x$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$; (2) $y=x+1$ 与 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$;
- (3) $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$; (4) $y=\ln(x+1)^2$ 与 $y=2\ln(x+1)$;
- (5) $y=x$ 与 $y=\sqrt[3]{x^3}$ 。

解: 根据函数的定义域 D 和对应法则 f 决定一个函数的原则,判断两个函数是否为相同函数,就是判断定义域 D 和对应法则 f 是否皆相同。

(1) 由于 $y = (\sqrt{x})^2$ 的定义域是 $[0, +\infty)$, 而 $y = x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$, 所以, $y = x$ 与 $y = (\sqrt{x})^2$ 不是相同的函数。

(2) $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的定义域是 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, $y = x + 1$ 的定义域是 $\mathbf{R}$, 所以, $y = x + 1$ 与 $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 不是相同的函数。

(3) $y = x$ 与 $y = \sqrt{x^2}$ 的定义域都是 $\mathbf{R}$, 但是 $y = \sqrt{x^2}$ 的对应法则是平方再开方取算术根, 因此, $y = x$ 与 $y = \sqrt{x^2}$ 的对应法则不同, 所以, $y = x$ 与 $y = \sqrt{x^2}$ 不是相同的函数。

(4) $y = 2 \ln(x + 1)$ 的定义域是 $(-1, +\infty)$, $y = \ln(x + 1)^2$ 的定义域是 $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, 所以, $y = \ln(x + 1)^2$ 与 $y = 2 \ln(x + 1)$ 不是相同的函数。

(5) $y = x$ 与 $y = \sqrt[3]{x^3}$ 的定义域是 $\mathbf{R}$, $y = \sqrt[3]{x^3}$ 立方再开立方等于 x , 对应法则也相同, 所以, $y = x$ 与 $y = \sqrt[3]{x^3}$ 是相同的函数。

例 1.4 将以下各组函数中的 y 表示为 x 的函数:

(1) $y = \ln u, u = x^2 + 2$;

(2) $y = \sqrt{u}, u = 1 + x^2$;

(3) $y = \sqrt{u}, u = \ln v, v = x + 1$;

(4) $y = 3^u, u = \sqrt{v}, v = \sin x$ 。

解: (1) 把 $u = x^2 + 2$ 代入 $y = \ln u$ 中得到 $y = \ln(x^2 + 2)$ 。

(2) 把 $u = 1 + x^2$ 代入 $y = \sqrt{u}$ 中得到 $y = \sqrt{1 + x^2}$ 。

(3) 把 $v = x + 1$ 代入 $u = \ln v$ 中得到 $u = \ln(x + 1)$, 再把 $u = \ln(x + 1)$ 代入 $y = \sqrt{u}$ 中得到 $y = \sqrt{\ln(x + 1)}$ 。

(4) 把 $v = \sin x$ 代入 $u = \sqrt{v}$ 中得到 $u = \sqrt{\sin x}$, 再把 $u = \sqrt{\sin x}$ 代入 $y = 3^u$ 中得到 $y = 3^{\sqrt{\sin x}}$ 。

例 1.5 将下列复合函数拆分成几个简单函数的形式:

(1) $y = e^{\cos x}$;

(2) $y = \sin^5 x$;

(3) $y = \sin^2 3x$ 。

解: (1) 方法 1 由内层函数向外层函数分解, 就是按由 x 确定 y 的顺序进行。先由 x 获得内层函数 $u = \cos x$, 再将 u 替换指数函数 y 中的 $\cos x$ 得 $y = e^u$ 。所以函数 $y = e^{\cos x}$ 可拆分成 $u = \cos x, y = e^u$ 。

方法 2 由外层函数向内层函数分解, 就是先确定外层函数 $y = e^u$, 再将 u 用 $\cos x$ 表示出, 得 $u = \cos x$ 。同样可得函数 $y = e^{\cos x}$ 拆分成 $y = e^u, u = \cos x$ 。

(2) 由内层函数向外层函数分解,就是按由 x 确定 y 的顺序进行。先由 x 获得内层函数 $u = \sin x$,再将 u 替换指数函数 y 中的 $\sin x$ 得 $y = u^5$ 。所以函数 $y = \sin^5 x$ 是由 $y = u^5$, $u = \sin x$ 复合而成的。

(3) 函数 $y = \sin^2 3x$ 是由 $y = u^2, u = \sin v, v = 3x$ 复合而成的。

例 1.6 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & -2 \leq x < 0 \\ 3, & x = 0 \\ x + 1, & 0 < x \leq 3 \end{cases}$

(1) 求 $f(x)$ 的定义域;

(2) 求 $f(-1), f(2)$;

(3) 作出函数图像。

解: (1) 这是分段函数,分段点为 $x = 0$,定义域是各段函数自变量取值范围的并集,即 $[-2, 0) \cup \{0\} \cup (0, 3]$,所以定义域是 $[-2, 3]$ 。

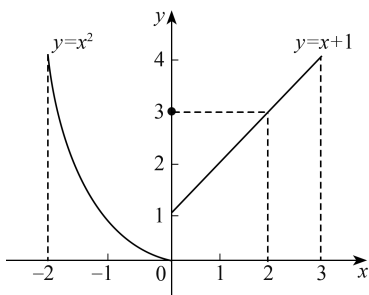


图 1.11

(2) 函数的对应法则是:若自变量 x 在区间 $[-2, 0)$ 内取值,则相对应的函数值用 $f(x) = x^2$ 计算;若 x 取值为 0,则对应的函数值是 $f(0) = 3$;若自变量 x 在区间 $(0, 3]$ 内取值,则对应的函数值用 $f(x) = x + 1$ 计算。

因为 $-1 \in [-2, 0)$,所以 $f(-1) = (-1)^2 = 1$;又因为 $2 \in (0, 3]$,所以 $f(2) = 2 + 1 = 3$ 。

(3) 函数图像如图 1.11 所示。

课堂巩固

基础训练

1. 求下列函数的定义域。

(1) $y = \frac{1}{1-x^2}$

(2) $y = \sqrt{x^2 - x - 6}$

(3) $y = \frac{\sqrt{x-1}}{3-x}$

(4) $y = \frac{1}{\ln(1+x)} + \sqrt{100-x^2}$

2. 下列各对函数是否相同,试说明理由。

(1) $y = \cos x$ 与 $y = \sqrt{1 - \sin^2 x}$

(2) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$ 与 $y = 1$

(3) $f(x) = \ln x^2$ 与 $f(x) = 2 \ln x$

(4) $f(x) = x$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2}$

3. 对所给函数,计算相应的函数值。

(1) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, 求 $f(0), f(-2), f\left(\frac{1}{a}\right), f(x+1)$;

$$(2) f(x) = n \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ 0, & x = 0, \text{ 求 } f(0), f(1), f(-2)。 \\ x-1, & x > 0 \end{cases}$$

4. 将下列函数中的 y 表示为 x 的函数。

$$(1) y = \sqrt{u}, u = \ln v, v = \sqrt{x}$$

$$(2) y = \sqrt{u}, u = \tan v, v = \frac{x}{3}$$

5. 将下列复合函数拆分为较简单的函数。

$$(1) y = \sqrt{1 - 2x^2}$$

$$(2) y = e^{x^2}$$

$$(3) y = \cos \frac{1}{x}$$

$$(4) y = \sqrt{\sin x}$$

$$(5) y = \sin \frac{x^2}{3}$$

$$(6) y = 3^{\lg 2x}$$

$$(7) y = 10^{\sqrt{x+1}}$$

$$(8) y = \lg \sin x^2$$

提升训练

1. 下列函数是否相同? 为什么?

$$(1) f(x) = \frac{x}{x} \text{ 与 } g(x) = 1$$

$$(2) y = \lg x^2 \text{ 与 } y = 2 \lg x$$

$$(3) y = f(x) \text{ 与 } s = f(t)$$

2. 将下列函数拆分成简单函数。

$$(1) y = \sin^3 x$$

$$(2) y = \sin 7x$$

$$(3) y = \sqrt{1 + x^2}$$

$$(4) y = e^{x^2}$$

3. 设 $f(x) = x^2, g(x) = \sin x$, 求 $f[g(x)], g[f(x)]$ 。

1.2 初等数学常用公式

1. 完全平方、完全立方公式

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

2. 因式分解

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

3. 一元二次方程

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ 的两个根为 } \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}。$$

$$ax^2 + bx + c = a \left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$$

4. 一元二次不等式

$$(x - x_1)(x - x_2) \geq 0, (x_1 < x_2) \text{ 的解为 } x \leq x_1 \text{ 或 } x \geq x_2;$$

$$(x - x_1)(x - x_2) \leq 0, (x_1 < x_2) \text{ 的解为 } x_1 \leq x \leq x_2。$$

5. 幂运算法则

$$a^n = a \times a \times \cdots \times a \text{ (} n \text{ 个 } a \text{ 相乘)}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} \text{ (} m \text{ 和 } n \text{ 均为正整数, 且 } m \text{ 不为 } 1)$$

$$a^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}} \text{ (} m \text{ 和 } n \text{ 均为正整数, 且 } m \text{ 不为 } 1)$$

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$(ab)^m = a^m b^m$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^m = \frac{b^m}{a^m}$$

6. 对数运算法则

若 $a^y = x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$, 则 $y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 。

$$\log_a mn = \log_a m + \log_a n$$

$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$$

$$\log_a m^n = n \log_a m$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\lg 10 = 1$$

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

7. 特殊角三角函数值

特殊角三角函数值如表 1.4 所示。

表 1.4

角 x	0°	30°	45°	60°	90°	180°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	0

8. 三角函数恒等关系式

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

9. 直线方程表达式

斜截式: $y = kx + b$

点斜式: $y - y_0 = k(x - x_0)$

总结提升1

1. 选择题。

(1) 设 $f(x) = \begin{cases} x+2, & -\infty < x < 0 \\ 2^x, & 0 \leq x < 2 \\ (x-2)^2, & 2 \leq x < +\infty \end{cases}$ 则下列等式中不成立的是()。

A. $f(0) = f(1)$

B. $f(2) = f(-2)$

C. $f(0) = f(-1)$

D. $f(3) = f(-1)$

(2) 设 $f(x) = \sin x$, 则 $f\left(-\sin \frac{\pi}{2}\right) = ()$ 。

A. 1

B. -1

C. $\sin 1$

D. $-\sin 1$

(3) 设 $f(x+1) = x^2 + 5x + 3$, 则 $f(x) = ()$ 。

A. $x^2 - 3x + 1$

B. $x^2 + 3x - 1$

C. $-x^2 + 3x + 1$

D. $x^2 - 3x - 1$

(4) 下列函数中有界的是()。

A. $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ B. $y = e^x$ C. $y = \frac{1}{x}$ D. $y = \sin x$

2. 求下列函数的定义域。

(1) $y = \sqrt{3-x} + \frac{1}{\ln(x+1)}$ (2) $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$

3. 设 $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, 试求 $f(-1), f(0), f(2), f(a), f(a+b)$ 。

4. 将下列函数拆分成简单函数。

(1) $y = e^{\sqrt{1+\sin x}}$ (2) $y = (1+2x)^7$
 (3) $y = \cos 3x$ (4) $y = \sin^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$