

# 第 1 章

## 机器视觉光学成像理论基础

### 1.1 引言

科技创新是提高社会生产力和综合国力的战略支撑,我国经济社会发展比过去任何时候都更加需要科学技术解决方案,更加需要增强创新动力。实体经济是经济增长的核心动力,制造业作为实体经济的重要组成部分,高质量的制造业代表了更高的实体经济发展水平。作为制造业中的核心——产品质量,决定了制造业竞争力的关键,中国制造、智能制造的发展离不开产品的质量保证。

光学领域作为制造业的重要组成部分,从民用的显示、摄像,到工业界的集成电路光刻系统,再到空间光学领域的精密天文望远成像系统、军用国防高能激光武器等,涵盖了当今社会生产生活的方方面面。组成这些复杂、精密光学系统的基本单元是一系列光学元件。光学元件的表面质量直接决定着光学系统的使用性能。以高能激光系统中的钽玻璃元件为例,当强光照射到钽玻璃在各个加工环节中引入的形状尺寸各异的划痕、麻点等微观缺陷时,元件内部将形成集中的电磁场分布,引发自聚焦、电子崩离等。接近波长量级的微观疵病将更易导致元件抗损伤能力的下降,甚至直接导致元件的炸裂。因此如何通过有效手段及时对光学元件表面缺陷情况进行检测及评价已成为当下亟需解决的问题。

由于光学元件表面缺陷的分布具有随机性,且形态种类各异,尺寸从亚微米到毫米量级不等,难以按照统一的检测标准进行检测,虽然已有一些原理性检测样机,但离工业化应用还有一定的距离,目前主要还是依靠人眼目视进行检测。人工检测不仅具有极大的主观性,且容易引发误判、漏判。随着现代机器视觉领域的蓬勃发展,以相机代替人眼拍摄图像并结合计算机数字化图像处理的机器视觉缺陷

检测方法应运而生。典型的机器视觉检测系统主要由机械自动化运动控制模块、光源照明系统、光学成像系统、图像处理模块等部分组成。检测时被测样品被装夹于机械自动化控制模块的载物台上,通过设计相应的照明成像方式采集待测元件表面图像。采集的图像经由图像处理模块的数字化图像处理算法处理,生成包含缺陷类别、尺寸等信息的检测报表。

在实际检测时,根据检测材料、缺陷类型的不同,需要采取不同的成像方式。常见的机器视觉缺陷检测成像方式主要包括暗场、明场、同轴场等<sup>[1-3]</sup>,不同的成像方式适用于检测不同类型的缺陷,本书将在各章予以详细阐述。在对元件表面进行缺陷检测时,由于成像系统的视场往往小于待测元件的口径,仅通过单次采集无法获得待测元件表面的全口径图像,因此在实际检测时需要采集待测元件表面不同位置的子孔径图像并进行拼接,该扫描过程称为子孔径扫描。对于平面元件,子孔径扫描的方式较为简单,只需控制相机相对于待测元件表面沿  $xy$  方向运动。但是对于表面存在曲率的球面、非球面元件,在子孔径扫描时还需根据待测元件的面形调整相机相对元件的  $z$  向位置来保持相机工作距。此外,对于球面、非球面子孔径扫描,除了需要控制上述相机相对元件的三维  $xyz$  平移运动,一般还需要控制元件的二维旋转运动(元件绕自身光轴自旋、随自身光轴摆动)。不同于平面,球面、非球面采集的子孔径图像实质是元件表面三维空间曲面在二维电荷耦合器件(CCD)像面的投影,因此图像中的像素坐标位置包含了曲面的非线性信息,若是按照平面子孔径拼接方式直接根据导轨运动的线性平移坐标进行拼接,球面、非球面的子孔径拼接图像将发生错位。为此需要将 CCD 像面的图像映射回非球面表面再进行拼接,也称为子孔径重构。对于球面,由于其表面曲率恒定,容易通过解析几何关系实现重构。但是对于非球面,由于其表面距离光轴不同位置处的曲率不同,且面形方程往往还包含了高次项系数,其重构方式相比平面、球面而言更为复杂。此外,元件表面曲率的存在还容易造成子孔径扫描过程中照明光源投射在曲面表面,导致光线进入成像系统成像,使得图像中出现大面积光斑分布遮盖缺陷散射像而破坏缺陷成像效果。球面元件由于表面不同位置曲率恒定,照明光源反射像的成像情况较为单一,容易通过控制照明孔径抑制光源反射像的干扰。然而非球面元件表面距离光轴不同位置的曲率各不相同,照明光源反射像的成像情况更为复杂,难以通过单一的照明孔径调控抑制光源反射像的干扰。因此相比于平面与球面,非球面元件表面缺陷检测的难度更大。在检测前需要通过光线追迹方法进行仿真建模,对球面、非球面的子孔径重构方法及非球面的照明光源干扰像抑制方法展开研究。

在缺陷的量化评价上,各国标准都有着明确的规定,例如中国国家标准 GB/T 1185—2006、美国军用标准 MIL-PRF-13830B 就以缺陷的宽度、分布密度等参数,

作为元件表面质量公差等级划分的定量化评价依据。为了通过数字化图像处理方法计算上述参数,理论上根据 CCD 像元尺寸大小与成像放大倍数,可以基于图像阈值分割方法提取缺陷的尺寸。但受限于显微镜成像系统像差衍射的影响,通过该方法获得的缺陷尺寸估计结果存在较大的误差,难以满足诸如缺陷检测的最小尺寸为  $0.5\mu\text{m}$  量级的缺陷测量精度要求。此外,当缺陷尺寸接近成像系统衍射极限时,缺陷的灰度分布将发生展宽,导致实际宽度为  $0.5\mu\text{m}$  的缺陷可能与实际宽度为  $3\mu\text{m}$  的缺陷具有相同的阈值分割宽度识别结果而造成误判。因此,在对缺陷尺寸识别上需要解决两方面的问题:对于缺陷尺寸位于系统衍射极限外的情况需要通过有效标定方法来计算缺陷的实际尺寸;对于缺陷尺寸位于系统衍射极限内的情况需要从物理光学电磁理论出发,提出使用基于矢量衍射理论的时域有限差分(finite difference time domain, FDTD)方法,建立表面缺陷散射光的电磁散射场暗场成像模型,创新性地引入表征实际成像系统的像差及衍射受限模型等因素的点扩散函数 PSF 模型,提取仿真缺陷产生的散射光经过不同光学系统后在远场(即 CCD 像面上)的光强分布,最终根据缺陷散射光的成像机理计算缺陷的实际尺寸。

## 1.2 表面缺陷散射电磁理论

对于特定的散射结构,精确的散射电磁场需要应用麦克斯韦方程组进行求解计算,这是一个极其复杂的过程。目前,实现散射场计算的方法主要可以分为数值法和解析法两类。其中数值法包括有限元法(FEM)<sup>[4]</sup>和时域有限差分方法<sup>[5]</sup>等,这类方法基于现代计算机强大的计算能力,对麦克斯韦方程组进行数值求解,从而得到高精度的电磁场分布,适用于各种复杂的散射场景。本书以 FDTD 方法为例,进行介绍。

### 1.2.1 FDTD 方法基本原理

FDTD 方法由美籍华人叶坤声(Kane S. Yee),于 1966 年首次提出<sup>[6]</sup>,是一种常规的电磁理论分析方法。它直接求解电磁场的时域问题,方便观察复杂问题下电磁场随时间的演变,也方便获得频域信息,适用于散射、透射、传输等多种问题,计算所需时间与存储空间少,且适合并行计算。在几十年的发展过程中,国际学者<sup>[7-13]</sup>对其近场远场外推、边界条件设置、计算区域划分等多方面进行了不断地探索和完美, FDTD 方法逐渐发展为一种成熟的数值计算方法,在多个领域广泛应用。在公开刊物与网络上也出现多种基于 FDTD 方法的电磁场解决方案,如 XFDTD、EMPIRE XPU、FDTD Solution 等。该方法与传统的差分方法最大的不同,是计算

时对电场和磁场在时间和空间上交替采样以离散化麦克斯韦方程组。描述电磁场普遍规律的麦克斯韦方程组为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \rho_m \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{J}_m \end{cases} \quad (1.1)$$

式中,  $\mathbf{B}$  是磁通量密度,  $\text{Wb}/\text{m}^2$ ;  $\mathbf{D}$  是电通量密度,  $\text{C}/\text{m}^2$ ;  $\mathbf{E}$  是电场强度,  $\text{V}/\text{m}$ ;  $\mathbf{H}$  是磁场强度,  $\text{A}/\text{m}$ ;  $\mathbf{J}$  是电流密度,  $\text{A}/\text{m}^2$ ;  $\mathbf{J}_m$  是磁流密度,  $\text{V}/\text{m}^2$ ;  $\rho_e$  是电荷密度,  $\text{C}/\text{m}^3$ ;  $\rho_m$  是磁荷密度,  $\text{Wb}/\text{m}^3$ 。

FDTD 方法是一种巧妙而简洁的时域求解麦克斯韦方程组的方法, 使用中心差分来离散电磁场对空间和时间的偏导。如图 1.1 所示的笛卡儿坐标系下的三维网格  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  中, 网格节点可以表示为  $(x, y, z)_{i,j,k} = (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$  (其中  $i, j, k$  均为整数), 时间节点也表示为  $t = n\Delta t$ 。任意节点时刻、任意节点位置处的某个电磁场分量可以表示为

$$f(x, y, z, t) = f(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z) = f_{i,j,k}^n \quad (1.2)$$

取中心差分近似的一阶偏导数为

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x} \right|_{x=i\Delta x} \approx \frac{f^n\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) - f^n\left(i - \frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta x} \\ \left. \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial y} \right|_{y=j\Delta y} \approx \frac{f^n\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right) - f^n\left(i, j - \frac{1}{2}, k\right)}{\Delta y} \\ \left. \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=k\Delta z} \approx \frac{f^n\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right) - f^n\left(i, j, k - \frac{1}{2}\right)}{\Delta z} \\ \left. \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} \right|_{t=n\Delta t} \approx \frac{f^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - f^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k)}{\Delta t} \end{cases} \quad (1.3)$$

在这个网格内, 电场分量沿网格边缘采样, 磁场分量沿网格表面中心处的法向采样。这样的采样方式使得四个电场分量环绕一个磁场分量, 四个磁场分量环绕一个电场分量, 符合法拉第感应定律与安培环路定律的自然结构而且方便麦克斯韦方程组中旋度方程的差分计算。同时, 电场分量和磁场分量在时间上交替抽样, 彼此相差半个时间步长。这种采样方式是 FDTD 方法的基础, 因此图 1.1 也被称为 Yee 元胞。

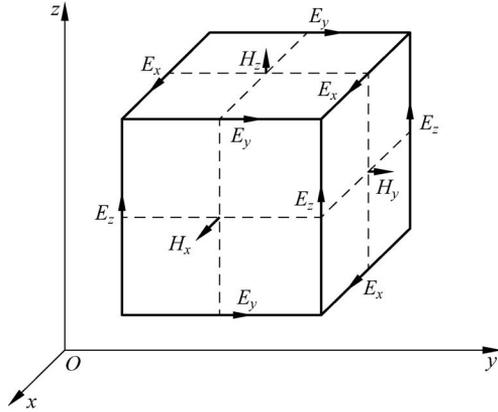


图 1.1 Yee 元胞

将电磁场分量都按照式(1.2)、式(1.3)进行表示和离散,可求解得到 FDTD 方法中电场和磁场共六个分量的时间推进计算公式,如电场  $\mathbf{E}$  的  $x$  分量为

$$E_x^{n+1}\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) = CA(m) \cdot E_x^n\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) + CB(m) \cdot \left[ \frac{H_z^{n+1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k\right) - H_z^{n+1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k\right)}{\Delta y} - \frac{H_y^{n+1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) - H_y^{n+1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2}\right)}{\Delta z} \right] \quad (1.4)$$

式中,

$$\left\{ \begin{aligned} CA(m) &= \frac{\frac{\epsilon(m)}{\Delta t} - \frac{\sigma(m)}{2}}{\frac{\epsilon(m)}{\Delta t} + \frac{\sigma(m)}{2}} = \frac{1 - \frac{\sigma(m)\Delta t}{2\epsilon(m)}}{1 + \frac{\sigma(m)\Delta t}{2\epsilon(m)}} \\ CB(m) &= \frac{1}{\frac{\epsilon(m)}{\Delta t} + \frac{\sigma(m)}{2}} = \frac{\frac{\Delta t}{\epsilon(m)}}{1 + \frac{\sigma(m)\Delta t}{2\epsilon(m)}} \end{aligned} \right. \quad (1.5)$$

式(1.4)和式(1.5)中标号  $m = (i + 1/2, j, k)$ 。可知,任一时刻的电场分量可由上一时间节点的电场分量与正交面上前半个时间步长的磁场分量计算得出,其余分量  $E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$  也有类似形式的推进公式,不再列出。综上,若已知某时刻的电磁场分布,则可以在时间域上迭代计算出下一时刻的各个电磁场分量,

最终得到所需时空区域的电磁场分布。如图 1.2 所示,即根据 FDTD 差分方程组计算电磁场的时域推进方法。



图 1.2 FDTD 方法在时域的交叉半步推进计算过程

FDTD 方法用差分方程组代替麦克斯韦方程组的旋度方程,用差分方程组的解代替旋度方程组的解。只有差分离散后的解是收敛且稳定的,采用这种近似代替求得的表面缺陷散射情况才有意义。因此,网格大小  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  与时间步长  $\Delta t$  应满足柯朗特-弗雷德里希斯-列维(Courant-Fredrichs-Lewy, CFL)稳定性条件,

$$\Delta t \leq \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}} \quad (1.6)$$

式中,  $v=1/\sqrt{\epsilon\mu}$  是介质中的光速。特殊情况下,若是三维立方体元胞,即  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \delta$ , 则

$$\Delta t \leq \frac{\delta}{\sqrt{3}v} \quad (1.7)$$

在二维情况下,式(1.6)变为

$$\Delta t \leq \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}}} \quad (1.8)$$

若  $\Delta x = \Delta y = \delta$ , 则

$$\Delta t \leq \frac{\delta}{\sqrt{2}v} \quad (1.9)$$

式(1.7)和式(1.9)表明时间间隔必须小于或等于波以介质中光速通过 Yee 元胞对角线长度的 1/3(三维情况)或 1/2(二维情况)所需的时间。

## 1.2.2 基于 FDTD 方法的表面缺陷电磁散射仿真模型

目前,FDTD 原理已被集成到许多电磁仿真软件当中,FDTD Solutions 便是其中一款常用的电磁仿真分析软件。FDTD Solutions 软件可以很方便地实现基于 FDTD 方法原理的电磁场仿真计算。表 1.1 给出 FDTD Solutions 的仿真时间与内存需求,其中  $\lambda/dx$  称为网格密度。可以看出,在二维(三维)仿真下,所需时间、内存与仿真区域面积(体积)成正比,与网格密度  $\lambda/dx$  的幂成正比。受计算条件限制,FDTD 方法只能计算有限区域内的电磁场,获取近场相关参数后,结合成

像模型获得远场电磁场分布。设定仿真区域在每个空间维度取十几个波长的量级。根据显微散射暗场成像的缺陷检测原理,建立如图 1.3 所示的实际系统布局及电磁场仿真模型。

表 1.1 FDTD Solutions 给出仿真时间与内存需求估计

	二维	三维
内存需求	$\sim A \cdot (\lambda/dx)^2$	$\sim V \cdot (\lambda/dx)^3$
时间需求	$\sim A \cdot (\lambda/dx)^3$	$\sim V \cdot (\lambda/dx)^4$

### 1. 仿真区域设定

为便于研究散射问题,从内到外将仿真区域分为总场区(total field)和散射场区(scattered field)。在总场区内,计算电场包括入射场和散射场。在散射场区内,计算电场只包括散射场。

### 2. 激励源设定

本节介绍一种基于显微散射暗场成像原理的精密表面缺陷数字化评价系统(surface defects evaluating system, SDES)。SDES 系统采用白光 LED 环形照明,如图 1.3(a)所示,其照明光源是一种无偏振的连续宽光谱光源,呈环形排列的多束光源以不同角度斜入射到元件表面。因此,将光源离散为不同波长  $\lambda_k$ 、不同偏振角度  $\theta_j$ 、不同入射角度  $\alpha_0$  的光线的非相干叠加,即

$$I_{\text{in}} = \sum_{i,j,k} \omega_k |E_{\text{in}}^{i,j,k}|^2 \quad (1.10)$$

仿真中,将可见光宽光谱(400~750nm)离散成 36 个波长,将非偏振光离散成  $0^\circ$  和  $90^\circ$  两个正交偏振光,在二维仿真中近似认为光源对称分布,即  $\alpha_i = \pm \alpha_0$  ( $i = 1, 2$ ),  $\theta_j = 0^\circ, 90^\circ$  ( $j = 1, 2$ ),  $\lambda_k = 400\text{nm}, 410\text{nm}, 420\text{nm}, \dots, 750\text{nm}$  ( $k = 1, \dots, 36$ )。  $\omega_k$  是 LED 的光谱响应曲线中对应波长  $\lambda_k$  的响应值。

### 3. 边界条件设定

表面缺陷多在微米量级且在元件表面呈孤立分布,精密光学元件的口径往往可以达到毫米甚至米的量级,相对于缺陷来说是无限大平面。为了模拟开放边界的电磁过程,需要在计算区域边界给出吸收边界条件。从最初的插值边界条件<sup>[14]</sup>,到后来的穆尔(Mur)吸收边界,以至近年来发展的完全匹配层(perfectly matched layer, PML),吸收效果越来越好。PML 在 FDTD 方法计算区域边界设置一层特殊的介质层,其介质的波阻抗与相邻介质的波阻抗完全匹配,这样入射到边界上的光波将无反射地进入 PML 层。同时,PML 层为有耗介质层,进入 PML 层的光波迅速衰减,实现对边界处光波无反射的良好吸收。实际仿真中,PML 层距离仿真结构的距离至少要有半个波长。

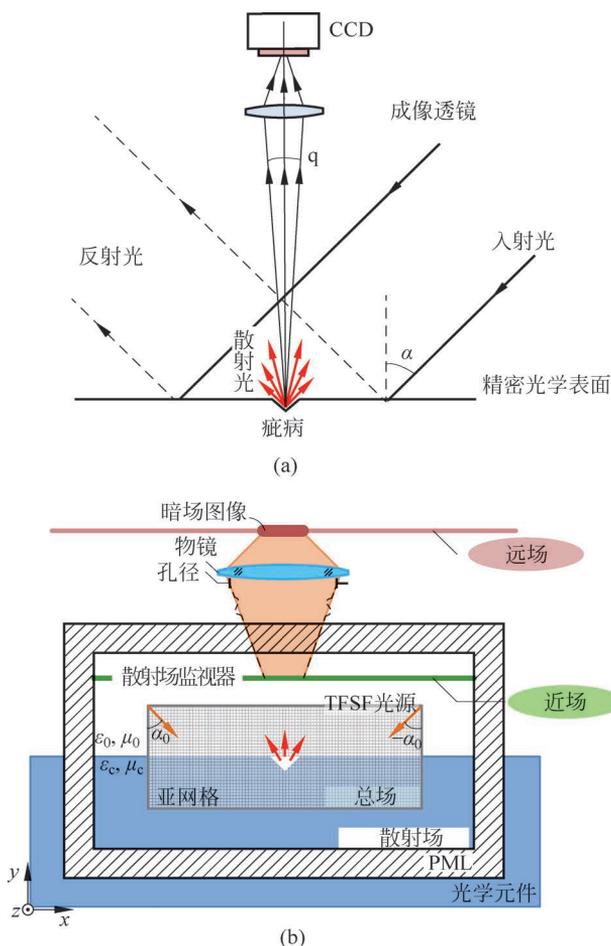


图 1.3 表面缺陷显微散射暗场成像  
(a) 系统布局; (b) 电磁场仿真模型

#### 4. 网格剖分

FDTD 方法计算的最小单位是一个网格。若小于一个网格局部区域近似为一个网格,则会带来计算误差。若将网格尺寸减小,则会造成仿真内存与时间成几何增长。因此,需要网格剖分技术解决这一矛盾。通常情况下,FDTD 离散网格的尺寸  $\delta$  的选取应满足介质中波长最小值的  $1/10$ 。但缺陷可能出现几百纳米宽度、几十纳米深度,只占几个计算网格尺寸,仍采用这样的网格划分不易得出准确的结果。这时,对精细结构的局部区域采用亚网格(subgrid)<sup>[15]</sup>,其他区域采用较粗网格。对横跨介质边界的网格采用共形网格技术,利用麦克斯韦方程的积分形式计算边界网格的回路积分,得到等效介电常数、等效电导率、等效磁导系数和等效磁

导率,这样等效处理可以提高仿真精度。

### 1.2.3 表面缺陷远场电磁分布求解方法

通过上述电磁散射仿真模型,可以计算在激励源  $\mathbf{E}_{\text{in}}^{i,j,k}$  作用下,有限空间区域内(近场)的电磁场分布。然而,实际中往往关心的是位于远场位置处的缺陷像面电磁场分布情况,此时就需要根据近场的电磁场来推出远场的电磁场分布。

将近场电场记为  $\mathbf{E}_0^{i,j,k}$ ,要得到计算区域外甚至是远区(远场)的电磁场分布记为  $\mathbf{E}_{\text{far}}^{i,j,k}$ ,可以从惠更斯原理出发,应用矢量衍射理论<sup>[16]</sup>进行计算。由格林第二公式,如果已知由表面约束一组辐射源在封闭表面的切向分量,则可以只从表面的切向场唯一地预测表面外部的场。于是,若在近场边界(可以理解为散射体附近)引入虚拟界面 A,设界面 A 以外为真空。如果保持界面 A 处  $\mathbf{E}$  场、 $\mathbf{H}$  场的切向分量不变,而令界面 A 内的场为零,则图 1.4(a)和(b)两种情况下界面 A 以外有相同的电磁场。界面 A 称为惠更斯表面。

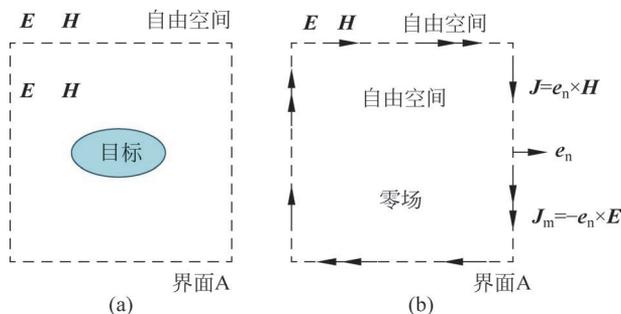


图 1.4 近场外推的等效原理

(a) 原问题; (b) 等效问题

惠更斯表面 A 处的等效面电流  $\mathbf{J}$  与面磁流  $\mathbf{J}_m$  为

$$\begin{cases} \mathbf{J} = \mathbf{e}_n \times \mathbf{H} \\ \mathbf{J}_m = -\mathbf{e}_n \times \mathbf{E} \end{cases} \quad (1.11)$$

电流与磁流的辐射场为

$$\mathbf{E} = -\nabla \times \mathbf{F} + \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.12)$$

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} + \frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \nabla \times \mathbf{F} \quad (1.13)$$

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int \mathbf{J}_m(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \end{cases} \quad (1.14)$$

式中,  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{F}$  为矢量势函数,  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  为自由空间的格林函数。二维与三维情况下的格林函数各有不同形式。二维情况下的格林函数为第二类零阶汉克尔(Hankel)函数形式,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (1.15)$$

为了计算 FDTD 仿真区域以外的散射场, 在总场边界以外、吸收边界以内设置散射场监视器(SF monitor), 存储近场散射数据  $\mathbf{E}_0^{i,j,k}$ , 利用上述等效原理, 可计算出远场的散射场分布  $\mathbf{E}_{\text{far}}^{i,j,k}$ 。而由暗场成像原理, 只有一定传输方向内的光才是散射光, 若收集的散射光的孔径过大则会引入反射光使得背景噪声过大, 孔径过小则参与成像的散射光能量小, 使得信号能量小。因此, 需要对远场散射场分布进行孔径滤波。将  $\mathbf{E}_{\text{far}}^{i,j,k}$  在笛卡儿坐标系下的  $x, y$  分量分别记为  $E_{\text{far},x}, E_{\text{far},y}$ 。以  $x$  分量  $E_{\text{far},x}$  为例, 根据角谱理论, 将  $E_{\text{far},x}$  分解为不同方向  $s$  传播的平面波分量  $E_{\text{far},x}^s$ , 如式(1.16)和式(1.17)所示, 在 NA 内的分量可以透过, 而 NA 以外的分量被去除,

$$E_{\text{sct},x}^s = E_{\text{far},x}^s T \quad (1.16)$$

$$T = \begin{cases} 1, & \text{sins} \leq \text{NA} \\ 0, & \text{sins} > \text{NA} \end{cases} \quad (1.17)$$

则像面散射光的电场分量为各平面波分量的傅里叶变换,

$$E_{\text{sct},x} = cF(E_{\text{sct},x}^s) \quad (1.18)$$

式中,  $c$  为常数;  $F(\cdot)$  表示傅里叶变换。同理可得  $y$  分量, 则像面散射场电场矢量  $\mathbf{E}_{\text{sct}}^{i,j,k} = E_{\text{sct},x} \mathbf{i} + E_{\text{sct},y} \mathbf{j}$ 。最终, 白光 LED 入射下的缺陷散射光强分布  $I_{\text{sct}}$  为各激励源激发的像面散射场电场矢量的非相干叠加,

$$I_{\text{sct}} = \frac{1}{A} \sum_{i,j,k} \omega_k |\mathbf{E}_{\text{sct}}^{i,j,k}|^2, \quad A = \frac{1}{N_\alpha N_\theta \sum_k \omega_k} \quad (1.19)$$

式中,  $\mathbf{E}_{\text{sct}}^{i,j,k}$  是入射角  $\varphi_i$ 、偏振角  $\theta_j$ 、波长  $\lambda_k$  的光源仿真下的像面散射场电场矢量,  $\omega_k$  是光谱曲线对应波长  $\lambda_k$  的值,  $A$  为归一化系数。光源近似为两个对称入射的光源, 偏振角为两个正交的角度, 因此  $N_\alpha \equiv 2, N_\theta \equiv 2$ 。发光体为白光 LED, 光谱曲线  $\omega(\lambda)$  是确定的。参与仿真的波长  $\lambda_k$  确定后, 归一化系数是常数。

FDTD 方法是一种求解缺陷散射场光强分布数值解的求解方法, 该方法直接通过求解电磁场的麦克斯韦方程组数值解, 近似获得缺陷散射场空间光强分布。为了避免对麦克斯韦方程组复杂求解的讨论, 当缺陷截面形状为规则形貌(如三角形、矩形等)时, 可以通过辐度学对缺陷散射场的光强分布进行表征。