高等数学同步训练（第2版）

上

尹　丽　主　编

史成锴　潘福臣　张　慧　副主编

清華大学出版社

北京

内 容 简 介

本书共7章,内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用和微分方程等与教学内容配套的习题及其详细的解答,每章分为小节习题和总习题两大部分.随后安排三套难度适中的模拟测试,并配有详细的答案及参考解答,可以作为同学们复习、模拟测试的一手资料.在最后,为学有余力的同学设计了一套能力提升题,并给出答案及参考解答.

本书既可作为普通高等学校理工类、经管类、农科类本科生的参考资料,也可作为研究生入学考试的研习资料.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步训练.上/尹丽主编.—2版.—北京:清华大学出版社,2022.8
ISBN 978-7-302-61378-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①尹… Ⅲ.①高等数学—高等学校—习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2022)第124651号

责任编辑:刘 颖
封面设计:傅瑞学
责任校对:王淑云
责任印制:刘海龙

出版发行:清华大学出版社
网 址:http://www.tup.com.cn,http://www.wqbook.com
地 址:北京清华大学学研大厦A座 **邮 编**:100084
社 总 机:010-83470000 **邮 购**:010-62786544
投稿与读者服务:010-62776969,c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈:010-62772015,zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者:北京鑫海金澳胶印有限公司
经 销:全国新华书店
开 本:185mm×260mm **印 张**:11.5 **字 数**:278千字
版 次:2015年8月第1版 2022年8月第2版 **印 次**:2022年8月第1次印刷
定 价:35.00元

产品编号:096477-01

前言

“高等数学”课程是理工类、经管类、农科类相关专业本科生必修的一门非常重要的基础理论课.这门课程不仅能培养学生的逻辑思维、创新能力、严谨的治学态度以及用数学解决实际问题的功底,还能为学生后续的专业课程学习奠定扎实的数学基础,对学生知识水平的提高和今后自身的发展起到重要的作用.本门课程也是全国硕士研究生入学考试的重要科目.

本书旨在通过做题训练提升学生学习“高等数学”课程的兴趣,使他们最终较好地掌握高等数学相关知识并取得良好的考试成绩,同时也希望能辅助增强任课教师的教学效果.编者团队在深入研究教学大纲的前提下,结合多年的教学实践经验,精心安排了适合一般层次学生掌握的练习题,逐题详细认真地给出了解答过程,最终收集整理成书.

书中章节的安排与《全国硕士研究生统一招生考试数学考试大纲》中的知识体系一致,一节一练,一章一复习,并且逐题给出详细的解答过程供读者参考.随后安排三套难度适中的模拟题,供读者检验自己的掌握程度.最后,为学有余力的读者设计了能力提升题,引导读者迈向更高的层次.

本书不仅是广大学生学习的同步辅导书,教师教学的参考书,也是准备报考硕士研究生的学生的复习书,也能给自学本门课程的读者提供较大的帮助.

限于编者水平,书中难免存在错误和不妥之处,恳请广大读者批评指正.

编　者

2022 年 5 月于大连海洋大学

目 录

第 1 章

函数与极限

习题 1-1

一、填空题

1. $|x-2|<3$ 的区间表示为________.

2. 设 $f(x)$的定义域为$[0,1]$,则 $f(x+a)+f(x-a)$的定义域为________,其中 $a>0$.

3. $y=\dfrac{1}{x^2+2x-3}+\sqrt{9-x^2}$ 的定义域为________.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}|\sin 2x|, & |x|\leqslant\dfrac{\pi}{6},\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{6},\end{cases}$ 则 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=$________,$f\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=$________;$f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=$________.

5. 设 $f(x)=ax^2+bx+c$,且 $f(-2)=0,f(0)=1,f(1)=5$,则 $f(x)=$________.

6. 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2},g\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$,则 $f(x)=$________,$g(x)=$________.

7. 设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})(x\neq0)$,则 $f(x)=$________.

8. 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$,则 $f\left[\dfrac{1}{f(x)-1}\right]=$________.

9. $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}+\sqrt{1-x-2x^2}$ 的定义域是________.

二、选择题

1. 设 $f(x)$是定义在$(-l,l)$内的任意函数,则 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$是(　　).

A. 奇函数　　B. 偶函数　　C. 非奇非偶函数　　D. 周期函数

2. $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$是(　　).

A. 奇函数　　B. 偶函数　　C. 非奇非偶函数　　D. 有界函数

3. $y=\dfrac{x}{x-1}$的反函数是(　　).

A. $y=\dfrac{x}{x-1}$　　B. $y=\dfrac{x-1}{x}$　　C. $y=\dfrac{-x}{x-1}$　　D. $y=\dfrac{1-x}{x}$

4．设 $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$，则 $f(x)$ 的定义域为（　　）．

A. $[-1,1)$　　B. $(-1,1]$　　C. $(-1,1)$　　D. $[-1,1]$

5．设 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$（$x<0$ 及 $x>2$ 无定义），则 $g(x)=f(2x)+f(x-2)$（　　）．

A. 无意义　　B. 在$[0,2]$上有意义

C. 在$[0,4]$上有意义　　D. 在$[2,4]$上有意义

三、设 $f(x-2)=\dfrac{2x}{2+x^2}$，试求 $f(x+1)+f(x-1)$．

四、下列函数可以看成由哪些简单函数复合而成？

1．$y=\sqrt{3x-1}$．　　2．$y=\sin^2(1+2x)$．

3．$y=(1+\ln x)^5$．　　4．$y=\arctan(\mathrm{e}^x)$．

5．$y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$．　　6．$y=\ln^2\arccos(x^3)$．

习题 1-2

一、选择题

1. 下列数列极限存在的有（　　）.

A. $-1,1,-1,1,\cdots$　　B. $\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{5}{4},\frac{4}{5},\cdots$

C. $f(n)=\begin{cases}\frac{n}{1+n}, & n\text{ 为奇数}\\ \frac{n}{1-n}, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$　　D. $f(n)=\begin{cases}1+\frac{1}{n}, & n\text{ 为奇数}\\ (-1)^n, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$

2. 下列数列收敛的有（　　）.

A. $0.9,0.99,0.999,0.9999,\cdots$　　B. $f(n)=(-1)^n\frac{n}{n+1}$

C. $1,\frac{1}{2},1+\frac{1}{2},\frac{1}{3},1+\frac{1}{3},\frac{1}{4},1+\frac{1}{4},\cdots$　　D. $f(n)=\begin{cases}-\frac{2^n+1}{2^n}, & n\text{ 为奇数}\\ \frac{2^n-1}{2^n}, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$

二、观察数列的变化趋势，写出结果：

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=$________；　　2. $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=$________；

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n^2}\right)=$________；　　4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}=$________.

习题 1-3

一、选择题

1. 下列极限正确的有（　　）.

A. $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}=0$　　B. $\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$　　C. $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=0$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$

2. $f(x)$在点 $x=x_0$ 处有意义，是当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$有极限的（　　）.

A. 必要条件　　B. 充分条件　　C. 充分必要条件　　D. 无关的条件

二、设 $f(x)=\begin{cases}x, & x<3,\\ 3x-1, & x\geqslant 3,\end{cases}$ 作 $f(x)$的图形，并写出当 $x\to 3$ 时 $f(x)$的左右极限.

三、证明：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在.

习题 1-4

一、选择题

1. 下列变量在给定变化过程中是无穷大量的有(　　).

A. $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}(x\to+\infty)$　　B. $\lg x(x\to 0^+)$

C. $\lg x(x\to+\infty)$　　D. $e^{-\frac{1}{x}}(x\to 0^-)$

E. $x\sin x(x\to\infty)$

2. 下列变量在给定变化过程中是无穷小量的有(　　).

A. $2^{-x}-1(x\to 0)$　　B. $2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}(x\to\infty)$

C. $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3-2x+1}}(x\to+\infty)$　　D. $\dfrac{x^2}{x+1}\left(3-\sin\dfrac{1}{x}\right)(x\to 0)$

3. 当 $x\to a$ 时，$f(x)$是(　　)，则必有$\lim\limits_{x\to a}(x-a)f(x)=0$.

A. 任意函数　　B. 周期函数　　C. 有界函数　　D. 无穷大量

二、两个无穷小的商是否一定为无穷小？请举例说明.

习题 1-5

一、计算下列极限

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

2. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1000x}{x^2+1}$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)\left(3-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{30}(3x-2)^{20}}{(2x+1)^{50}}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

8. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)$.

9. $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}$.

二、若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$,求 a,b 的值.

三、求函数表达式并作图形 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}x$.

四、指出下列运算中的错误,并给出正确方法.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-2}-\lim\limits_{x\to 2}\frac{4}{x^2-4}=\infty-\infty=0$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}x}{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)}=\dfrac{1}{0}=\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^2\ \lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=0$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n^2}=0+0+\cdots+0=0$.

习题 1-6

一、求下列极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{x}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}\,(x\neq 0)$.

二、求下列极限

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$.

三、利用极限存在准则证明

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}=1$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

四、解答下列问题

1. 设 $f(x)=x-\lim\limits_{x\to1}f(x)$，且$\lim\limits_{x\to1}f(x)$存在，求$\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-c}{x+c}\right)^x=2$，求常数 c.

习题 1-7

一、选择题

1. 当 $x\to0^+$ 时，(　　)与 x 是等价无穷小量.

A. $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$　　B. $\ln(1+x)$　　C. $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$　　D. $x^2(x+1)$

2. 当 $x\to\infty$时，若$\dfrac{1}{ax^2+bx+c}\sim\dfrac{1}{x+1}$，则 a,b,c 之值一定为(　　).

A. $a=0,b=1,c=1$　　B. $a=0,b=1,c$ 为任意常数

C. $a=0,b,c$ 为任意常数　　D. a,b,c 均为任意常数

3. 当 $x\to\infty$ 时,若 $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}=o\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$,则 a,b,c 之值一定为( ).

A. $a=0,b=1,c=1$　　B. $a\neq 0,b\neq 1,c$ 为任意常数

C. $a\neq 0,b,c$ 为任意常数　　D. a,b,c 均为任意常数

二、当 $x\to 0$ 时,下列无穷小量与 x 相比是高阶、低阶、同阶还是等价无穷小量,为什么?

1. $x+\sin(x^2)$.　　2. $\sqrt[3]{x^2}$.

3. $\dfrac{(x+1)x}{4+\sqrt[3]{x}}$.　　4. $\tan x-\sin x$.

三、证明:当 $x\to 0$ 时,$\sqrt{4+x}-2$ 与 $\sqrt{9+x}-3$ 是同阶无穷小量.

四、证明:$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{x}{2}(x\to 0)$.

习题 1-8

一、选择题

$f(x)$在点 $x=x_0$ 处有定义,是 $f(x)$在 $x=x_0$ 处连续的(　　).

A. 必要条件　　B. 充分条件　　C. 充要条件　　D. 无关的条件

二、判断下列函数 $f(x)$在 $x=0$ 处是否连续?

1. $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$　(　　)

2. $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$　(　　)

3. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0, \\ 1, & x=0. \end{cases}$　(　　)

4. $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\leqslant 0, \\ \dfrac{\sin x}{x}, & x>0. \end{cases}$　(　　)

三、设 $f(x)=\sin x\cdot\cos\dfrac{1}{x}$,给 $f(0)$补充定义一个什么数值,能使 $f(x)$在点 $x=0$ 处连续.

四、设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x}, & x<0, \\ 3x^2-2x+k, & x\geqslant 0, \end{cases}$ 问当 k 为何值时,函数 $f(x)$在其定义域内连续?

五、求下列函数的间断点,并判别其类型:

1. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$.

2. $y=\begin{cases}0, & x<1,\\ 2x+1, & 1\leqslant x<2,\\ 1+x^2, & 2\leqslant x.\end{cases}$

习题 1-9

一、求 $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的连续区间,并求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$; (2) $\lim\limits_{x\to -3}f(x)$; (3) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

二、求下列极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{\sin x}{x}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$.

三、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{x+2}, & x\geqslant 0,\\ \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}, & x<0,\end{cases}$ $a>0$.

(1) 当 a 为何值时,$x=0$ 是 $f(x)$的连续点?

(2) 当 a 为何值时,$x=0$ 是 $f(x)$的间断点?是何种类型的间断点?

习题 1-10

一、选择题

当$|x|<1$ 时,$y=\sqrt{1-x^2}$(　　).

A. 是连续函数　　B. 是有界函数

C. 有最大值与最小值　　D. 有最大值无最小值

二、证明曲线 $y=x^4-3x^2+7x-10$ 在 $x=1$ 与 $x=2$ 之间至少与 x 轴有一个交点.

三、设 $f(x)=e^x-2$,求证在区间$(0,2)$内至少有一点 x_0,使 $e^{x_0}-2=x_0$.

总习题 1

一、填空题

1. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=a$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\mathrm{e}^{\phi(x)}=$________.

2. $x=0$ 是 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 的________间断点.

3. $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$ 的连续区间是________.

4. 若 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-1}{\mathrm{e}^{-x}+1}$，则 $f(-x)=$________ $f(x)$.

5. 当 $x\to 0$ 时，$\sec x-1$ 与 $\dfrac{x^2}{2}$，$\sin^3 5x$ 与 $\tan x-\sin x$ 的关系分别为________，________.

二、选择题

1. 当 $0<x<1$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}$（　　）.

A. 有最大值与最小值　　B. 有最大值无最小值

C. 有最小值无最大值　　D. 无最小值无最大值

2. $f(x)=3^{\frac{1}{x}}$ 在 $x=0$ 处（　　）.

A. 有定义　　B. 极限存在　　C. 左极限存在　　D. 右极限存在

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-1|}{x-1}, & x\neq 1,\\ 2, & x=1,\end{cases}$ 则在点 $x=1$ 处函数 $f(x)$（　　）.

A. 左右极限存在但不连续　　B. 连续

C. 左极限存在右极限不存在　　D. 左、右极限均不存在

4. 设 $f(x)=\begin{cases}a+bx^2, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{\sin bx}{x}, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 连续，则常数 a 与 b 应满足关系（　　）.

A. $a>b$　　B. $a<b$　　C. $a=b$　　D. $a\neq b$

三、设 $\varphi(x+1)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 求 $\varphi(x)$.

四、若$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=5$，求$a,b$.

五、已知$f(x)=\dfrac{px^2-2}{x^2+1}+3qx+5$，当$x\to\infty$时，$p,q$取何值，$f(x)$为无穷小量？$p,q$取何值，$f(x)$为无穷大量？

六、求下列极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}n[\ln(n+2)-\ln n]$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin(1+x^2)}$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

七、证明题

设 $f(x)$在$[0,1]$上连续且 $0<f(x)<1$，证明在$(0,1)$内至少有一点 c 使 $f(c)=c$.

第2章

导数与微分

习题 2-1

一、填空题

1. 若直线 $y=2x+b$ 是抛物线 $y=x^2$ 在某点处的法线，则 $b=$________.

2. 将一物体垂直上抛，其上升高度与时间的关系为 $s(t)=3t-\frac{1}{2}gt^2$，问物体在时间间隔$[t_0,t_0+\Delta t]$的平均速度________，t_0 时刻的即时速度________，到达最高点的时刻________.

二、选择题

1. 设 $f(x)$可导，且下列各极限均存在，则(　　)成立.

A. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$　　B. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}=f'(a)$

C. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=f'(x_0)$　　D. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=f'(x_0)$

2. 若$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=A$，$A$ 为常数，则有(　　).

A. $f(x)$在点 $x=a$ 处可导　　B. $f(x)$在点 $x=a$ 处连续

C. $\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在　　D. $f(x)-f(a)=A(x-a)+o(x-a)$

3. $f(x)=\begin{cases}1, & x<0,\\ 1-x^2, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x,\end{cases}$ 则(　　).

A. 在点 $x=0$ 处可导　　B. 在点 $x=0$ 处不可导

C. 在点 $x=1$ 处可导　　D. 在点 $x=1$ 处不可导

三、求下列函数的导数

1. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$.　　2. $y=x^3\cdot\sqrt[5]{x}$.

四、求在抛物线 $y=x^2$ 上点 $x=3$ 处的切线方程与法线方程.

五、讨论函数 $y=x|x|$ 在点 $x=0$ 处的可导性.

习题 2-2

一、填空题

1. $y=2\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}+\sqrt[4]{3}$，$y'=$________.　　2. $y=3\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{1}{x^3}+\cos\dfrac{\pi}{3}$，$y'=$________.

3. $y=x\ln x$，$y'=$________.　　4. $y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$，$y'=$________.

二、选择题

1. $g(x)$在 $x=0$ 处连续，$f(x)=xg(x)$，(　　).

A. $f(x)$在 $x=0$ 处连续，但不一定可导

B. 当 $g(x)$在 $x=0$ 处可导时，$f(x)$在 $x=0$ 处才可导

C. $f(x)$在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=g(0)$可由导数定义求出

D. $f(x)$在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=g(0)$可由乘积求导法则求出

2. 下列函数中(　　)的导数等于 $\dfrac{1}{2}\sin 2x$.

A. $\dfrac{1}{2}\sin^2 x$　　B. $\dfrac{1}{4}\cos 2x$　　C. $-\dfrac{1}{2}\cos^2 x$　　D. $1-\dfrac{1}{4}\cos 2x$

3. 设对任意 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，$f'(-x_0)=-k\neq 0$，则 $f'(x_0)=$(　　).

A. k　　B. $-k$　　C. $\dfrac{1}{k}$　　D. $-\dfrac{1}{k}$

三、计算题

1. $y=x(2x-1)(3x+2)$,求 y'.

2. $y=x\tan x+\cot x$,求 y'.

3. $y=\ln x\ \log_a x-\ln a\ \log_a x$,求 y'.

4. $f(t)=\dfrac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$,求 $f'(4)$.

5. $y=(1+x^3)\left(5-\dfrac{1}{x^2}\right)$,求 $y'|_{x=1}$ 和 $y'|_{x=a}(a\neq 0)$.

四、求下列函数的导数

1. $y=(x^3-x)^6$.

2. $y=\sin^2(2x-1)$.

3. $y=(\ln x^2)^3$.

4. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

5. $y=\ln\tan x$.

6. $y=\sin[\cos^2(x^3)]$.

五、求下列函数的导数

1. $y=\arcsin(1-2x)$.

2. $y=\arctan(1+x^2)$.

3. $y=a^{\arctan\sqrt{x}}$.

4. $y=\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. $y=\arcsin(1-x)+\sqrt{2x-x^2}$.

6. $y=x\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$.

7. $y=f(e^x)$,设 $f'(x)$存在.

8. $y=f(\sin^3 x)$,设 $f'(x)$存在.

9. $y=\cosh(\sinh x)$.

10. $y=\sinh x\cdot e^{\cosh x}$.

六、一质点沿直线运动、运动方程为 $S=\dfrac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2$(路程 S 单位为 m,时间 t 单位为 s),问何时速度为零?

七、设曲线 $y=x^2+5x+4$,选择 b,使直线 $y=3x+b$ 为曲线的切线.

习题 2-3

一、选择题

1. 已知 $y=\sin x$,则 $y^{(10)}=($　　$)$.

A. $\sin x$　　B. $\cos x$　　C. $-\sin x$　　D. $-\cos x$

2. 已知 $y=x\ln x$,则 $y^{(10)}=($　　$)$.

A. $-\dfrac{1}{x^9}$　　B. $\dfrac{1}{x^9}$　　C. $\dfrac{8!}{x^9}$　　D. $-\dfrac{8!}{x^9}$

3. 已知 $y=\mathrm{e}^{f(x)}$,且 $f''(x)$存在,则 $y''=($　　$)$.

A. $\mathrm{e}^{f(x)}$　　B. $\mathrm{e}^{f(x)}f''(x)$

C. $\mathrm{e}^{f(x)}[f'(x)-f''(x)]$　　D. $\mathrm{e}^{f(x)}\{[f'(x)]^2+f''(x)\}$

二、求下列函数的二阶导数

1. $y=\mathrm{e}^{2x-1}$.　　2. $y=x\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-\sqrt{x^2+a^2}$.

三、一质点按规律 $s=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t})$作直线运动,求证它的加速度 a 等于 s.

四、求下列函数的 n 阶导数

1. $y=\dfrac{1-x}{1+x}$,求 $y^{(n)}$.　　2. $f(x)=\ln\dfrac{1}{1-x}$,求 $f^{(n)}(0)$.

习题 2-4

一、求下列隐函数的导数$\frac{dy}{dx}$

1. $x^2-y^2=xy$.

2. $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

3. $xy+\ln y=1$.

二、求下列隐函数的二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$

1. $y=1+xe^y$.

2. $x=y+\arctan y$.

三、用对数求导法求下列函数的导数

1. $y=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$.

2. $y=\sqrt{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.

3. $y=(\sin x)^{\cos x}(\sin x>0)$.

四、求下列参数方程所确定函数的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

1. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t+1}, \\ y=\dfrac{t}{(t+1)^2}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=b\sin^3 t. \end{cases}$

五、求下列参数方程所确定函数的二阶导数$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$

1. $\begin{cases} x=\arctan t, \\ y=\ln(1+t^2). \end{cases}$

2. $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=\dfrac{1}{1-t}. \end{cases}$

习题 2-5

一、选择题

1. 设函数 $f(x)$在点 x_0 及其邻域内有定义,且有 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=a\cdot\Delta x+b(\Delta x)^2$,$a$,$b$ 为常数,则(   ).

A. $f(x)$在点 $x=x_0$ 处连续

B. $f(x)$在点 $x=x_0$ 处可导且 $f'(x_0)=a$