

第二章 极限与连续

在微积分中, 极限是一个重要的基本概念, 微积分中其他的一些重要概念如导数、微分、积分、级数等都是建立在极限概念的基础上的. 因此, 有关极限的概念、理论和方法自然称为微积分学的理论基石. 本章将讨论数列极限与函数极限的定义、性质及基本计算方法, 并在此基础上讨论函数的连续性.

第一节 数列的极限

一、引例

如何用渐近的方法求圆的面积?

设有一圆, 首先作内接正四边形, 它的面积记为 A_1 ; 再作内接正八边形, 它的面积记为 A_2 ; 再作内接正十六边形, 它的面积记为 A_3 ; 如此下去, 每次边数加倍, 一般把内接正 $4 \times 2^{n-1}$ 边形的面积记为 A_n . 这样就得到一系列内接正多边形的面积:

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$$

设想 n 无限增大 (记为 $n \rightarrow \infty$, 读作 n 趋于无穷大), 即内接正多边形的边数无限增加, 在这个过程中, 内接正多边形无限接近于圆, 同时 A_n 也无限接近于某一确定的数值, 这个确定的数值就理解为圆的面积. 这个确定的数值在数学上称为上面这列有次序的数 (数列) $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限.

数列的概念: 如果按照某一法则, 使得对任何一个正整数 n 都有一个确定的数 x_n , 则得到一列有次序的数

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

这一列有次序的数就叫作数列, 记为 $\{x_n\}$, 其中第 n 项 x_n 叫作数列的一般项.

数列的例子:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}: & \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots, \\ \{2^n\}: & 2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots, \\ \left\{ \frac{1}{2^n} \right\}: & \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots, \\ \{(-1)^{n+1}\}: & 1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots, \\ \left\{ \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} \right\}: & 2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots. \end{aligned}$$

它们的一般项依次为 $\frac{n}{n+1}, 2^n, \frac{1}{2^n}, (-1)^{n+1}, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$.

数列的几何意义: 数列 $\{x_n\}$ 可以看作数轴上的一个动点, 它依次取数轴上的点 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$.

数列与函数: 数列 $\{x_n\}$ 可以看作自变量为正整数 n 的函数:

$$x_n = f(n),$$

它的定义域是全体正整数.

二、数列的极限

数列的极限的通俗定义: 对于数列 $\{x_n\}$, 如果当 n 无限增大时, 数列的一般项 x_n 无限地接近于某一确定的数值 a , 则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限, 或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a . 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. 如果数列没有极限, 就说数列是发散的.

例如, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} = 1$, 这些相应的数列是收敛的; 而 $\{2^n\}, \{(-1)^{n+1}\}$ 是发散的.

对“无限接近”的定义: x_n 无限接近于 a 等价于 $|x_n - a|$ 无限接近于 0.

极限的精确定义如下.

定义 2-1 如果数列 $\{x_n\}$ 与常数 a 有下列关系: 对于任意给定的正数 ε (不论它多么小), 总存在正整数 N , 使得对于 $n > N$ 时的一切 x_n , 不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

都成立, 则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限, 或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty).$$

如果数列没有极限, 就说数列是发散的.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \text{ 当 } n > N \text{ 时, 有 } |x_n - a| < \varepsilon.$$

例 2-1 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} = 1$.

分析 $|x_n - 1| = \left| \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n}$.

$\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|x_n - 1| < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{n} < \varepsilon$, 即 $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

证 因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - 1| = \left| \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} = 1$.

例 2-2 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = 0$.

分析 $|x_n - 0| = \left| \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} - 0 \right| = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+1}$.

$\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|x_n - 0| < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, 即 $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

证 因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right] \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} - 0 \right| = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon,$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = 0$.

例 2-3 设 $|q| < 1$, 证明等比数列

$$1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$$

的极限是 0.

分析 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 要使

$$|x_n - 0| = |q^{n-1} - 0| = |q|^{n-1} < \varepsilon,$$

只要 $n > 1 + \log_{|q|} \varepsilon$ 就可以了, 故可取 $N = [1 + \log_{|q|} \varepsilon]$.

证 因为对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = [1 + \log_{|q|} \varepsilon]$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|q^{n-1} - 0| = |q|^{n-1} < \varepsilon,$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n-1} = 0$.

三、收敛数列的性质

定理 2-1 (极限的唯一性) 收敛数列的极限必唯一.

证 用反证法. 假设同时有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, 且 $a < b$.

按照极限的定义, 对于 $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$, 存在充分大的正整数 N , 使当 $n > N$ 时, 同时有

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{b-a}{2} \text{ 及 } |x_n - b| < \varepsilon = \frac{b-a}{2},$$

因此, 同时有

$$x_n < \frac{b+a}{2} \text{ 及 } x_n > \frac{b+a}{2},$$

这是不可能的. 所以只能有 $a=b$.

数列的有界性: 对于数列 $\{x_n\}$, 如果存在正数 M , 使得对一切 x_n 都满足不等式

$$|x_n| \leq M,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 是有界的; 如果这样的正数 M 不存在, 就说数列 $\{x_n\}$ 是无界的.

定理 2-2 (收敛数列的有界性) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

证 设数列 $\{x_n\}$ 收敛, 且收敛于 a , 根据数列极限的定义, 对于 $\varepsilon=1$, 存在正整数 N , 使得对于 $n > N$ 时的一切 x_n , 不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon = 1$$

都成立. 于是当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

取 $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, 1 + |a|\}$, 那么数列 $\{x_n\}$ 中的一切 x_n 都满足不等式

$$|x_n| \leq M.$$

这就证明了数列 $\{x_n\}$ 是有界的.

定理 2-3 (收敛数列的保号性) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 且 $a > 0$ (或 $a < 0$), 那么存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $x_n > 0$ (或 $x_n < 0$).

证 就 $a > 0$ 的情形证明. 由数列极限的定义, 对于 $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - a| < \frac{a}{2},$$

从而

$$x_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0.$$

推论 如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n \geq 0$ (或 $x_n \leq 0$), 且数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 那么 $a \geq 0$ (或 $a \leq 0$).

证 就 $x_n \geq 0$ 情形证明. 设数列 $\{x_n\}$ 从 N_1 项起, 即当 $n > N_1$ 时有 $x_n \geq 0$. 现在用反证法证明. 如果 $a < 0$, 则由定理 2-3 知, $\exists N_2 \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N_2$ 时, 有 $x_n < 0$. 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时, 按假定有 $x_n \geq 0$, 按定理 2-3 有 $x_n < 0$, 这引起矛盾. 所以必有 $a \geq 0$.

子数列: 在数列 $\{x_n\}$ 中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列中的先后次序, 这样得到的一个数列称为原数列 $\{x_n\}$ 的子数列.

例如, 数列 $\{x_n\}: 1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$ 的一子数列为 $\{x_{2n}\}$:

$$-1, -1, -1, \dots, (-1)^{2n+1}, \dots$$

定理 2-4 (收敛数列与其子数列间的关系) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 那么它的任一子数列也收敛, 且极限也是 a .

证 设数列 $\{x_{n_k}\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的任一子数列.

因为数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 所以 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

取 $K = N$, 则当 $k > K$ 时, $n_k \geq k > K = N$. 于是 $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$.

这就证明了 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$.

讨论

(1) 对于某一正数 ε_0 , 如果存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon_0$. 是否有 $x_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$)?

(2) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界. 发散的数列是否一定无界? 有界的数列是否收敛?

(3) 数列的子数列如果发散, 原数列是否发散? 数列的两个子数列收敛, 但其极限不同, 则原数列的收敛性如何? 发散的数列的子数列都发散吗?

(4) 如何判断数列 $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$ 是发散的?

习 题 2-1

1. 观察下列数列 $\{x_n\}$ ($n=1,2,\cdots$), 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 极限是否存在, 如存在, 请写出其极限值.

$$(1) \{x_n\} = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\};$$

$$(2) \{x_n\} = \left\{\sin \frac{1}{n}\right\};$$

$$(3) \{x_n\} = \left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\};$$

$$(4) \{x_n\} = \left\{\frac{n-1}{n+1}\right\};$$

$$(5) \{x_n\} = \{(-1)^n n\};$$

$$(6) \{x_n\} = \left\{\frac{n^2-1}{n}\right\}.$$

2. 对于数列 $\{x_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ ($n=1,2,\cdots$), 当给定 (1) $\varepsilon = 0.1$, (2) $\varepsilon = 0.01$, (3) $\varepsilon = 0.001$ 时, 分别取怎样的 N , 才能使当 $n > N$ 时, 不等式 $|x_n - 1| < \varepsilon$ 成立? 并利用极限的定义证明此数列的极限为 1.

3. 用数列极限的定义证明下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+(-1)^n}{n+1} = 0;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3}.$$

4. 利用数列极限的定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.

5. 若数列 $\{x_n\}$ 有界, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$.

第二节 函数的极限

一、函数极限的定义

函数的自变量有几种不同的变化趋势:

x 无限接近 x_0 : $x \rightarrow x_0$;

x 从 x_0 的左侧 (小于 x_0) 无限接近 x_0 : $x \rightarrow x_0^-$;

x 从 x_0 的右侧 (大于 x_0) 无限接近 x_0 : $x \rightarrow x_0^+$;

x 的绝对值 $|x|$ 无限增大: $x \rightarrow \infty$;

x 小于零且绝对值 $|x|$ 无限增大: $x \rightarrow -\infty$;

x 大于零且绝对值 $|x|$ 无限增大: $x \rightarrow +\infty$.

1. 自变量趋于有限值时函数的极限

通俗定义: 如果当 x 无限接近于 x_0 时, 函数 $f(x)$ 的值无限接近于常数 A , 则称当 x 趋于 x_0 时, $f(x)$ 以 A 为极限. 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (\text{当 } x \rightarrow x_0).$$

分析 在 $x \rightarrow x_0$ 的过程中, $f(x)$ 无限接近于 A 就是 $|f(x) - A|$ 能任意小, 或者说, 在 x 与 x_0 接近到一定程度 (如 $|x - x_0| < \delta$, δ 为某一正数) 时, $|f(x) - A|$ 可以小于任意给定的 (不论它多么小) 正数 ε , 即 $|f(x) - A| < \varepsilon$. 反之, 对于任意给定的正数 ε , 如果 x 与 x_0 接近到一定程度 (如 $|x - x_0| < \delta$, δ 为某一正数) 就有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则能保证当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 无限接近于 A .

定义 2-2 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A , 对于任意给定的正数 ε (不论它多么小), 总存在正数 δ , 使得当 x 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

那么常数 A 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (\text{当 } x \rightarrow x_0).$$

定义的简单表述如下:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

例 2-4 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$, 此处 c 为一常数.

证 这里 $|f(x) - A| = |c - c| = 0$. 因为 $\forall \varepsilon > 0$, 可任取 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| = |c - c| = 0 < \varepsilon,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.

例 2-5 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

分析 $|f(x) - A| = |x - x_0|$. 因此 $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 只要 $|x - x_0| < \varepsilon$.

证 因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| = |x - x_0| < \varepsilon$, 所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

例 2-6 证明 $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1) = 1$.

分析 $|f(x) - A| = |(2x - 1) - 1| = 2|x - 1|$.

$\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 只要 $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$.

证 因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2}$, 当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| = |(2x - 1) - 1| = 2|x - 1| < \varepsilon$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1) = 1.$$

例 2-7 证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

分析 函数在 $x=1$ 时是没有定义的, 但这与函数在该点是否有极限并无关系.

当 $x \neq 1$ 时, $|f(x) - A| = \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x - 1|$. $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 只要 $|x - 1| < \varepsilon$.

证 因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon$, 当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| = \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x - 1| < \varepsilon$,

所以 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

单侧极限:

若当 $x \rightarrow x_0^-$ 时, $f(x)$ 无限接近于某常数 A , 则常数 A 叫作函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的左极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x_0^-) = A$;

若当 $x \rightarrow x_0^+$ 时, $f(x)$ 无限接近于某常数 A , 则常数 A 叫作函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的右极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x_0^+) = A$.

讨论 (1) 左、右极限的 $\varepsilon - \delta$ 定义如何叙述?

(2) 当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的左右极限与当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限之间的关系怎样?

提示 左极限的 $\varepsilon - \delta$ 定义:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x: x_0 - \delta < x < x_0, \text{ 有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

右极限的 $\varepsilon - \delta$ 定义:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x: x_0 < x < x_0 + \delta, \text{ 有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

左右极限在某点极限的关系:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A.$$

例 2-8 设函数 $f(x) = \begin{cases} x-1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$, 证明: 当 $x \rightarrow 0$ 时的极限不存在 (见图 2-1).

证 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

故当 $x \rightarrow 0$ 时极限不存在.

2. 自变量趋于无穷大时函数的极限

设 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义. 如果存在常数 A , 对于任意给定的正数 ε , 总存在正数 X , 使得当 x 满足不等式 $|x| > X$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则常数 A 叫作函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty).$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{ 当 } |x| > X \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

类似地可定义

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \text{ 和 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A.$$

结论 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A.$

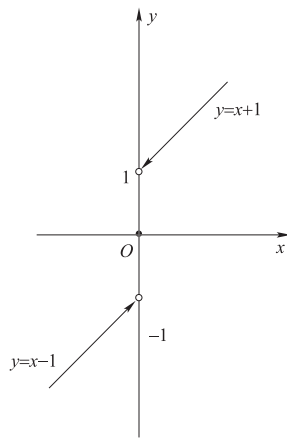


图 2-1

极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的几何意义为: 作直线 $y = A - \varepsilon$ 和 $y = A + \varepsilon$, 则总有一个正数 X 存在, 使得当 $x < -X$ 或 $x > X$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的图形位于这两条直线之间 (见图 2-2).

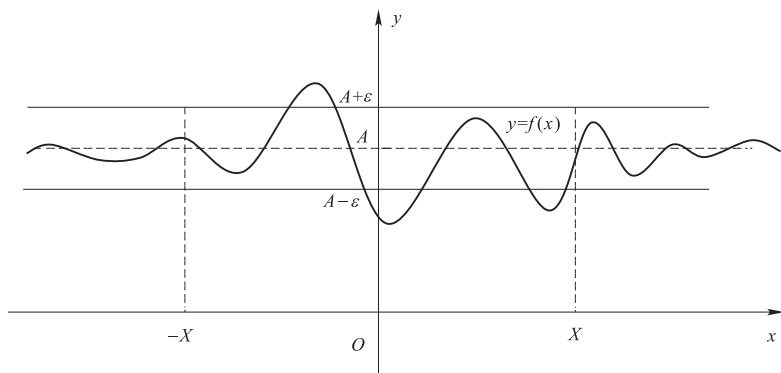


图 2-2

例 2-9 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

证 因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists X = \frac{1}{\varepsilon} > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x) - A| = \left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

一般地, 如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$, 则直线 $y = c$ 称为函数 $y = f(x)$ 的图形的水平渐近线. 直线 $y = 0$ 是函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图形的水平渐近线.

二、函数极限的性质

下面仅以 “ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ” 这种形式为代表给出关于函数极限的性质证明.

定理 2-5 (函数极限的唯一性)

如果极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 那么这个极限唯一.

定理 2-6 (函数极限的局部有界性)

如果 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$, 那么存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$.

证 因为 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$, 所以对于 $\varepsilon = 1$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon = 1,$$

于是取 $M = 1 + |A|$, $|f(x)| = |f(x) - A + A| \leq |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|$. 这就证明了在 x_0 的去心邻域 $\{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 内, $f(x)$ 是有界的.

定理 2-7 (函数极限的局部保号性)

如果 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$, 而且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 那么存在常数 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

证 就 $A > 0$ 的情形证明.

因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 所以对于 $\varepsilon = \frac{A}{2}$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon = \frac{A}{2} \Rightarrow A - \frac{A}{2} < f(x) \Rightarrow f(x) > \frac{A}{2} > 0.$$

定理 2-7' 如果 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0) (A \neq 0)$, 那么存在点 x_0 的某一去心邻域, 在该邻域内, 有 $|f(x)| > \frac{1}{2}|A|$.

推论 2-1 如果在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 而且 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$, 那么 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

证 设 $f(x) \geq 0$. 假设上述结论不成立, 即 $A < 0$, 那么由定理 2-7 知, 在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x) < 0$, 这与 $f(x) \geq 0$ 的假定矛盾, 所以 $A \geq 0$.

定理 2-8 (函数极限与数列极限的关系)

如果当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 的极限存在, $\{x_n\}$ 为 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列, 且满足 $x_n \neq x_0 (n \in \mathbf{N}_+)$, 那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

证 设 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$. 又因为 $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$, 故对 $\delta > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - x_0| < \delta$. 由假设, $x_n \neq x_0 (n \in \mathbf{N}_+)$. 故当 $n > N$ 时, $0 < |x_n - x_0| < \delta$, 从而 $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

习 题 2-2

1. 用极限定义证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1) = 1;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{x} = 2;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0.$$

2. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 3} \rightarrow 2$, 问 X 等于多少, 使当 $|x| > X$ 时, $|f(x) - 2| < 0.01$?

3. 讨论当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列函数的极限是否存在.

$$(1) f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 0 \\ 0 & x = 0; \\ x^2 + 1 & x > 0 \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} \sin x & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < x < 1 \end{cases}.$$

4. 设函数 $f(x) = \frac{3x + |x|}{5x - 3|x|}$, 求:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x);$$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$;

(4) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 2 \\ 2x + a & x < 2 \end{cases}$. 问当 a 取何值时, 函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow 2$ 时的极限存在.

第三节 无穷小与无穷大

一、无穷小

如果函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的极限为零, 那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小.

因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, 所以函数 $\frac{1}{x}$ 为当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小.

因为 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$, 所以函数 $x-1$ 为当 $x \rightarrow 1$ 时的无穷小.

特别地, 以零为极限的数列 $\{x_n\}$ 称为当 $n \rightarrow \infty$ 时的无穷小. 例如,

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$, 所以数列 $\{\frac{1}{n+1}\}$ 为当 $n \rightarrow \infty$ 时的无穷小.

讨论 很小很小的数是否是无穷小? 0 是否为无穷小?

提示 无穷小是函数, 它在 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 的过程中, 极限为零. 很小很小的数只要它不是零, 作为常数函数, 在自变量的任何变化过程中, 其极限就是这个常数本身, 不会为零.

无穷小与函数极限的关系如下.

定理 2-9 在自变量的同一变化过程 $[x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$)] 中, 函数 $f(x)$ 具有极限 A 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$, 其中 α 是无穷小.

证 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

令 $\alpha = f(x) - A$, 则 α 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 且

$$f(x) = A + \alpha.$$

这就证明了 $f(x)$ 等于它的极限 A 与一个无穷小 α 之和.

反之, 设 $f(x) = A + \alpha$, 其中 A 是常数, α 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 于是

$$|f(x) - A| = |\alpha|.$$

因为 α 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|\alpha| < \varepsilon \text{ 或 } |f(x) - A| < \varepsilon$$

这就证明了 A 是 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限.

这就证明了如果 A 是 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 则 α 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小; 如果 α 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 则 A 是 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限.

类似地可证明 $x \rightarrow \infty$ 时的情形.

例如, 因为 $\frac{1+x^3}{2x^3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^3}$, 而 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^3} = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$.

二、无穷大

如果当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, 对应的函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大, 就称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷大. 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \text{ (或 } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{)}.$$

注 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时为无穷大的函数 $f(x)$, 按函数极限定义来说, 极限是不存在的. 但为了便于叙述函数的这一性态, 我们也说“函数的极限是无穷大”, 并记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \text{ (或 } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{)}.$$

定义 2-3 如果对于任意给定的正数 M , 无论其多么大, 总存在正数 $\delta > 0$ (或 $Z > 0$) 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ (或 $|x| > Z$) 时, 恒有 $|f(x)| > M$, 则称函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时为无穷大, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \text{ (或 } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{)}$$

提示 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| > M$.

正无穷大与负无穷大 (见图 2-3):

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = -\infty.$$

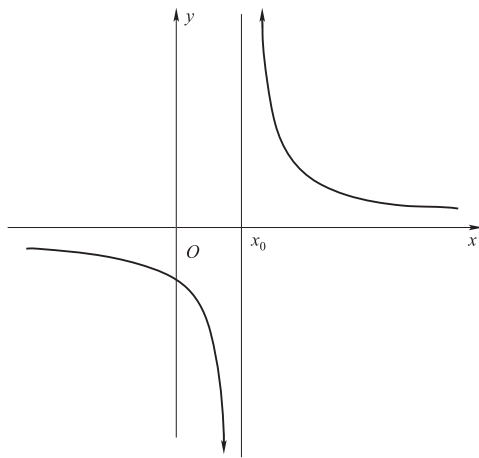


图 2-3

例 2-10 证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$.

证 因为 $\forall M > 0, \exists \delta = \frac{1}{M}$, 当 $0 < |x-1| < \delta$ 时, 有

$$\left| \frac{1}{x-1} \right| > M,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$.

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则称直线 $x = x_0$ 是函数 $y = f(x)$ 的图形的铅直渐近线. 例如, 直线 $x=1$ 是函数 $y = \frac{1}{x-1}$ 的图形的铅直渐近线.

定理 2-10 (无穷大与无穷小之间的关系)

在自变量的同一变化过程中, 如果 $f(x)$ 为无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小; 反之, 如果 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

证 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 且 $f(x) \neq 0$, 那么对于 $\varepsilon = \frac{1}{M}$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon} = M$, 由于当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) \neq 0$, 从而

$$\left| \frac{1}{f(x)} \right| < \frac{1}{M},$$

所以 $\frac{1}{f(x)}$ 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 那么对于 $M = \frac{1}{\varepsilon}$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| < \frac{1}{M} = \varepsilon$, 即 $|f(x)| < \varepsilon$, 所以 $\frac{1}{f(x)}$ 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大. 类似地可证明当 $x \rightarrow \infty$ 时的情形.

习 题 2-3

1. 举例说明, 两个非零无穷小的商不一定是无穷小; 无穷小与无穷大的积不一定是无穷小.
2. 函数 $y = x \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是否有界? 这个函数是否为 $x \rightarrow +\infty$ 时的无穷大?
3. 根据定义证明: 函数 $y = \frac{1+2x}{x}$ 为当 $x \rightarrow 0$ 时的无穷大. 问 x 应满足什么条件, 能使 $|y| > 10^4$?

第四节 极限运算法则

本节主要介绍极限的四则运算法则和复合函数的极限运算法则. 为此, 先来讨论无穷小的运算定理.

定理 2-11 有限个无穷小的和也是无穷小.

例如, 当 $x \rightarrow 0$ 时, x 与 $\sin x$ 都是无穷小, $x + \sin x$ 也是无穷小.

证 考虑两个无穷小的和.

设 α 及 β 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的两个无穷小, 而 $\gamma = \alpha + \beta$.

任意给定的 $\varepsilon > 0$. 因为 α 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 对于 $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ 存在 $\delta_1 > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时, 不等式

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

成立.

因为 β 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 对于 $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ 存在 $\delta_2 > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时, 不等式

$$|\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

成立. 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ 及 } |\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

同时成立, 从而 $|\gamma| = |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. 这就证明了 γ 也是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小. 用数学归纳法可证有限无穷小的和也是无穷小.

定理 2-12 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

证 设函数 u 在 x_0 的某一去心邻域 $\{x | 0 < |x - x_0| < \delta_1\}$ 内有界, 即 $\exists M > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时, 有 $|u| \leq M$. 又设 α 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 即 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta_2 > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时, 有 $|\alpha| < \varepsilon$.

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|u \cdot \alpha| \leq M\varepsilon.$$

这说明 $u \cdot \alpha$ 也是无穷小.

例如, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 是无穷小, $\arctan x$ 是有界函数, 所以 $\frac{1}{x} \arctan x$ 也是无穷小.

推论 2-2 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 2-3 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

用符号 “ $\lim$ ” 表示当 $x \rightarrow x_0$ 或 $x \rightarrow \infty$ 时的同一极限过程. 下面来证明极限的四则运算法则.

定理 2-13 如果 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, 那么

$$(1) \lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B;$$

$$(2) \lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B;$$

$$(3) \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} \quad (g(x) \neq 0, B \neq 0).$$

下面仅证 (1) 式.

证 (1) 因为 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, 根据极限与无穷小的关系, 有

$$f(x) = A + \alpha, \quad g(x) = B + \beta,$$

其中 α 及 β 均为无穷小. 于是

$$f(x) \pm g(x) = (A + \alpha) \pm (B + \beta) = (A \pm B) + (\alpha \pm \beta),$$

即 $f(x) \pm g(x)$ 可表示为常数 $(A \pm B)$ 与无穷小 $(\alpha \pm \beta)$ 之和. 因此

$$\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B.$$

推论 2-4 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 c 为常数, 则

$$\lim [cf(x)] = c \lim f(x).$$

推论 2-5 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 n 是正整数, 则

$$\lim [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n.$$

(2)(3) 的证明是类似的, 其证明请读者自行完成.

定理 2-14 设有数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$. 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B,$$

那么

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = A \pm B;$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = A \cdot B;$$

$$(3) \quad \text{当 } y_n \neq 0 (n=1, 2, \dots) \text{ 且 } B \neq 0 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}.$$

例 2-11 求 $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1)$.

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x - \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 2 \lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 2 \times 1 - 1 = 1.$$

讨论 若 $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = ?$

$$\begin{aligned} \text{提示} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_0 x^n) + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_1 x^{n-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_{n-1} x) + \lim_{x \rightarrow x_0} a_n \\ &= a_0 \lim_{x \rightarrow x_0} (x^n) + a_1 \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1}) + \dots + a_{n-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x + \lim_{x \rightarrow x_0} a_n \\ &= a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_0 + a_n \\ &= P(x_0). \end{aligned}$$

若 $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$.

例 2-12 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 5x + 3}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 5x + 3} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 5x + 3)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - \lim_{x \rightarrow 2} 1}{\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 5 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 3} = \frac{(\lim_{x \rightarrow 2} x)^3 - 1}{(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 5 \times 2 + 3} = \frac{2^3 - 1}{2^2 - 10 + 3} = -\frac{7}{3}. \end{aligned}$$

例 2-13 求 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9}$.

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{6}.$$

例 2-14 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-3}{x^2-5x+4}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-5x+4}{2x-3} = \frac{1^2-5 \times 1+4}{2 \times 1-3} = 0$, 根据无穷大与无穷小的关系得 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-3}{x^2-5x+4} = \infty$.

例 2-15 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$.

解 先用 x^3 去除分子及分母, 然后取极限, 得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}} = \frac{3}{7}.$$

例 2-16 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}$.

解 先用 x^3 去除分子及分母, 然后取极限, 得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}} = \frac{0}{2} = 0.$$

例 2-17 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}$.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5} = 0$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1} = \infty.$$

讨论 有理函数的极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m} = ?$ (其中 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m, n$ 为非负整数)

$$\text{提示 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m} = \begin{cases} 0 & n < m \\ \frac{a_0}{b_0} & n = m \\ \infty & n > m \end{cases}.$$

例 2-18 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$.

解 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 分子及分母的极限都不存在, 故关于商的极限的运算法则不能应用.

因为 $\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \cdot \sin x$, 是无穷小与有界函数的乘积, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

定理 2-15 (复合函数的极限运算法则) 设函数 $y=f(g(x))$ 是由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=g(x)$ 复合而成的, $f(g(x))$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 且在 x_0 的某去心邻域内 $g(x) \neq u_0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A.$$

证 假设 $\delta_0 > 0$, 设在 $\{x | 0 < |x - x_0| < \delta_0\}$ 内 $g(x) \neq u_0$. 要证 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(g(x)) - A| < \varepsilon$.

因为 $f(u) \rightarrow A (u \rightarrow u_0)$, 所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$, 当 $0 < |u - u_0| < \eta$ 时, 有 $|f(u) - A| < \varepsilon$. 又 $g(x) \rightarrow u_0 (x \rightarrow x_0)$, 所以对上述 $\eta > 0, \exists \delta_1 > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时, 有 $|g(x) - u_0| < \eta$. 取 $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $0 < |g(x) - u_0| < \eta$, 从而

$$|f(g(x)) - A| = |f(u) - A| < \varepsilon.$$

注 把定理中 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$ 换成 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$, 而把 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$ 换成 $\lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = A$ 可得类似结果.

例 2-19 求 $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x^2 - 9}{x - 3}}$.

解 $y = \sqrt{\frac{x^2 - 9}{x - 3}}$ 是由 $y = \sqrt{u}$ 与 $u = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ 复合而成的.

因为 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x^2 - 9}{x - 3}} = \lim_{u \rightarrow 6} \sqrt{u} = \sqrt{6}$.

习 题 2-4

1. 简要回答下列问题.

- (1) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 而数列 $\{y_n\}$ 发散, 则数列 $\{x_n \pm y_n\}$ 及数列 $\{x_n y_n\}$ 是否收敛?
- (2) 若数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 均发散, 则数列 $\{x_n \pm y_n\}$ 及 $\{x_n y_n\}$ 是否发散?

2. 求下列函数的极限.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x};$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3};$

(3) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}};$

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x);$

(5) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-x^3} - \frac{1}{1-x} \right);$

(6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20} (3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}};$

(7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2}{x^3 - x + 1};$

(8) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}.$

3. 求下列极限.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}};$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 1} + n)^2}{\sqrt[3]{n^6 + 1}};$

- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$; (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n}}$;
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right)$.
4. 设 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - x - 2} = 2$, 求常数 a, b 的值.
5. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} - ax + b \right) = -5$, 求常数 a, b 的值.
6. 设 $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & x \leq 0 \\ x^2+1 & 0 < x \leq 1 \\ \frac{2}{x} & x > 1 \end{cases}$, 分别讨论 $x \rightarrow 0$ 及 $x \rightarrow 1$ 的极限是否存在.
7. 设 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在, 且 $f(x) = x^2 + 2x \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, 求 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 和 $f(x)$.

第五节 极限存在准则及两个重要极限

一、夹逼定理

准则 I (夹逼定理)

如果数列 $\{x_n\}$ 、 $\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件:

- (1) $y_n \leq x_n \leq z_n (n=1, 2, 3, \cdots)$,
 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$,

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

证 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 所以根据数列极限的定义, $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $|y_n - a| < \varepsilon$; 又 $\exists N_2 > 0$, 当 $n > N_2$ 时, 有 $|z_n - a| < \varepsilon$. 现取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|y_n - a| < \varepsilon, |z_n - a| < \varepsilon$$

同时成立, 即

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon, a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$$

同时成立. 又因 $y_n \leq x_n \leq z_n$, 所以当 $n > N$ 时, 有

$$a - \varepsilon < y_n \leq x_n \leq z_n < a + \varepsilon,$$

即

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

这就证明了 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

准则 I'

如果函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 及 $h(x)$ 满足下列条件:

$$(1) g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A,$$

那么 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

注 如果上述极限过程是 $x \rightarrow x_0$, 要求函数在 x_0 的某一去心邻域内有定义, 上述极限过程是 $x \rightarrow \infty$, 要求函数当 $|x| > M$ 时有定义, 准则 I 及准则 I' 称为夹逼准则.

二、第一重要极限

下面根据准则 I' 证明第一重要极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

证 首先注意到, 函数 $\frac{\sin x}{x}$ 对于一切 $x \neq 0$ 都有定义. 如图 2-4 所示, 图中的圆为单位圆,

$BC \perp OA$, $DA \perp OA$. 圆心角 $\angle AOB = x$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$). 显然 $\sin x = CB$, $x = \widehat{AB}$, $\tan x = AD$. 因为

$$S_{\triangle AOB} < S_{\text{扇形 } AOB} < S_{\triangle AOD},$$

所以

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x,$$

即

$$\sin x < x < \tan x.$$

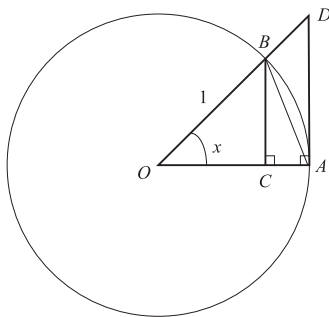


图 2-4

不等号各边都除以 $\sin x$, 就有

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

或

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

此不等式当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时也成立. 而 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, 根据准则 I', $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

注 在极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)}$ 中, 只要 $\alpha(x)$ 是非 0 的无穷小, 就有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$.