普通高等教育土木工程专业新形态教材

MATLAB计算力学

现代计算力学的理论与实践

周博　薛世峰　著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要介绍计算力学领域的重要成果——有限元法和无网格法，内容为三篇、共14章。第1篇：计算力学理论基础，包括第1～3章，主要介绍计算力学的数学基础及其MATLAB实践；第2篇：有限元法，包括第4～9章，主要介绍有限元法的基本理论及其MATLAB实践；第3篇：无网格法，包括第10～14章，主要介绍无网格法的基本理论及其MATLAB实践。

本书主要特色包括：基于MATLAB实现理论和实践的完美结合，使计算力学理论更加形象、具体、易学、易用；精心设计100多个实践性例题，并可扫码获取MATLAB程序，有效助力自主学习和自主训练；有基础的读者可直接研读MATLAB实践例题，快速提高计算力学的实践水平。

本书为中国石油大学（华东）研究生规划教材，可有效满足高校理工科计算力学类64学时研究生课程的教学需要；还可根据实际需要选择部分内容，作为理工科32～64学时计算力学类本科生课程的教材使用；本书也是相关领域科研人员学习计算力学及MATLAB实践的理想工具书。

图书在版编目（CIP）数据

MATLAB计算力学：现代计算力学的理论与实践/周博，薛世峰著.—北京：清华大学出版社，2023.10

普通高等教育土木工程专业新形态教材

ISBN 978-7-302-64807-9

Ⅰ. ①M… Ⅱ. ①周… ②薛… Ⅲ. ①Matlab软件—应用—计算力学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O302-39

中国国家版本馆CIP数据核字（2023）第205016号

责任编辑：秦　娜　赵从棉
封面设计：陈国熙
责任校对：薄军霞
责任印制：杨　艳

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：https://www.tup.com.cn，https://www.wqxuetang.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
　　社 总 机：010-83470000　　**邮　　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市龙大印装有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：19.25　　**字　　数**：467千字
版　　次：2023年12月第1版　　**印　　次**：2023年12月第1次印刷
定　　价：59.80元

产品编号：097133-01

前言

PREFACE

有限元法和无网格法是计算力学领域的重要成果，它们理论基础坚实、通用性好、实用性强。随着计算机科学和技术的快速发展，计算力学已成为科学研究、工程分析与结构设计的有力工具，也是计算机辅助设计和计算机辅助制造的基本组成部分，目前已被高等院校很多理工类专业列为本科生和研究生的必修课程。根据党的二十大精神，高等院校要全面提高人才自主培养质量，着力造就拔尖创新人才；新工科的核心理念是为国家培养工程实践和创新能力强、具备国际竞争力的高素质复合型工程技术人才，这给计算力学类课程的教学工作提出了更高要求。

中国石油大学(华东)全面贯彻习近平新时代中国特色社会主义思想，抓住立足新发展阶段、贯彻新发展理念、构建新发展格局的重大时代机遇，抓住高等教育高质量发展的重大战略机遇，积极推动二十大精神进课堂、进教材，加强学科融合、科教融合与课程思政工作。近年来作者以为党育人、为国育才为宗旨，在计算力学类课程的教学实践中，积极采用现代教学手段、促进教学与互联网的有机融合、面向新工科更新教育教学理念，先后进行了线上线下混合式教学、以学生为中心体验式课堂教学，通过工程案例教学弘扬爱国主义精神，有效激发了学生的科学兴趣和爱国热情，增强了实践和创新能力培养，提高了教学质量、教学效率和课程思政效果。

本书是对上述教学实践与改革经验的总结与提炼，主要内容源于作者近 10 年主讲的研究生课程和本科生课程的教学实践，各部分内容均至少试用 3 次以上，并在教学实践中取得了良好效果。本书为中国石油大学(华东)研究生规划教材，可有效满足高校或科研院所计算力学类 64 学时研究生课程的教学需要；还可根据实际需要选择部分内容，作为理工科 32～64 学时计算力学类本科生课程的教材使用。

本书基于 MATLAB 实现理论和实践的完美结合，使计算力学理论更加形象、具体、易学、易用；精心设计 100 多个实践性例题，在各章章首设置相关 MATLAB 程序二维码，有效助力自主学习和自主训练；有基础的读者可直接研读 MATLAB 实践例题，快速提高计算力学的实践水平；全面介绍了计算力学领域的研究成果——无网格法，既可用作计算力学类课程教材，也是一本理想的科研参考书；借助互联网构建读者和作者交流的桥梁，帮助读者解惑答疑，提高读者学习效率。

为便于教学安排和自主学习，本书分为三篇、共 14 章。第 1 篇：计算力学理论基础，包括第 1～3 章，主要介绍计算力学的数学基础及其 MATLAB 实践；第 2 篇：有限元法，包括第 4～9 章，主要介绍有限元法的基本理论及其 MATLAB 实践；第 3 篇：无网格法，包括第 10～14 章，主要介绍无网格法的基本理论及其 MATLAB 实践。

由于计算力学理论与技术博大精深，作者教学和科研经历有限，书中可能存在疏漏、错误和有待完善之处，恳请广大读者批评指正，作者不胜感激！

作　者

2023 年 8 月于青岛

目录
CONTENTS

第1篇　计算力学理论基础

第2篇 有限元法

第 3 篇 无网格法

第1篇

计算力学理论基础

根据党的二十大精神，要坚持教育优先发展、科技自立自强、人才引领驱动，加快建设教育强国、科技强国、人才强国，坚持为党育人、为国育才。着力培养我国大学生自立自强与实践创新能力，是新时期高等院校的重要责任与担当。掌握计算力学的理论基础，是灵活应用计算力学解决实际问题、增强科研自立自强、提高实践创新能力的重要前提。本篇主要介绍计算力学的理论基础，具体内容如下。

第 1 章　泛函与变分原理

主要介绍泛函的概念、变分的概念、泛函的极值问题、变分原理及应用、微分方程里兹法及应用等方面内容。

第 2 章　加权余量法

主要介绍加权余量法基本概念、加权余量法分类、伽辽金法及应用、最小二乘法及应用、配点法及应用、子域法及应用等方面的内容。

第 3 章　数值积分

主要介绍数值积分概念、Newton-Cotes 积分、一维 Gauss 积分、二维 Gauss 积分、三维 Gauss 积分、三维 Hammer 积分等方面的内容。

第1章 泛函与变分原理

1.1 泛函与变分

1.1.1 泛函的概念

函数和泛函的主要区别是：函数的自变量为数，而泛函的自变量是函数。可以简单地将泛函描述为函数的函数，而泛函的具体定义如下：设$\{f(x)\}$是给定的函数集合，若对该集合中任一函数$f(x)$，恒有某个确定的值F与之对应，则称F是定义在函数集合$\{f(x)\}$内的一个泛函，记为$F[f]$。

根据上述泛函的定义可知，泛函有两个基本要点：①泛函的定义域为满足一定条件的函数集合；②泛函的值与自变函数间有明确的对应关系，通常是由自变函数的整体属性决定的，主要表现在积分上。

例如，定积分

$$Y=\int_0^a \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}}\,\mathrm{d}x$$

由自变函数$y(x)$在区间$[0,a]$的整体属性决定，因此Y为自变函数$y(x)$的泛函。

再如，定积分

$$U=\frac{1}{2}\int_0^1[(u')^2-u^2+2x^2u]\mathrm{d}x$$

由自变函数$u(x)$在区间$[0,1]$的整体属性决定，因此U是自变函数$u(x)$的泛函。

实践 1-1

【例 1-1】 举例说明材料力学中的泛函。

【解】 弹性体的变形能是以位移场函数为自变函数的泛函。

例如，杆件受单向拉伸时，应变能可表示为

$$U_t=\frac{1}{2}\int_l EA(u')^2\mathrm{d}x,$$

其中，EA——杆的拉伸刚度；

$u(x)$——杆的轴向位移函数。

可见，拉伸应变能是以轴向位移函数为自变函数的泛函。

再如，梁的弯曲变形能可表示为

$$U_b = \frac{1}{2}\int_0^L EI(w'')^2 \mathrm{d}x,$$

其中，EI——梁的弯曲刚度；

$w(x)$——梁的挠度函数。

可见，梁的弯曲变形能是以其挠度函数为自变函数的泛函。

1.1.2 变分的概念

变分和微分是两个不同的概念，求函数的极值用微分，求泛函的极值用变分。考察图 1-1 所示函数 $y(x)$，函数的微分 $\mathrm{d}y$ 是指，由于自变量的微小改变 $\mathrm{d}x$ 而引起的函数值的微小变化，即

$$\mathrm{d}y = y(x+\mathrm{d}x) - y(x);$$

而泛函 $\Pi[y(x)]$ 的变分是指，由于自变函数 $y(x)$ 的微小改变 $\delta y(x)$ 引起的泛函数值的微小变化，即

$$\delta\Pi[y(x)] = \Pi[y(x)+\delta y(x)] - \Pi[y(x)]。$$

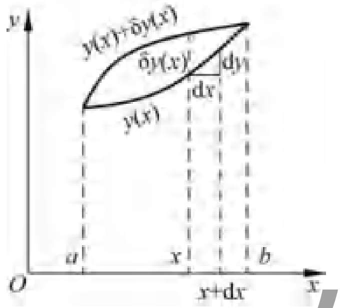

图 1-1 微分和变分的区别

变分运算和微分运算相似，常见的运算法则有

$$\left.\begin{aligned}
&\delta(uv) = v\delta u + u\delta v\\
&\delta(y') = (\delta y)'\\
&\delta(y^n) = ny^{n-1}\delta y\\
&\delta\int F\mathrm{d}x = \int \delta F\mathrm{d}x
\end{aligned}\right\}$$

实践 1-2

【例 1-2】 以函数 $y=y(x)$ 为自变函数的泛函

$$G = \int_a^b [(y')^2 + y^2 + 2x^2 y]\mathrm{d}x,$$

自变函数的边界条件为 $y(a)=C_1$ 和 $y(b)=C_1$。求泛函 G 的变分。

【解】 设

$$F(y, y') = (y')^2 + y^2 + 2x^2 y。$$

对 G 取变分，得

$$\begin{aligned}
\delta G &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_a^b (2y + 2x^2)\delta y\mathrm{d}x + \int_a^b 2y'\delta y'\mathrm{d}x。
\end{aligned} \tag{a}$$

对式(a)右端第 2 项利用分部积分得

$$\begin{aligned}
\int_a^b 2y'\delta y'\mathrm{d}x &= \int_a^b 2y'\mathrm{d}(\delta y)\\
&= 2y'\delta y\Big|_a^b - \int_a^b 2y''\delta y\mathrm{d}x。
\end{aligned} \tag{b}$$

将式(b)代入式(a)得

$$\begin{aligned}\delta G&=\int_a^b(2y+2x^2-2y'')\delta y\,\mathrm{d}x+2y'\delta y\Big|_a^b\\&=\int_a^b(2y+2x^2-2y'')\delta y\,\mathrm{d}x。\end{aligned}$$

1.2　泛函的极值问题

1.2.1　简单泛函极值问题

定义一简单泛函

$$\Pi=\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x，\tag{1-1}$$

其自变函数 $y(x)$满足边界条件

$$\left.\begin{aligned}y(a)=\alpha\\y(b)=\beta\end{aligned}\right\}。\tag{1-2}$$

下面讨论使得式(1-1)定义的泛函取得极值的条件。

根据变分运算法则，由式(1-1)可得

$$\begin{aligned}\delta\Pi&=\delta\left[\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x\right]\\&=\int_a^b\delta F(x,y,y')\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x。\end{aligned}\tag{1-3}$$

对式(1-3)等号右端第二项进行分部积分得

$$\delta\Pi=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right)\Big|_a^b。$$

根据边界条件式(1-2)可知，$\delta y(a)=\delta y(b)=0$，因此上式可进一步简化为

$$\delta\Pi=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\,\mathrm{d}x。\tag{1-4}$$

根据泛函极值条件 $\delta\Pi=0$ 及 δy 的任意性，由式(1-4)可得

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0。\tag{1-5}$$

这就是泛函(1-1)取得极值时自变函数满足的微分方程，称为泛函的**欧拉方程**。

综上所述，根据欧拉方程式(1-5)及边界条件式(1-2)，即可确定使泛函式(1-1)取得极值时自变函数 $y(x)$的具体表达式。

实践 1-3

【例 1-3】 已知泛函

$$Y=\frac{1}{2}\int_0^1[(y')^2-y^2+2x^2y]\mathrm{d}x，$$

其自变函数 $y(x)$满足边界条件：$y(0)=y(1)=0$。求 Y 取极值时，函数 $y(x)$的表达式。

【解】 设

$$F=\frac{1}{2}[(y')^2-y^2+2x^2y],$$

据此可得

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-y+x^2,\quad \frac{\partial F}{\partial y'}=y'。\tag{a}$$

将式(a)代入欧拉方程式(1-5)，得

$$-\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-y+x^2=0,\tag{b}$$

其边界条件为

$$y(0)=y(1)=0。\tag{c}$$

求解微分方程的边值问题式(b)和式(c)，得

$$y=2\cos x+x^2-\frac{2\cos 1-1}{\sin 1}\sin x-2,$$

可进一步整理为

$$y=\frac{\sin x+2\sin(1-x)}{\sin 1}+x^2-2。$$

求解微分方程边值问题式(b)和式(c)的 MATLAB 程序为 ex0103. m，具体内容如下：

```
clc;
clear;
syms y(x)
deq = - diff(y,x,2) - y + x^2 == 0
con1 = y(0) == 0
con2 = y(1) == 0
y = dsolve(deq,con1,con2)
pretty(y)
```

实践 1-4

【例 1-4】 已知泛函

$$G[y(x)]=\int_0^{\pi/2}[(y')^2-y^2+y\sin x]\mathrm{d}x,$$

其自变函数 $y(x)$的边界条件为：$y(0)=y(\pi/2)=0$。求 G 取极值时，$y(x)$的表达式。

【解】 设

$$F=(y')^2-y^2+y\sin x,$$

代入欧拉方程式(1-5)得

$$2y''+2y-\sin x=0,\tag{a}$$

其边界条件为

$$y(0)=y(\pi/2)=0。\tag{b}$$

求解微分方程边值问题式(a)和式(b)，得

$$y(x)=\frac{1}{16}(\sin 3x-\sin x)-\cos x\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}\sin 2x\right)。$$

求解微分方程边值问题式(a)和式(b)的 MATLAB 程序为 ex0104. m,具体内容如下：

```
clear;
clc;
syms y(x)
deq = sin(x) - 2 * y - 2 * diff(y, x, 2) == 0
con1 = y(0) == 0
con2 = y(pi/2) == 0
y(x) = dsolve(deq,con1,con2)
pretty(y(x))
```

1.2.2 含高阶导数的泛函极值问题

定义一个含自变函数二阶导数的泛函

$$\Pi[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y',y'')\mathrm{d}x, \tag{1-6}$$

其自变函数满足边界条件

$$\left.\begin{aligned}y(a)&=\alpha_1\\ y(b)&=\beta_1\\ y'(a)&=\alpha_2\\ y'(b)&=\beta_2\end{aligned}\right\}。 \tag{1-7}$$

下面寻找一个函数 $y(x)$ 使得式(1-6)定义的泛函取得极值。

对式(1-6)定义的泛函取变分得

$$\delta\Pi=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'+\frac{\partial F}{\partial y''}\delta y''\right)\mathrm{d}x。 \tag{1-8}$$

对式(1-8)等号右端第二、三项进行分部积分运算得

$$\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\mathrm{d}x=-\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right)\Big|_a^b \tag{1-9}$$

和

$$\begin{aligned}\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y''}\delta y''\mathrm{d}x&=-\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\delta y'\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\delta y'\right)\Big|_a^b\\ &=\int_a^b\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\delta y\mathrm{d}x-\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\delta y\right]\Big|_a^b+\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\delta y'\right)\Big|_a^b。\end{aligned} \tag{1-10}$$

将式(1-9)和式(1-10)代入式(1-8),得

$$\delta\Pi=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right]\delta y\mathrm{d}x+\left\{\left[\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right]\delta y\right\}\Big|_a^b+\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\delta y'\right)\Big|_a^b=0。 \tag{1-11}$$

根据边界条件式(1-7)可知

$$\left.\begin{aligned}\delta y(a)=\delta y(b)=0\\ \delta y'(a)=\delta y'(b)=0\end{aligned}\right\}。 \tag{1-12}$$

将式(1-12)代入式(1-11)得

$$\delta\Pi=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right]\delta y\,\mathrm{d}x=0,$$

根据泛函极值条件 $\delta\Pi=0$ 及 δy 的任意性，上式成立必然有

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)=0,\tag{1-13}$$

此即式(1-6)的欧拉方程。

若事先没有给定边界条件式(1-7)，则根据式(1-12)可知，需要满足如下边界条件：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)=0\\&\frac{\partial F}{\partial y''}=0\end{aligned}\right\}\quad x=a,x=b,\tag{1-14}$$

才能得到欧拉方程式(1-13)。像式(1-14)这种由泛函变分极值条件推导出的边界条件称为**自然边界条件**，而像式(1-7)这种事先给定的边界条件称为**强加边界条件**或**本质边界条件**。

类似地，定义一含 n 阶导数的泛函

$$\Pi[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})\mathrm{d}x,\tag{1-15}$$

经过类似的推导过程，可以得到式(1-15)的欧拉方程为

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)-\cdots+(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right)=0。\tag{1-16}$$

与式(1-16)对应的强加边界条件和自然边界条件分别为

$$\left.\begin{aligned}&y(a)=\alpha_1,y(b)=\beta_1\\&y'(a)=\alpha_2,y'(b)=\beta_2\\&\vdots\\&y^{(n-1)}(a)=\alpha_{n-1},y^{(n-1)}(b)=\beta_{n-1}\end{aligned}\right\}\tag{1-17}$$

和

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}}\right)=0\\&\frac{\partial F}{\partial y''}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}x^{n-2}}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n-2)}}\right)=0\\&\vdots\\&\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}=0\end{aligned}\right\}(x=a,x=b)。\tag{1-18}$$

1.2.3 具有多个独立变量的泛函极值问题

定义自变函数为二元函数的泛函

$$\Pi=\int_\Omega F(x,y,\varphi,\varphi_x,\varphi_y)\mathrm{d}\Omega,\tag{1-19}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\varphi=\varphi(x,y)\\&\varphi_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\\&\varphi_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}\end{aligned}\right\}。$$

对泛函式(1-19)取一阶变分得

$$\begin{aligned}\delta\Pi&=\int_\Omega\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\delta\varphi+\frac{\partial F}{\partial\varphi_x}\delta\varphi_x+\frac{\partial F}{\partial\varphi_y}\delta\varphi_y\right)\mathrm{d}\Omega\\&=\int_\Omega\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\delta\varphi+\frac{\partial F}{\partial\varphi_x}\frac{\partial\delta\varphi}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial\varphi_y}\frac{\partial\delta\varphi}{\partial y}\right)\mathrm{d}\Omega。\end{aligned}\tag{1-20}$$

利用分部积分和格林-高斯定理得

$$\begin{aligned}\int_\Omega\frac{\partial F}{\partial\varphi_x}\frac{\partial\delta\varphi}{\partial x}\mathrm{d}\Omega&=\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_x}\delta\varphi\right)\mathrm{d}\Omega-\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_x}\right)\delta\varphi\mathrm{d}\Omega\\&=\int_\Gamma\frac{\partial F}{\partial\varphi_x}\delta\varphi n_x\mathrm{d}\Gamma-\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_x}\right)\delta\varphi\mathrm{d}\Omega\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\int_\Omega\frac{\partial F}{\partial\varphi_y}\frac{\partial\delta\varphi}{\partial y}\mathrm{d}\Omega&=\int_\Omega\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_y}\delta\varphi\right)\mathrm{d}\Omega-\int_\Omega\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_y}\right)\delta\varphi\mathrm{d}\Omega\\&=\int_\Gamma\frac{\partial F}{\partial\varphi_y}\delta\varphi n_y\mathrm{d}\Gamma-\int_\Omega\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_y}\right)\delta\varphi\mathrm{d}\Omega,\end{aligned}$$

其中 Γ 为 Ω 的边界，n_x 为边界外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 和 x 轴间的方向余弦，n_y 为边界外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 和 y 轴间的方向余弦。将以上两式代入式(1-20)，得

$$\delta\Pi=\int_\Omega\left[\frac{\partial F}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_y}\right)\right]\delta\varphi\mathrm{d}\Omega+\int_\Gamma\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_x}n_x+\frac{\partial F}{\partial\varphi_y}n_y\right)\delta\varphi\mathrm{d}\Gamma。\tag{1-21}$$

根据泛函极值条件 $\delta\Pi=0$ 及 δy 的任意性，由式(1-21)可知式(1-19)的欧拉方程和自然边界条件分别为

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_y}\right)=0\quad(在\ \Omega\ 内)\tag{1-22}$$

和

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi_x}n_x+\frac{\partial F}{\partial\varphi_y}n_y=0\quad(在\ \Gamma\ 上)。\tag{1-23}$$

经过类似的推导过程，对于下面自变函数为三元函数的泛函

$$\Pi=\int_\Omega F(x,y,z,\varphi,\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z)\mathrm{d}\Omega,\tag{1-24}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\varphi=\varphi(x,y,z)\\&\varphi_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\\&\varphi_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}\\&\varphi_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}\end{aligned}\right\},$$

可得到其欧拉方程和自然边界条件分别为

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_z}\right)=0 \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内}) \tag{1-25}$$

和

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi_x}n_x+\frac{\partial F}{\partial \varphi_y}n_y+\frac{\partial F}{\partial \varphi_z}n_z=0 \quad (\text{在 } \Gamma \text{ 上})。 \tag{1-26}$$

1.3 变分原理和里兹法

1.3.1 变分原理简介

与函数存在极值的条件类似，泛函 $\Pi[y(x)]$ 在其定义域内(即自变函数集合内)取极值的必要条件是其1阶变分等于零，即

$$\delta\Pi[y(x)]=0。$$

利用泛函极值条件求解问题的方法称为变分原理或变分法。

对于一个具体的工程或科学问题，经常存在不同但相互等效的表达形式。在变分原理中，问题的求解是寻找一个满足边界条件且使泛函取得极值的待求未知函数；在微分方程边值问题的表达中，问题的求解是对已知边界条件的微分方程进行积分。泛函极值问题和微分方程边值问题是两种不同但相互等效的表达形式。

对于任何泛函极值问题，都可以找到相应的欧拉方程，即都可转换为微分方程边值问题。但不是所有微分方程边值问题都存在相应的变分原理，即不是所有微分方程边值问题都能转换为泛函极值问题。下面主要介绍如何建立线性微分方程的泛函。

将微分方程记为

$$L(u)+f=0, \tag{1-27}$$

其中，L——微分算子；

f——已知函数项。

若微分算子 L 具有如下性质：

$$L(\alpha u+\beta v)=\alpha L(u)+\beta L(v), \tag{1-28}$$

其中，α 和 β——常数；

u 和 v——两个任意函数。

则称 L 为线性微分算子，称式(1-27)为线性微分方程。

对于两个任意函数 u 和 v，定义如下内积：

$$\int_\Omega L(u)v\,\mathrm{d}\Omega。 \tag{1-29}$$

若内积式(1-29)经过分部积分运算后可以改写为

$$\int_\Omega L(u)v\,\mathrm{d}\Omega=\int_\Omega L(v)u\,\mathrm{d}\Omega+\mathrm{b.t.}(u,v), \tag{1-30}$$

其中，$\mathrm{b.t.}(u,v)$ 为边界项，则称微分算子 L 为自伴随算子，称式(1-27)为线性自伴随微分方程。线性自伴随微分方程可以转化为相应的泛函极值问题。

线性自伴随微分方程的泛函数确定，即变分原理的建立，主要通过分部积分运算实现。

实践 1-5

【例 1-5】 设有微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[b(x)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right]+f(x)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant L,\tag{a}$$

其边界条件为

$$w\,|_{x=0}=0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0,\quad \left.\left(b(x)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)\right|_{x=L}=M_0,\quad \left.\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(b(x)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)\right]\right|_{x=L}=0。\tag{b}$$

利用变分原理建立该微分方程的泛函。

【解】 设微分方程式(a)对应的泛函变分为

$$\delta\Pi=\int_0^L\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[b(x)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right]+f(x)\right\}\delta w\,\mathrm{d}x。\tag{c}$$

利用分部积分得

$$\begin{aligned}
&\int_0^L\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[b(x)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right]\right\}\delta w\,\mathrm{d}x\\
&=-\int_0^L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[b(x)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right]\delta\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x+\left.\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[b(x)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right]\delta w\right\}\right|_0^L\\
&=\int_0^L\left[b(x)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\delta\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)\right]\mathrm{d}x-\left.\left[b(x)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\delta\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)\right]\right|_0^L+\left.\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[b(x)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right]\delta w\right\}\right|_0^L,
\end{aligned}$$

利用边界条件式(b)得

$$\begin{aligned}
&-\left.\left[b(x)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\delta\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)\right]\right|_0^L+\left.\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[b(x)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right]\delta w\right\}\right|_0^L\\
&=-\left[b(x)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\delta\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)\right]_{x=L}+\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[b(x)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right]\delta w\right\}_{x=L}\\
&=-M_0\,\delta\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)_{x=L}。
\end{aligned}$$

根据以上两式可得

$$\int_0^L\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[b(x)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right]\right\}\delta w\,\mathrm{d}x=\int_0^L\left[b(x)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\delta\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)\right]\mathrm{d}x-M_0\,\delta\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)_{x=L}。\tag{d}$$

将式(d)代入式(c)得

$$\delta\Pi=\delta\left\{\int_0^L\left[\frac{1}{2}b(x)\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2+f(x)w\right]\mathrm{d}x-M_0\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)_{x=L}\right\}。$$

由此得到微分方程式(a)和边界条件式(b)的泛函

$$\Pi=\int_0^L\left[\frac{1}{2}b(x)\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2+f(x)w\right]\mathrm{d}x-M_0\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)_{x=L}。$$

实践 1-6

【例 1-6】 利用变分原理建立如下微分方程边值问题的泛函

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left(K_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+Q=0\quad(\text{在 }\Omega\text{ 内})\\&K_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}n_x+K_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}n_y=\bar{q}\quad(\text{在 }\Gamma_1\text{ 上})\\&\varphi=\bar{\varphi}\quad(\text{在 }\Gamma_2\text{ 上})\end{aligned}\right\}。$$

【解】 将泛函变分设为

$$\delta\Pi=-\int_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(K_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+Q\right]\delta\varphi\,\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_1}\left(K_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}n_x+K_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}n_y-\bar{q}\right)\delta\varphi\,\mathrm{d}\Gamma。\tag{a}$$

利用分部积分与格林-高斯定理可得

$$\begin{aligned}&-\int_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(K_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+Q\right]\delta\varphi\,\mathrm{d}\Omega\\&=\int_\Omega\left(K_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta\frac{\partial\varphi}{\partial x}+K_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta\frac{\partial\varphi}{\partial y}-Q\delta\varphi\right)\mathrm{d}\Omega-\int_\Gamma\left(K_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}n_x+K_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}n_y\right)\delta\varphi\,\mathrm{d}\Gamma,\end{aligned}\tag{b}$$

其中 $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$。在 Γ_2 上 $\delta\varphi=0$，因此有

$$\int_\Gamma\left(K_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}n_x+K_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}n_y\right)\delta\varphi\,\mathrm{d}\Gamma=\int_{\Gamma_1}\left(K_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}n_x+K_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}n_y\right)\delta\varphi\,\mathrm{d}\Gamma。\tag{c}$$

将以上两式代入式(a)，得

$$\begin{aligned}\delta\Pi&=\int_\Omega\left(K_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta\frac{\partial\varphi}{\partial x}+K_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta\frac{\partial\varphi}{\partial y}-Q\delta\varphi\right)\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma_1}\bar{q}\delta\varphi\,\mathrm{d}\Gamma\\&=\delta\left\{\int_\Omega\left[\frac{1}{2}K_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}K_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2-Q\varphi\right]\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma_1}\bar{q}\varphi\,\mathrm{d}\Gamma\right\},\end{aligned}\tag{d}$$

因此，原微分方程边值问题的泛函为

$$\Pi=\int_\Omega\left[\frac{1}{2}K_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}K_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2-Q\varphi\right]\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma_1}\bar{q}\varphi\,\mathrm{d}\Gamma。$$

1.3.2 微分方程的里兹法

在实际应用中，对很多微分方程问题很难得到解析解，只能求得其近似解。里兹(Ritz)法是基于变分原理的微分方程近似解法。该法的具体求解过程为：①将微分方程问题转化为泛函极值问题；②假设含有待定参数的近似解；③利用泛函的极值条件求出近似解中的待定参数。具体如下。

对某一微分方程，若已求得其对应的泛函为 $\Pi[y(x)]$。假设函数 $y(x)$ 为

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n}C_iY_i(x)+Y_0(x),\tag{1-31}$$

其中，Y_i 为基函数，C_i 为待定系数。将式(1-31)代入泛函极值条件 $\delta\Pi=0$ 得

$$\delta\Pi=\frac{\partial\Pi}{\partial C_1}\delta C_1+\frac{\partial\Pi}{\partial C_2}\delta C_2+\cdots+\frac{\partial\Pi}{\partial C_n}\delta C_n=0。\tag{1-32}$$

由于 δC_i 的任意性，若式(1-32)成立，必然有

$$\frac{\partial\Pi}{\partial C_i}=0,\quad i=1,2,\cdots,n。\tag{1-33}$$

根据上述 n 个方程，即可求出 n 个待定系数 C_i，进而得到原微分方程问题的近似解。利用里兹法求解微分方程问题的前提是能找到微分方程问题所对应的泛函数。

实践 1-7

【例 1-7】 设微分方程边值问题

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-y+x^2=0,\quad 0\leqslant x\leqslant 1\\&y(0)=y(1)=0\end{aligned}\right\}$$

的近似解为

$$\bar{y}=C_1x(1-x)+C_2x^2(1-x)+C_3x^3(1-x)。$$

利用里兹法求近似解中的待定系数 C_1、C_2 和 C_3。

【解】 首先根据变分原理，将微分方程边值问题对应的泛函变分表示为

$$\delta Y=\int_0^1\left(-\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-y+x^2\right)\delta y\,\mathrm{d}x,$$

利用分部积分得

$$\delta Y=\int_0^1\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\delta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y\delta y+x^2\delta y\right)\mathrm{d}x-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\delta y\Big|_0^1。$$

由边界条件 $y(0)=y(1)=0$ 可知

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\delta y\Big|_0^1=0。$$

因此泛函变分可进一步简化为

$$\delta Y=\int_0^1\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\delta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y\delta y+x^2\delta y\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\delta\left[\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-y^2+2x^2y\right]\mathrm{d}x,$$

由此可知微分方程边值问题对应的泛函为

$$Y=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-y^2+2x^2y\right]\mathrm{d}x。\tag{a}$$

将近似解代入泛函式(a)得

$$Y=Y(C_1,C_2,C_3)。\tag{b}$$

根据里兹法得

$$\frac{\partial Y}{\partial C_1}=0,\quad\frac{\partial Y}{\partial C_2}=0,\quad\frac{\partial Y}{\partial C_3}=0。$$

联立求解上述方程，得

$$C_1=-0.0952,\quad C_2=-0.1005,\quad C_3=-0.0702。$$

求解待定系数 C_1、C_2、C_3 的 MATLAB 程序为 ex0107.m，具体内容如下：

```
clear;
clc;
syms x C1 C2 C3
y = C1 * x * (1 - x) + C2 * x^2 * (1 - x) + C3 * x^3 * (1 - x)
F = (diff(y,x))^2 - y^2 + 2 * x^2 * y;
P = int(F,x,0,1)/2;
eq1 = diff(P,C1) == 0
```

```
eq2 = diff(P,C2) == 0
eq3 = diff(P,C3) == 0
R = solve(eq1,eq2,eq3,C1,C2,C3)
C1 = eval(R.C1)
C2 = eval(R.C2)
C3 = eval(R.C3)
```

实践 1-8

【例 1-8】 设微分方程边值问题

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}-y+x^2=0,\quad 0\leqslant x\leqslant 1\\ &y(0)=0,\quad y'(1)=1\end{aligned}\right\}$$

的近似解为

$$y=C_1x+C_2x^2+C_3x^3。$$

利用里兹法求近似解中的待定系数 C_1、C_2、C_3。

【解】 该问题中的边界条件 $y'(1)=1$ 为自然边界条件,为此设泛函变分为

$$\delta Y=\int_0^1\left(-\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}-y+x^2\right)\delta y\,\mathrm{d}x+[y'(1)-1]\delta y(1),$$

利用分部积分得

$$\delta Y=\int_0^1\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\delta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y\delta y+x^2\delta y\right)\mathrm{d}x-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\delta y\bigg|_0^1+[y'(1)-1]\delta y(1)。$$

利用边界条件 $y(0)=0,y'(1)=1$,得

$$-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\delta y\bigg|_0^1+[y'(1)-1]\delta y(1)=-y'(1)\delta y(1)+[y'(1)-1]\delta y(1)=-\delta y(1),$$

由此得

$$\delta Y=\int_0^1\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\delta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y\delta y+x^2\delta y\right)\mathrm{d}x-\delta y(1)。$$

根据上式进一步得

$$Y=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-y^2+2x^2y\right]\mathrm{d}x-y(1)。\tag{a}$$

将近似解代入式(a)得

$$Y=Y(C_1,C_2,C_3)。\tag{b}$$

根据里兹法得

$$\frac{\partial Y}{\partial C_1}=0,\quad\frac{\partial Y}{\partial C_2}=0,\quad\frac{\partial Y}{\partial C_3}=0。$$

联立求解上述方程,得

$$C_1=1.283,\quad C_2=-0.1142,\quad C_3=-0.02462。$$

求解待定系数 C_1、C_2、C_3 的 MATLAB 程序为 ex0108.m,具体内容如下:

```
clear;
clc;
syms x C1 C2 C3
```