

第5章

希尔伯特变换

连续时间信号 $x(t)$ 的希尔伯特变换等于该信号通过具有冲激响应 $h(t) = \frac{1}{\pi t}$ 的线性系统以后的输出响应 $x_h(t)$ 。信号经希尔伯特变换后,在频域各频率分量的幅度保持不变,但出现 90° 相移。希尔伯特变换在通信理论中是分析信号的工具,在数字信号处理中不仅用于信号变换,还可用于滤波,做成不同类型的希尔伯特滤波器。用希尔伯特变换描述幅度调制或相位调制的包络、瞬时频率和瞬时相位会使分析简便,在通信系统中有着重要的理论意义和实用价值。

实际传递的一大部分信息通常调制在信号的幅度、频率和相位之上。对这类信号的处理也是为了获取其幅度和相位(含频率)两方面的信息,但实际系统接收到的信号多为实信号,这时提取幅度信息和相位信息比较困难。如果变成复信号,处理就比较方便。这种复信号称为解析信号,其实部和虚部存在某种关系,也就是希尔伯特变换关系。解析信号的一个重要特点是其频谱呈单边特性,其傅里叶变换在负频率上为零。

时间连续信号处理中解析信号是一个重要的概念,本章将其推广到时间离散信号。从形式上说,不能把复时间离散信号或复序列看成解析函数,因为它是一个以整数为变量的函数,但也可以按照类似的处理方式,将复序列之实部和虚部联系起来使复序列的频谱在单位圆上的 $-\pi \leq \omega < 0$ 范围内为零。用类似的方法也可以将周期性(或有限时宽)序列的傅里叶变换之实部和虚部联系起来,这种情况下“因果性”条件是该周期序列在各周期的后半部为零。根据对偶关系,对于时间序列呈单边特性的因果序列,在频域(其实部与虚部)也应存在某种变换关系。最小相位序列是一类很重要的信号,其傅里叶变换幅度和相位之间存在希尔伯特变换关系。

在几乎所有利用傅里叶方法表示和分析物理过程的领域都可以发现,傅里叶变换的实部和虚部之间或者幅度和相位之间在某些情况下存在着一定的关系,这些关系虽在不同的领域有不同的名称,但通常都称为希尔伯特变换关系。在数字信号处理领域里也毫不例外地这样称呼。傅里叶变换作为经典的信号处理的时频转换方法,其变换所产生的希尔伯特变换关系也展现出信号在频域上的特性。对于待处理信号而言,其进行傅里叶变换后在频域上展现的实部与虚部、幅度与相位之间的关系也称为频域上的希尔伯特变换关系。

工程人员使用由傅里叶变换和希尔伯特变换展现出的性质与特点,在信号处理领域上开发出较为前沿的应用。20世纪60年代初期,Bogert等在研究回声检测技术时提出的倒谱以及与之有关的一系列概念;1998年,Norden E. Huang(黄锷)等提出了经验模态分解方法,并引入了 Hilbert 谱的概念和 Hilbert 谱分析的方法,美国国家航空航天局(NASA)将这一方法命名为希尔伯特-黄变换(HHT)。

5.1 离散时间信号的希尔伯特变换

5.1.1 希尔伯特变换的定义

给定连续时间信号 $f(t)$,其希尔伯特变换为

$$\hat{f}(t) = H[f(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (5.1)$$

其逆变换为

$$f(t) = H^{-1}[\hat{f}(t)] = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (5.2)$$

与卷积的概念进行对比,可以发现希尔伯特变换实际上是将时间信号与冲激响应信号 $h(t)$ 卷积的结果,即时间信号与 $\frac{1}{\pi t}$ 的卷积:

$$\hat{f}(t) = f(t) * h(t) = f(t) * \frac{1}{\pi t} \quad (5.3)$$

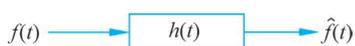


图 5.1 希尔伯特变换系统

因此,希尔伯特变换可以看成将原始信号通过一个滤波器,或者一个系统,系统的冲激响应 $h(t) = \frac{1}{\pi t}$,如图 5.1 所示。

对 $h(t)$ 做傅里叶变换,可以得到

$$H(j\omega) = -j \cdot \text{sgn}(\omega) \quad (5.4)$$

或者写成

$$H(\omega) = \begin{cases} -j, & \omega \geq 0 \\ +j, & \omega < 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

从频谱上来看,这个滤波器将原始信号的正频率部分乘以 $-j$,也就是说保持幅度不变的条件下相位移动了 $-\frac{\pi}{2}$;对于负频率成分,相位移动了 $\frac{\pi}{2}$ 。

信号 $x(t)$ 的解析信号定义为

$$x_A(t) = x(t) + j\hat{x}(t) \quad (5.6)$$

对式(5.6)两边进行傅里叶变换,可得

$$X_A(j\omega) = X(j\omega) + j\hat{X}(j\omega) = X(j\omega) + jH(j\omega)X(j\omega) \quad (5.7)$$

将式(5.7)代入式(5.5),可得

$$X_A(j\omega) = \begin{cases} 2X(j\omega), & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

这样,由希尔伯特变换构成的解析信号只含有正频率成分,且是原信号正频率分量的 2 倍。

5.1.2 离散信号的希尔伯特变换

对于时间离散信号,其相对连续信号的单边性与解析信号的定义需稍做修正。时间离散信号的频谱是以 2π 为周期的周期性函数,其单边性的定义为

$$X_A(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2X(e^{j\omega}), & 0 < \omega \leq \pi \\ 0, & -\pi \leq \omega < 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

式中: $X_A(e^{j\omega})$ 、 $X(e^{j\omega})$ 分别为 $x_A(n)$ 和 $x(n)$ 的频谱, $x_A(n)$ 、 $x(n)$ 可以看成时间连续信号 $x_A(t)$ 和 $x(t)$ 的等间隔采样。于是有

$$x_A(n) = x(n) + j\hat{x}(n) \quad (5.10)$$

式中： $\hat{x}(n)$ 是时间离散信号 $x(n)$ 的希尔伯特变换，即

$$\hat{x}(n) = x(n) * h(n) \quad (5.11)$$

解析信号对实信号来说就是具有一阶导数的连续信号。由此意义来说，任何序列都不是解析信号，因为它是以整数为变量的函数，但 $x_A(n)$ 是 $x_A(t)$ 的采样，如果 $x_A(t)$ 是解析的，那么仍认为 $x_A(n)$ 也是解析的，这是对解析信号的修正。

由前面的讨论可以得出，复序列 $x_A(n)$ 可以由实序列 $x(n)$ 产生，而它的频谱是单边的，因此复序列的虚部 $\hat{x}(n)$ 并不是任意的，也就是说，离散的冲激响应 $h(n)$ 不是任意的。为了求得 $h(n)$ 的表达式，首先根据频域上的 $X_A(e^{j\omega})$ 、 $X(e^{j\omega})$ 求出 $\hat{X}(e^{j\omega})$ ，再由 $\hat{X}(e^{j\omega})$ 求得 $H(e^{j\omega})$ ，最后经傅里叶逆变换求出 $h(n)$ 。

式(5.10)的傅里叶变换为

$$X_A(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + j\hat{X}(e^{j\omega}) \quad (5.12)$$

由式(5.9)和式(5.10)可得

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \begin{cases} -jX(e^{j\omega}), & 0 \leq \omega < \pi \\ jX(e^{j\omega}), & -\pi \leq \omega < 0 \end{cases} \quad (5.13)$$

所以可得

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 0 \leq \omega < \pi \\ j, & -\pi \leq \omega < 0 \end{cases} \quad (5.14)$$

上式说明希尔伯特变换器实际上是 90° 的移相器，正频向后移 90° ，负频向前移 90° ，而幅度特性为1。其时域特性可通过对 $H(e^{j\omega})$ 做傅里叶逆变换求出，即

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^0 j e^{j\omega n} d\omega - \int_0^{\pi} j e^{j\omega n} d\omega \right] \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\pi n}, & n \neq 0, n = 2m + 1 \\ 0, & n = 0, n = 2m \end{cases} \end{aligned} \quad (5.15)$$

式中： m 为大于或等于0的整数。

由 $\hat{x}(n) = x(n) * h(n)$ 可得

$$\hat{x}(n) = H[x(n)] = \frac{2}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{x(n-2m-1)}{(2m+1)} \quad (5.16)$$

式中： m 为大于或等于0的整数。

由此可以得到离散时间信号的希尔伯特变换。

5.2 频域的希尔伯特变换关系

5.2.1 因果序列的希尔伯特变换关系

当 $x_A(n)$ 是解析序列时，其实部和虚部成希尔伯特变换关系，它对应的频谱则是单

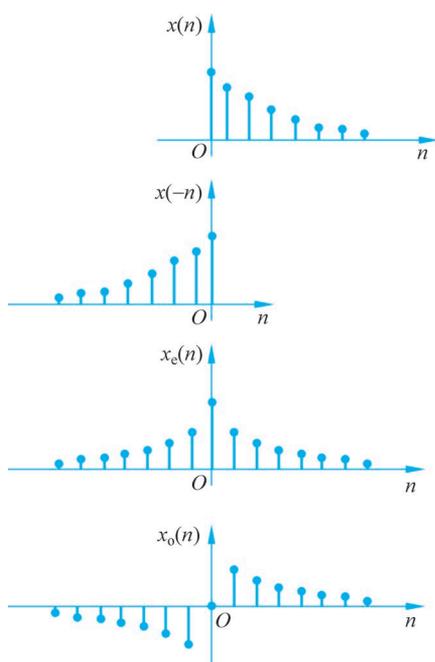


图 5.2 将实因果序列分解为
共轭对称序列和共轭反对称序列

边的。若把频谱看成解析的,即其实部与虚部成希尔伯特变换关系,则对应的时域序列应是单边的,即因果的。本节主要讨论因果序列傅里叶变换的希尔伯特变换。

任何一个序列 $x(n)$ 都可以表示成共轭对称序列 $x_e(n)$ 和共轭反对称序列 $x_o(n)$ 之和(如图 5.2 所示),即

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n) \quad (5.17)$$

式中

$$\begin{aligned} x_e(n) &= \frac{1}{2} [x(n) + x^*(-n)] \\ x_o(n) &= \frac{1}{2} [x(n) - x^*(-n)] \end{aligned} \quad (5.18)$$

如果 $x(n)$ 为实因果序列,除 $n=0$ 处之外, $x(n)$ 和 $x(-n)$ 的非零部分之间将无重叠。 $x(n)$ 可单独由共轭对称序列 $x_e(n)$ 恢复出来,即

$$x(n) = \begin{cases} 2x_e(n), & n > 0 \\ x_e(n), & n = 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (5.19)$$

或除了 $n=0$ 处外, $x(n)$ 也可由其共轭反对称序列 $x_o(n)$ 单独恢复,即

$$x(n) = \begin{cases} 2x_o(n), & n > 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (5.20)$$

对于稳定的因果实序列 $x(n)$,其傅里叶变换为

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) \quad (5.21)$$

式中: $X_R(e^{j\omega})$ 为 $x_e(n)$ 的傅里叶变换; $X_I(e^{j\omega})$ 为 $x_o(n)$ 的傅里叶变换。

既然能由 $x_e(n)$ 单独恢复 $x(n)$,那么由 $X_R(e^{j\omega})$ 也可单独恢复出 $x(n)$; 使用 $X_I(e^{j\omega})$ 亦然。这说明,实因果序列的傅里叶变换的实部和虚部并不独立,它们之间存在某种关系。

由式(5.19)和式(5.20)可得

$$x(n) = x_e(n)u_+(n) \quad (5.22)$$

或

$$x(n) = x_o(n)u_+(n) + x(0)\delta(n) \quad (5.23)$$

对式(5.22)两边取傅里叶变换,有

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= X_R(e^{j\omega}) * U_+(e^{j\omega}) = 2X_R(e^{j\omega}) * U(e^{j\omega}) - x(0) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta}) U(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta - x(0) \end{aligned} \quad (5.24)$$

式中: $U(e^{j\omega})$ 为单位阶跃序列 $u(n)$ 的傅里叶变换, 且

$$U(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega + 2\pi k) + \frac{1}{2} - \frac{j}{2} \cot\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (5.25)$$

将式(5.25)代入式(5.24), 可得

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta}) d\theta - \frac{j}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta}) \cot\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) d\theta - x(0) \quad (5.26)$$

由于

$$x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta}) d\theta \quad (5.27)$$

将式(5.27)代入式(5.26), 可得

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) - \frac{j}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta}) \cot\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) d\theta \quad (5.28)$$

由式(5.28)和式(5.21)可得

$$X_I(e^{j\omega}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta}) \cot\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) d\theta \quad (5.29)$$

对式(5.23)两边取傅里叶变换, 可得

$$X_R(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_I(e^{j\theta}) \cot\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) d\theta + x(0) \quad (5.30)$$

将此结果与式(5.1)对比可得, 稳定的实因果序列信号的傅里叶变换展现在频域上的实部和虚部满足希尔伯特变换关系, 而其幅度和相位又可以由其实部和虚部求出。此时的幅度和相位显然也存在着某种关系, 所以也可以由傅里叶变换的幅度或者相位来重建信号序列或其傅里叶变换。下面讨论这样的序列。

将实因果序列 $x(n)$ 的傅里叶变换写成极坐标形式:

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j \arg [X(e^{j\omega})]} \quad (5.31)$$

对上式两边取对数, 有

$$\ln X(e^{j\omega}) = \ln |X(e^{j\omega})| + j \arg [X(e^{j\omega})] \quad (5.32)$$

记 $\ln X(e^{j\omega})$ 对应的时域信号为 $\check{x}(n)$, 因为 $x(n)$ 是频谱 $X(e^{j\omega})$ 的逆变换, 所以 $\check{x}(n)$ 又称为 $x(n)$ 的倒谱。

若 $\check{x}(n)$ 也是因果序列, 则 $\ln X(e^{j\omega})$ 的实部和虚部也满足希尔伯特变换关系。

5.2.2 离散傅里叶变换下的希尔伯特变换关系

周期序列和有限长度序列可以用离散傅里叶变换来表示。从实际应用来讲, 序列的傅里叶变换都要处理成离散傅里叶变换, 因此, 需把前面讨论的问题变成适合于离散傅里叶变换的形式, 即研究序列的离散傅里叶变换的实部和虚部之间的关系。

在 5.1 节中, 根据序列傅里叶变换的特性对频谱的单边性定义进行了修正, 若把序列看成离散傅里叶变换意义下的有限长序列, 则不能忘记它隐含的周期性。此时, 长度

为 N 的有限长度序列可以看成周期为 N 的周期序列的一个周期, 因此, 为了推导离散傅里叶变换实部与虚部之间的关系, 研究周期为 N 的周期序列 $x(n)$ 。在本节中, 为了强调周期性, 用下标 p 表示序列的单边性。为此, 对周期序列的单边性定义应为

$$x_p(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq \frac{N}{2} \\ 0, & \frac{N}{2} + 1 \leq n \leq N - 1 \end{cases} \quad (5.33)$$

式中: N 为偶数。有时也将式(5.33)定义的序列称为“因果性”周期序列。

同样, $x_p(n)$ 可以分解成周期的共轭对称序列 $x_{ep}(n)$ 与共轭反对称序列 $x_{op}(n)$ 之和, 即

$$x_p(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n) \quad (5.34)$$

式中

$$\begin{aligned} x_{ep}(n) &= \frac{1}{2} [x_p(n) + x_p^*(N - n)], \quad 0 \leq n \leq N - 1 \\ x_{op}(n) &= \frac{1}{2} [x_p(n) - x_p^*(N - n)], \quad 0 \leq n \leq N - 1 \end{aligned} \quad (5.35)$$

对于具有式(5.33)性质的实序列, 除了 $n=0$ 和 $n=\frac{N}{2}$ 外, $x_p(n)$ 与 $x_p(N-n)$ 的非零部分之间没有重叠。此时

$$x_p(n) = \begin{cases} 2x_{ep}(n), & 1 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1 \\ x_{ep}(n), & n = 0, \frac{N}{2} \\ 0, & \frac{N}{2} + 1 \leq n \leq N - 1 \end{cases} \quad (5.36)$$

或

$$x_p(n) = \begin{cases} 2x_{op}(n), & 1 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1 \\ x_p(n) \left[\delta(n) + \delta\left(n - \frac{N}{2}\right) \right], & n = 0, \frac{N}{2} \\ 0, & \frac{N}{2} + 1 \leq n \leq N - 1 \end{cases} \quad (5.37)$$

可以看出, $x_p(n)$ 可以由 $x_{ep}(n)$ 恢复出来, 也可以由 $x_{op}(n)$ 、 $x_p(0)$ 和 $x_p\left(\frac{N}{2}\right)$ 重构。

若周期为 N 的实周期序列的离散傅里叶级数为 $\tilde{X}(k)$, 则 $\tilde{X}(k)$ 的实部 $\tilde{X}_{pR}(k)$ 是 $x_{ep}(n)$ 的离散傅里叶级数的系数, 虚部 $\tilde{X}_{pI}(k)$ 是 $x_{op}(n)$ 的离散傅里叶级数的系数。因此根据式(5.36)和式(5.37)的一个重要结论是, 按式(5.33)定义的因果周期(周期为 N)序列(或有限长序列), 与之对应的 $\tilde{X}(k)$ 可以由其实部恢复出来, 也可以由其虚部恢复出来。或者说, 此时的实部 $\tilde{X}_{pR}(k)$ 与虚部 $\tilde{X}_{pI}(k)$ 必然存在着某种变换关系。

为了找出两者的关系,令

$$u_{pN}(n) = \begin{cases} 2, & 1 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1 \\ 1, & n = 0, \frac{N}{2} \\ 0, & \frac{N}{2} + 1 \leq n \leq N - 1 \end{cases} \quad (5.38)$$

利用 $u_{pN}(n)$ 可以把式(5.36)和式(5.37)表示成

$$x_p(n) = x_{ep}(n)u_{pN}(n) \quad (5.39)$$

$$x_p(n) = x_{op}(n)u_{pN}(n) + x_p(n) \left[\delta(n) + \delta\left(n - \frac{N}{2}\right) \right] \quad (5.40)$$

$u_{pN}(n)$ 的离散傅里叶级数的系数为

$$U_{pN}(k) = \begin{cases} N, & k = 0 \\ 0, & k \text{ 为偶数} \\ -j2\cot\left(\frac{\pi k}{N}\right), & k \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (5.41)$$

从式(5.39)可以看到, $x_p(n)$ 的离散傅里叶级数的系数是 $\tilde{X}_{pR}(k)$ 与 $U_{pN}(k)$ 的循环卷积, 即

$$\tilde{X}_p(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_{pR}(l) \tilde{U}_{pN}(k-l) \quad (5.42)$$

若再令

$$\tilde{U}_{pN}(k) = V_{pN}(k) + N\delta(k) \quad (5.43)$$

则

$$V_{pN}(k) = \begin{cases} -j2\cot\left(\frac{\pi k}{N}\right), & k \text{ 为奇数} \\ 0, & k \text{ 为偶数}, k \neq 0 \end{cases} \quad (5.44)$$

将式(5.43)和式(5.44)代入式(5.42), 有

$$\tilde{X}_p(k) = \tilde{X}_{pR}(k) + \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_{pR}(l) V_{pN}(k-l) \quad (5.45)$$

由于 $\tilde{X}_p(k) = \tilde{X}_{pR}(k) + j\tilde{X}_{pI}(k)$, 于是可得 $\tilde{X}_{pR}(k)$ 与 $\tilde{X}_{pI}(k)$ 的关系为

$$j\tilde{X}_{pI}(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_{pR}(l) V_{pN}(k-l), \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (5.46)$$

类似地, 对式(5.40)做同样的推演, 可得

$$\tilde{X}_{pR}(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} j\tilde{X}_{pI}(l) V_{pN}(k-l) + x_p(0) + \left[x_p\left(\frac{N}{2}\right) \right] (-1)^k, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (5.47)$$

式(5.46)、式(5.47)表示了周期性实序列的傅里叶级数实部和虚部之间的希尔伯特变换关系。

5.3 复倒谱及其应用



复倒谱是指函数的傅里叶变换的对数的傅里叶逆变换。复倒谱对褶积信号具有线性分离作用,在实际信号处理中很有用处,应用于通信、建筑声学、地震分析、地质勘探和语音处理等领域。尤其在语音处理方面,应用复倒谱算法可制成同态预测声码器系统,用于高度保密的通信。

5.3.1 语音的同态处理

同态处理是一种设法将非线性问题转化为线性问题来进行处理的方法,它可将两个通过乘法或卷积合成的信号分开。

语音信号 $x(n)$ 可以看作声门激励信号 $x_1(n)$ 和声道冲激响应 $x_2(n)$ 的卷积,即

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) \quad (5.48)$$

同态系统由两个特征子系统和一个线性子系统组成:

第一个子系统是将卷积性信号转换为加性信号的运算,即

$$\begin{cases} Z[x(n)] = Z[x_1(n) * x_2(n)] = X_1(z) \cdot X_2(z) = X(z) \\ \ln X(z) = \ln X_1(z) + \ln X_2(z) = \hat{X}_1(z) + \hat{X}_2(z) = \hat{X}(z) \\ Z^{-1}[\hat{X}(z)] = Z^{-1}[\hat{X}_1(z) + \hat{X}_2(z)] = \hat{x}_1(n) + \hat{x}_2(n) = \hat{x}(n) \end{cases} \quad (5.49)$$

第二个子系统是对加性信号进行线性处理,即

$$\begin{aligned} \hat{x}(n) &= \alpha \hat{x}_1(n) + \beta \hat{x}_2(n) \\ \hat{y}(n) &= L[\hat{x}(n)] = L[\alpha \hat{x}_1(n) + \beta \hat{x}_2(n)] = \alpha L[\hat{x}_1(n)] + \beta L[\hat{x}_2(n)] \\ &= \alpha \hat{y}_1(n) + \beta \hat{y}_2(n) \end{aligned} \quad (5.50)$$

第三个子系统对 $\hat{y}(n)$ 进行逆变换,使其恢复为卷积性信号,即

$$\begin{aligned} \hat{y}(n) &= \hat{y}_1(n) + \hat{y}_2(n) \\ \hat{Y}(z) &= Z[\hat{y}_1(n) + \hat{y}_2(n)] = \hat{Y}_1(z) + \hat{Y}_2(z) \\ Y(z) &= \exp[\hat{Y}_1(z) + \hat{Y}_2(z)] = \exp[\hat{Y}_1(z)] \cdot \exp[\hat{Y}_2(z)] \\ y(n) &= Z^{-1}[\exp[\hat{Y}_1(z)] \cdot \exp[\hat{Y}_2(z)]] \\ &= Z^{-1}[\exp[\hat{Y}_1(z)]] * Z^{-1}[\exp[\hat{Y}_2(z)]] \\ &= \hat{y}_1(n) * \hat{y}_2(n) \end{aligned} \quad (5.51)$$

在许多实际问题中信号为两个或多个分量的乘积。例如,在有衰落的传输信道中,衰落效应可以看作一个缓变分量和传输信号相乘。又如,调幅信号可表示为载频信号与包络函数的乘积,在接收机内需要分离载波和包络。在这一类相乘信号中,用线性系统来分离信号各成分或单独地改善某一信号成分往往是无效的。但利用相乘信号的同态滤波处理,就可以取得较好的滤波效果。在多径或混响环境中进行通信、定位或记录,产生失真的效果可以看成干扰与所需信号的褶积。在语音信号处理中,经常要分离激励源

与声道冲激响应,至少在一段短时间内可以认为语音波形是由两者的褶积构成的。地震记录数据是地震子波与含有岩层结构信息的反射系数序列的褶积组合。

5.3.2 复倒谱与倒谱

令 $\hat{X}(e^{j\omega}) = \ln X(e^{j\omega})$, 则可得

$$\ln X(e^{j\omega}) = \ln \{ |X(e^{j\omega})| e^{j \arg [X(e^{j\omega})]} \} = \ln |X(e^{j\omega})| + j \arg [X(e^{j\omega})] \quad (5.52)$$

对其做傅里叶逆变换,可得

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \ln |X(e^{j\omega})| + j \arg [X(e^{j\omega})] \} e^{j\omega n} d\omega \quad (5.53)$$

$\hat{x}(n)$ 是时域序列,是 $\ln X(e^{j\omega})$ 的逆傅里叶变换,称为 $x(n)$ 的复倒频谱,简称复倒谱,也称为对数复倒谱。

$c(n)$ 是 $\ln X(e^{j\omega})$ 实部的逆傅里叶逆变换,称为 $x(n)$ 的倒谱,可表示为

$$c(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \ln |X(e^{j\omega})| \} e^{j\omega n} d\omega \quad (5.54)$$

与复倒谱不同的是,在倒谱情况下一个序列经过正、反两个特征系统变换后,不能还原成自身,因为 $c(n)$ 中只有幅值信息而无相位信息。尽管如此,但仍可用于语音信号分析中,因为人们的听觉对语音的感知特征主要包含在幅度信息中,相位信息不起主要作用。

复倒谱计算本质上为同态处理。在语音信号处理中,由于浊音信号的倒谱中存在峰值,出现位置等于该语音段的基音周期,而清音的倒谱中不存在峰值。由这个特性可以进行清音和浊音的判断,并且可以估计浊音的基音周期。

5.4 希尔伯特-黄变换



传统的数据分析方法是基于线性和平稳信号的假设,然而对实际系统,无论是自然的还是人为建立的,数据最有可能是非线性、非平稳的。

希尔伯特-黄变换是一种经验数据分析方法,其扩展是自适应性的,所以它可以描述非线性、非平稳过程数据的物理意义。

5.4.1 希尔伯特-黄变换的概述

希尔伯特-黄变换(HHT)是一种新的分析非线性非平稳信号的时频分析方法,由两部分组成:

第一部分为经验模态分解(EMD)(筛选过程),它是由 Huang 提出的,基于一个假设:任何复杂信号都可以分解为有限数目且具有一定物理定义的固有模态函数(IMF,也称为本征模态函数);EMD 方法能根据信号的特点,自适应地将信号分解成从高到低不同频率的一系列 IMF;该方法直接从信号本身获取基函数,因此具有自适应性,同时也存在计算量大和模态混叠的缺点。

第二部分为希尔伯特谱分析(HSA),利用希尔伯特变换求解每一阶 IMF 的瞬时频率,从而得到信号的时频表示,即希尔伯特谱。

简单来说,HHT 处理非平稳信号的基本过程:首先,利用 EMD 方法将给定的信号分解为若干 IMF,这些 IMF 是满足一定条件的分量;然后,对每个 IMF 进行希尔伯特变换,得到相应的希尔伯特谱,即将每个 IMF 表示在联合的时频域中;最后,汇总所有 IMF 的希尔伯特谱就会得到原始信号的时间-频率-能量分布。

在 HHT 中,为了能把复杂的信号分解为简单的单分量信号的组合,在进行 EMD 方法时,所获得的 IMF 必须满足下列两个条件:

(1) 在整个信号长度上,一个 IMF 的极值点和过零点数目必须相等或至多只相差一个。

(2) 在任意时刻,由极大值点定义的上包络线和由极小值点定义的下包络线的平均值为零,也就是说 IMF 的上包络线和下包络线对称于时间轴。

满足上述两个条件的 IMF 就是一个单分量信号。

连续时间信号的希尔伯特变换定义见式(5.1)。

5.4.2 经验模态分解

对于给定的信号,Huang 所介绍的 EMD 方法:

(1) 找到信号的极大值和极小值,用三次样条插值拟合上包络线 $u(t)$ 和下包络线 $v(t)$,计算上包络线和下包络线在每一点上的平均值,从而获得一平均值曲线 m_1 ,即 $m_1 = [u(t) + v(t)]/2$ 。

(2) 设分析信号为 $x(t)$,减去平均值 m_1 ,即 $h_1 = x(t) - m_1$ 。

如果, h_1 满足 IMF 的两个条件,那么 h_1 就是第一个 IMF 分量;否则, h_1 将作为原始信号,重复(1)、(2),得上包络线和下包络线的平均值 m_{11} 。再判断 $h_{11} = h_1 - m_{11}$ 是否满足 IMF 的两个条件;若不满足,重复循环 k 次,得到 $h_{1k} = h_{1(k-1)} - m_{1k}$,直到满足 IMF 的两个条件。记 c_1 为信号经 EMD 得到的第一个 IMF 分量。

有两种筛分停止标准:

① 类似柯西收敛准则:

$$SD_k = \frac{\sum_{t=0}^T |h_1(k-1) - h_{1k}|^2}{\sum_{t=0}^T h_1^2(k-1)} \quad (5.55)$$

当 SD_k 小于预定值时,筛选停止。

② 筛分次数预先选定,在 s 次连续筛选内,当零点数和极点数相等或最多相差一个,筛选过程将停止。

(3) 将 c_1 从 $x(t)$ 中分离出来,得到 $r_1 = x(t) - c_1$ 。

将 r_1 作为原始数据,重复(1)~(3),得到 $x(t)$ 的第二个 IMF 分量 c_2 ;重复循环 n 次,得到信号 $x(t)$ 的 n 个 IMF 分量,则有

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i + r_n \quad (5.56)$$

式中： r_n 为残余分量，分解结束时是一个恒定值或单调函数，代表信号的平均趋势。

上面的分解过程可以解释为尺度滤波过程，每个 IMF 分量都反映了信号的特征尺度，代表着非线性非平稳信号的内在模态特征。

5.4.3 希尔伯特谱分析

获得了信号的 IMF 分量以后，即可对每一阶 IMF 做希尔伯特变换。设 $c_i(t)$ 的希尔伯特变换为 $\hat{c}_i(t)$ ，则有

$$\hat{c}_i(t) = c_i(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c_i(\tau)}{t - \tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c_i(t - \tau)}{\tau} d\tau \quad (5.57)$$

从而，信号 $x(t)$ 的解析信号为

$$z_i(t) = c_i(t) + j\hat{c}_i(t) = a_i(t)e^{j\theta_i(t)} \quad (5.58)$$

式中： $a_i(t)$ 为瞬时振幅， $a_i(t) = \sqrt{c_i^2(t) + \hat{c}_i^2(t)}$ ； $\theta_i(t)$ 为瞬时相位， $\theta_i(t) = \arctan\left(\frac{\hat{c}_i(t)}{c_i(t)}\right)$ 。

解析信号的极坐标形式反映了希尔伯特变换的物理含义：它通过一正弦曲线的频率和幅值调制获得局部的最佳逼近。

根据瞬时频率的定义，IMF 分量的瞬时频率为

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta_i(t)}{dt}, \quad f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta_i(t)}{dt} \quad (5.59)$$

于是，有

$$z_i(t) = c_i(t) + j\hat{c}_i(t) = a_i(t)e^{j\theta_i(t)} = a_i(t)e^{j\int_b^T \omega_i(t) dt} \quad (5.60)$$

对每一阶 IMF 做希尔伯特变换，并求出相应的解析函数的幅值谱和瞬时频率，从而原始信号 $x(t)$ 可以表示为

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) = \operatorname{Re} \sum_{i=1}^n z_i(t) = \operatorname{Re} \sum_{i=1}^n a_i(t)e^{j\theta_i(t)} = \operatorname{Re} \sum_{i=1}^n a_i(t)e^{j\int_b^T \omega_i dt} \quad (5.61)$$

上式反映了信号幅值、时间和瞬时频率之间的关系。信号的幅值可表示为时间、瞬时频率的函数 $H(\omega, t)$ ，从而获得信号幅值的时间、频率分布——希尔伯特谱，即

$$H(\omega, t) = \sum_{i=1}^n a_i(t)e^{j\int_b^T \omega_i dt} \quad (5.62)$$

进而，对时间积分可获得信号的希尔伯特边际谱，即

$$h(\omega) = \int_0^T H(\omega, t) dt \quad (5.63)$$

$H(\omega, t)$ 描述了信号的幅值在整个频率上随时间和频率的变化规律， $h(\omega)$ 描述了信号在每个频率上的总振幅(或能量)。

5.4.4 希尔伯特-黄变换的特点

与传统的信号或数据处理方法相比,希尔伯特-黄变换具有如下特点:

(1) HHT 能分析非线性非平稳信号。传统的数据处理方法,如傅里叶变换只能处理线性非平稳的信号,小波变换虽然在理论上能处理非线性非平稳信号,但是在实际算法实现中只能处理线性非平稳信号。历史上还出现过不少信号处理方法,然而它们不是受线性束缚,就是受平稳性束缚,并不能完全意义上处理非线性非平稳信号。HHT 不同于这些传统方法,它彻底摆脱了线性和平稳性束缚,适用于分析非线性非平稳信号。

(2) HHT 具有完全自适应性。HHT 能够自适应产生“基”,即由“筛选”过程产生的 IMF。这点不同于傅里叶变换和小波变换。傅里叶变换的基是三角函数,小波变换的基是满足“可容性条件”的小波基,小波基也是预先选定的。在实际工程中,如何选择小波基不是一件容易的事,选择不同的小波基可能产生不同的处理结果。我们也没有理由认为所选的小波基能够反映被分析数据或信号的特性。

(3) HHT 不受海森伯格(Heisenberg)测不准原理制约,适合突变信号。傅里叶变换、短时傅里叶变换、小波变换都受 Heisenberg 测不准原理制约,即时间窗口与频率窗口的乘积为常数。这就意味着,如果要提高时间精度就得牺牲频率精度,反之亦然,故不能在时间和频率同时达到很高的精度,这就给信号分析处理带来一定的不便。而 HHT 不受 Heisenberg 测不准原理制约,它可以在时间和频率同时达到很高的精度,这使它非常适用于分析突变信号。

(4) HHT 的瞬时频率是采用求导得到的。傅里叶变换、短时傅里叶变换、小波变换有共同的特点,就是预先选择基函数,其计算方式是通过与基函数的卷积产生的。HHT 不同于这些方法,它借助希尔伯特变换求得相位函数,再对相位函数求导产生瞬时频率。这样求出的瞬时频率是局部性的,而傅里叶变换的频率是全局性的,小波变换的频率是区域性的。

习题

1. 简述 HHT 变换的原理和简要实现过程。
2. 设 $x[n]$ 为一个因果复值序列,其离散时间傅里叶变换为

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

如果 $X_R(e^{j\omega}) = 1 + \cos(\omega)$, 求 $X_I(e^{j\omega})$ 。

3. 考虑一个实因果序列 $x[n]$,其离散时间傅里叶变换为 $X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$,如果离散时间傅里叶变换的虚部 $X_I(e^{j\omega}) = 3\sin(2\omega)$,求其实部 $X_R(e^{j\omega})$,并思考结果唯一吗?

4. 设 $x[n]$ 的离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega}) = e^{j\omega}$,求 $x[n]$ 的复倒谱。

5. 考虑一个序列 $x[n]$,其离散时间傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$, $x[n]$ 为实因果序列,且 $\text{Re}\{X(e^{j\omega})\} = 2 - \cos\omega$,求 $\text{Im}\{X(e^{j\omega})\}$ 。

6. 设序列 $x[n]=u(n), n=1,2,3$ 。求 $x[n]$ 的离散希尔伯特变换。
7. 已知离散时间信号 $x[n]=\cos(0.3\pi n)+\sin(0.7\pi n)$, 求其希尔伯特变换 $\hat{x}[n]$ 。
8. 设信号 $x(t)=e^{j2\pi f_0 t}$, 其中 f_0 为某一固定频率, 求其希尔伯特变换 $\hat{x}(t)$ 及解析信号 $z(t)$ 。
9. 证明: 对任意实信号 $x(t)$, 其解析信号 $z(t)=x(t)+j\hat{x}(t)$ 的能量是原信号能量的两倍。
10. 设信号 $x(t)=\sin(2\pi f_1 t)+\cos(2\pi f_2 t)$, 其中 $f_1 \neq f_2$, 求其希尔伯特变换 $\hat{x}(t)$ 。