

第 5 章

函 数

5.1 内 容 提 要

1. 函数

设 f 是二元关系, 如果对于任意 $x \in \text{dom} f$, 都存在唯一的 $y \in \text{ran} f$, 使得 xy 成立, 则称 f 为**函数**(或者**映射**). 这时也称 y 为 f 在 x 的**值**, 记作 $y = f(x)$.

2. 函数相等

设 f, g 为函数, 则 $f = g \Leftrightarrow f \subseteq g \wedge g \subseteq f$.

两个函数 f 和 g 相等, 一定满足下面两个条件:

(1) $\text{dom} f = \text{dom} g$.

(2) $\forall x \in \text{dom} f = \text{dom} g$ 都有 $f(x) = g(x)$.

3. 特殊的函数

从 A 到 B 的函数 $f: A \rightarrow B$, 其中 A 和 B 为集合, f 为函数, $\text{dom} f = A, \text{ran} f \subseteq B$.

所有从 A 到 B 的函数的集合, 记作 B^A , 符号化表示为 $B^A = \{f \mid f: A \rightarrow B\}$.

特殊函数 $f: A \rightarrow B$.

(1) 如果存在 $c \in B$ 使得对所有的 $x \in A$ 都有 $f(x) = c$, 则称 $f: A \rightarrow B$ 是**常函数**.

(2) A 上的**恒等函数** I_A , 对所有的 $x \in A$ 都有 $I_A(x) = x$.

(3) 设 $\langle A, \leq \rangle, \langle B, \leq \rangle$ 为偏序集, $f: A \rightarrow B$, 如果对任意的 $x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2$, 就有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则称 f 为**单调递增**的; 如果对任意的 $x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2$, 就有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 f 为**严格单调递增**的. 类似地, 也可以定义**单调递减**和**严格单调递减**的函数.

(4) 设 A 为集合, 对于任意的 $A' \subseteq A$, A' 的**特征函数** $\chi_{A'}: A \rightarrow \{0, 1\}$ 定义为

$$\begin{aligned}\chi_{A'}(a) &= 1 & a \in A' \\ \chi_{A'}(a) &= 0 & a \in A - A'\end{aligned}$$

(5) 设 R 是 A 上的等价关系, 令

$$\begin{aligned}g: A &\rightarrow A/R \\ g(a) &= [a], \quad \forall a \in A\end{aligned}$$

称 g 是从 A 到商集 A/R 的**自然映射**.

4. 函数的像与完全原像

设函数 $f: A \rightarrow B, A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B$.

(1) A_1 在 f 下的**像** $f(A_1) = \{f(x) \mid x \in A_1\}$, 当 $A_1 = A$ 时, $f(A)$ 称为**函数的像**.

(2) B_1 在 f 下的**完全原像** $f^{-1}(B_1) = \{x \mid x \in A \wedge f(x) \in B_1\}$.

注意函数的值与函数的像之间的区别,函数值 $f(x) \in B$,而函数的像 $f(A_1) \subseteq B$.
一般来说,函数的像和完全原像满足 $A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$ 和 $f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_1$.

5. 函数的性质

设 $f: A \rightarrow B$, 则

- (1) 若 $\text{ran} f = B$, 则称 $f: A \rightarrow B$ 是**满射**的.
- (2) 若 $\forall y \in \text{ran} f$ 都存在唯一的 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$, 则称 $f: A \rightarrow B$ 是**单射**的.
- (3) 若 $f: A \rightarrow B$ 既是满射又是单射的, 则称 $f: A \rightarrow B$ 是**双射**的.

6. 函数合成与反函数

定理 5.1 设 f, g 是函数, 则 $f \circ g$ 也是函数, 且满足:

- (1) $\text{dom}(f \circ g) = \{x \mid x \in \text{dom} f \wedge f(x) \in \text{dom} g\}$.
- (2) $\forall x \in \text{dom}(f \circ g)$ 有 $f \circ g(x) = g(f(x))$.

推论 1 设 f, g, h 为函数, 则 $(f \circ g) \circ h$ 和 $f \circ (g \circ h)$ 都是函数, 且

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

推论 2 设 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$, 则 $f \circ g: A \rightarrow C$, 且 $\forall x \in A$ 都有 $f \circ g(x) = g(f(x))$.

定理 5.2 设 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$.

- (1) 如果 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ 都是满射的, 则 $f \circ g: A \rightarrow C$ 也是满射的.
- (2) 如果 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ 都是单射的, 则 $f \circ g: A \rightarrow C$ 也是单射的.
- (3) 如果 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ 都是双射的, 则 $f \circ g: A \rightarrow C$ 也是双射的.

定理 5.3 设 $f: A \rightarrow B$, 则 $f = f \circ I_B = I_A \circ f$.

推论 设 $f: A \rightarrow A$, 则 $f = f \circ I_A = I_A \circ f$.

定理 5.4 设 $f: A \rightarrow B$ 是双射的, 则 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 也是双射的.

对于双射函数 $f: A \rightarrow B$, 称 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 是它的**反函数**.

定理 5.5 设 $f: A \rightarrow B$ 是双射的, 则

$$f^{-1} \circ f = I_B, \quad f \circ f^{-1} = I_A$$

5.2 习 题

5.1 从下面各题的备选答案中选出一个正确的答案.

- (1) 设 $X = \{a, b, c, d\}, Y = \{1, 2, 3\}, f = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 3 \rangle\}$, 则 f 是
 - A. 从 X 到 Y 的二元关系, 但不是从 X 到 Y 的函数.
 - B. 从 X 到 Y 的函数, 但不是满射的, 也不是单射的.
 - C. 从 X 到 Y 的满射函数, 但不是单射的.
 - D. 从 X 到 Y 的双射函数.
- (2) 下面定义中的哪些 f 是从实数集 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的双射函数?
 - A. $f(x) = 1, x > 0; f(x) = -1, x \leq 0$.
 - B. $f(x) = \ln x, x > 0$.
 - C. $f(x) = 1/(x^3 + 8), x \neq -2$.
 - D. $f(x) = x^3 + 8$.

5.2 设 $f: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}$ 为整数集, $\forall \langle n, k \rangle \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}, f(\langle n, k \rangle) = n^2 k$, 求 f 的值域.

5.3 设 $A = \{a, b\}, B = \{0, 1, 2\}$, 计算 $B^A = \{f \mid f: A \rightarrow B\}$.

5.4 设 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 3x + 2$, 其中 $\mathbf{R}$ 为实数集, 计算以下各小题.

(1) $f(5)$. (2) $f^{-1}(\{-6\})$. (3) $f(\{1, 3\})$.

5.5 $A = \{a_1, a_2, a_3\}, B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}, \sigma$ 为从 A 到 B 的函数, $\sigma = \{\langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_4 \rangle, \langle a_3, b_2 \rangle\}$, 说明 σ 是否为单射、满射和双射的.

5.6 设 $A = \{a, b, c\}, R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle\} \cup I_A$ 是 A 上的等价关系, 设自然映射 $g: A \rightarrow A/R$, 求 $g(a)$.

5.7 设 $f: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}, f(\langle x, y \rangle) = x + y + 1$.

(1) 说明 f 是否为单射和满射的. 如果不是请说明理由.

(2) 令 $A = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbf{N} \text{ 且 } f(\langle x, y \rangle) = 3\}$, 求 A .

(3) 令 $B = \{f(\langle x, y \rangle) \mid x, y \in \{1, 2, 3\} \text{ 且 } x = y\}$, 求 B .

5.8 指出下列函数中哪些是双射的? 其中, $\mathbf{R}$ 是实数集, $\mathbf{N}$ 为自然数集.

(1) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - x$.

(2) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^3$.

(3) $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}, f(x) = x + 5$.

(4) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+, f(x) = 2^x, \mathbf{R}^+ = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge x > 0\}$.

(5) $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}, f(x) = 2x$.

(6) $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}, f(x) = |x|$.

5.9 设 $f: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, f(\langle n, k \rangle) = n^2 k$, 其中 $\mathbf{Z}$ 为整数集.

(1) f 是满射的吗? 为什么?

(2) f 是单射的吗? 为什么?

(3) 求 $f^{-1}(\{0\})$.

(4) 求 $f^{-1}(\mathbf{N})$.

(5) 求 $f(\mathbf{Z} \times \{1\})$.

5.10 设 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \mathbf{R}$ 为实数集, 对下面各个 f , 判断它是否为单射、满射或双射的. 如果它不是单射的, 给出 x_1 和 x_2 , 使得 $x_1 \neq x_2$ 但 $f(x_1) = f(x_2)$. 如果它不是满射的, 计算 $f(\mathbf{R})$.

(1) $f(x) = x^2$.

(2) $f(x) = E[x]$ ($E[x]$ 表示小于或等于 x 的最大整数).

5.11 试给出一个单射而非满射的函数.

5.12 设 $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} \times \mathbf{N}, f(n) = \langle n, n+1 \rangle$.

(1) 说明 f 是否为单射和满射的, 并说明理由.

(2) f 的反函数是否存在? 如果存在, 求出这个反函数.

(3) 求 $\text{ran} f$.

5.13 设 $f: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}, f(\langle x, y \rangle) = x + yi, i^2 = -1$, 说明 f 是否为单射、满射、双射的, 计算 $f^{-1}(\{4 + 2i\})$.

5.14 (1) 确定函数 $f: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}, f(\langle x, y \rangle) = xy$ 是否为单射、满射、双射的, 如果不是请说明理由. 计算 $f(\mathbf{N} \times \{1\}), f^{-1}(\{0\})$.

(2) 设 $f: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, $f(\langle x, y \rangle) = |x - y|$, 说明 f 有什么性质(单射、满射、双射的), 计算 $f(\mathbf{N} \times \{0\})$ 和 $f^{-1}(\{0\})$.

5.15 设 $R[t]$ 为 t 的实系数多项式的集合, $R_n[t] \subseteq R[t]$, $n \in \mathbf{N}$, $R_n[t]$ 为 t 的 n 次实系数多项式的集合. 定义函数 $f: R[t] \rightarrow R[t]$, $f(g(t)) = g^2(t)$. 求 $f(R_0[t])$, $f^{-1}(\{t^2 + 2t + 1\})$, $f^{-1}(f(\{t - 1, t^2 - 1\}))$.

5.16 设 $f: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, $f(\langle x, y \rangle) = x^2 + y^2$, 说明 f 是否为单射的、满射的. 计算 $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{0, 3\})$, $f^{-1}(\{1, 2\})$.

5.17 设 $\mathbf{R}$ 为实数集, $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - x + 2$, $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = x - 3$.

(1) 求 $f \circ g$, $g \circ f$.

(2) 如果 f 和 g 存在反函数, 求出它们的反函数.

5.18 设 $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$, $f(x) = x + 5$, 其中 $\mathbf{Z}$ 为整数集.

(1) 说明 f 是否为满射和单射的.

(2) f^{-1} 还是函数吗? 若是, 写出 f^{-1} 的函数表达式; 若不是, 请说出理由.

5.19 设 $\mathbf{R}$ 为实数集, 映射 σ 和 τ 满足 $\sigma: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $\sigma(x) = x^2 + 2x + 1$, $\tau: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $\tau(x) = x/2$.

(1) 求 $\tau \circ \sigma$ 和 $\sigma \circ \tau$.

(2) 对于 τ 和 σ 中的双射函数, 求反函数.

5.20 设 A 和 B 为有限集, 且 $|A| = m$, $|B| = n$, 如果从 A 到 B 存在单射、满射或双射函数, 那么 m 与 n 应该满足的条件是什么?

5.21 设 $\sigma: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $\sigma(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 3 \\ -2 & x < 3 \end{cases}$, $\tau: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $\tau(x) = x + 2$, 求 $\sigma \circ \tau$ 和 $\tau \circ \sigma$.

5.22 对于以下给定的每组集合 A 和 B , 构造从 A 到 B 的双射函数.

(1) $A = 2\mathbf{Z} = \{2k \mid k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \mathbf{N}$, 其中 $\mathbf{Z}$ 为整数集, $\mathbf{N}$ 为自然数集.

(2) $A = \mathbf{R}$, $B = (0, +\infty)$, 其中 $\mathbf{R}$ 为实数集.

(3) $A = P(\{a, b\})$, $B = \{0, 1\}^{\{a, b\}}$, 其中 A 为 $\{a, b\}$ 的幂集, $B = \{f \mid f: \{a, b\} \rightarrow \{0, 1\}\}$.

5.23 设 $f, g \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$, $\mathbf{N}$ 为自然数集, 且

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x=0, 1, 2, 3 \\ 0 & x=4 \\ x & x \geq 5 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \text{ 为偶数} \\ 3 & x \text{ 为奇数} \end{cases}$$

(1) 求 $f \circ g$, 并讨论它的性质(是否为单射或满射).

(2) 设 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 5, 6\}$, 求 A 在 $f \circ g$ 下的像 $f \circ g(A)$ 和 B 的完全原像 $(f \circ g)^{-1}(B)$.

5.24 设满射函数 $f: A \rightarrow A$, 且 $f \circ f = f$, 证明 $f = I_A$.

5.25 设 $f: A \rightarrow B$ 为单射函数, $G: P(A) \rightarrow P(B)$, $G(X)$ 为 X 在 f 下的像. 证明 G 也是单射的.

5.26 已知集合 A, B , 其中 $A \neq \emptyset$, $\langle B, \leq \rangle$ 是偏序集, 定义 B^A 上的二元关系 R 如下:

$$fRg \Leftrightarrow f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in A$$

(1) 证明 R 为 B^A 上的偏序.

(2) 给出 $\langle B^A, R \rangle$ 存在最大元的充分必要条件和最大元的一般形式.

5.27 $f: A \rightarrow B$ 导出的 A 上的等价关系 R 定义如下: $R = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in A \text{ 且 } f(x) = f(y)\}$. 设 $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 且

$$f_1(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$f_2(n) = 1 \quad n \text{ 为奇数}; f_2(n) = 0, n \text{ 为偶数}$$

$$f_3(n) = j \quad n = 3k + j, j = 0, 1, 2, k \in \mathbb{N}$$

$$f_4(n) = j \quad n = 6k + j, j = 0, 1, \dots, 5, k \in \mathbb{N}$$

R_i 为 f_i 导出的等价关系, $i = 1, 2, 3, 4$.

(1) 求商集 $\mathbb{N}/R_i, i = 1, 2, 3, 4$.

(2) 画出偏序集 $\langle \{\mathbb{N}/R_1, \mathbb{N}/R_2, \mathbb{N}/R_3, \mathbb{N}/R_4\}, \leq \rangle$ 的哈斯图, 其中 $\leq$ 为划分间的加细关系(见习题 4.31).

(3) 求 $H = \{10k \mid k \in \mathbb{N}\}$ 在 f_1, f_2, f_3, f_4 下的像.

5.28 证明定理 5.3: 设 $f: A \rightarrow B$, 则 $f = f \circ I_B = I_A \circ f$.

5.3 习题解答与分析

5.1 (1) A. (2) D.

说明: (1) 因为 $\text{dom} f = \{a, b, c\} \neq X$.

(2) A 中函数不是单射的, 因为 $f(2) = f(1)$; B 和 C 中函数的定义域不是实数集合 $\mathbb{R}$, 而是实数集合的真子集; D 中函数满足要求.

5.2 $\text{ran} f = \{n^2 k \mid n, k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$.

5.3 $B^A = \{f_1, f_2, \dots, f_9\}$, 其中:

$$f_1 = \{\langle a, 0 \rangle, \langle b, 0 \rangle\}, \quad f_2 = \{\langle a, 0 \rangle, \langle b, 1 \rangle\}, \quad f_3 = \{\langle a, 0 \rangle, \langle b, 2 \rangle\},$$

$$f_4 = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 0 \rangle\}, \quad f_5 = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle\}, \quad f_6 = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle\},$$

$$f_7 = \{\langle a, 2 \rangle, \langle b, 0 \rangle\}, \quad f_8 = \{\langle a, 2 \rangle, \langle b, 1 \rangle\}, \quad f_9 = \{\langle a, 2 \rangle, \langle b, 2 \rangle\}.$$

5.4 (1) $f(5) = 5^2 - 3 \times 5 + 2 = 12$.

(2) $f^{-1}(\{-6\}) = \{x \mid f(x) = -6\}$, 由于 $f(x)$ 的最小值是 $-1/4$, 因此 $f^{-1}(\{-6\}) = \emptyset$.

(3) $f(\{1, 3\}) = \{f(1), f(3)\} = \{0, 2\}$.

5.5 σ 是单射的, 不是满射和双射的.

5.6 $g(a) = [a] = \{a, b\}$.

5.7 (1) 不是单射的, 因为 $f(\langle 1, 2 \rangle) = f(\langle 2, 1 \rangle)$; 不是满射的, 因为 $0 \notin \text{ran} f$.

(2) 对于任意自然数 $x, y, \langle x, y \rangle \in A \Leftrightarrow x + y + 1 = 3 \Leftrightarrow x + y = 2$, 于是 $A = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 0, 2 \rangle\}$.

(3) 对于任意自然数 $x, y, f(\langle x, y \rangle) \in B \Leftrightarrow x = y = 1, 2, 3, B = \{1 + 1 + 1, 2 + 2 + 1, 3 + 3 + 1\} = \{3, 5, 7\}$.

5.8 (2)、(4)和(6)为双射的.

说明: 对于实数区间上的函数,如果在区间上是单调的,那么该函数是单射的.例如(2)和(4)中的函数是单调的,因此是单射的;(1)中的函数不是单调的,因此不是单射的.对于满射性的判断,则需要考虑 $\text{ran} f$.例如(3)中的函数, $0 \notin \text{ran} f$,因此不是满射的.对于(5)中的函数, $1 \notin \text{ran} f$.

5.9 (1) f 是满射的,当 $n=1$ 时, $f(\langle n, k \rangle) = k$, k 可以是任意整数.

(2) f 不是单射的,因为 $f(\langle 2, 1 \rangle) = f(\langle -2, 1 \rangle)$.

(3) $f^{-1}(\{0\}) = (\mathbf{Z} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbf{Z})$.

(4) $f^{-1}(\mathbf{N}) = \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$.

(5) $f(\mathbf{Z} \times \{1\}) = \{n^2 \mid n \in \mathbf{N}\}$.

5.10 (1) f 不是单射的,因为 $f(1) = f(-1)$; f 不是满射的, $\text{ran} f = \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$.

(2) f 不是单射的,因为 $f(0.2) = f(0.3) = 0$;不是满射的, $\text{ran} f = \mathbf{Z}$.

5.11 $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}, f(x) = 2x$.

说明: 对于有穷集合 A ,任何 A 上的单射函数,同时也是 A 上的满射函数,因此也是双射函数;为了构造集合上的单射而非满射的函数,或者构造集合上的满射而非单射的函数,只能选择无穷集合.最简单的无穷集合是自然数集合.

5.12 (1) f 是单射的,当 $m \neq n$ 时 $\langle n, n+1 \rangle \neq \langle m, m+1 \rangle$; f 不是满射的, $\langle 0, 0 \rangle \notin \text{ran} f$.

(2) f 不存在反函数.

(3) $\text{ran} f = \{\langle n, n+1 \rangle \mid n \in \mathbf{N}\}$.

5.13 f 是双射的,且 $f^{-1}(\{4+2i\}) = \{\langle 4, 2 \rangle\}$.

5.14 (1) f 不是单射的,因为 $f(\langle 1, 2 \rangle) = f(\langle 2, 1 \rangle)$; f 是满射的,不是双射的.

$$f(\mathbf{N} \times \{1\}) = \mathbf{N}, \quad f^{-1}(\{0\}) = (\mathbf{N} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbf{N})$$

(2) f 不是单射的,因为 $f(\langle 1, 2 \rangle) = f(\langle 2, 1 \rangle)$; f 是满射的,不是双射的.

$$f(\mathbf{N} \times \{0\}) = \mathbf{N}, \quad f^{-1}(\{0\}) = \{\langle n, n \rangle \mid n \in \mathbf{N}\}$$

5.15 $f(R_0[t]) = \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$,

$$f^{-1}(\{t^2 + 2t + 1\}) = \{t + 1, -t - 1\},$$

$$f^{-1}(f(\{t - 1, t^2 - 1\})) = \{t - 1, 1 - t, t^2 - 1, 1 - t^2\}.$$

5.16 f 不是单射的, f 不是满射的,则

$$f^{-1}(\{0\}) = \{\langle 0, 0 \rangle\}, \quad f(\{\langle 0, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}) = \{5, 9\}$$

5.17 (1) $f \circ g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f \circ g(x) = x^2 - x - 1, g \circ f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g \circ f(x) = x^2 - 7x + 14$.

(2) g 存在反函数, $g^{-1}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g^{-1}(x) = x + 3$.

5.18 (1) f 是满射的,也是单射的.

(2) f^{-1} 是函数, $f^{-1}: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, f^{-1}(x) = x - 5$.

5.19 (1) $\tau \circ \sigma: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \tau \circ \sigma(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1, \sigma \circ \tau: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \sigma \circ \tau(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$.

(2) $\tau^{-1}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \tau^{-1}(x) = 2x$.

5.20 存在从 A 到 B 的单射函数当且仅当 $m \leq n$; 存在从 A 到 B 的满射函数当且仅当 $m \geq n$; 存在从 A 到 B 的双射函数当且仅当 $m = n$.

$$\mathbf{5.21} \quad \sigma \circ \tau(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \geq 3 \\ 0 & x < 3 \end{cases}, \quad \tau \circ \sigma(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & x \geq 1 \\ -2 & x < 1 \end{cases}$$

注意: 对于分段函数,在求复合函数时,可能分段点会发生改变,如本题中的 $\tau \circ \sigma$ 的分段点不是 3,而是 1.

$$5.22 \quad (1) f: 2\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}, \quad f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ |x| - 1 & x < 0 \end{cases}.$$

$$(2) f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+, f(x) = e^x.$$

$$(3) f: P(\{a, b\}) \rightarrow \{0, 1\}^{\{a, b\}}, f(T) = \chi_T, \text{ 其中 } \chi_T \text{ 为 } T \text{ 的特征函数.}$$

说明: 如果构造两个实数区间之间的双射函数,一般可以选择直线方程或者其他适当的严格单调函数;如果构造一个集合到自然数集合的双射函数,一般将这个集合的元素排成一个线序,然后将最小元与 0 对应,后面的元素顺序与自然数建立对应关系.

$$5.23 \quad (1)$$

$$f \circ g(x) = \begin{cases} x/2 & x \geq 6, x \text{ 为偶数} \\ 3 & x \geq 5 \text{ 且 } x \text{ 为奇数}, x=0, 2 \\ 0 & x=4 \\ 1 & x=1 \\ 2 & x=3 \end{cases}$$

$f \circ g$ 不是单射的,是满射的.

$$(2) \quad f \circ g(A) = \{g(f(0)), g(f(1)), g(f(2))\} = \{1, 3\}$$

$$(f \circ g)^{-1}(B) = \{x \mid g(f(x)) \in \{0, 1, 5, 6\}\} = \{1, 4, 10, 12\}$$

5.24 任取 $y \in A$, 必有 $x \in A$ 使得 $\langle x, y \rangle \in f$, 由题设有 $\langle x, y \rangle \in f \circ f$, 因此存在 $z \in A$ 使得 $\langle x, z \rangle \in f$ 且 $\langle z, y \rangle \in f$. 由于 $f(x)$ 是唯一的, 因此 $y = z$, 从而 $\langle y, y \rangle \in f$. 由于 y 的任意性, 知 $I_A \subseteq f$.

任取 $\langle x, y \rangle \in f$, 根据上面的证明, $I_A \subseteq f$, 有 $\langle x, x \rangle \in f$, 因为 $f(x)$ 是唯一的, 从而得到 $x = y$. 这就证明了 $f \subseteq I_A$. 综合上述命题得证.

5.25 假设 $A_1, A_2 \in P(A)$, $A_1 \neq A_2$, 不妨设存在 x , 使得 $x \in A_1 \wedge x \notin A_2$, 因此 $f(x) \in f(A_1)$ 且由 f 的单射性知 $f(x) \notin f(A_2)$. 于是 $f(A_1) \neq f(A_2)$. 从而 $G(A_1) \neq G(A_2)$.

5.26 (1) 任取 $f \in B^A$, $\forall x \in A$, $f(x) = f(x)$, 由于偏序 $\leq$ 的自反性, $f(x) \leq f(x)$, 于是 fRf 成立. 对任意 $f, g \in B^A$, $\forall x \in A$, 则

$$fRg \wedge gRh \Rightarrow f(x) \leq g(x) \wedge g(x) \leq h(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$$

于是 $f = g$. 对任意 $f, g, h \in B^A$, $\forall x \in A$, 则

$$fRg \wedge gRh \Rightarrow f(x) \leq g(x) \wedge g(x) \leq h(x) \Rightarrow f(x) \leq h(x)$$

从而得到 fRh . 综合上述, R 具有自反、反对称、传递性, 是偏序关系.

(2) 充要条件是: 偏序集 $\langle B, \leq \rangle$ 存在最大元. 设 B 的最大元为 b , 那么 B^A 上的最大元为 $f: A \rightarrow B, f(x) = b$.

$$5.27 \quad (1) \quad \forall x, y \in \mathbf{N}, xR_i y \Leftrightarrow f_i(x) = f_i(y), i=1, 2, 3, 4, \text{ 于是}$$

$$xR_1 y \Leftrightarrow x = y$$

$$xR_2 y \Leftrightarrow x \text{ 与 } y \text{ 具有相同的奇偶性}$$

$$xR_3 y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{3}$$

$$xR_4 y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{6}$$

从而得到

$$\mathbf{N}/R_1 = \{\{n\} \mid n \in \mathbf{N}\}$$

$$\mathbf{N}/R_2 = \{2\mathbf{N}, \mathbf{N} - 2\mathbf{N}\}$$

$$\mathbf{N}/R_3 = \{3\mathbf{N}, 3\mathbf{N} + 1, 3\mathbf{N} + 2\}$$

$$\mathbf{N}/R_4 = \{6\mathbf{N}, 6\mathbf{N} + 1, 6\mathbf{N} + 2, 6\mathbf{N} + 3, 6\mathbf{N} + 4, 6\mathbf{N} + 5\}$$

其中

$$k\mathbf{N} = \{kn \mid n \in \mathbf{N}\}, k\mathbf{N} + i = \{kn + i \mid n \in \mathbf{N}\}$$

(2) 哈斯图如图 5.1 所示.

$$(3) f_1(H) = H,$$

$$f_2(H) = \{0\},$$

$$f_3(H) = \{0, 1, 2\},$$

$$f_4(H) = \{0, 2, 4\}.$$

5.28 任取 $\langle x, y \rangle$, 则

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle \in I_A \circ f &\Leftrightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in I_A \wedge \langle t, y \rangle \in f) \\ &\Rightarrow \langle x, x \rangle \in I_A \wedge \langle x, y \rangle \in f \Rightarrow \langle x, y \rangle \in f \end{aligned}$$

任取 $\langle x, y \rangle$, 则

$$\langle x, y \rangle \in f \Rightarrow \langle x, x \rangle \in I_A \wedge \langle x, y \rangle \in f \Rightarrow \langle x, y \rangle \in I_A \circ f$$

因此 $I_A \circ f = f$. 同理可证 $f \circ I_B = f$.

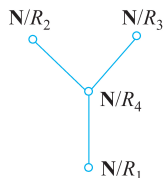


图 5.1