复变函数与积分变换

朱晓霞　张　蓓　杨贺菊　编著

清華大學出版社
北　京

内 容 简 介

本书根据教育部高等院校复变函数与积分变换课程的基本要求，依据工科数学《复变函数与积分变换教学大纲》，并结合本学科的发展趋势，在多年教学实践的基础上编写而成. 内容选取以"必需、够用"为度，严密性次之，旨在培养工科学生的数学素养，提高应用数学工具解决实际问题的能力.

全书共分 8 章，包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数理论及其应用、共形映射、Fourier 变换、Laplace 变换等.

本书适合高等院校工科各专业，尤其是自动控制、通信、电子信息、测控、机械工程、材料成型等专业作为教材，也可供工程技术人员阅读参考.

图书在版编目（CIP）数据

复变函数与积分变换/朱晓霞，张蓓，杨贺菊编著. —北京：清华大学出版社，2022.6
ISBN 978-7-302-60867-7

Ⅰ. ①复… Ⅱ. ①朱… ②张… ③杨… Ⅲ. ①复变函数－高等学校－教材 ②积分变换－高等学校－教材 Ⅳ. ①O174.5 ②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 083097 号

责任编辑：刘　颖
封面设计：傅瑞学
责任校对：王淑云
责任印制：曹婉颖

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-83470000　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市铭诚印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170mm×230mm　　**印　张**：11.5　　**字　　数**：228 千字
版　　次：2022 年 6 月第 1 版　　**印　　次**：2022 年 6 月第1 次印刷
定　　价：35.00 元

产品编号：097363-01

前言

FOREWORD

复变函数与积分变换是运用复变函数的理论解决微分方程和积分方程等实际问题的一门课程.在工科的教育教学体系中,本课程属于基础课程,在培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和科学计算能力等方面起着重要的作用.从历史上看,复变函数理论一直伴随着科学技术的发展,从实际需要中提炼数学理论并进行研究,并反过来促进科学技术的发展.通过学习大家会发现,复变函数除了其严谨且优美的理论体系外,在应用方面尤其有着独到的作用,它既能简化计算,又能体现明确的物理意义,在许多领域有着广泛的应用,如电气工程、通信与控制、信号分析与图像处理、机械系统、流体力学、地质勘探与地震预报等工程技术领域.通过本课程的学习,不仅可以掌握复变函数与积分变换的基础理论及工程技术中的常用数学方法,同时还为后续有关课程的学习奠定必要的数学基础.

本书基于有限的课时,对复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数理论及其应用、共形映射、Fourier 变换和 Laplace 变换等内容作了较为系统的介绍.在概念阐述上力求做到深入浅出,突出基本结论和方法的运用,在知识体系完整性的基础上,避免了一些太过专业的推导过程,尽量做到数学过程简单易懂,结论形式易于运用,形成了自己的特色.

在编写过程中突出了以下几个特点:

(1) 注重强调理论的产生背景和其中蕴含的思想方法,注重理论联系实际,数学过程力求精练.在不影响内容完整性和系统性的基础上,去掉了传统课本中的一些较难而又与应用没有紧密关联的知识点,使学生从枯燥的学习过程中摆脱出来,轻松入门.

(2) 对基本概念的引入尽可能联系实际,突出物理意义;基本结论的推导过程深入浅出、循序渐进;基本方法的阐述具有启发性,使学生能够举一反三,融会贯通.

(3) 例题和习题丰富,有利于学生掌握所学内容,提高分析问题和解决问题的能力.

本书第 1、3、4、5 章由张蓓编写,约 9.1 万字,第 2 章由杨贺菊编写,约 2.1 万字,

第 6、7、8 章由朱晓霞编写，约 9.5 万字，全书最后由杨贺菊统稿. 本书的编写得到清华大学出版社的大力支持，河北科技大学数学系全体任课教师也给予了很多帮助和指导，在此一并表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，错漏在所难免，恳请专家、同行和读者批评指正.

编　者

2021 年 5 月

目录

CONTENTS

第 1 章　复数与复变函数 ………… 1

1.1　复数及其代数运算 ………… 1
1.2　复数的几何表示 ………… 2
1.3　复数的乘幂与方根 ………… 6
1.4　平面点集与区域 ………… 9
1.5　复变函数及其连续性 ………… 11
习题 1 ………… 14

第 2 章　解析函数 ………… 17

2.1　复变函数的导数与微分 ………… 17
2.2　解析函数的概念和性质 ………… 19
2.3　复变量初等函数 ………… 22
习题 2 ………… 26

第 3 章　复变函数的积分 ………… 28

3.1　复变函数的积分及其性质 ………… 28
3.2　Cauchy 积分定理及其推广 ………… 31
3.3　Cauchy 积分公式和高阶导数公式 ………… 35
3.4　解析函数与调和函数 ………… 38
习题 3 ………… 41

第 4 章　级数 ………… 43

4.1　复数项级数 ………… 43
4.2　幂级数 ………… 45
4.3　Taylor 级数 ………… 48

4.4 Laurent 展式 …… 50
习题 4 …… 54

第 5 章 留数理论及其应用 …… 57

5.1 孤立奇点 …… 57
5.2 留数 …… 59
5.3 留数在定积分计算中的应用 …… 65
习题 5 …… 70

***第 6 章 共形映射** …… 72

6.1 共形映射的概念 …… 72
6.2 分式线性映射 …… 75
6.3 一些初等函数所构成的共形映射 …… 83
习题 6 …… 86

第 7 章 Fourier 变换 …… 87

7.1 Fourier 变换的概念 …… 88
7.2 单位脉冲函数及其 Fourier 变换 …… 95
7.3 Fourier 变换的性质 …… 100
7.4 卷积与相关函数 …… 108
7.5 Fourier 变换的应用 …… 115
习题 7 …… 121

第 8 章 Laplace 变换 …… 126

8.1 Laplace 变换的概念 …… 126
8.2 Laplace 变换的性质 …… 131
8.3 Laplace 逆变换 …… 139
8.4 卷积 …… 142
8.5 Laplace 变换的应用 …… 145
习题 8 …… 149

部分习题答案 …… 154

参考文献 …… 165

附录 A Fourier 变换简表 …… 166

附录 B Laplace 变换简表 …… 170

第1章

复数与复变函数

所谓复变函数，就是指自变量和因变量都是复数的函数，其主要研究对象是解析函数. 作为复变函数理论的开篇，本章将介绍复数与复平面、复数的基本运算、复平面上的区域、复变函数的极限与连续等基本概念.

1.1 复数及其代数运算

1. 复数

形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 或 $z=x+y\mathrm{i}$ 的数，称为**复数**，其中 i 满足 $\mathrm{i}^2=-1$，称为**虚数单位**，x 和 y 均是实数，分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**，记为 $x=\mathrm{Re}(z)$，$y=\mathrm{Im}(z)$. 在本书最后两章中，为与工程应用上的记号一致，我们也将虚数单位记为 j.

规定两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ **相等**当且仅当它们的实部和虚部分别对应相等，即 $x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$.

规定 $\mathrm{i}\cdot 0=0$，这样虚部为零的复数可以看作是一个实数，因此全体实数是全体复数的一部分. 另外，虚部不为零的复数称为**虚数**，实部为零但虚部不为零的复数称为**纯虚数**.

2. 复数的代数运算

设复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，则复数四则运算规定如下：

(1) $z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$；

(2) $z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$；

(3) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\ (z_2\neq 0)$.

容易验证，复数的四则运算满足与实数的四则运算相同的运算规律，运算过程相当于将式子中的 i 看成参数后进行计算整理.

3. 共轭复数

复数 $x+\mathrm{i}y$ 和 $x-\mathrm{i}y$ 称为一对互为**共轭的复数**，即复数的共轭是相互的. 复数 z

的共轭复数记为 $\bar{z}$，即 $\overline{x+\mathrm{i}y}=x-\mathrm{i}y$. 共轭复数具有如下性质：

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$；$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$；$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\,(z_2\neq 0)$；

(2) $\bar{\bar{z}}=z$；

(3) $z\bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$；

(4) $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$，$\mathrm{Im}(z)=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$.

例 1.1.1 设 $z_1=5-5\mathrm{i}$，$z_2=-3+4\mathrm{i}$，求 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 与 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解 $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{5-5\mathrm{i}}{-3+4\mathrm{i}}=\dfrac{(5-5\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})}{9+16}=\dfrac{-35-5\mathrm{i}}{25}=-\dfrac{7}{5}-\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$，从而

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=-\frac{7}{5}+\frac{1}{5}\mathrm{i}.$$

例 1.1.2 设 $z=-\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，求 $\mathrm{Re}(z)$，$\mathrm{Im}(z)$ 与 $z\bar{z}$.

解 $z=-\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}(-\mathrm{i})}-\dfrac{3\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\mathrm{i}-\left(-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，得

$$\mathrm{Re}(z)=\frac{3}{2},\quad \mathrm{Im}(z)=-\frac{1}{2},\quad z\bar{z}=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}.$$

例 1.1.3 设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，证明 $z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$.

证明
$$\begin{aligned}z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2&=(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)+(x_1-\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)\\&=(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1-x_1y_2)+\\&\quad(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}(-x_2y_1+x_1y_2)\\&=2(x_1x_2+y_1y_2)=2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2).\end{aligned}$$

或者，由 $\overline{\bar{z}_1z_2}=\bar{\bar{z}}_1\bar{z}_2=z_1\bar{z}_2$，得 $z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$.

1.2 复数的几何表示

1. 复平面

从复数的定义可以看出，一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 实际上可以由一对有序实数 (x,y) 唯一确定. 因此，如果把平面上的点 (x,y) 与复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 对应起来，就建立了平面上全部的点和全体复数之间的一一对应关系.

由于 x 轴上的点和 y 轴上非原点的点分别对应着实数和纯虚数，因而在复变函数中通常称 x 轴为**实轴**，称 y 轴为**虚轴**，这种表示复数 z 的平面称为**复平面**或者 **z 平面**.

引入复平面后，我们就在“数”与“点”之间建立了一一对应关系. 为了方便起见，今后不再区分“数”和“点”及“数集”和“点集”，例如，我们常说“点 $1+\mathrm{i}$”，“顶点为 z_1，z_2，z_3 的三角形”，等等.

如图 1.1 所示，在复平面上，从原点到点 $z=x+y\mathrm{i}$ 所引的向量与这个复数 z 也构成一一对应关系，这种对应关系使得复数的加减法和向量的加减法之间保持一致，如图 1.2 所示.

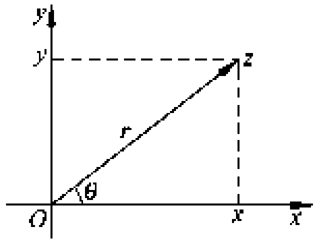

图　1.1

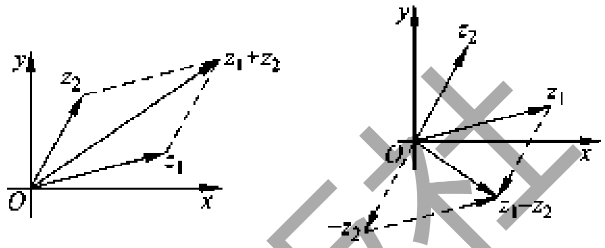

图　1.2

2. 复数的模与辐角

在图 1.1 中，复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 也可以借助于点 z 的极坐标 r 和 θ 来确定，向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的长度称为复数 z 的**模**，记为 $|z|$ 或 r，即 $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

显然，对于任意复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 均有

$$|x|\leqslant|z|,\quad |y|\leqslant|z|,\quad |z|\leqslant|x|+|y|.$$

另外，根据向量的运算及几何知识，可以得到下面两个重要的三角不等式：

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,$$

$$|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|.$$

由图 1.2 可见，$|z_1-z_2|$ 表示点 z_1 和 z_2 的距离，这个几何意义在复变函数特别是在积分理论中特别重要.

向量 $\overrightarrow{Oz}$ 与实轴正向间的夹角 θ 称为复数 z 的**辐角**，记为 $\theta=\mathrm{Arg}z$. 由于任一非零复数 z 均有无穷多个辐角，用 $\arg z$ 表示 z 落在 $(-\pi,\pi]$ 中的那个辐角，并称为复数 z 的**辐角主值**. 于是

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi,\quad k\in\mathbf{Z}.$$

注意，当 $z=0$ 时，其模为零，辐角不确定. 而当 $z\neq0$ 时，$\arg z$ 与 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 有如下关系：

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & z\ \text{位于第一、四象限},\\[2mm] \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & z\ \text{位于第二象限},\\[2mm] \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & z\ \text{位于第三象限}.\end{cases}$$

由直角坐标与极坐标的关系，我们还可以用复数的模与辐角来表示非零复数 z，即有

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),\tag{1.1}$$

称(1.1)式为复数的**三角表达式**. 再利用 Euler(欧拉)公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，又可得到

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\tag{1.2}$$

称(1.2)式为复数的**指数表达式**.

例 1.2.1 将下列复数化为三角表达式与指数表达式：

(1) $z=-\sqrt{12}-2\mathrm{i}$； (2) $z=\sin\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{5}$.

解 (1) 显然，$r=\sqrt{12+4}=4$，由于 z 在第三象限，则

$$\arg z=\arctan\left(\frac{-2}{-\sqrt{12}}\right)-\pi=\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}-\pi=-\frac{5}{6}\pi.$$

因此，z 的三角表达式和指数表达式分别为

$$z=4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right]=4\mathrm{e}^{-\frac{5}{6}\pi\mathrm{i}}.$$

(2) 显然，$r=1$. 又

$$\sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{3\pi}{10},\quad \cos\frac{\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{3\pi}{10}.$$

因此，z 的三角表达式和指数表达式分别为

$$z=\cos\frac{3\pi}{10}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{10}=\mathrm{e}^{\frac{3}{10}\pi\mathrm{i}}.$$

例 1.2.2 将 $z=1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\,(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 化为三角表达式.

解

$$\begin{aligned}z&=1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\\&=2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\\&=2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\theta}{2}\right)\\&=2\sin\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

3. 曲线的复数方程

很多平面曲线能用复数形式的方程来表示，而且形式较简洁，所体现的几何意义更直观.

例 1.2.3 将通过 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 和 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 两点的直线方程表达成复数形式.

解 由解析几何的知识，通过(x_1,y_1)和(x_2,y_2)两点的直线的参数方程为

$$\begin{cases} x=x_1+t(x_2-x_1), \\ y=y_1+t(y_2-y_1), \end{cases} \quad t\in\mathbf{R},$$

因此，它的复数形式的参数方程为

$$z=z_1+t(z_2-z_1), \quad t\in\mathbf{R}.$$

由此得知，连接$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$和$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$两点的直线段的参数方程为

$$z=z_1+t(z_2-z_1), \quad t\in[0,1].$$

例 1.2.4 求下列方程所表示的曲线：

(1) $|z+\mathrm{i}|=2$； (2) $|z-2\mathrm{i}|=|z+2|$； (3) $\mathrm{Im}(\mathrm{i}+\bar{z})=4$.

解 (1) 方程$|z+\mathrm{i}|=2$表示所有与点$-\mathrm{i}$的距离为2的点的轨迹，即以$-\mathrm{i}$为中心、2为半径的圆. 设$z=x+\mathrm{i}y$，则方程变为$x^2+(y+1)^2=4$.

(2) 方程$|z-2\mathrm{i}|=|z+2|$表示到点$2\mathrm{i}$和-2距离相等的点的轨迹，即为连接$2\mathrm{i}$和-2的线段的垂直平分线，设$z=x+\mathrm{i}y$，展开可得直角坐标方程为$y=-x$.

(3) 设$z=x+\mathrm{i}y$，则$\mathrm{i}+\bar{z}=x+(1-y)\mathrm{i}$，从而$\mathrm{Im}(\mathrm{i}+\bar{z})=1-y$，所以方程$\mathrm{Im}(\mathrm{i}+\bar{z})=4$所表示的曲线为$1-y=4$，即是平行于$x$轴的直线$y=-3$.

4. 复球面

复数还有一种几何表示法，它是借用地图制图学中将地球投影到平面上的测地投影法，建立起复平面与球面上的点之间的对应. 下面着重说明引入无穷远点的合理性.

取一个在原点O与z平面相切的球面，通过点O作一垂直于z平面的直线与球面交于另外一点N，N称为北极，O称为南极(如图1.3所示). 现在用直线段将N与z平面上一点z相连，此线段交球面于一点P，这样就建立起了球面上的点(不包括北极点N)与复平面上的点之间的一一对应关系.

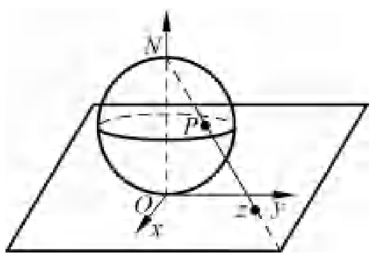

图 1.3

考虑z平面上一个以原点为中心的圆周C，在球面上对应的也是一个圆周Γ(即是纬线). 当圆周C的半径变大时，圆周Γ将逐渐趋于北极N. 因此，北极N可以看成是与z平面上的一个模为无穷大的假想点相对应，这个假想的**唯一**的点称为**无穷远点**，并记为∞. 复平面加上点∞后称为**扩充复平面**，与它对应的就是整个球面，称为**复球面**. 简单地说，复球面是扩充复平面的一个几何立体模型.

关于这个唯一的"新数"∞，应作如下几点规定：

(1) 运算$\infty\pm\infty$，$0\cdot\infty$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$\dfrac{0}{0}$无意义；

(2) 当 $a\neq\infty$ 时，$\dfrac{\infty}{a}=\infty$，$\dfrac{a}{\infty}=0$，$\infty\pm a=a\pm\infty=\infty$；

(3) 当 $b\neq 0$ 时，$\infty\cdot b=b\cdot\infty=\infty$，$\dfrac{b}{0}=\infty$；

(4) ∞ 的实部、虚部及辐角都无意义，$|\infty|=+\infty$；

(5) 复平面上每一条直线都通过点 ∞.

1.3 复数的乘幂与方根

1. 乘积与商

设有两个复数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，则

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1r_2(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\&=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)].\end{aligned}\tag{1.3}$$

于是

$$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,\quad \mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2.\tag{1.4}$$

此即为下面的定理.

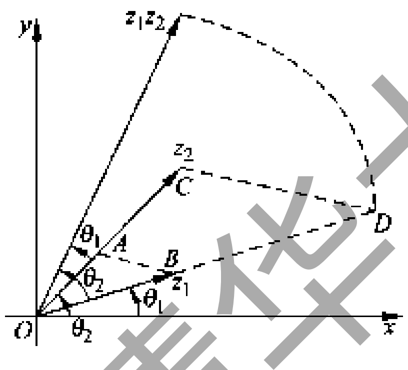

图 1.4

定理 1.3.1 两个复数的乘积的模等于它们的模的乘积，两个复数的乘积的辐角等于它们辐角的和.

如图 1.4 所示，当利用向量来表示复数时，乘积 z_1z_2 对应的向量由向量 z_1 逆时针旋转角度 $\mathrm{Arg}z_2$ 并伸长到 $|z_2|$ 倍所得到. 特别当 $|z_2|=1$ 时，乘法只相当于旋转. 例如，$\mathrm{i}z$ 相当于将 z 逆时针旋转 $90°$.

需要注意的是，公式(1.4)不能简单地写成 $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$. 例如，设 $z_1=-1$，$z_2=\mathrm{i}$，则 $z_1z_2=-\mathrm{i}$，$\arg z_1=\pi$，$\arg z_2=\dfrac{\pi}{2}$，而 $\arg(z_1z_2)=-\dfrac{\pi}{2}$，$\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2-2\pi$.

设有两个复数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，如果 $z_2\neq 0$，则 $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]$. 于是

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\quad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2.$$

此即为下面的定理.

定理 1.3.2 两个复数的商的模等于它们的模的商，两个复数的商的辐角等于它们辐角的差.

当利用向量来表示复数时，商$\dfrac{z_1}{z_2}$对应的向量由向量 z_1 顺时针旋转角度 $\mathrm{Arg}z_2$ 并缩短到原来的$\dfrac{1}{|z_2|}$得到.

复数的乘积和除法运算如果用指数形式来表达，则计算过程满足实数中的运算法则，即若 $z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$，$z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$，则 $z_1z_2=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$，$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}$.

例 1.3.1 已知正三角形的两个顶点为 $z_1=1$ 和 $z_2=2+\mathrm{i}$，求第三个顶点.

解 如图 1.5 所示，将表示 z_2-z_1 的向量绕 z_1 逆时针(或顺时针)旋转$\dfrac{\pi}{3}$就得到向量 z_3-z_1，于是

$$\begin{aligned}z_3-z_1&=(z_2-z_1)\mathrm{e}^{\pm\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}\\&=(1+\mathrm{i})\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\\&=\left(\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{i},\end{aligned}$$

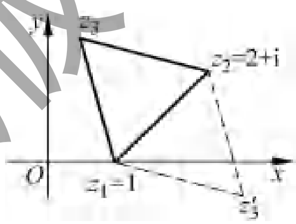

图 1.5

因此

$$z_3=\frac{3\mp\sqrt{3}}{2}+\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

2. 乘幂与开方

公式(1.3)可推广到多个复数的情况，特别地，当 $z_1=z_2=\cdots=z_n=z$ 时，有

$$z^n=(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta).\tag{1.5}$$

当 $r=1$ 时，就得到了 De Moivre(棣莫弗)公式

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta.\tag{1.6}$$

事实上，公式(1.6)对任意整数 n 都成立，请读者自行证明.

例 1.3.2 求 $\cos3\theta$ 及 $\sin3\theta$ 用 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 来表示的表达式.

解 由 De Moivre 公式，有

$$\cos3\theta+\mathrm{i}\sin3\theta=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^3=\cos^3\theta+3\mathrm{i}\cos^2\theta\sin\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-\mathrm{i}\sin^3\theta,$$

因此

$$\cos3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta,$$

$$\sin3\theta=-\sin^3\theta+3\cos^2\theta\sin\theta=-4\sin^3\theta+3\sin\theta.$$

我们知道，一个正实数的二次方根共有两个. 如果将正实数看成复数，则其二次方根至少也有两个. 实际上，读者后面将会看到，可以对任意复数求 n 次方根，而且

每一个非零的复数都有 n 个相异的 n 次方根.

设复数 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的 n 次方根为 $w=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$，则根据公式(1.6)，有

$$w^n=\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

于是

$$\rho^n=r,\quad n\varphi=\theta+2k\pi,\quad k\in\mathbf{Z},$$

故 $\rho=r^{\frac{1}{n}}$，$\varphi=\dfrac{\theta+2k\pi}{n}$，即

$$w=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\quad k\in\mathbf{Z}.$$

通过分析就可以得到 n 个相异的根

$$w_0=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{n}\right),$$

$$w_1=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right),$$

$$\vdots$$

$$w_{n-1}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right).$$

当 k 以其他整数代入时，这些根又重复出现，例如当 $k=n$ 时，有

$$w_n=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2n\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2n\pi}{n}\right)=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{n}\right)=w_0.$$

从几何上看，z 的 n 个 n 次方根作为顶点构成一个以原点为中心、$\sqrt[n]{|z|}$ 为半径的圆的内接正 n 边形.

例 1.3.3 化简 $(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n$.

解 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$,

$$1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

故得

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n&=(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)^n+(\sqrt{2})^n\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^n\\&=(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{n\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}\right)\\&=2^{\frac{n+2}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}.\end{aligned}$$

例 1.3.4 计算 $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$ 的值.

解 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$，则

$$\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right),\quad k=0,1,2,3,$$

即

$$w_0=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}\right),$$

$$w_1=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{16}\right),$$

$$w_2=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{16}\right),$$

$$w_3=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{25\pi}{16}\right).$$

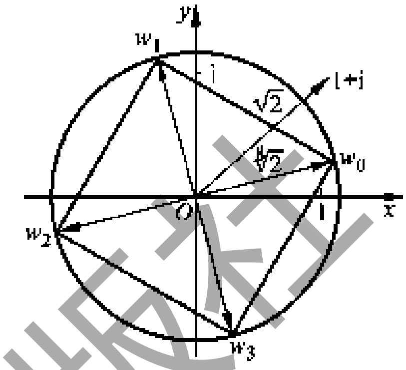

图　1.6

如图 1.6 所示,这四个根是内接于圆心在原点、半径为$\sqrt[8]{2}$的圆的正方形的四个顶点.

最后举例说明复数乘除法的一个应用.

例 1.3.5　求证:三个复数 z_1,z_2,z_3 成为一个等边三角形的三个顶点的充要条件是 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$.

证明　$\triangle z_1z_2z_3$ 是等边三角形的充要条件是向量 z_2-z_1 绕 z_1 旋转 $\pm\frac{\pi}{3}$ 即得到向量 z_3-z_1,也就是

$$z_3-z_1=(z_2-z_1)\mathrm{e}^{\pm\frac{\pi}{3}\mathrm{i}},$$

从而

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},$$

所以

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}-\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},$$

两边平方后整理即得

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1.$$

1.4　平面点集与区域

本节将讲述复平面上的一些点集,这对于复变函数理论的严密性非常重要.

1. 几个基本概念

定义 1.4.1　设 z_0 为复数,$\rho\in(0,+\infty)$由不等式$|z-z_0|<\rho$ 所确定的平面点

集(以下简称点集),是以 z_0 为中心、ρ 为半径的圆的内部,称为点 z_0 的 **ρ-邻域**,记为 $N_\rho(z_0)$;称 $0<|z-z_0|<\rho$ 所确定的点集为 z_0 的**去心 ρ-邻域**,记为 $N_\rho^\circ(z_0)$.

定义 1.4.2　设 E 为复平面上的一个点集,z_0 是复平面上一点. 若存在 z_0 的某个 ρ-邻域全在 E 中,则称 z_0 为 E 的**内点**;若点 z_0(不必属于 E)的任意去心邻域都含有属于 E 的点,则称 z_0 为 E 的**聚点**;若点 z_0 的任意邻域同时含有属于 E 的点和不属于 E 的点,则称 z_0 为 E 的**边界点**;点集 E 的所有边界点组成的集合称为 E 的**边界**.

定义 1.4.3　设 E 为复平面上的一个点集. 若 E 的所有点均为内点,则称 E 为**开集**;若 E 的每个聚点都属于 E,则称 E 为**闭集**.

定义 1.4.4　设 E 为复平面上的一个点集,若存在正实数 M,使得对于任意的 $z\in E$ 都有 $|z|\leqslant M$,则称 E 为**有界集**,否则称 E 为**无界集**.

2. 区域

定义 1.4.5　若非空点集 D 满足下列两个条件:

(1) D 为开集;

(2) D 是连通集,即 D 中任意两点均可用全在 D 中的折线连接起来.

则称 D 为**区域**.

定义 1.4.6　区域 D 加上它的边界 C 称为**闭域**,记为 $\overline{D}=D+C$.

例 1.4.1　不等式 $|z-z_0|<R$ 表示复平面上以点 z_0 为圆心、R 为半径的圆周内部,它是一个圆形区域(简称**圆域**);不等式 $|z-z_0|\leqslant R$ 表示以点 z_0 为中心、R 为半径的圆周及其内部,它是一个**闭圆域**. 显然,圆域和闭圆域都是有界集.

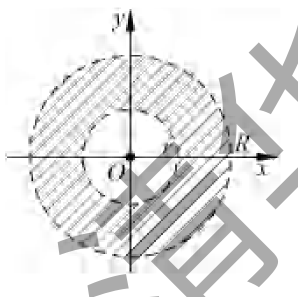

图　1.7

例 1.4.2　复平面以实轴为边界的两个无界区域是上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 和下半平面 $\mathrm{Im}(z)<0$;以虚轴为边界的两个无界区域是左半平面 $\mathrm{Re}(z)<0$ 和右半平面 $\mathrm{Re}(z)>0$.

例 1.4.3　如图 1.7 所示,不等式 $r<|z|<R$ 表示的点集对应一个**圆环区域**,其边界为 $|z|=r$ 与 $|z|=R$,圆环区域是有界区域.

对于有界集 E,定义它的直径为

$$d(E)=\sup\left\{|z-z'|\,\middle|\,z,z'\in E\right\}.$$

3. 曲线

定义 1.4.7　设 $x(t)$ 及 $y(t)$ 是两个关于 t 在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续实函数,则由方程

$$z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta \tag{1.7}$$

所确定的点集 C 称为 z 平面上的一条连续曲线,(1.7)式称为 C 的**参数方程**,$z(\alpha)$ 及 $z(\beta)$ 分别称为 C 的**起点**和**终点**. 对任意的 $t_1,t_2\in(\alpha,\beta)$,若 $t_1\neq t_2$ 时有 $z(t_1)=$

$z(t_2)$，则点 $z(t_1)$ 称为 C 的**重点**；无重点的连续曲线，称为**简单曲线**；满足 $z(\alpha)=z(\beta)$ 的简单曲线称为**简单闭曲线**（见图 1.8）. 若当 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 时，$x'(t)$ 及 $y'(t)$ 存在且连续又不全为零，则称 C 为**光滑（闭）曲线**. 由有限条光滑曲线连接而成的连续曲线称为**分段光滑曲线**.

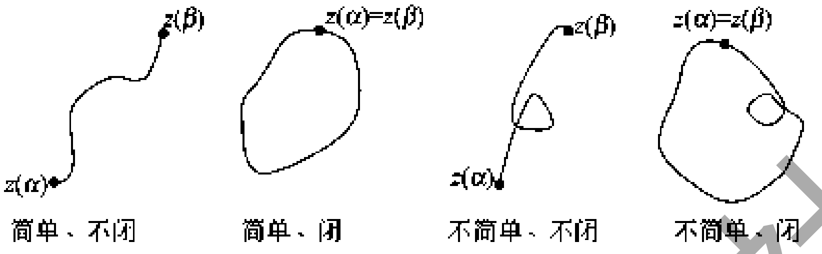

图 1.8

定义 1.4.8 设连续弧 AB 的参数方程为 $z=z(t)\,(t\in[\alpha,\beta])$. 任取实数列 $\{t_n\}$ 满足 $\alpha=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=\beta$，考虑 AB 弧上对应的点列

$$z_j=z(t_j),\quad j=0,1,2,\cdots,n,$$

将它们用一条折线 Q_n 依次连接起来，Q_n 的长度为

$$I_n=\sum_{j=1}^{n}|z(t_j)-z(t_{j-1})|.$$

如果对于所有数列 $\{z_j\}$，I_n 有上界，则 AB 弧称为**可求长的**，上确界 $L=\sup I_n$ 称为 AB 弧的**长度**.

任一简单闭曲线 C 可将 z 平面唯一地分为三个互不相交的点集 C、$I(C)$ 和 $E(C)$（如图 1.9 所示），$I(C)$ 是一个有界区域（称为 C 的内部），$E(C)$ 是一个无界区域（称为 C 的外部）. 对于简单闭曲线的方向，通常是这样来规定的：当观察者沿 C 绕行一周时，C 的内部始终在 C 的左方（或右方），即“逆时针”（或“顺时针”）方向，称为 C 的**正方向**（或**负方向**）.

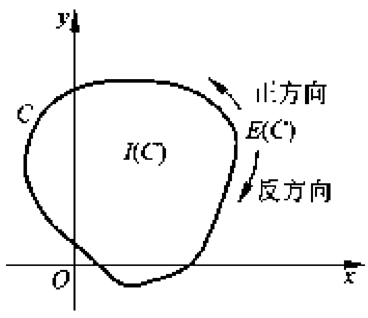

图 1.9

定义 1.4.9 设 D 为复平面上的区域，若 D 内任意一条简单闭曲线的内部全含于 D，则称 D 为**单连通区域**，不是单连通的区域称为**多连通区域**.

例 1.4.1 和例 1.4.2 所示的区域均为单连通区域，例 1.4.3 所示的区域为多连通区域.

1.5 复变函数及其连续性

1. 复变函数概念

定义 1.5.1 设 E 为复平面上的一个点集，若存在一个对应法则 f，使得 E 内

每一复数 z 均有唯一(或多个)确定的复数 w 与之对应,则称在 E 上确定了一个**单值**(或**多值**)函数 $w=f(z)(z\in E)$,E 称为函数 $w=f(z)$ 的**定义域**,w 值的全体组成的集合称为函数 $w=f(z)$ 的**值域**.

例如,$w=|z|$,$w=\bar{z}$ 及 $w=\dfrac{z+1}{z-1}(z\neq 1)$ 均为单值函数,而 $w=\sqrt[n]{z}$ 及 $w=\mathrm{Arg}z(z\neq 0)$ 则是多值函数.今后如无特别说明,所提到的函数均为单值函数.

设 $w=f(z)$ 是定义在点集 E 上的函数,若令 $z=x+\mathrm{i}y$,$w=u+\mathrm{i}v$,则 u,v 均为 x,y 的二元实函数,因此常把 $w=f(z)$ 写成

$$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y). \tag{1.8}$$

若 z 为指数形式 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,则 $w=f(z)$ 又可表为

$$w=p(r,\theta)+\mathrm{i}q(r,\theta), \tag{1.9}$$

其中 $p(r,\theta)$,$q(r,\theta)$ 均为 r,θ 的二元实函数.

例 1.5.1 设函数 $w=z^2+2$,当 $z=x+\mathrm{i}y$ 时,w 可以写成

$$w=x^2-y^2+2+2xy\mathrm{i},$$

因而

$$u(x,y)=x^2-y^2+2,\quad v(x,y)=2xy.$$

当 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 时,w 又可以写成

$$w=r^2(\cos 2\theta+\mathrm{i}\sin 2\theta)+2,$$

因而

$$p(r,\theta)=r^2\cos 2\theta+2,\quad q(r,\theta)=r^2\sin 2\theta.$$

2. 复变函数的几何特征

在高等数学中,常常把函数用几何图形表示出来,在研究函数的性质时,这些几何图形给我们很多直观的帮助.但是对于复变函数,却无法借助于同一个平面或同一个三维空间来表现其几何特征,因为由(1.8)式,$f(x+\mathrm{i}y)=u+\mathrm{i}v$,要描出 $w=f(z)$ 的图形,必须采用四维空间.为了克服这个困难,取两个复平面,分别称为 z 平面和 w 平面(在个别情形下,为了方便,也可将它们叠成一张平面).注意到,在复平面上不区分"点"和"数",也不再区分"点集"和"数集",我们把复变函数理解为两个复平面上的点集间的对应(映射或变换).具体地说,复变函数 $w=f(z)$ 给出了从 z 平面上的点集 E 到 w 平面上的点集 F 间的一个对应关系(图 1.10),与点 $z\in E$ 对应的点 w 称为点 z 的像点,而 z 就称为点 $w=f(z)$ 的原像.为了方便,以后也不再区分函

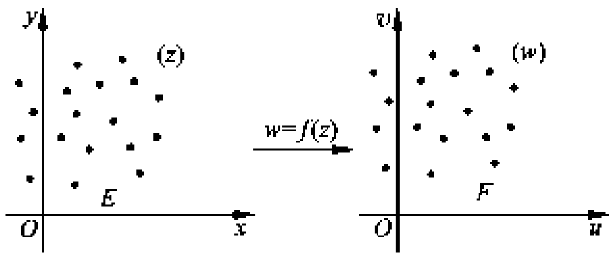

图 1.10

数、映射和变换等概念.

下面的例子将告诉我们如何在几何图形上描述复变函数.

例 1.5.2 设有函数 $w=z^2$,试问：它把 z 平面上的下列曲线分别变成 w 平面上的何种曲线？

(1) 以原点为圆心,以 2 为半径,在第一象限里的圆弧；

(2) 倾斜角 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 的直线$\left(\text{可以看成两条射线 } \arg z=\dfrac{\pi}{3} \text{ 及 } \arg z=-\dfrac{2\pi}{3}\right)$；

(3) 双曲线 $x^2-y^2=4$.

解 设 $z=x+\mathrm{i}y=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$,$w=u+\mathrm{i}v=R(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$,则

$$R=r^2,\quad \varphi=2\theta.$$

(1) 当 z 的模为 2,辐角由 0 变至 $\dfrac{\pi}{2}$ 时,对应的 w 的模为 4,辐角由 0 变至 π. 故在 w 平面上的对应图形为：以原点为圆心、以 4 为半径,在 u 轴上方的半圆周.

(2) 在 w 平面上的对应图形为射线 $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$.

(3) 因为 $w=z^2=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}$,故 $u=x^2-y^2$,$v=2xy$,所以 z 平面上的双曲线 $x^2-y^2=4$ 在 w 平面上的像为直线 $u=4$.

3. 复变函数的极限和连续性

定义 1.5.2 设 $w=f(z)$ 在 z_0 的去心邻域 $0<|z-z_0|<\rho$ 中有定义,若存在一复数 w_0,使得对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在相应的 $\delta>0(0<\delta<\rho)$,使当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时,有 $|f(z)-w_0|<\varepsilon$,则称 $f(z)$ 当 z 趋于 z_0 时有**极限** w_0,记为 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=w_0$.

我们可以这样来理解极限概念的几何意义：对于任意充分小的正数 ε,存在相应的 $\delta>0$,使得当 z 落入 z_0 的去心 δ-邻域时,相应的 $f(z)$ 就落入 w_0 的 ε-邻域. 这也就说明极限 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=w_0$ 与 z 趋于 z_0 的路径无关(如图 1.11 所示),而在高等数学中,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 中的 x 只能在 x 轴上沿着 x_0 的左右两侧趋于 x_0,这是复变函数与高等数学的重要区别之一.

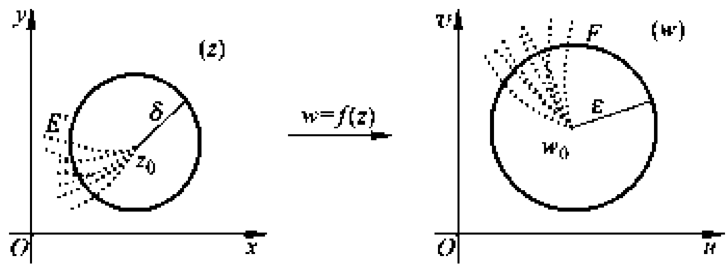

图 1.11

类似于高等数学中的内容,容易验证复变函数的极限具有以下性质:

(1) 若极限存在,则极限是唯一的;

(2) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 与 $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$ 都存在,则有

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B,$$

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)g(z)]=AB,$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A}{B}\,(B\neq 0).$$

另外,对于复变函数的极限与其实部和虚部的极限的关系问题,有下面的定理.

定理 1.5.1 设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在点 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处有定义,则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=a+\mathrm{i}b$ 的充要条件是 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=a$ 及 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=b$.

定义 1.5.3 如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$,则称 $\boldsymbol{f(z)}$**在** $\boldsymbol{z_0}$ **处连续**;如果 $f(z)$ 在点集 E 的每一点处都连续,则称 $\boldsymbol{f(z)}$**在** $\boldsymbol{E}$ **上连续**.

与高等数学中的连续函数性质相似,复变函数的连续性有如下性质:

(1) 若 $f(z)$,$g(z)$ 在 z_0 处连续,则其和、差、积、商(商的情形要求分母在 z_0 处不为零)在 z_0 处连续;

(2) 若函数 $\eta=f(z)$ 在 z_0 处连续,且 $f(z)$ 的值域 $f(E)$ 落在函数 $w=g(\eta)$ 的定义域内,并且函数 $w=g(\eta)$ 在 $f(z_0)$ 处连续,则复合函数 $w=g[f(z)]$ 在 z_0 处连续.

定理 1.5.2 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在点 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处连续的充要条件为 $u(x,y)$,$v(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处均连续.

例 1.5.3 设 $f(z)=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\dfrac{z}{\bar{z}}-\dfrac{\bar{z}}{z}\right)(z\neq 0)$,试证 $f(z)$ 在原点处无极限,从而在原点处不连续.

证明 设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$,则

$$f(z)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\,\frac{z^2-\bar{z}^2}{z\bar{z}}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\,\frac{(z+\bar{z})(z-\bar{z})}{r^2}=\sin 2\theta.$$

因此 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ 不存在,从而在原点处不连续.

习题 1

1. 求下列复数的实部、虚部、共轭复数、模与辐角:

(1) $\dfrac{1}{3+2\mathrm{i}}$; (2) $\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$; (3) $\dfrac{(3+4\mathrm{i})(2-5\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}$; (4) $\mathrm{i}^8-4\mathrm{i}^{21}+\mathrm{i}$.

2. 对任何 z,$z^2=|z|^2$ 是否成立? 如果是,请给出证明;如果不是,对哪些 z 才

成立？

3. 将下列复数化为三角表示式和指数表示式：

(1) $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$；　(2) $\dfrac{2\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}$；　(3) $1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$；　(4) $\dfrac{(\cos5\theta+\mathrm{i}\sin5\theta)^2}{(\cos3\theta-\mathrm{i}\sin3\theta)^3}$.

4. 将下列坐标公式写成复数的形式：

(1) 平移公式 $\begin{cases} x=x_1+a_1, \\ y=y_1+b_1; \end{cases}$　(2) 旋转公式 $\begin{cases} x=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha, \\ y=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha. \end{cases}$

5. 试证明，如果复数 $a+\mathrm{i}b$ 是实系数方程 $a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$ 的根，那么 $a-\mathrm{i}b$ 也是它的根.

6. 设 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，证明：$z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos n\theta$，$z^n-\dfrac{1}{z^n}=2\mathrm{i}\sin n\theta$.

7. 求下列各式的值：

(1) $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^5$；　(2) $(1+\mathrm{i})^6$；　(3) $\sqrt[6]{-1}$；　(4) $\sqrt[3]{1-\mathrm{i}}$.

8. (1)求方程 $z^3+8=0$ 的所有根；(2) 求微分方程 $y'''+8y=0$ 的一般解.

9. 指出下列各小题中点 z 的轨迹或所在范围：

(1) $|z-5|=6$；　(2) $|z+2\mathrm{i}|\geqslant1$；　(3) $\mathrm{Re}(z+2)=-1$；

(4) $\mathrm{Re}(\mathrm{i}\bar{z})=3$；　(5) $|z+\mathrm{i}|=|z-\mathrm{i}|$；　(6) $|z+3|+|z+1|=4$；

(7) $\mathrm{Im}(z)\leqslant2$；　(8) $\left|\dfrac{z-3}{z-2}\right|\geqslant1$；　(9) $\arg(z-\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{4}$.

10. 在复平面上描出下列不等式所确定的点集，并指明它是区域还是闭域，是有界的还是无界的，是单连通的还是多连通的.

(1) $\mathrm{Im}(z)>0$；　(2) $0<\mathrm{Re}(z)<1$；

(3) $|z-1|<|z+3|$；　(4) $-1<\arg z<-1+\pi$；

(5) $|z-1|<4|z+1|$；　(6) $|z-2|+|z+2|\leqslant6$；

(7) $|z-2|-|z+2|>1$；　(8) $z\bar{z}-(2+\mathrm{i})z-(2-\mathrm{i})\bar{z}\leqslant4$.

11. 在复平面上，证明下列结论：

(1) 直线方程可写成 $a\bar{z}+\bar{a}z=c$（$a\neq0$ 为复常数，c 为实常数）；

(2) 圆周方程可写成 $z\bar{z}+a\bar{z}+\bar{a}z+c=0$（$a$ 为复常数，c 为实常数）.

12. 将下列方程（t 为实参数）给出的曲线用一个实直角坐标方程表示：

(1) $z=t(1+\mathrm{i})$；　(2) $z=a\cos t+\mathrm{i}b\sin t$（$a,b$ 为实常数）；

(3) $z=t+\dfrac{\mathrm{i}}{t}$；　(4) $z=t^2+\dfrac{\mathrm{i}}{t^2}$；

(5) $z=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+b\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$；　(6) $z=\mathrm{e}^{\alpha t}$（$\alpha=a+b\mathrm{i}$ 为复数）.

13. 函数 $w=\dfrac{1}{z}$ 把下列 z 平面上的曲线映射成 w 平面上怎样的曲线？

(1) $x^2+y^2=4$； (2) $y=x$； (3) $x=1$； (4) $(x-1)^2+y^2=1$.

14. 证明$|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$,并说明其几何意义.

15. 设z_1,z_2,z_3三点满足$z_1+z_2+z_3=0$且$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$,试证明z_1,z_2,z_3构成一个以原点为圆心的正三角形的三个顶点.

16. 设复数z_1,z_2,z_3满足等式

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3},$$

证明$|z_2-z_1|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$,并说明这些等式的几何意义.

17. 设$f(z)$在点z_0处连续,则$\overline{f(z)}$和$|f(z)|$在点z_0处也连续.

18. 已知正方形$z_1z_2z_3z_4$的相对顶点$z_1=-\mathrm{i}$和$z_3=2+5\mathrm{i}$,求顶点z_2,z_4.

第2章

解析函数

解析函数是复变函数的主要研究对象，它在理论和实际问题中有着广泛的应用. 本章首先引入复变函数的导数与微分的概念及基本运算性质，然后讲解解析函数的概念及判别方法，最后介绍复变函数中常见的初等函数的定义和性质.

2.1　复变函数的导数与微分

1. 复变函数的导数

定义 2.1.1　设函数 $w=f(z)$ 的定义域为 D，$z_0\in D$，点 $z_0+\Delta z$ 在 D 内. 若极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

存在，则称 $\boldsymbol{f(z)}$ **在** $\boldsymbol{z_0}$ **处可导**，记作

$$\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0}=f'(z_0),$$

并称 $f'(z_0)$ 为 $\boldsymbol{f(z)}$ **在** $\boldsymbol{z_0}$ **处的导数.**

注意，Δz 趋于零的方式是任意的，定义中的极限值与 Δz 趋于零的路径方式无关.

如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处可导，则称 $\boldsymbol{f(z)}$ **在区域** $\boldsymbol{D}$ **内可导.**

例 2.1.1　求 $f(z)=z^2$ 的导数.

解　因为

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}(2z+\Delta z)=2z,$$

所以 $f'(z)=2z$.

例 2.1.2　求函数 $f(z)=x^2+2\mathrm{i}y^2$ 在点 $z=1+\mathrm{i}$ 处的导数.

解　因为

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(1+\mathrm{i}+\Delta z)-f(1+\mathrm{i})}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{2\Delta x+4\mathrm{i}\Delta y+(\Delta x)^2+2\mathrm{i}(\Delta y)^2}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y},$$

令 z 沿直线 $y-1=k(x-1)$ 趋于 $1+\mathrm{i}$，则 $\Delta y=k\Delta x$，那么上面的极限为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x+4\mathrm{i}\Delta y+(\Delta x)^2+2\mathrm{i}(\Delta y)^2}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=\frac{2+4\mathrm{i}k}{1+\mathrm{i}k},$$

等式右端的值随 k 改变而改变，即极限结果依赖于 z 趋于 $1+\mathrm{i}$ 的路径. 所以原极限不存在，即 $f(z)=x^2+2\mathrm{i}y^2$ 在点 $z=1+\mathrm{i}$ 处不可导.

例 2.1.3 讨论函数 $f(z)=\mathrm{Im}(z)$的可导性.

解 因为

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\mathrm{Im}(z+\Delta z)-\mathrm{Im}(z)}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta y}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y},$$

当 Δz 沿着 $y=kx$ 趋于 0 时，有

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta y}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{k\Delta x}{\Delta x+\mathrm{i}k\Delta x}=\frac{k}{1+\mathrm{i}k},$$

等式右端的值随 k 改变而改变，即极限结果依赖于 Δz 趋于零的路径. 所以原极限不存在，即函数 $f(z)=\mathrm{Im}(z)$在整个复平面上处处不可导.

2. 复变函数的可导与连续的关系

和高等数学中的结论一样，若函数 $f(z)$在 z_0 处可导，则 $f(z)$在 z_0 处一定连续，但反过来不成立.

例 2.1.4 证明 $f(z)=\bar{z}$ 处处连续，但处处不可导.

证明 $\mathrm{Re}(f(z))=x$，$\mathrm{Im}(f(z))=-y$ 在复平面上处处连续，所以 $f(z)=\bar{z}$ 处处连续. 但是

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{z+\Delta z}-\bar{z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z},$$

当 Δz 取实数趋于零时，上述极限为 1；而当 Δz 取纯虚数趋于零时，上述极限为 -1. 所以上述极限不存在，即函数 $f(z)=\bar{z}$ 在整个复平面上处处不可导.

3. 复变函数的求导法则

复变函数的导数定义，形式上与高等数学中一元函数的导数定义是一致的，高等数学中几乎所有的基本求导公式都可以推广到复变函数中来. 现将几个求导公式与法则罗列如下：

(1) $c'=0$ (c 是复常数)；

(2) $(z^n)'=nz^{n-1}$ (n 是正整数)；

(3) $[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z)$；

(4) $[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$；

(5) $\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]'=\dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}$ $(g(z)\neq 0)$;

(6) $\{f[g(z)]\}'=f'(w)g'(z)$ $(w=g(z))$;

(7) $f'(z)=\dfrac{1}{h'(w)}$,其中 $w=f(z)$ 与 $z=h(w)$ 是互为反函数的单值函数,且 $h'(w)\neq 0$.

4. 复变函数的微分

与导数的情形一样,复变函数的微分定义,形式上与一元实函数的微分定义完全一致.

定义 2.1.2 设函数 $w=f(z)$的定义域为 D,$z_0\in D$,点 $z_0+\Delta z$ 在 D 内.若存在复数 α 使得

$$\Delta w=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=\alpha\Delta z+\rho(\Delta z)\Delta z,$$

其中 $\rho(\Delta z)$是 $\Delta z\to 0$ 时的无穷小量,即$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0$,则称函数 $w=f(z)$在 z_0 处**可微**,$\alpha\Delta z$ 称为函数 $w=f(z)$在点 z_0 处的**微分**,记作 $\mathrm{d}w=\alpha\Delta z$.

类似于实变量函数,复变函数 $w=f(z)$在 z_0 处可导与在 z_0 处可微是等价的,并且 $\mathrm{d}w=f'(z_0)\Delta z=f'(z_0)\mathrm{d}z$.

若 $f(z)$在区域 D 内处处可微,则称 **$f(z)$在区域 D 内可微.**

2.2 解析函数的概念和性质

1. 复变函数可导的充要条件

定理 2.2.1 设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在区域 D 内有定义,则 $f(z)$在 D 内一点 $z=x+\mathrm{i}y$ 处可微的充要条件为

(1) $u(x,y)$与 $v(x,y)$在点(x,y)处可微;

(2) $u(x,y)$与 $v(x,y)$在点(x,y)处满足 Cauchy-Riemann(柯西-黎曼,C-R)方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

证明 必要性 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在 D 内一点 $z=x+\mathrm{i}y$ 处可微,则存在 $\delta>0$,使得当 $0<|\Delta z|<\delta$ 时,有

$$f(z+\Delta z)-f(z)=f'(z)\Delta z+\rho(\Delta z)\Delta z,$$

其中$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0$.

令 $f(z+\Delta z)-f(z)=\Delta u+\mathrm{i}\Delta v$,$f'(z)=a+\mathrm{i}b$,$\rho(\Delta z)=\rho_1+\mathrm{i}\rho_2$,则有

$$\begin{aligned}\Delta u+\mathrm{i}\Delta v&=(a+\mathrm{i}b)(\Delta x+\mathrm{i}\Delta y)+(\rho_1+\mathrm{i}\rho_2)(\Delta x+\mathrm{i}\Delta y)\\&=(a\Delta x-b\Delta y+\rho_1\Delta x-\rho_2\Delta y)+\mathrm{i}(b\Delta x+a\Delta y+\rho_2\Delta x+\rho_1\Delta y),\end{aligned}$$

所以

$$\Delta u=a\Delta x-b\Delta y+\rho_1\Delta x-\rho_2\Delta y,\quad \Delta v=b\Delta x+a\Delta y+\rho_2\Delta x+\rho_1\Delta y.$$

又因为$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0$,有$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\rho_1=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\rho_2=0$,所以 $u(x,y)$与 $v(x,y)$在点(x,y)处可微,并且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-b=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

充分性　因为 $u(x,y)$与 $v(x,y)$在点(x,y)处可微,则有

$$\begin{aligned}f(z+\Delta z)-f(z)&=u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)+\mathrm{i}[v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)]\\&=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y+\mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_3\Delta x+\varepsilon_4\Delta y\right)\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y+(\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_3)\Delta x+(\varepsilon_2+\mathrm{i}\varepsilon_4)\Delta y,\end{aligned}$$

其中$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon_k=0\ (k=1,2,3,4)$.

又因为 $u(x,y)$与 $v(x,y)$在(x,y)处满足 C-R 方程,所以

$$f(z+\Delta z)-f(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x+\mathrm{i}\Delta y)+(\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_3)\Delta x+(\varepsilon_2+\mathrm{i}\varepsilon_4)\Delta y.$$

因为$|\Delta x|\leqslant|\Delta z|$,$|\Delta y|\leqslant|\Delta z|$,所以$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{[(\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_3)\Delta x+(\varepsilon_2+\mathrm{i}\varepsilon_4)\Delta y]}{\Delta z}=0$. 因此

$$f(z+\Delta z)-f(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta z+\rho(\Delta z)\Delta z,$$

其中$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0$,所以 $f(z)$在 $z=x+\mathrm{i}y$ 处可微.

注　(1)由定理 2.2.1 的证明过程可知,若 $f(z)$在 $z=x+\mathrm{i}y$ 处可导,则

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\,\frac{\partial u}{\partial y}.$$

(2) 如果复变函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 中 u,v 在(x,y)处的一阶偏导存在且连续(因而 u 与 v 可微),并且满足 C-R 方程,那么 $f(z)$在 $z=x+\mathrm{i}y$ 处可微. 但如果去掉一阶偏导连续的条件,则 $f(z)$在 $z=x+\mathrm{i}y$ 处不一定可微,见例 2.2.2.

例 2.2.1　判断下列函数在何处可导.

(1) $w=\bar{z}$;　(2) $f(z)=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$;　(3) $w=z\mathrm{Re}(z)$.

解　(1) 因为 $u(x,y)=x$,$v(x,y)=-y$,则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-1,$$

不满足 C-R 方程，所以 $w=\bar{z}$ 在复平面上处处不可导.

(2) 因为 $u(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y$，$v(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y$，则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^x\cos y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\mathrm{e}^x\sin y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\mathrm{e}^x\sin y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\mathrm{e}^x\cos y,$$

四个偏导数均连续，并且处处满足 C-R 方程. 因此该函数在复平面上处处可导.

(3) 因为 $u(x,y)=x^2$，$v(x,y)=xy$，则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=x,$$

四个偏导数均连续，并且仅当 $x=y=0$ 时，它们才满足 C-R 方程. 因此该函数仅在 $z=0$ 处可导.

例 2.2.2 证明 $f(z)=\sqrt{|xy|}$ 在 $z=0$ 处一阶偏导存在并且满足 C-R 方程，但在 $z=0$ 处不可微.

证明 因为 $v(x,y)\equiv 0$，$u(x,y)=\sqrt{|xy|}$，所以

$$u_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x}=0=v_y(0,0),$$

$$u_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(0,\Delta y)-u(0,0)}{\Delta y}=0=-v_x(0,0).$$

但是由于

$$\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y},$$

因此当 Δz 沿着射线 $y=kx$ 趋于 0 时，$\dfrac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}$ 趋于 $\dfrac{\sqrt{|k|}}{1+k\mathrm{i}}$，它是一个与 k 有关的值，故极限不存在，即 $f(z)$ 在 $z=0$ 处不可微.

2. 解析函数的定义

定义 2.2.1 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 的某邻域内处处可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 处**解析**. 如果 $f(z)$ 在区域 D 内每一点处都解析，则称 $f(z)$ 在区域 D 内**解析**或称 $f(z)$ 是区域 D 内一个**解析函数**.

注 根据定义可知，函数在区域 D 内解析与在区域 D 内可导是等价的. 但是，函数在一点处解析与在一点处可导是不等价的，函数在一点处解析必在该点处可导，但函数在一点处可导，不一定在该点处解析，如例 2.2.1(3) 中的函数 $w=z\mathrm{Re}(z)$.

定义 2.2.2 若函数 $f(z)$ 在 z_0 不解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的**奇点**.

函数的奇点包含以下几种基本情形：

(1) 函数 $f(z)$ 在 z_0 的某去心邻域内处处有定义，但是在 z_0 处无定义；

(2) 函数 $f(z)$在 z_0 处有定义,但是不可导;

(3) 函数 $f(z)$在 z_0 处可导,但是在 z_0 的任意邻域内总有不可导的点.

例 2.2.3 研究函数 $w=\dfrac{1}{z}$的解析性.

解 因为 $w=\dfrac{1}{z}=\dfrac{x}{x^2+y^2}-\mathrm{i}\,\dfrac{y}{x^2+y^2}=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$,所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

当$(x,y)\neq(0,0)$时,偏导函数都连续且满足 C-R 方程,所以 $w=\dfrac{1}{z}$在复平面内除 $z=0$ 外处处可导,所以 w 在复平面内除 $z=0$ 外处处解析,$z=0$ 是它的奇点.

例 2.2.4 讨论函数 $f(z)=x^2-\mathrm{i}y$ 的可微性和解析性.

解 因为 $u(x,y)=x^2$,$v(x,y)=-y$,所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-1.$$

因此当且仅当 $x=-\dfrac{1}{2}$时,偏导函数连续且满足 C-R 方程,从而函数 $f(z)$仅在直线 $x=-\dfrac{1}{2}$上可导,但在复平面上处处不解析.

3. 解析函数的性质及判定

由函数解析与可导的关系可得以下结论:

(1) 在区域 D 内解析的两个函数 $f(z)$与 $g(z)$的和、差、积、商(除去分母为零的点)在 D 内解析.

(2) 设函数 $h=g(z)$在平面上的区域 D 内解析,函数 $w=f(h)$在 h 平面上的区域G 内解析. 如果对 D 内的每一个点 z,函数 $g(z)$的对应值 h 都属于G,那么复合函数 $w=f[g(z)]$在 D 内解析,并且$\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}h}\cdot\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z}$.

(3) 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在定义域 D 内解析的充要条件是 $u(x,y)$与 $v(x,y)$在 D 内可微,并且满足 C-R 方程.

2.3 复变量初等函数

本节将实变量的初等函数推广为复变量的初等函数,使推广后的复变量初等函数当自变量 z 取实数时与相应的实变量初等函数一致,并讨论经过推广后的复变量

初等函数的性质.

1. 指数函数

定义 2.3.1 设 $z=x+\mathrm{i}y$,则定义复变量的指数函数为

$$\exp z=\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y).$$

下面给出指数函数的性质.

(1) 当 $y=0$ 时,$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^x$,与实变初等函数一致;当 $x=0$ 时,可以得到欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=\cos y+\mathrm{i}\sin y$.

(2) 由例 2.2.1(2)知,函数 $w=\mathrm{e}^z$ 在复平面上处处解析,并且$(\mathrm{e}^z)'=\mathrm{e}^z$.

(3) $\mathrm{e}^z\neq 0$,$|\mathrm{e}^z|=\mathrm{e}^x>0$,$\mathrm{Arg}\,\mathrm{e}^z=y+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

(4) $\mathrm{e}^{z_1}\cdot\mathrm{e}^{z_2}=\mathrm{e}^{z_1+z_2}$,$\dfrac{\mathrm{e}^{z_1}}{\mathrm{e}^{z_2}}=\mathrm{e}^{z_1-z_2}$.

(5) e^z 是以 $2\pi\mathrm{i}$ 为基本周期的周期函数(这是实变量指数函数所没有的性质).事实上,$\mathrm{e}^{z+2k\pi\mathrm{i}}=\mathrm{e}^z\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}}=\mathrm{e}^z(\cos 2k\pi+\mathrm{i}\sin 2k\pi)=\mathrm{e}^z$.

例 2.3.1 试用例子说明$(\mathrm{e}^{z_1})^{z_2}=\mathrm{e}^{z_1z_2}$ 可能不成立.

解 设 $z_1=-\pi\mathrm{i}$,$z_2=\dfrac{1}{2}$,则

$$\mathrm{e}^{z_1z_2}=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}=-\mathrm{i},\quad (\mathrm{e}^{z_1})^{z_2}=(\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}})^{\frac{1}{2}}=(-1)^{\frac{1}{2}}=\pm\mathrm{i},$$

所以$(\mathrm{e}^{z_1})^{z_2}\neq\mathrm{e}^{z_1z_2}$.

2. 对数函数

定义 2.3.2 把指数函数 $w=\mathrm{e}^z$ 的反函数称为**对数函数**,记作 $w=\mathrm{Ln}z$.

接下来求解对数函数的具体表达形式,即求满足方程 $z=\mathrm{e}^w$ 的 w.

设 $w=u+\mathrm{i}v$,$z=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{Arg}z}$,则由方程 $z=\mathrm{e}^w$ 可得,$|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{Arg}z}=\mathrm{e}^u\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}v}$,所以

$$|z|=\mathrm{e}^u,\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{Arg}z}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}v}.$$

从而有

$$u=\ln|z|,\quad v=\mathrm{Arg}z,$$

即

$$\mathrm{Ln}z=\ln|z|+\mathrm{i}\mathrm{Arg}z.$$

由于 $\mathrm{Arg}z$ 为多值函数,$w=\mathrm{Ln}z$ 也为多值函数,并且每两个值相差 $2\pi\mathrm{i}$ 的整数倍,即

$$\mathrm{Ln}z=\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi),\quad k\in\mathbf{Z}.$$

每个 $k\in\mathbf{Z}$ 对应一个单值函数,称为 $\mathrm{Ln}z$ 的**第 k 个分支**;称 $k=0$ 对应的分支 $\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z$ 为 $\mathrm{Ln}z$ 的主值.

例 2.3.2 计算下列函数的值:(1)$\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}$;(2)$\mathrm{Ln}1$.

解 (1) $\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}=\ln|\mathrm{i}|+\mathrm{i}\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)=\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)\pi\mathrm{i}\ (k\in\mathbf{Z})$.

(2) $\text{Ln}1=\ln 1+\text{i}2k\pi=2k\pi\text{i}\ (k\in\mathbf{Z})$.

容易验证对数函数有下列性质：

(1) 当 $z=x>0$ 时，$\text{Ln}z$ 的主值 $\ln z=\ln x$，这与实变量对数函数的定义一致；

(2) $w=\text{Ln}z$ 的每个单值分支在除原点和负实轴外的区域内解析，并且 $(\text{Ln}z)'=\dfrac{1}{z}$；

(3) 由定义知，$\text{e}^{\text{Ln}z}=z$；

(4) $\text{Ln}(z_1z_2)=\text{Ln}z_1+\text{Ln}z_2$，　$\text{Ln}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\text{Ln}z_1-\text{Ln}z_2$.

注　性质(4)中的等式应理解为两端可能取到的函数值的全体是相同的．但是等式 $\text{Ln}z^n=n\text{Ln}z$ 和 $\text{Ln}\sqrt[n]{z}=\dfrac{1}{n}\text{Ln}z$ 不再成立.

3. 幂函数

定义 2.3.3　设 a 是任意的复数，定义**幂函数**为

$$w=z^a=\text{e}^{a\text{Ln}z}.$$

注　(1) 由于 $\text{Ln}z=\ln|z|+\text{i}(\arg z+2k\pi)$ 是多值的，因而 z^a 也是多值的.

(2) 当 $a=n$ 为整数时，由于

$$z^n=\text{e}^{n\text{Ln}z}=\text{e}^{n[\ln|z|+\text{i}(\arg z+2k\pi)]}=\text{e}^{n(\ln|z|+\text{i}\arg z)+2nk\pi\text{i}}=\text{e}^{n\ln z},$$

所以 z^n 是单值的，这与第 1 章讲过的复数的 n 次幂一致.

当 $a=\dfrac{1}{n}$（n 为正整数）时，由于

$$z^{\frac{1}{n}}=\text{e}^{\frac{1}{n}\ln|z|+\text{i}\frac{1}{n}(\arg z+2k\pi)}=\text{e}^{\frac{1}{n}\ln|z|}\left[\cos\frac{1}{n}(\arg z+2k\pi)+\text{i}\sin\frac{1}{n}(\arg z+2k\pi)\right],$$

所以 $z^{\frac{1}{n}}$ 具有 n 个值，即当 $k=0,1,\cdots,n-1$ 时相应的各个值，这也与第 1 章讲过的复数的 n 次方根一致．除此而外，一般而论，z^a 具有无穷多个值.

例 2.3.3　求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^{i} 的值.

解　$1^{\sqrt{2}}=\text{e}^{\sqrt{2}\text{Ln}1}=\text{e}^{2k\pi\text{i}\sqrt{2}}=\cos(2k\pi\sqrt{2})+\text{i}\sin(2k\pi\sqrt{2})\ (k\in\mathbf{Z})$.

$\text{i}^{\text{i}}=\text{e}^{\text{i}\text{Ln}\text{i}}=\text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{2}\text{i}+2k\pi\text{i}\right)}=\text{e}^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}\ (k\in\mathbf{Z})$.

下面讨论幂函数 $w=z^a$ 的解析性.

(1) z^n 在复平面内是单值解析函数，2.1 节中已给出了它的求导公式.

(2) 幂函数 $z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z}$ 是一个多值函数，具有 n 个分支．由于对数函数 $\text{Ln}z$ 在区域 $-\pi<\arg z<\pi$ 内可以分解为无穷多个单值解析分支，所以在区域 $-\pi<\arg z<\pi$ 内 $z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z}$ 也可以相应地分解为 n 个单值连续分支，这些分支在 $-\pi<\arg z<\pi$ 内是解析的，并且 $(z^{\frac{1}{n}})'=(\sqrt[n]{z})'=(\text{e}^{\frac{1}{n}\text{Ln}z})'=\dfrac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}$.