



第 3 章

拉格朗日定理：拉格朗日

在高次方程求解问题上,虽然牛顿、欧拉都直接或间接地做了工作,但是他们都没有投入太多的精力专门对此问题进行研究。第一位对此问题展开深入研究,并做出重要贡献的大数学家是法国的拉格朗日。



拉格朗日(1736—1813)

拉格朗日 1736 年出生于意大利都灵,是法国和意大利混血儿。父亲是法国陆军骑兵里的一名军官,后由于经商破产,家道中落。拉格朗日开始学习欧几里得几何学时,并没有对数学显示出特别的兴趣。后来,他被牛顿的朋友哈雷的一篇介绍微积分的短文所吸引,并迅速自学掌握了那时的现代分析。19 岁时,拉格朗日创立了变分法,并当上了都灵皇家炮兵学校的教授。拉格朗日 23 岁时将解决等周问题的变分法写信告诉欧拉。欧拉不仅私下回信高度赞誉其工作,而且有意将自己论文的发表安排在拉格朗日论文发表之后。不仅如此,欧拉还在其发表的论文中,特别说明拉格朗日的变分法是如何帮助其解决了困难。由于欧拉的极力推荐,23 岁的拉格朗日当选为柏林科学院的外籍院士。1767 年受腓特烈大帝的邀请,拉格朗日接替欧拉出任柏林科学院数学所所长,开始了他一生科学研究的鼎盛时期。在此期间,他完成了《分析力学》一书,这是牛顿之后的一部重要的经典力学著作。拉格朗日书中运用变分原理和分析的方法,建立起完整和谐的力学体系,使力学分析化了。他在序言中宣称:力学已经成为分析的一个分支。1786 年腓特烈大帝去世,拉格朗日接受了法王路易十六的邀请,离开柏林,定居巴黎,直至 1813 年去世。

或许是年轻时的过度用功,影响了拉格朗日的身体。中年以后,他对数学的热情锐减。51岁时,拉格朗日厌倦了与数学有关的一切,转向研究他认为自己真正感兴趣的东西:玄学、人类思想的发展、宗教史、语言、医学、植物学等。他认为数学已经结束或者至少进入了一个衰落期。

还有一则有意思的事。与高斯将“数论比作数学上的明珠”不同,拉格朗日则认为“算术研究是让他最费脑筋的,也许是最没有价值的研究”。

拉格朗日不仅是一位一流的数学家,而且善于与人相处。他不仅深得腓特烈大帝的喜欢,而且能与拿破仑谈论哲学问题和数学在现代国家中的作用,以至于拿破仑称其为数学科学高耸的金字塔,并让他当上了参议员、帝国伯爵,授予他荣誉军团二级勋章。为了纪念拉格朗日,法国在1958年发行了一张纪念邮票。



法国 1958 年发行的邮票

拉格朗日在 1770 年左右达到其数学研究的高峰期,对高次方程求解展开了深入研究。拉格朗日的思路是:系统地梳理以往高次方程求解方法,看看能否总结出一个统一的方法。拉格朗日显然了解,欧拉已经形式上给出了 n 次方程的通解形式

$$A + B \sqrt[n]{\alpha} + C (\sqrt[n]{\alpha})^2 + D (\sqrt[n]{\alpha})^3 + \cdots$$

问题在于能否以及如何找到其中关键无理项 $\sqrt[n]{\alpha}$ 的表达形式。拉格朗日引入了新的思想去研究这个问题：不是直接去找此无理项 $\sqrt[n]{\alpha}$ 的关于方程系数的表达式，而是寻找此项与方程根的关系，以及这个关系在方程根置换下的变化情况。拉格朗日通过研究以往的高次方程求解方法，发现此无理项可以由方程的 n 个根有理表达出来（这里有理表达是指通过加、减、乘、除运算），即

$$\sqrt[n]{\alpha} = u(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (1)$$

这里需要说明的是，拉格朗日只是通过研究二次、三次、四次方程的求解发现了这个关系，但并没有给出严格证明，严格证明是由第7章要介绍的年轻数学家阿贝尔完成的。拉格朗日进一步指出这个表达式 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 就是方程求解中所用的变换式，而且这个变换式在根置换下的变化形式数目与方程能否降阶，能否求解直接相关。为了把这个思想说得更清楚，下面以三元多项式为例，假设 $u(x_1, x_2, x_3)$ 为如下形式：

$$u(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad (a)$$

如果将 (x_1, x_2, x_3) 置换为 (x_1, x_3, x_2) ，简记为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

则 $u(x_1, x_2, x_3)$ 就变为下列形式

$$u(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_3 + 3x_2 \quad (\text{b})$$

很明显,形式(a)和形式(b)是不同的。因为 (x_1, x_2, x_3) 有 $3! = 6$ 种置换,1种是恒等置换,其他5种置换 $u(x_1, x_2, x_3)$ 都发生了变化,因此 $u(x_1, x_2, x_3)$ 在所有置换下有6个形式。但是,如果 $u(x_1, x_2, x_3)$ 是下列形式

$$u(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_3$$

则 (x_1, x_2, x_3) 在所有置换下只有3个形式。因为这个多项式是关于 x_1 和 x_2 对称的,它们的置换不会带来多项式的变化,因此对于一般多元多项式 $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$,在所有置换下的变化形式个数,反映了多元多项式的对称程度。我们知道,多元未知数序列 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 有 $n!$ 种置换,如果 $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 没有任何对称性,那么每种置换都会使 $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 发生形式变化,因此有 $n!$ 个变化形式。但是拉格朗日发现,引入无理项的有理表达式(1)的 n 次方,即 $u^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 往往没有 $n!$ 个形式,这是因为其中某些置换下 $u^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是完全等价的形式。这正是通过引入变换 $y = u^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$,原方程能达到降次求解的原因。而且,更为重要的是,拉格朗日还进一步发现,在 $n!$ 个置换下所获得的 $u^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 不同形式数 m 一定能整除 $n!$,这便是著名的拉格朗日定理。

下面以三次方程为例,来具体说明上述拉格朗日的发现。考虑如下三次方程

$$x^3 + px + q = 0$$

我们知道此方程的3个根为

$$\begin{aligned}x_1 &= \sqrt[3]{r_1} + \sqrt[3]{r_2} \\x_2 &= \omega \sqrt[3]{r_1} + \omega^2 \sqrt[3]{r_2} \\x_3 &= \omega^2 \sqrt[3]{r_1} + \omega \sqrt[3]{r_2}\end{aligned}$$

其中 ω 是三次单位根, r_1, r_2 是下面二次方程的根

$$r^2 + qr - \frac{p}{27} = 0$$

很容易验证

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{r_1} &= \frac{x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3}{3} \\ \sqrt[3]{r_2} &= \frac{x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3}{3}\end{aligned}$$

考虑表达式 $x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3$ 在 (x_1, x_2, x_3) 所有置换下的形式。它们分别是

$$\begin{aligned}u_1 &= x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 \\ u_2 &= x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3 \\ u_3 &= \omega x_1 + \omega^2 x_2 + x_3 \\ u_4 &= \omega x_1 + x_2 + \omega^2 x_3 \\ u_5 &= \omega^2 x_1 + x_2 + \omega x_3 \\ u_6 &= \omega^2 x_1 + \omega x_2 + x_3\end{aligned}$$

显然, 这 6 种形式是不同的, 但是如果考虑 $(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3$, 那么就只有 2 个不同形式, 因为

$$\begin{aligned}
u_4^3 &= (\omega x_1 + x_2 + \omega^2 x_3)^3 = [\omega(x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)]^3 \\
&= (x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)^3 = u_2^3 \\
u_6^3 &= (\omega^2 x_1 + \omega x_2 + x_3)^3 = [\omega^2(x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)]^3 \\
&= (x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)^3 = u_2^3 \\
u_3^3 &= (\omega x_1 + \omega^2 x_2 + x_3)^3 = [\omega(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)]^3 \\
&= (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3 = u_1^3 \\
u_5^3 &= (\omega^2 x_1 + x_2 + \omega x_3)^3 = [\omega^2(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)]^3 \\
&= (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3 = u_1^3
\end{aligned}$$

正因如此,原方程便可以降次求解了。为了更清晰地了解这一过程,考虑如下以 $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ 为根的高次方程:

$$(y - u_1)(y - u_2)(y - u_3)(y - u_4)(y - u_5)(y - u_6) = 0 \quad (2)$$

方程左边 6 个因子可分成两组: 一组为 $(y - u_1), (y - u_3), (y - u_5)$; 另一组为 $(y - u_2), (y - u_4), (y - u_6)$ 。前一组 3 个因子相乘兼并成 $(y - u_1)(y - u_3)(y - u_5) = y^3 - u_1^3$, 后一组 3 个因子相乘兼并成 $(y - u_2)(y - u_4)(y - u_6) = y^3 - u_2^3$ 。因此令 $z = y^3$, 方程(2)就变成一个关于 z 的二次方程, 即

$$(z - u_1^3)(z - u_2^3) = 0 \quad (3)$$

又因为方程(2)中的 $u_i (i=1, 2, \dots, 6)$ 覆盖了表达式 $x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3$ 在 (x_1, x_2, x_3) 所有置换下的变化形式, 所以方程系数一定是关于 x_1, x_2, x_3 的对称多项式。根据牛顿对称多项式基本定理以及韦达定理, 方程(3)的系数一定可由原方程系数表示出来, 于是方程(3)便可以确定。这样便可以先解方程(3)求出 z , 然后由 z 得到 y , 最后由 y 求出 x 。

这便是拉格朗日总结出来的系统方法，一般称为预解法，其中方程(3)便是预解方程。

拉格朗日预解法的核心在于找到变换式 $u(x_1, x_2, x_3)$ ，如果这个变换式的幂次方在所有根置换下的不同形式数目小于原方程次数，那么方程就可以降阶求解。拉格朗日的注意力或许只在于寻找变换式 $u(x_1, x_2, x_3)$ ，但并没有将变换式抽象出来，单独研究其在所有根置换下的不同形式所形成的集合，后面我们会介绍这个集合就是伽罗瓦群。伽罗瓦清晰严格地揭示了求解方程的所有秘密都在伽罗瓦群里。

拉格朗日用这种方法求解四次方程，也获得了成功，可是当他用这种方法挑战五次方程时却失败了。遗憾的是，拉格朗日没有进一步深入分析其中失败的原因，自 1771 年发表论文《关于方程代数解的思考》之后，他再也没有回到高次方程求解这个研究课题，从而失去了发明现代数学基础——群论的机会。若以拉格朗日的数学才能和当时他已获得的在高次方程求解上的重要发现来看，发现群论对他来说是极有可能的。而且，拉格朗日擅长表述且极具影响力，若他发现群论，一定会大大提前现代数学的发展进程。我不知后人该如何吸取教训，才能避免失去这种机会的遗憾，或许拉格朗日下面几段话会有或多或少的暗示。

在刚刚 40 岁时，拉格朗日便写信给他的朋友法国数学家达朗贝尔：“我开始感到我的惰性在一点一点地增加，我怀疑能否从现在再干 10 年数学。而且，我还觉得，这个矿井已经太深了，除非发现新矿脉，否则就不得不抛弃它了。”

拉格朗日说：“牛顿无疑是特别有天赋的人，但是我们必须承认，他也是最幸运的人：找到建立世界体系的机会只有一次。”他又说：“牛顿是多么幸运啊，在他那个时候，世界的体系仍然有待发现呢！”

至于数学,拉格朗日认为它已经结束了,或者至少进入了一个衰落的时期。他甚至预言,数学在科学院和大学中的位置,不久就会跌落到像阿拉伯语那样平凡的水平。

后来的事实证明:拉格朗日错了,在他之后新的数学理论仍在不断地被发现,譬如群论。实际上,世界一直在发展,无尽的理论等待发现、创造。新的理论能否被发现,在于人类投入了多少热情,在于积累是否足够了,在于是否有足够的才能!

在结束本章之前,还需提及另一位法国人范德蒙德。这位法国人对数学、音乐都有兴趣,还是狂热的法国革命支持者。他于1770年11月,在巴黎法国科学院宣读了一篇论文,随后又在该科学院宣读了三篇论文。这四篇论文的思想 and 拉格朗日的思想有很多相似之处,但表述较为粗糙。这四篇论文据说就是他的全部数学成果。他的论文虽然早于拉格朗日,但是没有受到关注。没有证据表明拉格朗日知道范德蒙德的工作。

如果我继承可观的财产,我在数学上可能没有多少价值了。

——拉格朗日