

第3章

Banach空间理论基础

各种实际的或理论的问题所讨论的对象往往与通常三维空间有类似的结构. 19 世纪下半叶, Ascoli、Volterra、Arzela、Fréchet、Riesz、Hilbert 等数学家先后在变分法、微分方程、积分方程等研究中表达了将函数看作空间的点或向量的观点, 这种观点导致了抽象的向量空间及与之相联系的一些抽象空间概念的产生. 在理论与应用上最重要、最基本的一类空间是 Banach 空间与 Hilbert 空间, 这也是本书着重讨论的一类空间. 但是, 有一些理论与应用问题往往需要在较弱的条件下讨论. Banach 空间本身的一些问题放在比它更一般的框架下讨论时会变得更加清楚. 这个一般的框架就是拓扑线性空间. 3.2 节将介绍拓扑线性空间的概念, 读者根据需要可以跳过其中有关定理论证方面的内容, 这对后继各章节基本内容的修读没有太大影响.

3.1 相关向量与度量的基本空间类

现代分析数学中有两种最基本的结构: 一种是可以施行加法与数乘运算的代数结构即线性结构, 另一种是可以建立极限运算的结构即拓扑结构. 线性空间(或向量空间)与度量空间是分别具备这两种结构的空間. 在大多数场合需要考虑同时具备这两种结构的空間, 这类空間中最重要的是赋范空間, 而内积空間又是赋范空間中性态最好的一类空間.

3.1.1 线性空间与凸集

定义 3.1.1

设 X 是一个非空集合, $\mathbb{K}$ 是数域(通常是实数域 $\mathbb{R}^1$ 或复数域 $\mathbb{C}$). 若 X 上可定义加法与数乘运算, 即: 任意 $x, y \in X$, 存在唯一的 $z \in X$ 与之对应, 称为 x 与 y 的和, 记为 $z = x + y$; 任意 $x \in X$, 任意 $\alpha \in \mathbb{K}$, 存在唯一的 $u \in X$ 与之对应, 称为 α 与 x 的数积, 记为 $u = \alpha x$; 且任意 $x, y, z \in X$, 任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, 上述加法与数乘运算满足

- (1) $x + y = y + x$;
- (2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
- (3) 存在零元素 θ , 使任意 $x \in X$ 有 $x + \theta = x$;
- (4) 任意 $x \in X$, 存在负元素 $-x \in X$, 有 $x + (-x) = \theta$;
- (5) $1x = x$;

$$(6) \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x;$$

$$(7) (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x;$$

$$(8) \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

则称 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的**线性空间**或**向量空间**(简称为线性空间或向量空间),其中的元素称为**向量**或**点**(θ 称为**零点**或**原点**).特别地,当 $\mathbb{K} = \mathbb{R}^1$ 时称 X 为**实线性空间**,当 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 时称 X 为**复线性空间**.

设 E 是数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间 X 的子集,若 E 也构成 $\mathbb{K}$ 上的线性空间,则称 E 是 X 的**线性子空间**(简称为子空间).显然, E 是 X 的子空间当且仅当

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \text{有 } \alpha x + \beta y \in E.$$

集 $E \subset X$ 与点 $x \in X$ 的**和**(称为 E 对 x 的**平移**)定义为

$$x + E = E + x = \{x + e; e \in E\}.$$

集 $A \subset X$ 与集 $B \subset X$ 的**和**定义为

$$A + B = B + A = \{a + b; a \in A, b \in B\}.$$

数 $\alpha \in \mathbb{K}$ 与集 $E \subset X$ 的**数积**定义为

$$\alpha E = \{\alpha e; e \in E\}.$$

线性空间 X 中的一组元素 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 称为**线性相关**的,若存在不全为零的 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ 使

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \theta.$$

否则,称它们是**线性无关**的.

向量组 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 线性无关等价于若有 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ 使

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \theta.$$

则必有 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

线性空间 X 的子集 E 称为**线性无关集**,若 E 中任意有限多个元素都线性无关.否则称 E 是**线性相关集**.

设 $x \in X, \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset X$.若存在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ 使

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n.$$

则称 x 是 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的**线性组合**,或说 x 可由 $x_1, x_2, \dots, x_n$ **线性表示**.

设 E 是线性空间 X 的非空子集, E 中任意有限个向量的线性组合的全体称为 E 的**线性包**或**张成空间**,记作 $\text{span}E$,即

$$\text{span}E = \left\{ x: x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, x_i \in E, \alpha_i \in \mathbb{K}, n \geq 1 \right\}. \quad (3.1.1)$$

设 E 是线性空间 X 的线性无关集,若 $\forall x \in X$,存在有限多个 $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ 使 x 由 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 线性表示,则称 E 是 X 的**基底**——**线性基**或**Hamel基**.此时若 E 仅由 n 个元素组成,则称 X 是 **n 维空间**,记为 $\dim X = n$;若 E 由无穷多个元素组成,则称 X 是**无限维空间**,记为 $\dim X = \infty$.当 $X = \{\theta\}$ (称为**零空间**)时,记为 $\dim X = 0$.

由定义可知,数域 $\mathbb{K}$ 本身是 $\mathbb{K}$ 上的一维线性空间;零空间是唯一的由有限个元素构成的线性空间.

上述定义中关于维数的叙述依赖线性基的存在性.

命题 3.1.1

任何非零的线性空间必存在线性基(Hamel 基).

证明 设 X 是线性空间, $X \neq \{\emptyset\}$. 记 X 中线性无关集的全体为 $\mathcal{P}$, 以集合的包含关系为半序, 则 $\mathcal{P}$ 为非空的半序集. 若 $\mathcal{R}$ 是 $\mathcal{P}$ 中的全序子集, 不妨设 $\mathcal{R} = \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. 令 $E = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. 对任意 $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$, 若 $x_i \in A_{\lambda_i}, i=1, 2, \dots, n$, 由全序性, 不妨设 $A_{\lambda_i} \subset A_{\lambda_n}, i=1, 2, \dots, n-1$. 则 $x_1, x_2, \dots, x_n \in A_{\lambda_n}$, 由 A_{λ_n} 是线性无关集推知 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 线性无关, 由此进一步得出 E 是线性无关集. 故 $E \in \mathcal{P}$. 因为任意 $\lambda \in \Lambda$ 有 $A_\lambda \subset E$, 所以 E 是 $\mathcal{R}$ 的上界. 由 Zorn 引理, $\mathcal{P}$ 中有极大元, 记为 B . 我们断言, B 为 X 中 Hamel 基. 事实上, 因 $B \in \mathcal{P}$, 故 B 是线性无关集. 若某个 $x \in X$ 不能用 B 中任何有限个元素线性表示, 换言之, $B \cup \{x\}$ 是线性无关集, $B \cup \{x\} \in \mathcal{P}, B \subset B \cup \{x\}, B \neq B \cup \{x\}$. 这与 B 是 $\mathcal{P}$ 的极大元矛盾. 证毕.

用同样方法可以证明下述基的存在性结果.

推论

设 E 是线性空间 X 的线性无关子集, 则必存在 X 的 Hamel 基 B 使 $B \supset E$.

例 3.1.1 映射(函数)空间 $\mathcal{F}$ 设 X 为任意点集, Y 为数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, $\mathcal{F}$ 为从 X 到 Y 的映射全体, 即 $\mathcal{F} = \{f \mid f: X \rightarrow Y\}$. 在 $\mathcal{F}$ 上定义加法与数乘($f, g \in \mathcal{F}, t \in X, \alpha \in \mathbb{K}$) 如下:

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t), \quad (\alpha f)(t) = \alpha f(t).$$

容易验证 $\mathcal{F}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 称为映射空间. 当 $Y = \mathbb{K}$ 时也称为函数空间. 今后涉及的映射(函数)空间, 其线性运算都将采用上述定义.

特例 1 n 元数组空间 $X = \{1, 2, \dots, n\}, Y = \mathbb{K}, \mathcal{F}$ 中的每个元素 x 是一个 n 元数组, $x = (a_1, a_2, \dots, a_n), a_i \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n$. 按坐标(分量)定义加法与数乘为

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n);$$

$$\beta(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\beta a_1, \beta a_2, \dots, \beta a_n), \quad \beta \in \mathbb{K}.$$

这些 n 元数组全体构成线性空间也记为 $\mathbb{K}^n$, 其维数为 n . $\mathbb{K} = \mathbb{R}^1$ 时, 特例 $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, 分别是通常的实直线、实二维平面、实三维空间.

特例 2 无穷数列空间 $X = \{1, 2, \dots, n, \dots\}, Y = \mathbb{K}, \mathcal{F}$ 中的每个元素 x 是一个无穷数列(或无穷元数组), $x = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots), a_n \in \mathbb{K} (n=1, 2, \dots)$, 有时也记为 $x = \{a_n\}_{n=1}^\infty$ 或 $x = \{a_n\}$. 定义加法与数乘为

$$(a_1, a_2, \dots) + (b_1, b_2, \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots),$$

$$\beta(a_1, a_2, \dots) = (\beta a_1, \beta a_2, \dots), \quad \beta \in \mathbb{K}.$$

无穷数列空间是线性空间, 其维数是 ∞ .

例 3.1.2 线性空间 $C_c(X)$ 由定理 1.3.12 的推论, 两个连续函数的和是连续的, 连续函数的数积是连续的. 现设 $f, g, f+g$ 的支集(参见定义 2.2.5)分别为 S_f, S_g, S ; 并记

$$E_f = \{x \in X: f(x) = 0\}, \quad E_g = \{x \in X: g(x) = 0\}, \quad E = \{x \in X: f(x) + g(x) = 0\}.$$

因 $E_f \cap E_g \subset E$, 故 $E^c \subset E_f^c \cup E_g^c$, 从而

$$S = \overline{E^c} \subset \overline{E_f^c \cup E_g^c} \subset \overline{E_f^c} \cup \overline{E_g^c} = S_f \cup S_g.$$

因 S 是紧集, 从而 $S_f \cup S_g$ 的闭子集也是紧的, 故 $f+g \in C_C(X)$; 设 $0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$, 则 αf 的支集就是 f 的支集, 故 $\alpha f \in C_C(X)$. 因此 $C_C(X)$ 是线性空间.

例 3.1.3 线性空间 $C_0(X)$ 设 f 是局部紧 Hausdorff 空间 X 上的复值函数. 若任意 $\epsilon > 0$, 总存在 X 中紧集 K_ϵ 使任意 $x \in K_\epsilon^c$ 有 $|f(x)| < \epsilon$, 则称 f 在无穷远点为 0. 所有在无穷远点为 0 的 X 上的连续函数之族记为 $C_0(X)$ (参见图 3-1). 易知 $C_0(X)$ 为线性空间. 显然 $C_C(X) \subset C_0(X)$, 若 X 本身是紧集, 则 $C_C(X) = C_0(X)$, 此时简记为 $C(X)$. 例如, $\mathbb{R}^1$ 中闭区间 $[a, b]$ 上连续函数全体所成的空间记为 $C[a, b]$.

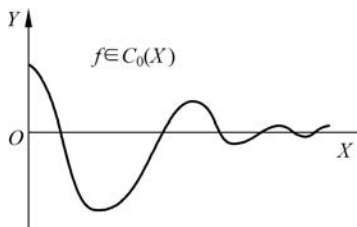


图 3-1

例 3.1.4 线性空间 $L^p(\mu)$ ($1 \leq p \leq \infty$). 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是 Borel 测度空间, 其中 X 是局部紧 Hausdorff 的, μ 是正则的正测度.

(1) $1 \leq p < \infty$, 记 $L^p(\mu) = \left\{ f: f \text{ 是复值可测函数且 } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$. 按照 Minkowski 不等式容易验证 $L^p(\mu)$ 是线性空间, 称为 **p -幂可积函数空间**. 设 $E \subset \mathbb{R}^k$. 若 μ 是 E 上的 Lebesgue 测度, 则习惯上记 $L^p(\mu)$ 为 $L^p(E)$. 例如, 闭区间 $[a, b]$ 上 p -幂可积函数空间记为 $L^p[a, b]$. 若 μ 是集 A 上的计数测度, 则习惯上记 $L^p(\mu)$ 为 $l^p(A)$, 当 A 可数时简记为 l^p , 即 $l^p = \left\{ x = \{a_i\}_{i=1}^\infty: \sum_{i=1}^\infty |a_i|^p < \infty \right\}$.

(2) $p = \infty$. 设 f 是 X 上的复值可测函数, f 称为本性有界的是指除去 X 的某个零测子集 E 外, f 在 $X \setminus E$ 上是有界的. 设 $L^\infty(\mu)$ 为 X 上本性有界可测函数全体. $f \in L^\infty(\mu)$, 若 α 满足 $\mu(\{t \in X: |f(t)| > \alpha\}) = 0$, 则称 α 是 $|f|$ 的本性上界. 若 α 是 $|f|$ 的本性上界, 则 $|f(t)| \leq \alpha$ a. e. 记

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \in X} |f(t)| = \inf \{ \alpha: \alpha \text{ 是 } |f| \text{ 在 } X \text{ 的本性上界} \},$$

称为 $|f|$ 的本性上确界. 本性上确界 $\beta = \operatorname{ess\,sup}_{t \in X} |f(t)|$ 也是本性上界. 事实上, 因为

$$\{t \in X: |f(t)| > \beta\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{t \in X: |f(t)| > \beta + 1/n\},$$

由 $\beta + 1/n$ 是本性上界及零测集的可数并仍是零测集得到 β 也是本性上界. 由于当 α 是 $|f|$ 在 X 的本性上界时, 总存在 $E \subset X, \mu(E) = 0$, 使 $\alpha = \sup_{t \in X \setminus E} |f(t)|$, 故

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \in X} |f(t)| = \inf_{\mu(E)=0} \sup_{t \in X \setminus E} |f(t)|.$$

因为两个本性有界可测函数的线性组合仍是本性有界的可测函数, 所以 $L^\infty(\mu)$ 是线性空间, 称为**本性有界函数空间**. 设 $E \subset \mathbb{R}^k$. 若 μ 是 E 上的 Lebesgue 测度, 则习惯上记 $L^\infty(\mu)$ 为 $L^\infty(E)$, 例如, 闭区间 $[a, b]$ 上本性有界可测函数空间记为 $L^\infty[a, b]$. 当 μ 是集 A 上的计数测度时, 习惯上记 $L^\infty(\mu)$ 为 $l^\infty(A)$. 由于 μ 为计数测度时, 每个非空集具有正的测度 (每个非空集都不是零测集), 故在 $l^\infty(A)$ 中有界与本性有界含义相同, 确界与本性确界含义相

同, $l^\infty(A)$ 表示 A 上有界函数的族, A 为可数时简记为 l^∞ , l^∞ 为有界数列的族, 即

$$l^\infty = \{x = \{a_i\}_{i=1}^\infty : \sup_{i \geq 1} |a_i| < \infty\}.$$

$L^p(\mu)$ ($1 \leq p \leq \infty$) 统称为 **Lebesgue 空间**. 一般来说, 在 $L^p(\mu)$ 中, 将几乎处处相等的函数作为同一函数, 因而 $L^p(\mu)$ 实际上不是以函数为元素的空间, 而是以函数的等价类为元素的空间.

注意本性上确界与上确界是不同的概念, 二者的差别可由下面的例子看出 (其中的测度为 Lebesgue 测度). 令

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1), \\ 2, & t = 1, \end{cases} \quad g(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, 1) \setminus \{1/n, n \in \mathbb{Z}^+\}, \\ n, & t = 1/n, n \in \mathbb{Z}^+. \end{cases}$$

则 $\sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| = 2, \text{ess sup}_{t \in [0, 1]} |f(t)| = 1; \sup_{t \in [0, 1]} |g(t)| = \infty, \text{ess sup}_{t \in [0, 1]} |g(t)| = 1.$

定义 3.1.2

设 X 是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 对 $x, y \in X$, 集合

$$\{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

称为以 x 与 y 为端点的 **区间或线段**, 记作 $[x, y]$. 若 X 的非空子集 E 满足: 对 $\forall x, y \in E$, 有 $[x, y] \subset E$, 则称 E 为 X 的 **凸集**. 非空子集 E 为凸集当且仅当 $\forall \lambda \in [0, 1], \lambda E + (1 - \lambda)E \subset E$. 凸集与非凸的集如图 3-2 所示.

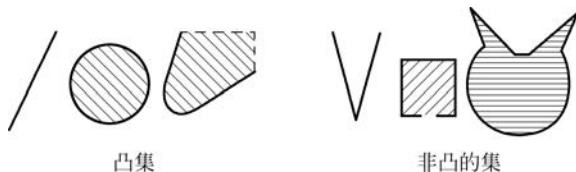


图 3-2

对 $x, y \in X, \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1 - \lambda)y$ 称为 x 与 y 的 **凸组合**. 一般地, 对 $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$, 若 $\lambda_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n), \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, 则形如 $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ 的元素称为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的 **凸组合**. 对 X 的非空子集 E , 称 E 中任意有限个向量的凸组合的全体为 E 的 **凸包或凸壳**, 记为 $\text{co}E$ (参见图 3-3), 即

$$\text{co}E = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid x_i \in E, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, n \geq 1 \right\}. \quad (3.1.2)$$

设 E 是线性空间 X 的子空间, 则 E 对某个向量 $x_0 \in X$ 的平移 $E + x_0$ 称为 **线性流形或仿射集**. 若 X 中除 X 本身外没有其他子空间包含 E , 则称 E 是 X 的 **极大子空间**, 当 E 是 X 的极大子空间时, $E + x_0$ 称为 X 的 **超平面**.

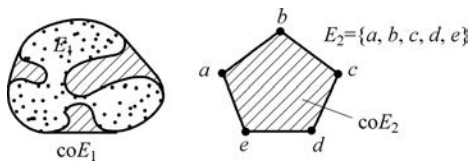


图 3-3

由上述定义可知,单点子集必是凸集;子空间是凸集也是线性流形;线性流形必是凸集.按式(3.1.1)与式(3.1.2),显然有 $E \subset \text{span}E, E \subset \text{co}E$. 下述事实也是明显的: $\mathbb{R}^3$ 中不经过原点的直线和平面不是子空间,但都是线性流形; $\mathbb{R}^3$ 中的超平面是平面, $\mathbb{R}^2$ 中的超平面是直线.

例 3.1.5 设 A 是 $m \times n$ 矩阵 ($m \leq n$), b 是 m 维非零列向量, x 是 n 维列向量, $Ax=b$ 表示线性方程组. 则对应的齐次方程组 $Ax=\theta$ 的解的全体 $E=\{x \in \mathbb{K}^n: Ax=\theta\}$ 是 $\mathbb{K}^n$ 的线性子空间, 设 x_0 是 $Ax=b$ 的一个解, 则 $Ax=b$ 的解集合 $V=\{x \in \mathbb{K}^n: Ax=b\}=E+x_0$ 是一个线性流形.

命题 3.1.2

设 X 是线性空间, $E \subset X$.

(1) $\text{co}E$ 是 X 中的凸集, 它是 X 中包含 E 的所有凸集的交集.

(2) $\text{span}E$ 是 X 的线性子空间, 它是 X 中包含 E 的所有子空间的交集.

证明 (1) $\forall x, y \in \text{co}E$, 设 $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, y = \sum_{j=1}^m \beta_j y_j$, 其中 $x_i, y_j \in E, \alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0$,

$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \sum_{j=1}^m \beta_j = 1. \forall \lambda \in [0, 1]$, 有

$$\lambda x + (1-\lambda)y = \sum_{i=1}^n \lambda \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^m (1-\lambda) \beta_j y_j. \quad (3.1.3)$$

由于 $\sum_{i=1}^n \lambda \alpha_i + \sum_{j=1}^m (1-\lambda) \beta_j = \lambda + (1-\lambda) = 1$, 式(3.1.3)是 $x_i, y_j (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m)$ 的凸组合. 故 $\lambda x + (1-\lambda)y \in \text{co}E$, $\text{co}E$ 是凸集. 显然 $E \subset \text{co}E$. 我们断言, 若 A 是 X 中任意凸集, 则 $\text{co}A=A$. 事实上只需证明 $\text{co}A \subset A$. 利用数学归纳法, $n=2$ 时, 若 $x_1, x_2 \in A, \alpha_1, \alpha_2 > 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$, 则由 A 的凸性知凸组合 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in A$. 设 $n=k$ 时结论成立. 当 $n=k+1$ 时, 若 $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1} \in A, \alpha_i > 0, \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i = 1$, 则 $\sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{k+1}} = 1$, 由归纳假设, $x = \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i x_i}{1-\alpha_{k+1}} \in A$, 从而

$$\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i = (1-\alpha_{k+1})x + \alpha_{k+1} x_{k+1} \in A.$$

现设 $\{E_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ 是包含 E 的全体凸集. 由 $E \subset E_\lambda$ 得 $\text{co}E \subset \text{co}E_\lambda$, 由 E_λ 为凸集得 $\text{co}E_\lambda = E_\lambda$. 于是 $\text{co}E \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \text{co}E_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$. 另外, 由于 $\text{co}E$ 是包含 E 的凸集, 即 $\text{co}E \in \{E_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$, 故 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \subset \text{co}E$. 总之, $\text{co}E = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$.

(2) 的证明类似于(1), 从略. 证毕.

由命题 3.1.2 可知, $\text{span}E$ 是 X 中包含 E 的最小的线性子空间; $\text{co}E$ 是 X 中包含 E 的最小的凸集. 容易作出 $\mathbb{R}^2$ 上有限点集的凸包的图. 圆周的凸包是圆盘.

定义 3.1.3

设 X, Y 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, T 是从 X 到 Y 的映射. 若 T 满足

$$T(x+y) = Tx + Ty, \quad T(\alpha x) = \alpha Tx, \quad \alpha \in \mathbb{K}, x, y \in X, \quad (3.1.4)$$

则称 T 是从 X 到 Y 的**线性算子**, 当 Y 是数域时称为**线性泛函**. 若式 (3.1.4) 中二条件不全成立或全不成立, 则称 T 为**非线性算子** (当 Y 是数域时称为**非线性泛函**). T 的值域 $\mathcal{R}(T) = TX (TX \subset Y)$ 也称为 T 的**像空间**, $\mathcal{N}(T) = T^{-1}(\theta) = \{x \in X: Tx = \theta\}$ 称为 T 的**零空间**或**核空间**.

式 (3.1.4) 中二条件等价于

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}, x, y \in X.$$

这意味着 T 保持线性运算. 由式 (3.1.4) 第二个条件可得 $T\theta = \theta$, 即线性算子将零元映射为零元.

常见的线性算子的例子很多, 若 $Tx = \alpha x (x \in X)$, 其中 $\alpha \in \mathbb{K}$ 为常数, 则 T 是从线性空间 X 到自身的线性算子, 当 $\alpha = 0$ 时称为**零算子**, 当 $\alpha \neq 0$ 时称为**相似算子**, 并记作 αI , 当 $\alpha = 1$ 时, $T = I$ 称为**单位算子**或**恒等算子**.

例 3.1.6 设 $X = \mathbb{K}^n, Y = \mathbb{K}^m, A = (a_{ij})$ 为 $m \times n$ 矩阵, 其中 $a_{ij} \in \mathbb{K}$. 定义 $T: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m, T(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, 使得 $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, i = 1, 2, \dots, m$. 即

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

容易验证 T 是从 $\mathbb{K}^n$ 到 $\mathbb{K}^m$ 的线性算子.

反之, 对每个线性算子 $T: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$, 各取 $\mathbb{K}^n$ 与 $\mathbb{K}^m$ 的一组基 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 与 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$. 令 $Te_i = \sum_{j=1}^m a_{ji}\eta_j (i = 1, 2, \dots, n)$, 即可形式地写成

$$T(e_1, e_2, \dots, e_n) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

则得到 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$.

于是, 从 $\mathbb{K}^n$ 到 $\mathbb{K}^m$ 的线性算子与 $m \times n$ 阶矩阵相对应. 特别地, 取 $m = 1$, 记 $a_{1i} = \alpha_i, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 便得到 $\mathbb{K}^n$ 上的线性泛函 $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}, f(x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$, 其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. 这表明 $\mathbb{K}^n$ 上线性泛函 f 与 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 相对应.

例 3.1.7 $C[a, b]$ 上定义

$$(Tx)(t) = \int_a^t x(u) du, \quad t \in [a, b] \quad \text{及} \quad F(x) = \int_a^b x(u) du.$$

则容易验证 T 是 $C[a, b]$ 到自身的线性算子, 而 F 是 $C[a, b]$ 上的线性泛函.

线性算子具有良好的代数性质, 如下列出最基本的性质 (证明是简单的).

命题 3.1.3 设 X, Y 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, $T: X \rightarrow Y$ 是一线性算子, 则

(1) $\mathcal{N}(T)$ 是 X 的线性子空间, $\mathcal{R}(T)$ 是 Y 的线性子空间.

(2) T 是单射当且仅当 $\mathcal{N}(T) = \{\theta\}$.

(3) 若 T 可逆(T 是单满射或称为双射), 则 T^{-1} 是从 Y 到 X 的线性算子.

(4) 若 $M \subset X$ 是线性相关集, 则 $T(M) \subset Y$ 亦线性相关. 当 $\dim X < \infty$ 时有 $\dim TX \leq \dim X$.

3.1.2 度量空间与球

下面考虑度量结构. 度量或距离的概念是根据实直线 $\mathbb{R}^1$ 及复平面 $\mathbb{C}$ 上两点间的距离的性质抽象地提出的. 因为当 $\forall x, y \in \mathbb{R}^1$ (或 $\mathbb{C}$), x 与 y 的距离 $\rho(x, y) = |x - y|$ 显然满足下述定义 3.1.4 中的正定性、对称性与三角形不等式, 以这三条性质为公理来定义抽象集合上的距离是很自然的.

定义 3.1.4

设 X 是非空集合, ρ 是 X 上的二元实函数(对任意 $x, y \in X$, 有唯一实数 $\rho(x, y)$ 与之对应), 若对任意 $x, y, z \in X$, ρ 还满足

(D1) 正定性 $\rho(x, y) \geq 0$; $\rho(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;

(D2) 对称性 $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

(D3) 三角形不等式(如图 3-4 所示)

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z),$$

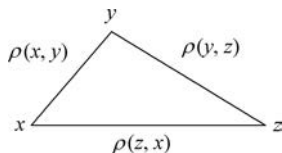


图 3-4

则称 ρ 是 X 上的**度量**(或**距离**)**函数**, $\rho(x, y)$ 为 x 与 y 之间的**距离**, 称 X 为**度量空间**(或**距离空间**), 有时为了明确, 记为 (X, ρ) .

设 (X, ρ) 是度量空间, $E \subset X$, 则 E 按同样的距离 ρ 也是度量空间, (E, ρ) 称为 (X, ρ) 的**子空间**.

例 3.1.8 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是测度空间, $0 < p < 1$, $L^p(\mu)$ 表示 X 上可测的 p 方可积函数全体, 即 $L^p(\mu) = \left\{ f: f \text{ 可测且 } \int_X |f(t)|^p d\mu < \infty \right\}$. 对 $f, g \in L^p(\mu)$, $f = g$ 定义为 $f(t) = g(t)$ a. e., 定义

$$\rho(f, g) = \int_X |f(t) - g(t)|^p dt.$$

则 $L^p(\mu)$ 是度量空间. 为了验证这一点, 先证明不等式

$$(u + v)^p \leq u^p + v^p, \quad \text{其中 } u \geq 0, v \geq 0. \quad (3.1.5)$$

事实上, 若 $uv = 0$, 此不等式显然成立. 以下不妨设 $0 < v \leq u$. 记 $F(\lambda) = 1 + \lambda^p - (1 + \lambda)^p$, $\lambda \in (0, 1]$. 因导数 $F'(\lambda) = p\lambda^{p-1} - p(1 + \lambda)^{p-1} \geq 0$, 故 $F(\lambda) \geq F(0) = 0$, 即 $(1 + \lambda)^p \leq 1 + \lambda^p$. 令 $\lambda = \frac{v}{u}$, 便得到式 (3.1.5).

ρ 显然满足正定性与对称性. 对 $f, g, h \in L^p[a, b]$, 令 $u = |f(t) - h(t)|$, $v = |h(t) - g(t)|$, 则

$$|f(t) - g(t)|^p \leq (u + v)^p \leq u^p + v^p = |f(t) - h(t)|^p + |h(t) - g(t)|^p.$$

取积分可得 $\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$. 这表明 ρ 满足三角不等式. 因此, 当 $0 < p < 1$ 时, $(L^p(\mu), \rho)$ 是度量空间.

例 3.1.9 设 X 是任意非空集合, 对 $x, y \in X$, 定义

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y; \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

则 (X, ρ) 是一个度量空间, 称此空间为**离散度量空间**.

这是容易验证的. ρ 显然满足正定性与对称性. 若 $x = y$, 则任意 $z \in X$, 显然有

$$\rho(x, y) = 0 \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

若 $x \neq y$, 则任意 $z \in X$, $z \neq x$ 与 $z \neq y$ 至少有一个成立, 于是也有

$$1 = \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) (=1 \text{ 或 } 2).$$

这表明 ρ 满足三角不等式. 因此 (X, ρ) 是度量空间.

离散度量空间的例子表明, 任意一个非空集都可定义为度量空间. 这是度量结构与线性结构的区别之一.

类似于通常的几何术语, 以下在度量空间 X 中引入开球、闭球、球面、开集、闭集等概念.

定义 3.1.5

设 (X, ρ) 是度量空间, $x_0 \in X, r > 0$, 称 X 中的点集

$$B(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < r\},$$

$$B[x_0, r] = \{x \in X : \rho(x, x_0) \leq r\},$$

$$S_r(x_0) = \{x \in X : \rho(x, x_0) = r\}$$

分别为以 x_0 为中心, 以 r 为半径的**开球**、**闭球**、**球面**.

定理 3.1.4

在度量空间 (X, ρ) 中, 开球族 $\mathfrak{B}_\rho = \{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$ 构成拓扑基. 因此度量空间是拓扑空间, 其拓扑称为**度量拓扑**, 记为 τ_ρ .

证明 因为 $\bigcup_{x \in X} B(x, r) = X$, 故

$$\bigcup \{B \in \mathfrak{B}_\rho\} = X. \quad (3.1.6)$$

设 $B(x_1, r_1), B(x_2, r_2) \in \mathfrak{B}_\rho, x \in B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$. 令

$$r = \min \{r_1 - \rho(x, x_1), r_2 - \rho(x, x_2)\}.$$

则任意 $y \in B(x, r)$ 有

$$\rho(y, x_1) \leq \rho(y, x) + \rho(x, x_1) < r + \rho(x, x_1) \leq r_1,$$

$$\rho(y, x_2) \leq \rho(y, x) + \rho(x, x_2) < r + \rho(x, x_2) \leq r_2.$$

因此, 有

$$B(x, r) \subset B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2). \quad (3.1.7)$$

根据定理 1.2.5, 式(3.1.6)与式(3.1.7)表明 $\mathfrak{B}_\rho$ 是拓扑基. 证毕.

定理 3.1.4 指出, 度量空间是拓扑空间; 且由于对度量空间 X 的每一点 x , 都有

$$\{B(x, r) : r \in \mathbb{Q}\}$$

为可数邻域基, 因而度量空间是第一可数的拓扑空间. 反之, 拓扑空间要在一定条件下才能定义与拓扑相一致的度量而成为度量空间. 拓扑空间 X 称为**可度量化**的, 是指在 X 上可定义度量 ρ , 使由 ρ 导出的度量拓扑就是 X 上的拓扑.

由拓扑空间知识与定理 3.1.4 可知, 在度量空间 (X, ρ) 中, 开集 (τ_ρ 中元素) 是 X 中若干开球之并; 特别地, 开球本身是开集; 开集的余集是闭集. 设 $E \subset X$. 则含于 E 的一切开集之并为 E° , E° 是开集, E 为开集当且仅当 $E^\circ = E$; 包含 E 的一切闭集之交为 $\bar{E}$, $\bar{E}$ 是闭集, E 是闭集当且仅当 $\bar{E} = E$.

利用球的概念,可以更加精细地刻画度量空间的拓扑结构.

定义 3.1.6

设 (X, ρ) 为度量空间, $E \subset X, x_0 \in X$.

(1) 若存在 $r > 0$, 使 $B(x_0, r) \subset E$, 则称 x_0 为 E 的内点.

(2) 若任意 $\epsilon > 0, B(x_0, \epsilon) \cap E \neq \emptyset$, 则称 x_0 为 E 的接触点或极限点.

(3) 若任意 $\epsilon > 0, B(x_0, \epsilon) \cap E \neq \emptyset$ 且 $B(x_0, \epsilon) \cap E^c \neq \emptyset$, 其中 $E^c = X \setminus E$ 表示 E 的余集, 则称 x_0 为 E 的边界点. E 的边界点的全体称为 E 的边界, 记为 ∂E .

(4) $d(E) = \sup_{x, y \in E} \rho(x, y)$ 称为 E 的直径. 若 $d(E) < \infty$, 则称 E 为有界集, 否则称为无界集.

(5) 称 $\rho(x_0, E) = \inf_{y \in E} \rho(x_0, y)$ 为点 x_0 到集 E 的距离.

命题 3.1.5

设 (X, ρ) 是度量空间, $E \subset X$. 则

(1) E° 是 E 的一切内点之集.

(2) $\bar{E}$ 是 E 的一切接触点(极限点)之集.

(3) $E^{c-c} = E^\circ$ (记住 $c-c=0$).

证明 (1) 设 $x \in E^\circ$. 因 E° 是开集, 即 E° 为某些开球之并, 必存在开球 $B(x_0, r_0)$ 使 $x \in B(x_0, r_0) \subset E^\circ$. 在式(3.1.7)中令 $r_1 = r_2 = r_0, x_1 = x_2 = x_0$, 有 $r > 0$ 使 $B(x, r) \subset B(x_0, r_0) \subset E^\circ \subset E$. 这表明 x 是 E 的内点.

(2) 由于开球 $B(x, \epsilon_0)$ 也是 x 的邻域, 利用命题 1.2.3 得证.

(3) 由(1)与(2)得

$$\begin{aligned} x \in E^\circ &\Leftrightarrow \exists r > 0, B(x, r) \subset E \Leftrightarrow \exists r > 0, E^c \cap B(x, r) = \emptyset \\ &\Leftrightarrow x \notin E^{c-c} \Leftrightarrow x \in E^{c-c}. \end{aligned}$$

证毕.

例 3.1.10 设 (X, ρ) 为度量空间, 则对任意 $x \in X$, 任意 $r > 0$, 闭球 $B[x, r]$ 是闭集. 事实上, 若 $x_0 \notin B[x, r]$, 则 $\rho(x_0, x) > r$, 令 $\delta = \rho(x_0, x) - r$, 则 $\delta > 0$. 此时任意 $y \in B(x_0, \delta)$, 有 $\rho(y, x_0) < \delta$. 于是

$$\rho(y, x) \geq \rho(x_0, x) - \rho(y, x_0) > \rho(x_0, x) - \delta = r,$$

即 $y \notin B[x, r]$. 所以 $B(x_0, \delta) \cap B[x, r] = \emptyset$. 这表明 $x_0 \notin \overline{B[x, r]}$. 证得 $\overline{B[x, r]} \subset B[x, r]$. 因此 $B[x, r]$ 是闭集.

但值得注意的是, 在度量空间的框架下, 开球的闭包未必是闭球.

例 3.1.11 设 $X = \{x, y\}$ 为仅有两个元素的离散的度量空间, $r = 1$. 则开球 $B(x, 1) = \{x\}$. 由于对 y 而言, 存在 $\epsilon_0 = 1/2, B(y, \epsilon_0) = \{y\}$, 因而 $B(y, \epsilon_0) \cap \{x\} = \emptyset$, 故 y 不是 $B(x, 1)$ 的接触点, 即 $y \notin \overline{B(x, 1)}$. 于是 $\overline{B(x, 1)} = \{x\}$, 但 $B[x, 1] = \{x, y\}$.

由于度量空间是第一可数的拓扑空间, 因此在度量空间的框架下可以用点列(而不需要用网)更加方便地引入收敛及与收敛有关的一些概念. 通俗地说, 收敛就是距离趋近零.

定义 3.1.7

设 (X, ρ) 为度量空间, 点列 $\{x_n\} \subset X$. 若存在点 $x \in X$ 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0$, 则称点列