第1章

质点运动学

本章引入和导读

仰望天空,晴空蓝天白云飘浮,大型客机划破长空;

俯视大地,高速公路四通八达,各种车辆穿梭往来;

步入地下,地铁轨道交叉纵横,双向隧道越江而过。

自然界的万事万物都在运动,物体的运动是绝对的。各类运动的形式丰富多彩,机械运动是自然界中最简单的一种宏观运动形式,只涉及物体之间或其内部各部分之间的相对位置及其随时间的变化。从天上到地面再到地下,各种物体作机械运动的情景始终与我们相伴。

在物理学中研究宏观物体作机械运动规律的分支学科称为经典力学。经典力学首先从确定物体的位置开始,然后通过引入物体的位移、速度、加速度等物理量来描述和研究物体位置随时间的变化规律,这是对物体机械运动状态"从静到动"的一个逐步深入的认识过程。如果只对物体机械运动状态及其变化作出描述,不涉及引起物体运动状态变化的原因,那么这部分内容在经典力学中称为"运动学"。

中学物理课程中已经讨论过"运动学"的内容,大学物理既注意到与中学物理的衔接,又对中学物理进行了提升,在内容和方法上建立了更加明确、更加科学的运动学理论,能够解决的问题也更加普遍。

例如,中学物理分别给出了物体速度和加速度的定义,但是实际上它们都仅仅是一段时间内物体的平均速度和平均加速度的定义,并不能确切地描述物体在某时刻的瞬时运动状态;中学物理只限于讨论物体作匀速运动和匀加速运动的路程公式、速度公式和加速度公式,不涉及变加速运动的路程和速度。大学物理不仅提出了物体运动在某时刻瞬时速度和瞬时加速度的定义,而且建立了物体位移、速度和加速度之间的一般数学演绎关系。当把物体的运动看作质点的运动时,只要已知质点的运动方程,即可通过高等数学的演绎推理方法得出质点速度和加速度的表达式;反之,对质点的一般运动,只要知道质点的加速度,就可以通过高等数学的方法得到质点速度和位移的表达式,而匀速运动和匀加速运动的路程公式和速度公式仅仅是这些表达式中的特例。

在运动学知识的整体概念上,大学物理比中学物理在描述方法上更明确、更科学。在得到运动学的定理和公式的过程和方法上,中学物理是通过实验方法归纳得出这些公式的,大

学物理体现的是物理学中的归纳和数学演绎推理相结合的方法。与前者相比，后者更显示了力学理论的系统性和逻辑性。

从中学物理到大学物理，需要做好知识上的衔接，更需要从物理内容、数学工具和物理学方法上实施提升。对此，本章的最后一节专门对中学物理和大学物理的运动学作了比较。

1.1 质点——描述物体机械运动的一个理想模型

——什么是质点？为什么要引入质点模型？

自然界作机械运动的物体形状和大小各异，运动形式纷繁多样。以一辆行驶的汽车为例，汽车在前进过程中有车身的移动，也有车轮的转动，更有很多其他机械部件的复杂运动，因此，要完整、不遗漏地描述一辆汽车上所有部件的机械运动几乎是不可能的。但是如果仅仅为了描述汽车运动的快慢和在一定时间内行驶的路程，只需要考虑汽车作为一个整体的运动就足够了，车轮和方向盘转动以及其他部件运动的细节都可以略去不计。

在力学中，为了能在整体上更有效地把握一个物体的运动，并且便于对运动进行分类，以得出机械运动的基本规律，在合适的条件下，可以对物体的运动做出一定的简化。这样的简化不涉及物体的形状和体积大小，忽略物体各部分不同的运动细节，把一个物体的运动近似地看作具有质量的一个“点”的运动，这样的“点”就称为质点。质点，顾名思义就是有质量但没有大小、不计形状的“点”。显然，在自然界中没有这样的“点”。这种研究问题的方法在物理学上称为构建理想模型。构建理想模型的方法是物理学的一个重要方法。质点是力学中引入的第一个理想模型。

在什么条件下可以把物体看作质点呢？当一个人观察从他面前驶过的一辆载重汽车时，在他看来，汽车显然是一个有确定形状和一定体积的庞大的运动物体，要完整地描述汽车车身和车轮及各个部件的运动是十分困难的，但是，如果这个人从几百米的高塔顶上瞭望这辆汽车，他根本无法看清楚汽车的形状和大小，更无法看清楚汽车上各个组成部分和机械部件的运动细节。在这种情况下，由于汽车的尺度大小远远小于观察者与汽车之间的距离，在观察者看来，这辆汽车的运动就如同一个特殊的“点”在运动，于是，这辆汽车就可以看作一个质点，就可以从整体上对汽车的位置和运动的快慢做出描述。

在位于地球表面的人类看来，太阳、地球和月亮都是宇宙空间中有着巨大体积和质量的天体。由于它们的体积十分庞大，各自具有不同的形状和自转的方式，要确定这三个天体所处的位置和运行的轨道是十分困难的。但是从这三个天体组成的整体上看，由于这些天体的尺度大小与它们之间的距离相比显得很小，如果只需要讨论这三个天体的整体运动状态，可以不必涉及它们的体积和形状以及它们自身的自转运动，把它们都看作质点，把它们之间的距离看作点与点之间的距离，这样就可以预测它们的位置，确定它们的运动轨道和运动周期等。

在后续章节中，如果对物体的形状和大小没有做出特别说明，也没有提及物体各部分的不同运动，只在整体上讨论物体的状态和状态变化，这个物体就可以看作质点。

【扩展阅读】 太阳、地球和月亮的直径及它们之间距离的有关数据。

1.2 描述物体机械运动状态的物理量

——什么是位移、速度和加速度?

1.2.1 参考系和坐标系

相对于不同的参考物,同一物体的同一运动会表现为不同的形式,例如从行驶的车辆上掉落一个汽水瓶,以行驶的车辆作为参照物,汽水瓶作的是自由落体(直线)运动;以地面上静止的人作为参考物,汽水瓶作的是平抛(曲线)运动。可见,物体运动的形式随参考物的不同而不同,这叫作运动的相对性。由于运动的相对性,我们在描述物体运动时就必须指明相对于什么参考物来说。

确定了参考物之后,为了定量的说明一个质点相对于此参考物的空间位置,需在此参考物上建立固定的坐标系。坐标系有笛卡儿直角坐标系、平面自然坐标系、极坐标系等。

质点的运动就是它的位置随时间的变化,质点到达坐标系某一位置时的时刻 t 由该处配置的钟给出。该坐标系中各位置处的钟都是同步的。

一个固定在参考物上的坐标系和相应的一套同步的钟,组成了一个参考系。常用的参考系有地面参考系、地球参考系、太阳参考系等。在不同的参考系中描述同一物体的运动时,其表达形式是不同的。

1.2.2 标量和矢量

按照"国际单位制"的规定,在力学中描述物体机械运动状态的基本物理量有三个:长度、时间和质量,它们的国际单位分别是米(m)、秒(s)和千克(kg),并规定为基本单位,对应的物理量称为基本量。从基本量的单位可以得到其他物理量的单位,如速度、加速度、动量、功和能量等,这些物理量称为导出量。物理量可以分为标量和矢量两大类。

标量是只有数值大小,没有方向的物理量。力学中的三个基本量——长度、时间和质量都是标量。标量一般用字母表示,例如,长度常用字母 L 或 l 表示;时间常用字母 T 或 t 表示;质量常用字母 M 或 m 表示等。在力学中常见的标量还有功,常用字母 A 或 W 表示,常用单位是焦耳(J);能量(如动能或势能),常用字母 E 表示,常用单位也是焦耳(J);等等。

矢量是既有数值大小,又有方向的物理量。例如,物体所在位置方位、物体的速度和加速度就是矢量。为了完整准确地描述物体的运动状态及其随时间的变化,确定一个物体在给定坐标系中的位置、速度或加速度时,必须既给定这个物体相对于坐标系原点的位置、速度或加速度的数值大小,同时也标明这个物体的位置方位、速度或加速度沿什么方向。显然,用标量描述这样的运动状态是不完整的,必须改为矢量。例如,位置用字母 $\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{r}$ 表示,速度常用字母 $\boldsymbol{V}$ 或 $\boldsymbol{v}$ 表示。加速度常用字母 $\boldsymbol{a}$ 表示。在力学中常见的矢量还有力,常用字母 $\boldsymbol{F}$ 或 $\boldsymbol{T}$ 表示;动量常用字母 $\boldsymbol{p}$ 表示;力矩常用字母 $\boldsymbol{M}$ 表示;等等。书写时,矢量一般用带箭头的字母表示。

1.2.3 位置矢量和位移

位置矢量 在力学中，描述物体的空间位置及其方位的物理量是位置矢量，常用字母 $\boldsymbol{r}$ 表示（简称位矢）。为了确定位置矢量的大小和方向，就必须确定一定的参考系和相应的坐标系，它们是确定物体位置的依据。

假设地面上的观察者需要确定空间某物体（如空中一架飞机）在某时刻相对于观察者的位置和方位，则观察者首先需要把自身的位置作为一个参考物，建立一个参考系。把他在地面上的位置定为坐标原点 O，架设一个三维空间的直角坐标系，它的三个坐标轴分别是 x、y、z。

设该物体在某时刻 t 所处在的空间位置为 P 点，则从坐标原点 O 指向 P 点的矢量就是该物体在这个参考系中的**位置矢量** $\boldsymbol{r}$。当物体运动时，P 点也随之运动，位置矢量的长度和方向都会相应地随时间改变，这一改变一般可以用函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 表示。这个函数就是物体运动函数的矢量表示式。在三维直角坐标系下可以表示为（图 1.1(a)）

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k} \tag{1.1}$$

其中，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别是 x、y、z 三个空间坐标轴上的单位矢量，$x(t)$、$y(t)$、$z(t)$ 分别是这个位置矢量在三个坐标轴上的投影分量，它们也是时间 t 的函数：

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t) \tag{1.2}$$

式(1.1)和式(1.2)这样一组时间的函数称为物体的运动方程或运动函数。

对不同的参考系，一个物体的位置矢量是不同的，也就是说，物体的位置与参考系的选择有关，因此在机械运动中物体的位置是相对的。

位移 随着物体在空间的运动，物体的位置矢量也相应发生变化。物体将在不同的时刻到达不同的位置，而在各个位置上的时刻是由在这些位置上配置的许多同步的钟给出的。

设在时刻 t，物体处于空间 P 点的位置矢量是 $\boldsymbol{r}$，在时刻 t'，物体到达空间另一个位置 P' 点（不管沿着什么空间途径）的位置矢量是 $\boldsymbol{r}'$。于是，两个位置矢量之差就定义为物体的位移 $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}$，方向是从 P 指向 P'，位移的大小就是 $|\Delta\boldsymbol{r}|$（图 1.1(b)）。

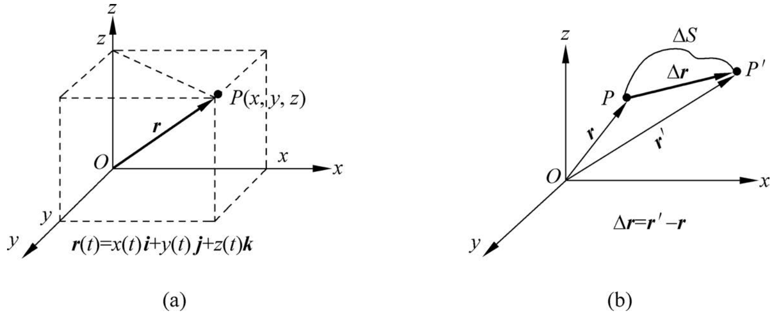


图 1.1 位置矢量和位移

(a) 物体处于空间 P 点的位置矢量 $\boldsymbol{r}(t)$；(b) 物体处于空间 P' 点的位置矢量 $\boldsymbol{r}'(t)$、位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 和路程 ΔS

位移只指明了从 P 到达 P' 的位置变化情况，没有指明物体沿什么路径从 P 点到达 P' 点。实际上，物体可以沿许多不同的空间路径从 P 到达 P'，每一条空间路径均称为物体经

过的一个路程，用 ΔS 表示(图 1.1(b))。在一般情况下，路程 ΔS 的长度不等于位移的大小，即 $\Delta S \neq |\Delta \boldsymbol{r}|$。

1.2.4　平均速度和瞬时速度

速度　随着时间的流逝，物体位置矢量也相应发生变化。为了描述物体位置矢量随时间改变的快慢，就需要引入一个新的物理量——速度，用$\boldsymbol{v}$ 表示。

物理上把物体在 Δt 一段时间内的位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 与时间的比值定义为物体的平均速度，用$\overline{\boldsymbol{v}}$ 表示：

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1.3}$$

平均速度$\overline{\boldsymbol{v}}$ 的方向就是位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的方向，平均速度的大小称为平均速率，它与选取的位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 和时间间隔 Δt 有关。平均速度是矢量，其国际单位是米每秒(m/s)。

平均速度虽然反映了对运动测量得到的真实结果，但是，任何平均速度都只是对物体在某段时间(或某段位移)内运动快慢程度的描述，不是对物体在空间某时刻(或某位置处)运动快慢的描述。在具体测量时，取不同的时间(或不同的位移)所得到的物体的平均速度是不同的。

为了更精确地测定一个作机械运动的物体在某时刻(或空间某位置)运动的快慢程度，一个可取的办法是，尽可能地把测量的时间缩短。例如，把测量 1h 内的平均速度改为测量 30min 内的平均速度；也可以从测量 30min 内的平均速度相继改为测量 20min 内、10min 内、5min 内或更短时间内的平均速度等。这样的测量结果看起来一次比一次更加精确地反映了物体运动的快慢程度。但是，由于测量仪器精密度的限制，对位移和对时间的实验测量在精确度上一定存在某个下限，因此，这样得出的结果始终只是在不同时间内(或不同位移内)的平均速度而已，这些平均速度不仅数值大小可能不相同，而且方向也可能不相同。

由此可见，作为表征物体运动快慢的物理量——平均速度实际上是与实验测量条件有关的一个物理量，是一种在经验层次上对物体运动的“平均化”描述，并不能确切地表示出物体在某时刻或某位置处的运动快慢程度。

如何建立对物体运动快慢程度的一种普遍性的确切的本质描述，以便使这样的描述可以不依赖于实验测量呢？牛顿针对测量与时间的选择有关以及存在的测量下限的局限性提出了以下假定。

当一段时间极短而变得无限小时，物体经过的位移和发生这段位移的时间的比值就趋近于一个极限，这个极限就是物体的瞬时速度，简称速度。

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1.4}$$

从数学上看，速度是位置矢量对时间的一阶导数。只要给出了物体的位置矢量函数(亦称运动方程)$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$，通过微分运算就可以得到物体的速度方程$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$。在三维直角坐标系中，可以写成如下的分量形式：

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

$$\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j} + v_z \boldsymbol{k}$$

当没有特殊说明时，速度通常指的都是瞬时速度。

物体在某时刻速度的方向与该时刻 d$\boldsymbol{r}$ 的方向一致。在直线运动中，速度方向平均速度的极限方向一致；在曲线运动中，速度的方向与该时刻物体在运动轨道上所在位置处的切线方向一致。

速率 平均速率 $\bar{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$，式中 Δs 是路程，是物体在一段时间内沿轨道运动经过的距离，是标量。曲线运动时 $\Delta s \neq |\Delta \boldsymbol{r}|$，因此平均速率与平均速度的大小并不相等。例如，绕周长为 400m 的操场匀速跑一圈回到起跑点所花的时长为 500s，则在这一段时间的平均速率为 $\bar{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{400}{500}\mathrm{m/s}=0.8\mathrm{m/s}$，而平均速度为$\bar{\boldsymbol{v}}=\dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=0\mathrm{m/s}$。

瞬时速率 $v=\lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，简称速率。在没有特殊说明的情况下，速率通常指的都是瞬时速率，是个标量。因取极限时 $\mathrm{d}s=|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$，故 $v=|\boldsymbol{v}|$，即速度的大小与速率相等，所以也称速度的大小为速率。

在三维直角坐标系中，$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$。

只要知道了物体的运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，通过微分运算就可以得到物体的速度方程$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)$。反之，只要知道了物体的速度方程$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)$，通过积分运算就可以得到物体的运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$。

1.2.5 平均加速度和瞬时加速度

加速度 位移描述的是物体空间位置矢量随时间发生的改变，速度描述的是物体的位移随时间发生改变的快慢和方向。为了描述物体速度随时间改变的快慢和方向，就需要引入一个新的物理量——**加速度**，用 $\boldsymbol{a}$ 表示。

与建立平均速度的方法相似，物理上把在 Δt 一段时间内物体速度的改变 $\Delta \boldsymbol{v}$ 与时间的比值定义为物体的平均加速度(用 $\bar{\boldsymbol{a}}$ 表示)：

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1.5}$$

平均加速度是矢量，其方向是速度改变 $\Delta \boldsymbol{v}$ 的方向，其大小与选取的速度改变 $\Delta \boldsymbol{v}$ 的大小和时间 Δt 有关。平均加速度的国际单位是米每二次方秒($\mathrm{m/s^2}$)。

与以上引入瞬时速度的原因类似，为了建立对物体速度改变的一种确切的普遍性的本质描述，以使这样的描述完全不依赖于实验测量，牛顿提出了这样的假定：

当一段时间极短而变得无限小时，物体速度的改变和时间的比值就趋近于一个极限，这个极限就是物体的瞬时加速度，简称加速度。

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.6}$$

加速度是速度对时间的一阶导数，是位置矢量对时间的二阶导数。在三维直角坐标系中，可以写成如下的分量形式：

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\quad a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\quad a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$

$$a = a_x i + a_y j + a_z k$$

只要知道物体的运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$或速度方程$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)$，就可以通过微分运算获得加速度方程 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$；反之，只要知道物体运动的加速度方程，就可以通过积分运算获得物体的速度方程和运动方程。

1.3　物体机械运动的分类

——物体的机械运动有哪几种分类？

自然界中物体的运动是复杂多样的，分类方法是人们认识自然界运动的一种科学方法，它往往是认识和描述各种运动的第一步。物理学按照从简单到复杂的认识层次把自然界的运动分为机械运动、热运动、电磁运动等。同样，自然界的机械运动本身也是复杂多样的，对它们进行分类也是认识物体机械运动的第一步。物体的机械运动可以按照运动方程分类，分为直线运动和曲线运动；也可以按照运动速度分类，分为匀速运动和变速运动；还可以按照加速度分类，分为匀加速运动和变加速运动；等等。

1.3.1　直线运动和曲线运动

按照运动方程分类，物体的运动可分为直线运动和曲线运动两大类，这样的划分是相对于一定的参考系而言的。

直线运动　如果不计空气阻力，以地面为参考系，物体从地面上某高度位置自由下落的运动就是发生在一维方向上的匀加速直线运动。通常以这个高度位置为坐标原点，取竖直向下方向为正方向建立坐标系。物体在下落过程中，速度不断增大，在不计任何其他阻力时，自由下落的加速度就是重力加速度 $\boldsymbol{g}$，方向竖直向下。

假设物体的初始位置为 $\boldsymbol{r}_0$（若初始位置为坐标原点，则$\boldsymbol{r}_0=0$），自由下落的初速度为$\boldsymbol{v}_0$，由此得到的位移方向也竖直向下。因此，在 $\boldsymbol{g}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$和$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$表达式中可以不再标记矢量符号，直接按照数值关系计算。通过这两式分别对时间积分，可以相应得到物体作自由下落运动的速度和位移的表达式：

$$v = v_0 + gt \tag{1.7}$$

$$r = r_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \tag{1.8}$$

由以上两式消去时间 t，可以得到位移和速度的数值关系为

$$v^2 - v_0^2 = 2gr \tag{1.9}$$

式(1.7)和式(1.8)分别是物体自由下落运动的速度公式和位移公式。以上由加速度和速度通过积分相应得到速度和位移的方法不仅适用于匀加速运动，也适用于非匀加速运动。

曲线运动　如果不计空气阻力，抛体运动就是在重力作用下相对于地面上某高度位置发生在二维平面内的匀加速曲线运动，加速度就是重力加速度 $\boldsymbol{g}$。

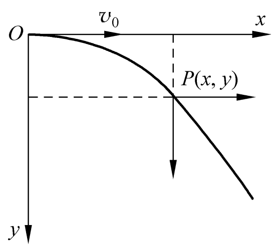


图 1.2　物体平抛运动路程的轨迹图

以平抛运动为例。以地面为参考系建立二维坐标系。把从某高度抛出的起始位置设为坐标原点 O，取自坐标系原点向右方的水平方向为 x 轴正方向，取从坐标系原点竖直向下的方向为 y 轴的正方向。如图 1.2 所示，物体从地面上沿水平方向抛出以后的运动，是竖直方向初速度为零的匀加速直线运动（加速度为重力加速度 $\boldsymbol{g}$）和水平方向匀速直线运动（速度大小为 v_0）等两个分运动的合成运动。因此，物体被抛出以后，竖直方向分运动的速度不断增加，而水平方向分运动的速度保持不变。

假设从物体被抛出时开始计时，则在任意时刻 t，物体处于任意位置 $P(x,y)$ 点时在水平方向和竖直方向的两个分运动的速度分量分别是

$$v_x = v_0,\quad v_y = gt \tag{1.10}$$

于是，合成以后物体的速度是

$$\boldsymbol{v} = v_0\boldsymbol{i} + gt\boldsymbol{j} \tag{1.11}$$

物体在水平方向和竖直方向的两个分运动的位置分别是

$$x = v_0 t,\quad y = \frac{1}{2}gt^2$$

于是，合成以后物体的位置矢量是

$$\boldsymbol{r} = v_0 t\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{j} \tag{1.12}$$

从两个分运动的位置分量 x，y 的表达式中消去时间 t，得出平抛运动的轨迹函数为

$$y = \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2}x^2 \tag{1.13}$$

如果不计物体受到的阻力而只在重力作用下，物体在水平方向作匀速运动，在竖直方向作匀加速运动——水平方向的运动速度大小（速率）保持不变，但总的速度方向随时间改变；物体的加速度大小保持不变，加速度方向竖直向下。物体作匀加速曲线运动。

在研究二维的曲线运动时，除了直角坐标系外，另一种比较方便的方法是采用自然坐标系。在曲线上选取任意一点作为这种坐标系的原点，物体的位置可以用从原点开始计算的弧长 S 表示，S 是一个可正可负的代数量。设置曲线上每一点的切向和法向作为两个坐标分量，由此构成了自然坐标系，如图 1.3 所示。在自然坐标系中，物体的速度矢量和加速度矢量可以分解成切向分量和法向分量。

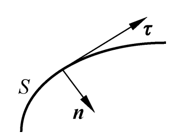


图 1.3　曲线运动的切向和法向

以圆周运动为例。设圆周的半径为 R，选取圆周轨道上任意一点作为自然坐标系的原点，物体从起始位置开始作圆周运动时，圆周的半径 R 转过的角度为 θ。随着物体的运动，θ 也在随时间改变，$\theta=\theta(t)$。于是，物体的位置可以用从起始点开始计算的弧长 S 表示，$S=S(t)=R\theta(t)$。物体所在位置的切向分量沿该点圆周的切线方向，单位矢量用 $\boldsymbol{\tau}$ 表示，法向分量指向该点圆周轨道的法线方向，且指向圆周轨道内侧（指向圆心），单位矢量用 $\boldsymbol{n}$ 表示，如图 1.4 所示。由于物体位置不断改变，每一个位置的切向和法向也在不断改变，$\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 都是时间的函数，但是，无论在什么位置上，$\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 始终保持互相正交。因此，与直角坐标方向

恒定的单位矢量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 不同，在自然坐标系中，切向 $\boldsymbol{\tau}$ 和法向 $\boldsymbol{n}$ 都不是方向恒定的单位矢量。

在自然坐标系下，由于物体在轨道上的运动速度始终沿切线方向，因此，速度的法向分量为零，于是，物体圆周运动的速度矢量可以表示为

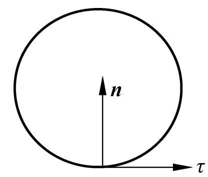


图 1.4　圆周运动的切向和法向

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v_{\tau}\boldsymbol{\tau}=v\boldsymbol{\tau}$$

把 $\boldsymbol{v}$ 对时间 t 求导，由于圆周运动的速率 v 和切向的单位矢量 $\boldsymbol{\tau}$ 都是与时间有关的变量，可以得到物体的加速度：

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}(v\boldsymbol{\tau})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}+v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}=a_{\tau}\boldsymbol{\tau}+a_{\mathrm{n}}\boldsymbol{n} \tag{1.14}$$

式(1.14)最后一个等号右边第 1 项是切向加速度 a_{τ}，第 2 项是法向加速度 a_{n}。

式(1.14)表明，加速度 a 是两个分加速度的合成。式中最后一个等号右边第一项是切向加速度 $\boldsymbol{a}_{\tau}=\boldsymbol{a}_{\tau}\boldsymbol{\tau}$，切向加速度的大小 $a_{\tau}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$。它表示速度大小发生的变化，而速度的方向不变。在匀速率圆周运动中，速度大小不变，因此，切向加速度 $a_{\tau}=0$。等式右边第二项是法向加速度 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}=v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}=a_{\mathrm{n}}\boldsymbol{n}$，它表示速度方向发生的变化，而速度的大小不变。

设物体作匀速率圆周运动的半径为 R，t_1 时刻在 A 点的速度为 $v_A\boldsymbol{\tau}_{t1}$，$t_2$ 时刻在 B 点的速度为 $v_B\boldsymbol{\tau}_{t2}$，如图 1.5(a)所示。速度大小没有改变，但 τ 的方向发生了变化。如图 1.5(b)所示。由于 $\boldsymbol{\tau}$ 是切向单位矢量，

$$|\Delta\tau|=\Delta\theta\times 1=\Delta\theta=\frac{\Delta S}{R}(\Delta S\ \text{为圆周上与}\ \Delta\theta\ \text{对应的弧长})$$

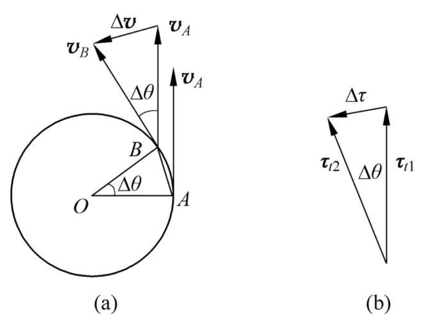


图 1.5　作圆周运动的物体速度的变化

(a) 作圆周运动物体速度大小不变；(b) 作圆周运动的物体速度方向发生变化

在 $\Delta t \to 0$ 的极限条件下，$\Delta\tau$ 与 τ 的方向垂直，即趋于与速度方向垂直的法向。于是

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\tau}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{n}=\frac{v}{R}\boldsymbol{n}$$

这里 v 是物体作圆周运动的速度，$\boldsymbol{n}$ 是与 $\boldsymbol{\tau}$ 垂直的法向单位矢量。于是法向加速度

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}=v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}=\frac{v}{R}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{n}=\frac{v^2}{R}\boldsymbol{n}$$

法向加速度 a_{n} 的方向始终与速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向垂直，指向圆心。

因此，在自然坐标系中，物体作圆周运动的加速度：

$$\boldsymbol{a}=a_{\tau}\boldsymbol{\tau}+a_{\mathrm{n}}\boldsymbol{n}=\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{\tau}+\frac{v^2}{R}\boldsymbol{n} \tag{1.15}$$

加速度的大小表示为 $a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_{\tau}^2+a_{\mathrm{n}}^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$

加速度的方向用它与法向 $\boldsymbol{n}$ 的夹角 α 来表示：$\alpha=\arctan\frac{a_{\tau}}{a_{\mathrm{n}}}$

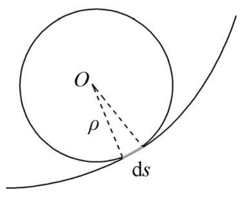
曲线运动有两个特例。一个特例是，如果物体作匀速率圆周运动，物体沿切向的速度 v 是常数，物体的速度始终只有切向分量，没有法向分量；又由于 $a_{\tau}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$，因此，物体的加速度始终只有法向分量，没有切向分量。

另一个特例是，如果物体作匀加速直线运动，且物体速度的方向不变，这种情况可以看作物体沿着无限大半径的圆周运动，$R\to\infty$，于是 $a_{\mathrm{n}}=0$，物体的加速度始终只有切向分量，就是沿直线方向运动的加速度，没有法向分量。

对于任意的曲线运动，其运动轨道总是可以是由一个个曲率半径不同的曲率圆上的一小段弧 $\mathrm{d}s$ 所组成的(图 1.6)，因此，物体在运动轨道上任意一点处的加速度也可以表示为

$$\boldsymbol{a}=a_{\tau}\boldsymbol{\tau}+a_{n}\boldsymbol{n}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}$$

式中，ρ 是运动轨道在该点处的曲率半径。



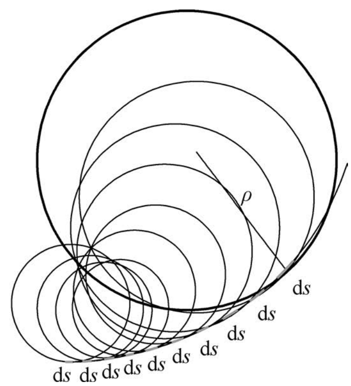


图 1.6　曲率圆与曲率半径

1.3.2　匀速运动和变速运动

按照运动速度分类，物体的运动可以分为匀速运动、匀速率运动、变速运动和变速率运动，这样的划分也是相对于一定的参考系而言的。

匀速运动　如果在运动过程中，物体的速度矢量始终保持大小和方向不变，这样的运动就称为匀速运动。匀速运动一定是直线运动，因此也称为匀速直线运动。

匀速运动的速度表示式：