

第 1 章 随机事件及其概率

1.1 随机事件及其概率

一、主要内容

随机试验和随机事件的概念, 随机事件的关系及运算, 概率的定义和性质, 古典概型和几何概型的概率计算.

二、教学要求

1. 理解随机试验、样本空间和随机事件的概念, 掌握随机事件间的关系和运算.
2. 理解概率的定义, 掌握概率的性质.
3. 掌握古典概率及几何概率的计算, 能用概率的基本性质计算随机事件的概率.

三、例题选讲

例 1.1 写出下列随机试验的基本空间:

- (1) 掷两枚骰子, 分别观察其出现的点数;
- (2) 一人射靶三次, 观察其中靶的情况;
- (3) 口袋中装有 10 个球, 6 个白球, 4 个红球, 分别标有 1 ~ 10 号, 从中任取一球, 观察球的号数;
- (4) 在单位圆内任取一点, 记录它的坐标.

解 (1) $\Omega = \{(1, 1), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (2, 6), (3, 1), \dots, (3, 6), (4, 1), \dots, (4, 6), (5, 1), \dots, (5, 6), (6, 1), \dots, (6, 6)\}$.

其中 (i, j) 表示第一枚骰子掷出 i 点, 第二枚骰子掷出 j 点 ($i, j=1, 2, 3, 4, 5, 6$).

(2) $\Omega = \{w_{000}, w_{001}, w_{010}, w_{011}, w_{100}, w_{101}, w_{110}, w_{111}\}$, 其中 w_{000} 表示三次均没中靶, w_{110} 表示第一次中靶, 第二次中靶, 第三次没中靶, 依次类推.

(3) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

(4) 取一直角坐标系, 则有 $\Omega = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$, 若取极坐标系, 则有 $\Omega = \{(\rho, \theta) | \rho < 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}$.

例 1.2 设 A, B, C 为三事件, 用 A, B, C 的运算关系表示下列各事件:

- (1) A 发生, B 与 C 不发生;
- (2) A 与 B 都发生, 而 C 不发生;
- (3) A, B, C 中至少有一个发生;
- (4) A, B, C 都发生;
- (5) A, B, C 都不发生;
- (6) A, B, C 中不多于一个发生;
- (7) A, B, C 中不多于两个发生;
- (8) A, B, C 中至少有两个发生.

解 以下分别用 $D_i (i = 1, 2, 3, \dots, 8)$ 表示 (1), (2), $\dots$, (8) 中所给出的事件. 注意到一个事件不发生即为它的对立事件发生, 例如事件 A 不发生即 $\bar{A}$ 发生.

- (1) $D_1 = A\bar{B}\bar{C}$ 或写成 $D_1 = A - B - C$.
- (2) $D_2 = AB\bar{C}$ 或写成 $D_2 = AB - C$.
- (3) $D_3 = A \cup B \cup C$ 或写成 $D_3 = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$, 或写成 $D_3 = A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC \cup \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}BC \cup ABC$.
- (4) $D_4 = ABC$.
- (5) $D_5 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.
- (6) $D_6 = \bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}BC$ 或写成 $D_6 = \overline{AB \cup BC \cup CA} = \overline{AB} \cap \overline{BC} \cap \overline{CA}$.
- (7) $D_7 = \bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup A\bar{B}C$ 或写成 $D_7 = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$ 或写成 $D_7 = \overline{ABC}$.
- (8) $D_8 = AB \cup BC \cup CA$ 或写成 $D_8 = ABC \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C \cup ABC$.

例 1.3 指出下列关系中哪些成立, 哪些不成立.

- (1) $\bar{A}B = A \cup \bar{B}$;
- (2) 若 $AB = \emptyset$, 且 $C \subset A$, 则 $BC = \emptyset$;
- (3) $AB \cap A\bar{B} = \emptyset$;
- (4) 若 $\bar{A} \subset \bar{B}$, 则 $A \supset B$;
- (5) $\overline{A - B} = \bar{A} - \bar{B}$;
- (6) $\overline{(A \cup B)C} = \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

解 (1) 不成立. 因为左边不含 A 而右边含 A .
 (2) 成立. 因若 $BC \neq \emptyset$, 又 $C \subset A$, 则 $BA \neq \emptyset$, 此与条件矛盾.
 (3) 成立. 因为 $B, \bar{B}$ 不同时发生, 从而 AB 与 $A\bar{B}$ 也不同时发生.
 (4) 成立. 若 B 发生不导致 A 发生, 则导致 $\bar{A}$ 发生, $\bar{A} \subset \bar{B}$, 即导致 $\bar{B}$ 发生, 从而 $B \subset \bar{B}$, 矛盾.
 (5) 不成立. 因为 $\overline{A - B} = \overline{(A\bar{B})} = \bar{A} \cup B$, 而 $\bar{A} - \bar{B} = \bar{A} \cap B$.
 (6) 不成立. 因为 $\overline{(A \cup B)C} = \bar{A}\bar{B} \cup \bar{C}$.

例 1.4 已知两事件: $A \subset B, P(A) = 0.2, P(B) = 0.3$. 求:

- (1) $P(\overline{A})$; (2) $P(\overline{B})$; (3) $P(AB)$;
 (4) $P(A \cup B)$; (5) $P(B\overline{A})$; (6) $P(A - B)$.

解 (1) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.2 = 0.8$.

(2) $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.3 = 0.7$.

(3) $P(AB) = P(A) = 0.2$.

(4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.3$ 或 $P(A \cup B) = P(B) = 0.3$.

(5) $P(B\overline{A}) = P(B - A) = P(B) - P(AB)$
 $= P(B) - P(A) = 0.3 - 0.2 = 0.1$.

(6) $P(A - B) = P(\emptyset) = 0$.

例 1.5 设事件 A 与 B 同时发生必导致 C 发生, 则 ().

- (A) $P(C) = P(AB)$ (B) $P(C) \geq P(A) + P(B) - 1$
 (C) $P(C) = P(A \cup B)$ (D) $P(C) \leq P(A) + P(B) - 1$

解 由于 $P(C) \geq P(AB)$, 而

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

所以选 (B).

例 1.6 袋内放有 2 个伍分, 3 个贰分和 5 个壹分的钱币, 任取其中 5 个, 求钱额总数超过壹角的概率.

解 共有 10 个钱币, 任取 5 个, 则基本事件总数为 C_{10}^5 , 有利于事件 A (取 5 个钱币金额超壹角) 的情形有以下两种:

(1) 取 2 个 5 分币, 其余 3 个可任取, 其总数为

$$C_2^2 C_3^3 + C_2^2 C_3^2 C_5^1 + C_2^2 C_3^1 C_5^2 + C_2^2 C_5^3 \text{ (或 } C_2^2 C_8^3 \text{)};$$

(2) 取 1 个 5 分币, 则 2 分币至少要取 2 个, 其总数为

$$C_2^1 C_3^3 C_5^1 + C_2^1 C_3^2 C_5^2.$$

故有利于事件 A 的基本事件总数为

$$C_2^2 C_3^3 + C_2^2 C_3^2 C_5^1 + C_2^2 C_3^1 C_5^2 + C_2^2 C_5^3 + C_2^1 C_3^3 C_5^1 + C_2^1 C_3^2 C_5^2 = 126.$$

所以
$$P(A) = \frac{126}{C_{10}^5} = \frac{1}{2}.$$

例 1.7 一袋内装有 7 个球, 其中 4 个白球, 3 个黑球. 从中一次抽取 3 个, 求至少有 2 个白球的概率.

解 设事件 A_i 表示“抽到的 3 个球中有 i ($i=2,3$) 个白球”, A_2 与 A_3 互不相容, 由古典概率的定义, 有

$$P(A_2) = \frac{C_4^2 C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35}, \quad P(A_3) = \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35},$$

故所求概率为

$$P(A_2 \cup A_3) = P(A_2) + P(A_3) = \frac{22}{35}.$$

例 1.8 设有大小相同标号分别为 1, 2, 3, 4, 5 的 5 个球, 同时有标号为 1, 2, 3, $\dots$, 10 的 10 个盒子, 将 5 个球放入 10 个盒子中, 假设每个球放入任何一个盒子中的可能性相同, 并且每个盒子可以同时容纳 5 个以上的球. 求下列事件的概率:

- (1) 某指定的 5 个盒子各有一个球;
- (2) 每个盒子中最多只有 1 个球;
- (3) 某指定的盒子内不空.

解 5 个球放入 10 盒子中, 因为每个球有 10 种投法, 据乘法原理, 共有 10^5 种不同的投法, 且是等可能的.

(1) 设 A 表示“某指定的 5 个盒子中各有 1 个球”的事件. A 包含的基本事件数为 5 个不同元素的全排列, 共有 $n_A = 5!$, 于是

$$P(A) = \frac{5!}{10^5} = 0.0012.$$

(2) 设 B 表示“每个盒子中最多只有一个球”的事件. 再求 B 包含的基本事件数时, 因为不指定哪 5 个盒子有球, 首先从 10 个盒中任取 5 个盒子, 共有 C_{10}^5 种取法. 然后再求取出的这 5 个盒子中, 每个盒子有一球包含的基本事件数为 $5!$ 个, 据乘法原理知 $n_B = C_{10}^5 \times 5!$, 于是

$$P(B) = \frac{C_{10}^5 \cdot 5!}{10^5} = 0.3024.$$

(3) 设 C 表示“某指定的盒子内不空”的事件; $\overline{C}$ 表示“某指定的盒子是空”的事件, $\overline{C}$ 包含基本事件数即 5 个球可以向另外 9 个盒子任意投, 共有 9^5 种投法, 于是

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{9^5}{10^5} = 0.40951.$$

例 1.9 掷 5 次骰子. 试求: (1) 恰好有 3 次点数相同的概率; (2) 至少有两次 6 点的概率.

解 (1) 随机试验的样本空间所含的基本事件总数为 6^5 , 5 次中恰好有 3 次点数为 1 的基本事件数是 $C_5^3 \cdot 5^2$, 恰好有 3 次是 2, 3, 4, 5, 6 点的基本事件数也分别是 $C_5^3 \cdot 5^2$, 设 A 表示“恰好有 3 次点数相同”的事件, 则

$$P(A) = \frac{6 \cdot C_5^3 \cdot 5^2}{6^5} = \frac{125}{648} = 0.193.$$

(2) 不出现 6 点的基本事件数是 5^5 , 只出现一次 6 点的基本事件数 $C_5^1 \cdot 5^4$, 设 B 表示“至少有两次 6 点”的事件, 则

$$P(B) = 1 - \frac{5^5}{6^5} - \frac{C_5^1 \cdot 5^4}{6^5} = \frac{1526}{7776} = 0.196.$$

例 1.10 从 5 双不同的手套中任取 4 只, 这 4 只手套中至少有两只手套配成一双的概率是多少?

分析 设 A 表示事件“取出的 4 只手套至少有两只手套配成一双”, 则 $\bar{A}$ 表示“4 只手套中没有两只配成一双”, 本题有多种解法.

解 方法 1 5 双手套中任取 4 只共有 $C_{10}^4 = 210$ 种取法, 且为等可能的. 先考虑 $\bar{A}$ 包含的基本事件数. 为使取出的 4 只手套中没有两只只能配成一双的, 我们先从 5 双手套中任取 4 双, 然后从取出的 4 双手套中各取一只, 共有 $C_5^4 \times 2^4 = 80$ 种取法. 于是

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{80}{210} = \frac{13}{21}.$$

方法 2 5 双手套中任取 4 只有 $C_{10}^4 = 210$ 种取法, 且是等可能的. 为使取出的 4 只中至少有两只能配成一双, 我们先从 5 双手套中任取 1 双, 再从剩下的 4 双中任取 2 只, 共有 $C_5^1 C_8^2$ 种取法, 因为有重复, 要减去 C_5^2 . 因此 $n_A = C_5^1 C_8^2 - C_5^2$, 于是

$$P(A) = \frac{C_5^1 C_8^2 - C_5^2}{C_{10}^4} = \frac{13}{21}.$$

方法 3 设 A_1 表示事件“取出的 4 只手套恰有两只能配成一双”, A_2 表示事件“取出的 4 只手套恰好配成两双”, 于是 $A = A_1 \cup A_2$, 而

$$P(A_1) = \frac{C_5^1 (C_8^2 - C_4^1)}{C_{10}^4}, \quad P(A_2) = \frac{C_5^2}{C_{10}^4}.$$

于是

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{C_5^1 (C_8^2 - C_4^1)}{C_{10}^4} + \frac{C_5^2}{C_{10}^4} = \frac{13}{21}.$$

例 1.11 自 $1, 2, 3, \dots, 9$ 这 9 个数中随机地取出一个数, 取后放回, 连续取 n 次, 求取到的 n 个数之积能被 10 整除的概率.

分析 如果直接求解, 则很繁琐, 若能求出逆事件的概率, 再利用概率的性质计算就会容易得出. 其他问题也常采用这种方法.

解 试验的每个结果对应一个从 9 个元素中允许重复的 n 个元素的排列, 因此基本事件总数为 9^n .

设 A 表示事件“取出的 n 个数之积能被 10 整除”, 则 $\bar{A}$ 表示事件“取出的 n 个数之积不能被 10 整除”, 由于 $10 = 2 \times 5$, 把 $\bar{A}$ 分成两个事件的和.

设 B 表示事件“取出 n 个数中不含 5”; C 表示“取出的 n 个数中必含 5, 但不含 2, 4, 6, 8 中任何一个”. 则 B 与 C 是互不相容的, 且 $\bar{A} = B \cup C$.

B 包含的基本事件, 即 $1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9$, 这 8 个数中允许重复取 n 个的排列, 共有 8^n 个, 因此

$$P(B) = \frac{8^n}{9^n}.$$

C 包含的基本事件是由 $1, 3, 5, 7, 9$, 这 5 个数允许重复取 n 个数的排列, 共有 5^n 个, 减去由 $1, 3, 7, 9$ 这 4 个数允许重复取 n 个的排列数 4^n 个, 得 $5^n - 4^n$ 个, 因此 $P(C) = \frac{5^n - 4^n}{9^n}$, 故

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(B \cup C) = 1 - \frac{8^n + 5^n - 4^n}{9^n}.$$

例 1.12 在边长为 3 的正方形内, 随机抛入一个半径为 1 的圆环. 设圆环的圆心一定落入正方形内, 求圆环能与正方形的边相交的概率.

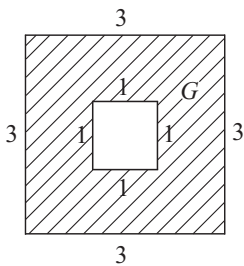


图 1.1

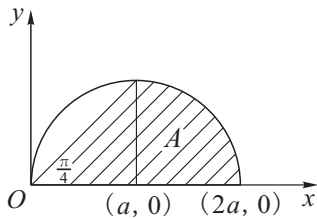


图 1.2

解 半径为 1 的圆能与正方形的边相交的充分必要条件是圆环的圆心落入图中阴影部分 G (图 1.1); 故由几何概率的计算公式, 得所求概率为

$$p = \frac{G \text{ 的面积}}{\Omega \text{ 的面积}} = \frac{9 - 1}{9} = \frac{8}{9}.$$

例 1.13 随机地向半圆 $0 < y < \sqrt{2ax - x^2}$ (a 为正常数) 内掷一点, 点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比, 求原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率.

解 样本空间 Ω 可表示为 $(x-a)^2 + y^2 \leq a^2$ 的上半圆的所有点 (图 1.2), 此时 Ω 的面积为 $\frac{\pi a^2}{2}$.

令 $A = \left\{ \text{掷点和原点的连线与 } x \text{ 轴的夹角小于 } \frac{\pi}{4} \right\}$, 则

$$A \text{ 的面积} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} r dr = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} \pi,$$

因此所求概率为

$$P(A) = \frac{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} \pi}{\frac{\pi}{2} a^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}.$$

小结 本节的主要内容是概率的概念及古典概率的计算, 这是概率论中最基本的内容. 在计算比较复杂的事件的概率时, 常常先将复杂事件用简单事件通过运算表示, 然后再利用概率的性质计算复杂事件的概率.

四、常见错误类型分析

例 1.14 掷两枚骰子, 试求事件 $A = \{\text{点数之和为 } 5\}$ 的概率.

错误解法 考虑到观察的是两颗骰子出现点数之和, 因而样本空间可构造如下:

$$\Omega = \{2, 3, 4, \dots, 12\},$$

而 $A = \{5\}$, 故 $P(A) = \frac{1}{11}$.

错因分析 错的原因是样本空间中的 11 个基本事件的出现不是等可能的. 因此, 这种试验不是古典概型, 故用古典定义计算是错误的.

正确解法 考虑掷两颗骰子的所有可能出现的结果. 利用乘法原理, 基本事件总数 $n = 6 \times 6 = 36$, 而 $A = \{\text{点数之和等于 } 5\}$ 包含的基本事件数 $r = 4$. 故所求概率为 $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

例 1.15 从有 3 件次品的 10 件产品中, 一件一件不放回地任意取出 4 件, 求 4 件中恰有 1 件次品的概率.

错误解法 把 10 件产品一件一件不放回地取出 4 件, 第一次有 10 种取法, 第二次有 9 种取法, 第三次有 8 种取法, 第四次有 7 种取法, 由乘法原理知共有 $10 \times 9 \times 8 \times 7$ 种取法, 样本空间含有 $10 \times 9 \times 8 \times 7$ 个基本事件.

$$A = \{\text{取出的 4 件恰有 1 件次品}\},$$

则 A 含有 $C_3^1 \times C_7^3$ 个基本事件, 即先从 3 个次品中取 1 件, 再从 7 件正品中取 3 件, 共有 $C_3^1 \times C_7^3$ 种取法. 故

$$P(A) = \frac{C_3^1 \times C_7^3}{10 \times 9 \times 8 \times 7} = \frac{1}{48}.$$

错因分析 其错的原因是计算总的基本事件数是用排列的方法, 即考虑了抽取顺序, 而计算事件 A 所含的基本事件数时用的是组合的方法, 即没有考虑抽取的顺序. 这样的两类基本事件数就不属于同一样本空间. 正确的方法是一定要把两类基本事件置于同一样本空间, 即计算都用排列方法或组合方法.

正确解法 方法 1 由题意, 总的基本事件数为 $n = P_{10}^4$. A 含有 $C_4^1 \times P_3^1 P_7^3$ 个基本事件. 所以

$$P(A) = \frac{C_4^1 P_3^1 P_7^3}{P_{10}^4} = \frac{1}{2}.$$

方法 2 一件一件不放回地抽取 4 件可以看成一次抽取 4 件, 故总的基本事件数为 C_{10}^4 , A 中含有 $C_3^1 \times C_7^3$ 个基本事件. 所以

$$P(A) = \frac{C_3^1 C_7^3}{C_{10}^4} = \frac{1}{2}.$$

五、疑难问题解答

1. 怎样理解互逆事件和互斥事件?

答 若 $AB = \emptyset$, 则称事件 A 与 B 为互不相容或互斥. 从“事件是由一些基本事件所构成的”这个观点看, 互斥事件无非是说: 构成这两个事件各自的试验结果中不能有公共的基本事件.

若给定一个事件 A , 则“ A 不发生”这个事件, 称为 A 的对立事件, 记为 $\bar{A}$. A 和 $\bar{A}$ 称为互逆事件. 例如: 掷一枚骰子, 事件“出现 1 点”和“出现 5 点”互斥; 事件“出现点数不小于 4 点”和“出现点数小于 4”互逆.

互逆事件和互斥事件有明显的区别: 当样本空间划分为含所考察的两个事件在内的每个事件时, 这两个事件才可能互斥; 当样本空间仅划分为所考察的两个事件时, 这两个事件才能互逆. 某一试验中, 互斥事件可以都不发生, 互逆事件有且仅有一个发生. 也就是说互逆事件一定互斥, 但互斥事件不一定互逆.

2. 样本空间的选取是否唯一?

答 解决许多古典概型问题有不同的方法, 这往往是由样本空间的不同构造引起的, 也就由基本事件确定的不同而引起的.

例 某次掷两颗骰子, 求出现点数和为偶数的概率.

方法 1 样本空间 $\Omega = \{(\text{奇}, \text{奇}), (\text{奇}, \text{偶}), (\text{偶}, \text{奇}), (\text{偶}, \text{偶})\}$, $A = \{(\text{奇}, \text{奇}), (\text{偶}, \text{偶})\}$, $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

方法 2 样本空间 $\Omega = \{(\text{点数和为奇数}), (\text{点数和为偶数})\}$, $A = \{\text{点数和为偶数}\}$, $P(A) = \frac{1}{2}$.

方法 3 若基本空间 $\Omega = \{(i, j) | i, j = 1, 2, \dots, 6\}$, 样本空间基本事件总数为 $6 \times 6 = 36$; 事件 A 基本事件数 $2 \times 3 \times 3 = 18$, $P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

所以, 样本空间的选取一般不唯一, 在解题过程中, 选取适当的样本空间, 对快速正确的解题有很大作用.

3. 古典概型中易忽略的问题.

答 解决古典概型的问题包括两个步骤:

(1) 选取适当的样本空间, 其中的基本事件数必须是有限的, 而且基本事件的发生是等可能的;

(2) 求样本空间及事件中的基本事件数.

在解决具体问题时往往重视步骤 (2) 而忽视了步骤 (1). 所以在这里特别强调: 基本事件的发生必须是等可能的, 并且要求其概率的事件必须是样本空间的子集. 以下用例子说明.

例 掷两枚骰子, 求出现的点数和为偶数的概率.

取样本空间 $\Omega = \{(\text{奇}, \text{奇}), (\text{奇}, \text{偶}), (\text{偶}, \text{奇}), (\text{偶}, \text{偶})\}$, $A = \{(\text{奇}, \text{奇}), (\text{偶}, \text{偶})\}$, 则 $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. 若取样本空间 $\Omega = \{(\text{两奇}), (\text{一奇, 一偶}), (\text{两偶})\}$, $A = \{(\text{两奇}), (\text{两偶})\}$, 则 $P(A) = \frac{2}{3}$. 显然后者的结果是错误的, 因为后面所取样本空间中基本事件发生不是等可能的: $P(\text{两奇}) = \frac{1}{4}$, $P(\text{一奇, 一偶}) = \frac{1}{2}$.

总之, 违背“基本事件的发生必须是等可能的, 并且要求其概率的事件必须是样本空间的子集”这一要求而求解古典概型的问题, 会得出错误甚至荒谬的结果.

练习 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间:

(1) 口袋中装有 10 个球, 分别标有 1 ~ 10 号, 从中任取一球, 观察球的号数;

- (2) 掷两枚骰子, 分别观察其点数;
- (3) 将 1 米长的尺子折成三段, 观察各段长度.
2. 在计算机系的学生中任选一个学生, 以 A 表示“被选学生为男生”的事件, B 表示“该生来自少数民族”的事件. C 表示“该生是学生干部”的事件:
- (1) 说明 ABC 的意义; (2) 什么条件下成立 $ABC = C$?
- (3) 何时成立 $C \subset B$? (4) 什么时候 $\overline{A} = B$ 是正确的?
3. 假设 A_1, A_2, A_3 是同一随机试验的三个事件, 试通过它们表示下列各事件:
- (1) 只有 A_1 发生; (2) 只有 A_1 和 A_3 发生;
- (3) A_1, A_2, A_3 都发生; (4) A_1, A_2, A_3 恰有一个发生;
- (5) A_1, A_2, A_3 至少有一个发生; (6) A_1, A_2, A_3 都不发生;
- (7) A_1, A_2, A_3 中恰有两个发生; (8) A_1, A_2, A_3 中最多有两个发生.
4. 下列等式是否成立? 若不成立, 写出正确的结果.
- (1) $A \cup B = (A\overline{B}) \cup B$; (2) $A = (AB) \cup (A\overline{B})$;
- (3) $A - B = A\overline{B}$; (4) $(AB)(\overline{AB}) = \emptyset$;
- (5) $(A - B) \cup B = A$; (6) $(A \cup B) - B = A$.
5. 已知 $P(A) = 0.8, P(A - B) = 0.1$, 求 $P(\overline{AB})$.
6. N 件产品中有 N_1 件次品, 从中任取 n 件 (不放回), 其中 $1 \leq n \leq N$.
- (1) 求其中恰有 k 件 ($k \leq n$ 且 $k \leq N_1$) 次品的概率;
- (2) 求其中有次品的概率;
- (3) 如果 $N_1 \geq 2, n \geq 2$, 求其中至少有两件次品的概率.
7. 某班级有 n 个同学 ($n \leq 365$), 求至少有两位同学的生日在同一天概率 (设一年按 365 天计).
8. 在书架上任意放 20 本不同的书, 求其中指定的两本放在首末的概率.
9. 从 $1 \sim 100$ 中任取一个整数, 求取到的整数能被 5 或 9 整除的概率.
10. 在六位电话号码的 6 个数字中, 求恰有 2 个数字相同的概率.
11. 把 4 个颜色分别为黑、白、红、黄的球任意地放入 4 个颜色分别为黑、白、红、黄的盒子中, 每盒放一球, 求球与盒子的颜色都不一致的概率.
12. 设停车场有 12 个位置, 排成一行, 现停着 8 辆车, 求恰有 4 个接连的位置空着的概率.
13. 一辆飞机场的交通车载有 25 名乘客, 途经 9 个站点, 每位乘客都等可能地在 9 个站中任意一站下车, 交通车只有乘客下车时才停车. 求下列事件的概率:
- (1) 交通车在第 i 站停车;
- (2) 交通车在第 i 站和第 j 站至少有一站停车;