

第5章 随机参量信号的检测

本章提要

本章讨论复合假设检验中的 Bayes 准则、Neyman-Pearson 准则和最大似然检验准则,分析随机相位、振幅、频率和时延信号的检测原理及检测性能。

第4章讨论了确知信号的检测,假定携带信息的信号所包含的参量在接收端是完全已知的。但在实际中,尽管发射机发送的信号是确知的,但由于信道的畸变,使得接收到的信号参量是随机变化的。数字通信中常用正弦信号作为信息的载体,其主要参量包括振幅、频率、初相位和时延,在很多情况下正弦信号到达接收端时,其参量发生了变化。因此,把含有随机或未知参量的信号称为随机参量信号,一般表示为 $s(t) = s(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M) = s(t, \boldsymbol{\alpha})$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M$ 为信号 $s(t)$ 的随机参量或未知参量,如在雷达回波情况下, α_1 可以表示相位 θ , α_2 可以表示回波幅度 A 等。

5.1 复合假设检验

一般来说,接收机接收到的信号是由噪声和有用信号混合而成的随机信号。如果有用信号的所有参量都是已知的,那么混合信号的随机性是由噪声引起的。如果有用信号含有 M 个随机参量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M$, 表示为 $s(t) = s(t, \boldsymbol{\alpha})$, 则混合信号的随机性不仅由噪声决定,而且由噪声和随机参量信号共同决定。这样,混合信号的概率密度函数中就含有未知参量,这种在概率密度函数中含有未知参量的假设称为复合假设。而在概率密度函数中不含有未知参量的假设,称为简单假设。由此可见,简单假设检验是解决单个确知信号的存在问题,而复合假设检验则是解决依赖于的一组参数的信号的存在问题。

在许多实际情况中,还需要对有用信号所包含的未知参量进行估计,这属于信号参量估计问题,将在第8章中进行介绍。本章只考虑信号有无的判断,即仅限于讨论二元复合假设检验问题,但是所用的方法可以推广到多个假设检验的情况。

5.1.1 复合假设检验的 Bayes 准则

设 $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M]^T$ 表示与 H_1 假设有关的随机参量矢量,设 $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_M]^T$ 表示与 H_0 假设有关的随机参量矢量, $f(\boldsymbol{\alpha})$ 和 $f(\boldsymbol{\beta})$ 分别表示 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的先验概率密度函数,对于代价因子,它们可能是 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 的函数,但 C_{00} 和 C_{10} 只是 $\boldsymbol{\beta}$ 的函数而与 $\boldsymbol{\alpha}$ 无关,记作 $C_{00}(\boldsymbol{\beta})$ 、 $C_{10}(\boldsymbol{\beta})$, C_{11} 和 C_{01} 只是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的函数而与 $\boldsymbol{\beta}$ 无关,记作 $C_{11}(\boldsymbol{\alpha})$ 、 $C_{01}(\boldsymbol{\alpha})$ 。

在复合假设情况下,由于信号参量的随机性,观测样本矢量 $\mathbf{x}$ 的概率密度函数不仅同假设有关,而且还依赖于观测期间随机参量的取值。在两类假设下,分别记作 $f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha}, H_1)$ 、 $f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\beta}, H_0)$, 称为条件似然函数。判决空间 $\mathbf{D}$ 划分为区域 D_0 和 D_1 , 观测信号落在区域 D_0 , 就选择 H_0 假设为真,观测信号落在区域 D_1 , 就选择 H_1 假设为真。

考虑到信号参量是随机的,每个随机参量都有自己的概率密度分布,总的平均风险应该是 Bayes 风险对每个参量可能的取值作统计平均的结果,因此可以表示为

$$\begin{aligned}
 R = & P(H_0) \left[\int_{D_0} \int_{\{\beta\}} f(x | \beta, H_0) f(\beta) C_{00}(\beta) d\beta dx + \right. \\
 & \left. \int_{D_1} \int_{\{\beta\}} f(x | \beta, H_0) f(\beta) C_{10}(\beta) d\beta dx \right] + \\
 & P(H_1) \left[\int_{D_1} \int_{\{\alpha\}} f(x | \alpha, H_1) f(\alpha) C_{11}(\alpha) d\alpha dx + \right. \\
 & \left. \int_{D_0} \int_{\{\alpha\}} f(x | \alpha, H_1) f(\alpha) C_{01}(\alpha) d\alpha dx \right] \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
 \int_{D_0} f(x | \alpha, H_1) dx &= 1 - \int_{D_1} f(x | \alpha, H_1) dx \\
 \int_{D_0} f(x | \beta, H_0) dx &= 1 - \int_{D_1} f(x | \beta, H_0) dx \quad (5.2)
 \end{aligned}$$

代入式(5.1),得

$$\begin{aligned}
 R = & P(H_0) \int_{\{\beta\}} \left[1 - \int_{D_1} f(x | \beta, H_0) dx \right] f(\beta) C_{00}(\beta) d\beta + \\
 & P(H_0) \int_{D_1} \int_{\{\beta\}} f(x | \beta, H_0) f(\beta) C_{10}(\beta) d\beta dx + \\
 & P(H_1) \int_{D_1} \int_{\{\alpha\}} f(x | \alpha, H_1) f(\alpha) C_{11}(\alpha) d\alpha dx + \\
 & P(H_1) \int_{\{\alpha\}} \left[1 - \int_{D_1} f(x | \alpha, H_1) dx \right] f(\alpha) C_{01}(\alpha) d\alpha \\
 = & P(H_0) \int_{\{\beta\}} f(\beta) C_{00}(\beta) d\beta + P(H_1) \int_{\{\alpha\}} f(\alpha) C_{01}(\alpha) d\alpha + \\
 & P(H_0) \int_{D_1} \int_{\{\beta\}} f(x | \beta, H_0) f(\beta) [C_{10}(\beta) - C_{00}(\beta)] d\beta dx - \\
 & P(H_1) \int_{D_1} \int_{\{\alpha\}} f(x | \alpha, H_1) f(\alpha) [C_{01}(\alpha) - C_{11}(\alpha)] d\alpha dx \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

根据 Bayes 准则,选择能使上式达到最小的区域为 D_1 。上式中前两项与 D_1 的选择无关,故选择使第 3、4 项的总被积函数为负值的区域为 D_1 ,就可使 R 达到最小。

由于正确判决的代价总是小于错误判决的代价,即 $C_{10}(\beta) > C_{00}(\beta)$, $C_{01}(\alpha) > C_{11}(\alpha)$ 。得判决规则为,若

$$\begin{aligned}
 P(H_1) \int_{\{\alpha\}} f(x | \alpha, H_1) f(\alpha) [C_{01}(\alpha) - C_{11}(\alpha)] d\alpha &> \\
 P(H_0) \int_{\{\beta\}} f(x | \beta, H_0) f(\beta) [C_{10}(\beta) - C_{00}(\beta)] d\beta &\quad (5.4)
 \end{aligned}$$

则判决 H_1 假设为真,即

$$\frac{\int_{\{\alpha\}} f(x | \alpha, H_1) f(\alpha) [C_{01}(\alpha) - C_{11}(\alpha)] d\alpha}{\int_{\{\beta\}} f(x | \beta, H_0) f(\beta) [C_{10}(\beta) - C_{00}(\beta)] d\beta} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \quad (5.5)$$

当各代价因子与未知参量 α, β 无关时, 即 $C_{00}(\beta) = C_{00}, C_{10}(\beta) = C_{10}, C_{11}(\alpha) = C_{11}, C_{01}(\alpha) = C_{01}$, 上式可变为

$$l(x) = \frac{\int_{\{\alpha\}} f(x | \alpha, H_1) f(\alpha) d\alpha}{\int_{\{\beta\}} f(x | \beta, H_0) f(\beta) d\beta} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(H_0)(C_{10} - C_{00})}{P(H_1)(C_{01} - C_{11})} = l_0 \quad (5.6)$$

由于

$$f(x | \alpha, H_1) f(\alpha) = f(x, \alpha | H_1) \quad (5.7)$$

$$\int_{\{\alpha\}} f(x, \alpha | H_1) d\alpha = f(x | H_1) \quad (5.8)$$

$$f(x | \beta, H_0) f(\beta) = f(x, \beta | H_0) \quad (5.9)$$

$$\int_{\{\beta\}} f(x, \beta | H_0) d\beta = f(x | H_0) \quad (5.10)$$

式(5.6)又可变为

$$l(x) = \frac{f(x | H_1)}{f(x | H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(H_0)(C_{10} - C_{00})}{P(H_1)(C_{01} - C_{11})} \quad (5.11)$$

由以上推导可以看出, 当先验概率密度函数 $f(\alpha), f(\beta)$ 已知, 且代价函数与未知参量无关时, 复合假设下 Bayes 准则同简单假设下 Bayes 准则有相同的似然比检验形式。复合假设检验时的似然比 $l(x)$ 是对所有可能未知参量 α, β 取平均而求得的。

在复合假设情况下, 漏报概率和虚警概率分别为

$$P(D_0 | \alpha, H_1) = \int_{D_0} f(x | \alpha, H_1) dx \quad (5.12)$$

$$P(D_1 | \beta, H_0) = \int_{D_1} f(x | \beta, H_0) dx \quad (5.13)$$

从式(5.12)和式(5.13)中, 可以看到虚警概率 $P(D_1 | \beta, H_0)$ 和漏报概率 $P(D_0 | \alpha, H_1)$ 分别是随机参量 α, β 的函数。为了消除随机参量带来的不确定性, 应对随机参量求统计平均, 从而得到平均虚警概率和平均漏报概率分别为

$$\begin{aligned} P(D_1 | H_0) &= \int_{\{\beta\}} P(D_1 | \beta, H_0) f(\beta) d\beta \\ &= \int_{D_1} \int_{\{\beta\}} f(x | \beta, H_0) f(\beta) d\beta dx \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} P(D_0 | H_1) &= \int_{\{\alpha\}} P(D_0 | \alpha, H_1) f(\alpha) d\alpha \\ &= \int_{D_0} \int_{\{\alpha\}} f(x | \alpha, H_1) f(\alpha) d\alpha dx \end{aligned} \quad (5.15)$$

很多情况下, H_0 假设是简单假设, H_1 假设是复合假设。若代价因子与未知参量无关, 则 Bayes 准则的判决规则为

$$l(x) = \frac{\int_{\{\alpha\}} f(x | \alpha, H_1) f(\alpha) d\alpha}{f(x | H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(H_0)(C_{10} - C_{00})}{P(H_1)(C_{01} - C_{11})} \quad (5.16)$$

由于 H_0 是简单假设, 此时的虚警概率和平均虚警概率一样, 即

$$P(D_1 | H_0) = \int_{D_1} f(x | H_0) dx \quad (5.17)$$

在 Bayes 准则中,不仅要求知道代价函数和各种假设的先验概率,还要知道随机参量的先验密度函数。当代价函数和先验概率均未知时,可采用 Neyman-Pearson 准则。

5.1.2 复合假设检验的 Neyman-Pearson 准则

在雷达检测中, H_0 假设是简单假设, H_1 假设是复合假设,而且一般来说先验概率和代价因子都是未知的,此时可以采用奈曼-皮尔逊准则。根据式(3.54),此时设判决门限为 λ_0 ,则判决公式为

$$l(\mathbf{x}) = \frac{\int_{\mathbf{a}} f(\mathbf{x} | \mathbf{a}, H_1) f(\mathbf{a}) d\mathbf{a}}{f(\mathbf{x} | H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \lambda_0 \quad (5.18)$$

λ_0 应由约束条件

$$P(D_1 | H_0) = \int_{D_1} f(\mathbf{x} | H_0) d\mathbf{x} = \int_{\lambda_0}^{\infty} f(\mathbf{x} | H_0) d\mathbf{x} = A(\text{常数}) \quad (5.19)$$

求得。

奈曼-皮尔逊准则是在 $P(D_1 | H_0)$ 给定的条件下,选择判决区域 D_0 和 D_1 ,使 $P(D_0 | \mathbf{a}, H_1)$ 达到极小。但由于漏报概率是随机参量 $\mathbf{a}$ 的函数,所以无法避开随机参量的先验概率密度函数 $f(\mathbf{a})$ 。

一种最简单的情况就是在给定 $P(D_1 | H_0)$ 条件下,不论 $\mathbf{a}$ 为何值,判决区域 D_0 和 D_1 的划分,总可以使 $P(D_0 | \mathbf{a}, H_1)$ 达到最小,即对一切 $\mathbf{a}$ 值均最佳,故对任何先验分布 $f(\mathbf{a})$ 均为最佳,这种检验称为一致最大势检验。此时, $f(\mathbf{a})$ 未知不影响判决过程。

【例 5.1】 设观测矢量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的分量 x_i 为独立的具有方差 σ^2 的高斯随机变量,在 H_0 假设下其均值为 0,在 H_1 假设下其均值 $a > 0$ (a 为随机参量)。利用奈曼-皮尔逊准则划分判决区域。

解: 两种假设下的联合概率密度函数分别为

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} | H_0) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n e^{-\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2\sigma^2}} \\ f(\mathbf{x} | a, H_1) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n e^{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - a)^2}{2\sigma^2}} \\ l(\mathbf{x} | a) &= \frac{f(\mathbf{x} | a, H_1)}{f(\mathbf{x} | H_0)} = e^{\frac{a}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{na^2}{2\sigma^2}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} l_0 \\ \ln l(\mathbf{x} | a) &= \frac{a}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{na^2}{2\sigma^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \ln l_0 \\ \sum_{i=1}^n x_i &\underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{na}{2} + \frac{\sigma^2}{a} \ln l_0 \end{aligned}$$

令 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ 为一统计检验量,得

$$\bar{x} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{a}{2} + \frac{\sigma^2}{an} \ln l_0 = \beta$$

统计量 $\bar{x}$ 是 n 个高斯随机变量的线性组合,故它也服从高斯分布,其均值在 H_1 和 H_0

假设下分别为 a 和 0 , 方差为 σ^2/n , 即

$$f(\bar{x} | H_0) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{n\bar{x}^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(\bar{x} | a, H_1) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{n(\bar{x}-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$P(D_1 | H_0) = \int_{\beta}^{\infty} f(\bar{x} | H_0) d\bar{x}$$

根据给定的 $P(D_1 | H_0)$, 便可求出 β 值, 从而划分判决区域 D_0 和 D_1 , 它与 a 无关。

5.1.3 复合假设检验的最大似然检验准则

在先验概率密度函数 $f(\alpha)$ 和 $f(\beta)$ 未知, 且不存在一致最大势检验的情况下, 可采用最大似然检验。即先找出使条件似然函数 $f(x | \alpha, H_1)$ 达到最大的 α 值, 记作 $\hat{\alpha}$, 使 $f(x | \beta, H_0)$ 达到最大的 β 值, 记作 $\hat{\beta}$ 。 $\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\beta}$ 称为随机参量 α 和 β 的最大似然估计量。

利用这些最大似然估计量, 就可以构成广义似然比进行信号检测, 即

$$l(x) = \frac{f(x | \alpha, H_1)}{f(x | \beta, H_0)} = \frac{f(x | \hat{\alpha}, H_1)}{f(x | \hat{\beta}, H_0)} \quad (5.20)$$

由于用估计量 $\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\beta}$ 代替了随机参量 α 和 β 的真实值, 检测结果可能不是最佳的, 但一般接近最佳。

5.2 随机相位信号的检测

在随机参量信号检测中, 最常见的随机参量信号是相位。如许多通信系统中, 接收信号的相位不仅取决于发射信号的初相, 而且还取决于路径上的延时。故一般无法预先确定, 通常假设相位 θ 在区间 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布。相位均匀分布意味着完全缺乏相位信息, 是一种最不利的分布。

5.2.1 最佳检测系统的结构

设发送端发送的二元信号为

$$s_0(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (5.21)$$

$$s_1(t) = A \sin(\omega t + \theta), \quad 0 \leq t \leq T \quad (5.22)$$

式中, 振幅 A 、频率 ω 及到达时间 T 是已知的, 相位 θ 是随机变量, 其先验概率密度函数 $f(\theta)$ 服从均匀分布, 即

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5.23)$$

则接收端对应的两个假设为

$$H_0: x(t) = s_0(t) + n(t) = n(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (5.24)$$

$$H_1: x(t) = s_1(t) + n(t) = A \sin(\omega t + \theta) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (5.25)$$

式中, $n(t)$ 为信道上叠加的均值为 0, 功率谱密度函数为 $N_0/2$ 的高斯白噪声。

对于高斯白噪声中随机参量信号的似然函数, 可以通过类似 4.1 节的讨论, 采用“连续抽样”的方法得到, 也可以直接利用 4.1 节的结果, 根据式(4.15)和式(4.16), 可得

$$f(\mathbf{x} | H_0) = F e^{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - s_0(t)]^2 dt} = F e^{-\frac{1}{N_0} \int_0^T x^2(t) dt} \quad (5.26)$$

$$f(\mathbf{x} | H_1, \theta) = F e^{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - s_1(t)]^2 dt} = F e^{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - A \sin(\omega t + \theta)]^2 dt} \quad (5.27)$$

式中, F 是常数。

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} | H_1) &= \int_{\{\theta\}} f(\mathbf{x} | H_1, \theta) f(\theta) d\theta \\ &= F \int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [x^2(t) - 2Ax(t) \sin(\omega t + \theta) + A^2 \sin^2(\omega t + \theta)] dt} \frac{1}{2\pi} d\theta \\ &= F e^{-\frac{1}{N_0} \int_0^T x^2(t) dt} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{A^2}{N_0} \int_0^T \sin^2(\omega t + \theta) dt} e^{\frac{2A}{N_0} \int_0^T x(t) \sin(\omega t + \theta) dt} \frac{1}{2\pi} d\theta \end{aligned} \quad (5.28)$$

一般取 $T = k\pi/\omega$, 则有

$$\int_0^T \sin^2(\omega t + \theta) dt = \int_0^T \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(\omega t + \theta) \right] dt = \frac{T}{2} \quad (5.29)$$

将上式代入式(5.28), 可得

$$f(\mathbf{x} | H_1) = F e^{-\frac{1}{N_0} \int_0^T x^2(t) dt} e^{\frac{A^2 T}{2N_0}} \int_0^{2\pi} e^{\frac{2A}{N_0} \int_0^T x(t) \sin(\omega t + \theta) dt} \frac{1}{2\pi} d\theta \quad (5.30)$$

一般情况下, 代价函数与 θ 无关, 根据 Bayes 准则得出判决规则为

$$l(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x} | H_1)}{f(\mathbf{x} | H_0)} = \frac{\int_{\{\theta\}} f(\mathbf{x} | H_1, \theta) f(\theta) d\theta}{f(\mathbf{x} | H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} l_0 \quad (5.31)$$

由式(5.26)和式(5.30), 得似然比为

$$l(\mathbf{x}) = e^{-\frac{A^2 T}{2N_0}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\frac{2A}{N_0} \int_0^T x(t) \sin(\omega t + \theta) dt} d\theta \quad (5.32)$$

根据 $\sin(\omega t + \theta) = \sin \omega t \cos \theta + \cos \omega t \sin \theta$, 可知

$$\int_0^T x(t) \sin(\omega t + \theta) dt = \cos \theta \int_0^T x(t) \sin \omega t dt + \sin \theta \int_0^T x(t) \cos \omega t dt \quad (5.33)$$

令

$$\begin{aligned} x_c &= \int_0^T x(t) \sin \omega t dt \\ x_s &= \int_0^T x(t) \cos \omega t dt \end{aligned} \quad (5.34)$$

则式(5.33)可变为

$$\begin{aligned} \int_0^T x(t) \sin(\omega t + \theta) dt &= x_c \cos \theta + x_s \sin \theta \\ &= \sqrt{x_c^2 + x_s^2} \left[\frac{x_c}{\sqrt{x_c^2 + x_s^2}} \cos \theta + \frac{x_s}{\sqrt{x_c^2 + x_s^2}} \sin \theta \right] \\ &= \sqrt{x_c^2 + x_s^2} [\cos \gamma \cos \theta + \sin \gamma \sin \theta] \\ &= \sqrt{x_c^2 + x_s^2} \cos(\theta - \gamma) \\ &= M \cos(\theta - \gamma) \end{aligned} \quad (5.35)$$

式中,

$$M = \sqrt{x_c^2 + x_s^2} = \sqrt{\left(\int_0^T x(t) \sin \omega t dt\right)^2 + \left(\int_0^T x(t) \cos \omega t dt\right)^2}$$

$$\cos \gamma = \frac{x_c}{\sqrt{x_c^2 + x_s^2}} = \frac{x_c}{M}, \quad \sin \gamma = \frac{x_s}{\sqrt{x_c^2 + x_s^2}} = \frac{x_s}{M}$$

将式(5.35)代入式(5.32),得到似然比

$$l(\mathbf{x}) = e^{-\frac{A^2 T}{2N_0}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\frac{2AM}{N_0} \cos(\theta - \gamma)} d\theta = e^{-\frac{A^2 T}{2N_0}} I_0 \left[\frac{2AM}{N_0} \right] \quad (5.36)$$

其中, $I_0 \left[\frac{2AM}{N_0} \right] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\frac{2AM}{N_0} \cos(\theta - \gamma)} d\theta$ 称为零阶修正贝塞尔函数。

于是判决规则变为

$$e^{\frac{A^2 T}{2N_0}} I_0 \left[\frac{2AM}{N_0} \right] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} l_0 \quad (5.37)$$

两边取对数,得

$$\ln I_0 \left[\frac{2AM}{N_0} \right] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{A^2 T}{2N_0} + \ln l_0 \quad (5.38)$$

可见,要组成最佳检测系统,就需要计算 $\ln I_0 \left[\frac{2AM}{N_0} \right]$,较为复杂。由于 $I_0 \left[\frac{2AM}{N_0} \right]$ 和 $\frac{2AM}{N_0}$ 以及 $\ln I_0 \left[\frac{2AM}{N_0} \right]$ 和 $I_0 \left[\frac{2AM}{N_0} \right]$ 均为单调变化,故上述判决可改写为

$$M \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \beta \quad (5.39)$$

式中, M 称为检验统计量; β 为判决门限。检测系统如图 5.1 所示,这种接收机通常称为正交接收机。

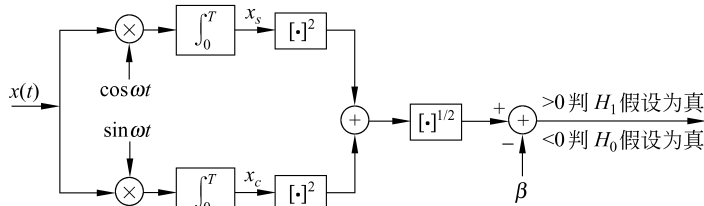


图 5.1 正交接收机原理框图

图 5.1 所示的正交接收机还可以进一步简化,设计一个与 $\sin \omega t$ 相匹配的滤波器,其冲激响应为

$$h(t) = \sin \omega(T - t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (5.40)$$

当 $x(t)$ 输入该滤波器时,输出为

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_0^t x(\tau) \sin \omega(T - t + \tau) d\tau$$

$$= \int_0^t x(\tau) [\sin \omega(T - t) \cos \omega \tau + \cos \omega(T - t) \sin \omega \tau] d\tau$$

$$= \sin\omega(T-t) \int_0^t x(\tau) \cos\omega\tau d\tau + \cos\omega(T-t) \int_0^t x(\tau) \sin\omega\tau d\tau \quad (5.41)$$

根据数学公式

$$\begin{aligned} a \sin x + b \cos x &= \sqrt{a^2 + b^2} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right] \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\sin y \sin x + \cos y \cos x) \\ &= M \cos(y - x) \end{aligned} \quad (5.42)$$

式中, $M = \sqrt{a^2 + b^2}$ 为 $a \sin x + b \cos x$ 的包络, 角度 $y = \arctan \frac{a}{b}$ 。

对照式(5.42), 可知式(5.41)在 $t = T$ 时的包络为

$$M = \sqrt{\left(\int_0^T x(\tau) \cos\omega\tau d\tau \right)^2 + \left(\int_0^T x(\tau) \sin\omega\tau d\tau \right)^2} \quad (5.43)$$

此式正好与式(5.35)中 M 的表达式一致, 这说明使输入信号 $x(t)$ 通过与 $\sin\omega t$ 相匹配的滤波器, 其后加上一个包络检波器, 在 T 时刻的输出就是 M 。匹配滤波器和包络检波器的组合常常称为非相干匹配滤波器, 如图 5.2 所示。

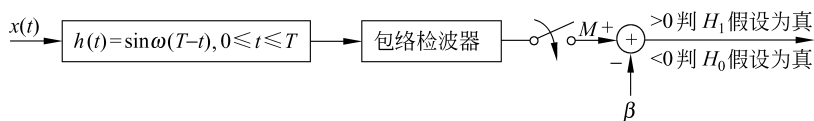


图 5.2 非相干匹配滤波器原理框图

5.2.2 检测性能

由式(5.39)可知, 判决的关键是计算检测统计量 M 的值, 然后再与门限值 β 进行比较, 检测器可以采用两种形式——正交接收机和非相干匹配滤波器, 其区别仅在于计算 M 的方法不同。

要计算系统的检测性能, 首先要求出 M 的条件概率密度函数。但是 M 的条件概率密度函数不易直接求出, 一般需要先求 x_c 和 x_s 的联合概率密度函数, 然后通过 M 与 x_c 、 x_s 的关系, 用雅可比变换来求出 M 的条件概率密度函数。

由于 $x(t)$ 服从高斯分布, 而 x_c 、 x_s 都是 $x(t)$ 经过线性变换得到的, 所以也是高斯随机变量, 只要求出它们的条件数学期望及方差, 便可确定它们的条件概率密度函数。

对于 H_1 假设及未知的初相 θ , 考虑到高斯白噪声 $n(t)$ 的均值为零, 则 x_c 的条件数学期望为

$$\begin{aligned} E[x_c | H_1, \theta] &= E \left[\int_0^T [A \sin(\omega t + \theta) + n(t)] \sin\omega t dt \right] \\ &= E \left[\int_0^T A \sin(\omega t + \theta) \sin\omega t dt + \int_0^T n(t) \sin\omega t dt \right] \\ &= E \left[\int_0^T \frac{A}{2} [\cos\theta - \cos(2\omega t + \theta)] dt \right] + \int_0^T E[n(t)] \sin\omega t dt \\ &= \frac{AT}{2} \cos\theta \end{aligned} \quad (5.44)$$

同理, x_s 的条件数学期望为

$$E[x_s | H_1, \theta] = \frac{AT}{2} \sin \theta \quad (5.45)$$

考虑到白噪声 $n(t)$ 的自相关函数为 $\frac{N_0}{2} \delta(\tau)$, 则 x_c 的条件方差为

$$\begin{aligned} \text{Var}[x_c | H_1, \theta] &= E[(x_c - E[x_c | H_1, \theta])^2] \\ &= E \left[\left\{ \int_0^T [A \sin(\omega t + \theta) + n(t)] \sin \omega t dt - \frac{AT}{2} \cos \theta \right\}^2 \right] \\ &= E \left[\left[\int_0^T n(t) \sin \omega t dt \right]^2 \right] \\ &= E \left[\int_0^T \int_0^T n(t) n(\tau) \sin \omega t \sin \omega \tau d\tau dt \right] \\ &= \int_0^T \int_0^T E[n(t) n(\tau)] \sin \omega t \sin \omega \tau d\tau dt \\ &= \int_0^T \int_0^T R_n(t - \tau) \sin \omega t \sin \omega \tau d\tau dt \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{N_0 T}{4} \end{aligned} \quad (5.46)$$

同理, x_s 的条件方差为

$$\text{Var}[x_s | H_1, \theta] = \frac{N_0 T}{4} \quad (5.47)$$

x_c 与 x_s 的条件方差相同, 均用 σ_T^2 表示, 即 $\sigma_T^2 = N_0 T / 4$ 。

x_c 和 x_s 的协方差为

$$\begin{aligned} &E[(x_c - E[x_c | H_1, \theta])(x_s - E[x_s | H_1, \theta])] \\ &= E \left[\int_0^T \int_0^T n(t) n(\tau) \cos \omega \tau \sin \omega t d\tau dt \right] \\ &= \int_0^T \int_0^T E[n(t) n(\tau)] \cos \omega \tau \sin \omega t d\tau dt \\ &= \int_0^T \int_0^T R(t - \tau) \cos \omega \tau \sin \omega t d\tau dt \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T \cos \omega t \sin \omega t dt = 0 \end{aligned} \quad (5.48)$$

即 x_c 和 x_s 是互不相关的高斯随机变量, 即相互独立, 故 x_c 和 x_s 的联合概率密度函数为各自概率密度函数的乘积, 即

$$\begin{aligned} f(x_c | H_1, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_T} e^{-\frac{(x_c - \frac{AT}{2} \cos \theta)^2}{2\sigma_T^2}} \\ f(x_s | H_1, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_T} e^{-\frac{(x_s - \frac{AT}{2} \sin \theta)^2}{2\sigma_T^2}} \\ f(x_c, x_s | H_1, \theta) &= \frac{1}{2\pi\sigma_T^2} e^{-\frac{1}{2\sigma_T^2} \left[(x_c - \frac{AT}{2} \cos \theta)^2 + (x_s - \frac{AT}{2} \sin \theta)^2 \right]} \end{aligned} \quad (5.49)$$

现由变量 (x_c, x_s) 变换到变量 (M, γ) , 其关系为

$$x_c = M \cos \gamma, \quad x_s = M \sin \gamma \quad (5.50)$$

变换的雅可比式是

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial M} & \frac{\partial x_s}{\partial M} \\ \frac{\partial x_c}{\partial \gamma} & \frac{\partial x_s}{\partial \gamma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -M\sin\gamma & M\cos\gamma \end{vmatrix} = M \quad (5.51)$$

得

$$\begin{aligned} f(M, \gamma | H_1, \theta) &= J f(x_c, x_s | H_1, \theta) \\ &= \frac{M}{2\pi\sigma_T^2} e^{-\frac{1}{2\sigma_T^2} \left[x_c^2 - 2 \cdot \frac{AT}{2} x_c \cos\theta + \left(\frac{AT}{2}\right)^2 \cos^2\theta + x_s^2 - 2 \cdot \frac{AT}{2} x_s \sin\theta + \left(\frac{AT}{2}\right)^2 \sin^2\theta \right]} \bigg|_{\substack{x_c = M\cos\gamma \\ x_s = M\sin\gamma}} \\ &= \frac{M}{2\pi\sigma_T^2} e^{-\frac{1}{2\sigma_T^2} \left[M^2 + \left(\frac{AT}{2}\right)^2 - ATM\cos(\theta - \gamma) \right]} \end{aligned} \quad (5.52)$$

其中, $\gamma = \arctan\left(\frac{x_s}{x_c}\right) (0 \leq \gamma \leq 2\pi)$ 。

$$\begin{aligned} f(M | H_1, \theta) &= \int_0^{2\pi} f(M, \gamma | H_1, \theta) d\gamma \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{M}{2\pi\sigma_T^2} e^{-\frac{1}{2\sigma_T^2} \left[M^2 + \left(\frac{AT}{2}\right)^2 - ATM\cos(\theta - \gamma) \right]} d\gamma \\ &= \frac{M}{\sigma_T^2} e^{-\frac{1}{2\sigma_T^2} \left[M^2 + \left(\frac{AT}{2}\right)^2 \right]} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\frac{ATM}{2\sigma_T^2} \cos(\theta - \gamma)} d\gamma \\ &= \frac{M}{\sigma_T^2} e^{-\frac{1}{2\sigma_T^2} \left[M^2 + \left(\frac{AT}{2}\right)^2 \right]} I_0 \left[\frac{ATM}{2\sigma_T^2} \right] \end{aligned} \quad (5.53)$$

从上式可以看到, 条件概率密度函数 $f(M | H_1, \theta)$ 与 θ 无关, 所以 H_1 假设下的条件概率密度函数为

$$\begin{aligned} f(M | H_1) &= \int_0^{2\pi} f(M | H_1, \theta) f(\theta) d\theta \\ &= \frac{M}{\sigma_T^2} e^{-\frac{1}{2\sigma_T^2} \left[M^2 + \left(\frac{AT}{2}\right)^2 \right]} I_0 \left[\frac{ATM}{2\sigma_T^2} \right] \end{aligned} \quad (5.54)$$

为莱斯分布。

对于 H_0 假设, 有 $A=0, I_0(0)=1$, 代入上式, 得

$$f(M | H_0) = \frac{M}{\sigma_T^2} e^{-\frac{M^2}{2\sigma_T^2}} \quad (5.55)$$

为瑞利分布。

虚警概率为

$$\begin{aligned} P_f &= P(D_1 | H_0) = \int_{\beta}^{\infty} f(M | H_0) dM = \int_{\beta}^{\infty} \frac{M}{\sigma_T^2} e^{-\frac{M^2}{2\sigma_T^2}} dM \\ &= -e^{-\frac{M^2}{2\sigma_T^2}} \bigg|_{\beta}^{\infty} = e^{-\frac{\beta^2}{2\sigma_T^2}} \end{aligned} \quad (5.56)$$

检测概率为

$$P_D = P(D_1 | H_1) = \int_{\beta}^{\infty} f(M | H_1) dM$$