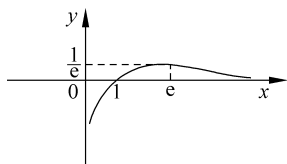


第 1 章 函数

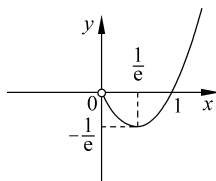
函数是数学的基石,贯穿整个高中数学阶段,函数的思想指导着我们解决各类代数问题,说“得函数者得高考”略显夸张,但“得函数者得代数”是成立的。利用函数既可以解决代数问题,也可以通过数的角度去认识形,解决几何问题。

常用函数图像

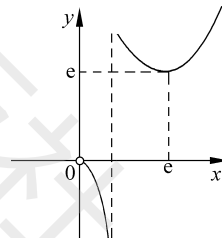
1. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$



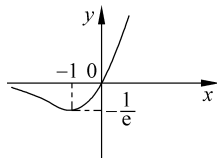
2. $f(x) = x \ln x$



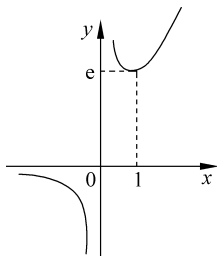
3. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$



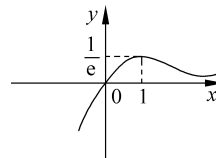
4. $f(x) = x e^x$



5. $f(x) = \frac{e^x}{x}$



6. $f(x) = \frac{x}{e^x}$



刷题散点图

让我们用数学的思想来备战高考数学,如统计中的散点图可展示出数据的分布和聚合情况,甚至可以得到趋势线公式。大道至简,请在刷题后完成属于你的本章刷题散点图,直接用你刷题的黑笔在题号上标出即可,做对画√,做错画×。

完成后,根据题号的分布和聚合情况,合理安排你的二刷甚至三刷。



1.1 指数与对数的运算

核心笔记

代数运算是解决数学问题的必备硬功夫,此处要求熟记各类代数式的运算及变形,逆向使用。同时也对文字的分析 and 处理有一定要求,简单说就是看得懂题,算得对题。

【1】(2018·上海·11·))))

已知常数 $a > 0$, 函数 $f(x) = \frac{2^x}{2^x + ax}$ 的图像经过点 $P\left(p, \frac{6}{5}\right)$, $Q\left(q, -\frac{1}{5}\right)$, 若 $2^{p+q} = 36pq$, 则 $a =$ _____。

【2】(2016·浙江·12·)))))

已知 $a > b > 1$ 。若 $\log_a b + \log_b a = \frac{5}{2}$, $a^b = b^a$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____。

【3】(2022·新课标全国甲·12·)))))

已知 $9^m = 10$, $a = 10^m - 11$, $b = 8^m - 9$, 则 ()。

- A. $a > 0 > b$ B. $a > b > 0$
C. $b > a > 0$ D. $b > 0 > a$

1.2 函数的单调性及其应用

核心笔记

函数的单调性是函数极其重要的性质,是用来解决值域、最值、极值的依据。求单调性的方法分别是:观察法、性质法、图像法、复合法、导数法。

务必要根据相应函数使用对应的方法。单调性的四则运算要重视,这也是判断单调性的利器。比较大小亦可通过构造函数来使用函数单调性进行比较。

1. 若 $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, 且 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 都是在 D 上单调递增的函数, 则 $y = f(x) \cdot g(x)$ 是 D 上的单调函数。

2. 对于复合函数要严格分清内外层函数,要明白内层函数是通过自身值域充当外层定义域,进而再使用“同增异减”进行复合函数的单调性判断。

【4】(2015·新课标全国一·10·)))))

已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} - 2, & x \leq 1, \\ -\log_2(x+1), & x > 1, \end{cases}$

且 $f(a) = -3$, 则 $f(6-a) =$ ()。

- A. $-\frac{7}{4}$ B. $-\frac{5}{4}$ C. $-\frac{3}{4}$ D. $-\frac{1}{4}$

【5】(2011·江苏·11·★★★)

已知实数 $a \neq 0$, 函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+a, & x < 1, \\ -x-2a, & x \geq 1. \end{cases}$ 若 $f(1-a) = f(1+a)$, 则 a 的值为_____。

【6】(2015·山东·文10·★★★)

设函数 $f(x) = \begin{cases} 3x-b, & x < 1, \\ 2^x, & x \geq 1. \end{cases}$ 若 $f\left(f\left(\frac{5}{6}\right)\right) = 4$, 则 $b =$ ()。

A. 1 B. $\frac{7}{8}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

【7】(2015·山东·理10·★★★)

设函数 $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x < 1, \\ 2^x, & x \geq 1, \end{cases}$ 则满足 $f(f(a)) = 2^{f(a)}$ 的 a 的取值范围是()。

A. $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ B. $[0, 1]$
C. $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$ D. $[1, +\infty)$

【8】(2017·江苏·11·★★★)

已知函数 $f(x) = x^3 - 2x + e^x - \frac{1}{e^x}$, 其中 e 是自然对数的底数。若 $f(a-1) + f(2a^2) \leq 0$, 则实数 a 的取值范围是_____。

【9】(2011·天津·8·★★★)

设函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & x > 0, \\ \log_{\frac{1}{2}}(-x), & x < 0, \end{cases}$ 若 $f(a) > f(-a)$, 则实数 a 的取值范围是()。

A. $(-1, 0) \cup (0, 1)$
B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
C. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
D. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

【10】(2017·新课标全国三·15·★★★)

设函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ 2^x, & x > 0, \end{cases}$ 则满足 $f(x) + f\left(x - \frac{1}{2}\right) > 1$ 的 x 的取值范围是_____。

【11】(2014·浙江·15·★★★)

设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x < 0, \\ -x^2, & x \geq 0, \end{cases}$ 若 $f(f(a)) \leq 2$, 则实数 a 的取值范围是_____。

【12】(2014·上海·18·★★★)

$f(x) = \begin{cases} (x-a)^2, & x \leq 0, \\ x + \frac{1}{x} + a, & x > 0, \end{cases}$ 若 $f(0)$ 是

$f(x)$ 的最小值, 则 a 的取值范围为 ()。

- A. $[-1, 2]$ B. $[-1, 0]$
C. $[1, 2]$ D. $[0, 2]$

【13】(2012·山东·15·★★★)

若函数 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 在 $[-1, 2]$ 上的最大值为 4, 最小值为 m , 且函数 $g(x) = (1 - 4m)\sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数, 则 $a =$ _____。

【14】(2013·江苏·13·★★★)

平面直角坐标系 xOy 中, 设定点 $A(a, a)$, P 是函数 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ 图像上一动点, 若点 P, A 之间最短距离为 $2\sqrt{2}$, 则满足条件的实数 a 的所有值为_____。

【15】(2009·浙江·10·★★★★)

对于正实数 α , 记 M_α 为满足下述条件的函数 $f(x)$ 构成的集合: $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ 且 $x_2 > x_1$, 有 $-\alpha(x_2 - x_1) < f(x_2) - f(x_1) < \alpha(x_2 - x_1)$ 。下列结论正确的是 ()。

- A. 若 $f(x) \in M_{\alpha_1}, g(x) \in M_{\alpha_2}$, 则 $f(x) \cdot g(x) \in M_{\alpha_1 \cdot \alpha_2}$
B. 若 $f(x) \in M_{\alpha_1}, g(x) \in M_{\alpha_2}$, 且 $g(x) \neq 0$, 则 $\frac{f(x)}{g(x)} \in M_{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$
C. 若 $f(x) \in M_{\alpha_1}, g(x) \in M_{\alpha_2}$, 则 $f(x) + g(x) \in M_{\alpha_1 + \alpha_2}$
D. 若 $f(x) \in M_{\alpha_1}, g(x) \in M_{\alpha_2}$, 且 $\alpha_1 > \alpha_2$, 则 $f(x) - g(x) \in M_{\alpha_1 - \alpha_2}$

【16】(2017·浙江·17·★★★★)

已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \left| x + \frac{4}{x} - a \right| + a$ 在区间 $[1, 4]$ 上的最大值是 5, 则 a 的取值范围是_____。

【17】(2015·四川·9·★★★★)

如果函数 $f(x) = \frac{1}{2}(m-2)x^2 + (n-8)x + 1$ ($m \geq 0, n \geq 0$) 在区间 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上单调递减, 那么 mn 的最大值为()。

- A. 16 B. 18 C. 25 D. $\frac{81}{2}$

【18】(2012·大纲·9·★★★★)

已知 $x = \ln \pi$, $y = \log_5 2$, $z = e^{-\frac{1}{2}}$, 则()。

- A. $x < y < z$ B. $z < x < y$
C. $z < y < x$ D. $y < z < x$

【19】(2017·山东·7·★★★★)

若 $a > b > 0$, 且 $ab = 1$, 则下列不等式成立的是()。

- A. $a + \frac{1}{b} < \frac{b}{2^a} < \log_2(a+b)$
B. $\frac{b}{2^a} < \log_2(a+b) < a + \frac{1}{b}$
C. $a + \frac{1}{b} < \log_2(a+b) < \frac{b}{2^a}$
D. $\log_2(a+b) < a + \frac{1}{b} < \frac{b}{2^a}$

【20】(2018·新课标全国三·12·★★★★)

$a = \log_{0.2} 0.3$, $b = \log_2 0.3$, 则()。

- A. $a + b < ab < 0$ B. $ab < a + b < 0$
C. $a + b < 0 < ab$ D. $ab < 0 < a + b$

【21】(2020·新课标全国一·12·★★★★)

若 $2^a + \log_2 a = 4^b + 2 \log_4 b$, 则()。

- A. $a > 2b$ B. $a < 2b$
C. $a > b^2$ D. $a < b^2$

【22】(2016·浙江·7·★★★★)

已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x) \geq |x|$, 且 $f(x) \geq 2^x, x \in \mathbf{R}$. ().

- A. 若 $f(a) \leq |b|$, 则 $a \leq b$
- B. 若 $f(a) \leq 2^b$, 则 $a \leq b$
- C. 若 $f(a) \geq |b|$, 则 $a \geq b$
- D. 若 $f(a) \geq 2^b$, 则 $a \geq b$

【23】(2013·辽宁·11·★★★★)

已知函数 $f(x) = x^2 - 2(a+2)x + a^2$, $g(x) = -x^2 + 2(a-2)x - a^2 + 8$. 设 $H_1(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, $H_2(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ ($\max\{p, q\}$ 表示 p, q 中的较大值, $\min\{p, q\}$ 表示 p, q 中的较小值), 记 $H_1(x)$ 的最小值为 A , $H_2(x)$ 的最大值为 B , 则 $A - B =$ ().

- A. 16
- B. -16
- C. $-16a^2 - 2a - 16$
- D. $16a^2 + 2a - 16$

【24】(2013·天津·8·★★★★)

已知函数 $f(x) = x(1+a|x|)$. 设关于 x 的不等式 $f(x+a) < f(x)$ 的解集为 A , 若

$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subseteq A$, 则实数 a 的取值范围是 ().

- A. $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$
- B. $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, 0\right)$
- C. $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$
- D. $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

【25】(2022·新课标全国乙·★★★★)

若 $f(x) = \ln \left| a + \frac{1}{1-x} \right| + b$ 是奇函数, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

1.3 函数的周期性与对称性

核心笔记

函数的奇偶性可以看成是特殊的对称性, 是从几何角度认识函数, 却又进行代数表达, 一定程度上形成了数和形的转化与相互关联。特殊的对称奇偶性结合平移可转换成一般对称。周期性反映了函数重复出

现的变化现象。函数的周期性和对称性都是高考中的重要考查内容。

1. 常见函数奇偶性

$y=x^n$ (n 为奇数) 为奇函数;

$y=x^n$ (n 为偶数) 为偶函数;

$y=\sin kx$ 为奇函数;

$y=\cos kx$ 为偶函数;

$y=\tan kx$ 为奇函数;

$y=a^x+a^{-x}$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) 为偶函数;

$y=a^x-a^{-x}$ 和 $y=a^{-x}-a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) 为奇函数;

$y=\frac{a^x+1}{a^x-1}$ 和 $y=\frac{1+a^x}{1-a^x}$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)

为奇函数;

$y=\log_a \frac{b+cx}{b-cx}$ 和 $y=\log_a (\sqrt{1+b^2x^2} \pm bx)$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) 为奇函数;

$y=\ln(e^{ax}+1)-\frac{ax}{2}$ 为偶函数;

$y=|bx+a|+|bx-a|$ 为偶函数;

$y=|bx+a|-|bx-a|$ 和 $y=|bx-a|-|bx+a|$ 为奇函数;

$y=f(a+bx)+f(a-bx)$ 为偶函数;

$y=f(a+bx)-f(a-bx)$ 和 $y=f(a-bx)-f(a+bx)$ 为奇函数。

2. 函数奇偶的运算

奇函数 $\pm$ 奇函数=奇函数;

偶函数 $\pm$ 偶函数=偶函数;

奇函数 $\times$ 奇函数=偶函数;

奇函数 $\times$ 偶函数=奇函数;

偶函数 $\times$ 偶函数=偶函数;

奇函数 $\pm$ 偶函数=非奇非偶函数。

3. 函数的对称性

(1) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(a+x)=f(b-x)$ 恒成立, 则 $f(x)$ 的对称轴为 $x=\frac{a+b}{2}$;

(2) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(a+x)=-f(b-x)$ 恒成立, 则 $f(x)$ 的对称中心为 $(\frac{a+b}{2}, 0)$;

(3) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(a+x)=c-f(b-x)$ 恒成立, 则 $f(x)$ 的对称中心为 $(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2})$ 。

4. 常见函数周期的判断

(1) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a)+f(x+b)=c$ (a, b, c 为常数), 则 $T=2|a-b|$ 。

特例: ① 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a)=-f(x)$, 则 $T=2|a|$;

② 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a)=-f(x)+c$, 则 $T=2|a|$ 。

(2) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) \cdot f(x+b)=c$ (a, b, c 为常数), 则 $T=2|a-b|$ 。

特例: ① 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a)=\frac{1}{f(x)}$ (a 为常数), 则 $T=2|a|$;

② 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a)=-\frac{1}{f(x)}$ (a 为常数), 则 $T=2|a|$ 。

(3) ① 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = \frac{1+f(x+b)}{1-f(x+b)}$ (a, b 为常数), 则 $T = 4|a-b|$;

② 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = \frac{1-f(x+b)}{1+f(x+b)}$ (a, b 为常数), 则 $T = 2|a-b|$;

③ 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = \frac{f(x+b)+1}{f(x+b)-1}$ (a, b 为常数), 则 $T = 2|a-b|$;

④ 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = \frac{f(x+b)-1}{f(x+b)+1}$ (a, b 为常数), 则 $T = 4|a-b|$ 。

(4) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = f(x+2a) + f(x)$ 或 $f(x+a) = f(x+2a) \cdot f(x)$ (a 为常数), 则 $T = 6|a|$ 。

(5) 若函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(a, 0)$ 和点 $(b, 0)$ 对称, 则 $f(x)$ 是周期函数, $T = 2|a-b|$ 。

(6) 若函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x = a$ 和直线 $x = b$ 对称, 则 $f(x)$ 是周期函数, $T = 2|a-b|$ 。

(7) 若函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(a, 0)$ 和直线 $x = b$ 对称, 则 $f(x)$ 是周期函数, $T = 4|a-b|$ 。

【26】(2015 · 新课标全国一 · 12 · 333)

设函数 $y = f(x)$ 的图像与函数 $y = 2^{x+a}$ 的图像关于直线 $y = -x$ 对称, 且

$f(-2) + f(-4) = 1$, 则 $a = (\quad)$ 。

A. -1 B. 1 C. 2 D. 4

【27】(2013 · 上海 · 12 · 333)

设 a 为实常数, $y = f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = 9x + \frac{a^2}{x} + 7$, 若 $f(x) \geq a+1$ 对一切 $x \geq 0$ 成立, 则 a 的取值范围为_____。

【28】(2015 · 新课标全国一 · 12 · 333)

函数 $y = f(x)$ 的图像与函数 $y = g(x)$ 的图像关于直线 $x+y=0$ 对称, 则 $y = f(x)$ 的反函数是()。

A. $y = g(x)$ B. $y = g(-x)$
C. $y = -g(x)$ D. $y = -g(-x)$

【29】(2014 · 大纲 · 12 · 333)

已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x+2)$ 为偶函数, 且 $f(1) = 1$, 则 $f(8) + f(9) = (\quad)$ 。

A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

【30】 (2016 · 山东 · 9 · 🍷🍷🍷)

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ 。当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^3 - 1$; 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $f(-x) = -f(x)$; 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f\left(x - \frac{1}{2}\right)$, 则 $f(6) = (\quad)$ 。

- A. -2 B. -1 C. 0 D. 2

【31】 (2021 · 新课标全国甲 · 12 · 🍷🍷🍷)

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x+1)$ 为奇函数, $f(x+2)$ 为偶函数, 当 $x \in [1, 2]$ 时, $f(x) = ax^2 + b$ 。若 $f(0) + f(3) = 6$, 则 $f\left(\frac{9}{2}\right) = (\quad)$ 。

- A. $-\frac{9}{4}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{7}{4}$ D. $\frac{5}{2}$

【32】 (2016 · 江苏 · 11 · 🍷🍷🍷)

设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 2 的函数, 在区间 $[-1, 1)$ 上, $f(x) = \begin{cases} x+a, & -1 \leq x < 0, \\ \left|\frac{2}{5}-x\right|, & 0 \leq x < 1, \end{cases}$ 其中 $a \in \mathbf{R}$, 若

$f\left(-\frac{5}{2}\right) = f\left(\frac{9}{2}\right)$, 则 $f(5a)$ 的值是_____。

【33】 (2012 · 江苏 · 10 · 🍷🍷🍷)

设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 2 的函数, 在区间 $[-1, 1]$ 上, $f(x) = \begin{cases} ax+1, & -1 \leq x < 0, \\ \frac{bx+2}{x+1}, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$ 其中 $a, b \in \mathbf{R}$ 。若

$f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right)$, 则 $a+3b$ 的值为_____。

【34】 (2011 · 新课标全国 · 12 · 🍷🍷🍷)

函数 $y = \frac{1}{1-x}$ 的图像与函数 $y = 2\sin\pi x$ ($-2 \leq x \leq 4$) 的图像所有交点的横坐标之和等于()。

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8