

第5章

窄带系统和窄带随机信号

本章将要讨论一种特殊的线性系统和一种特殊的随机信号,即窄带系统和窄带随机信号。在电子系统中,窄带系统是很多的,如一般通信系统中的高频和中频放大器就是窄带系统。当随机信号通过窄带系统后,输出随机信号的功率谱密度函数常常被限制在窄带系统中心频率 ω_0 附近一个很窄的频率范围 $\Delta\omega$ 内(且 $\omega_0 \gg \Delta\omega$),这样的随机信号称为窄带随机信号或窄带随机过程,它是在雷达、通信中经常遇到并需要处理的一种极为重要的信号。

5.1 窄带系统及其特点

5.1.1 窄带系统及其包络线特性

窄带系统的幅频特性如图 5.1 所示。这种窄带系统只允许靠近高频 ω_0 附近的频率分量通过。

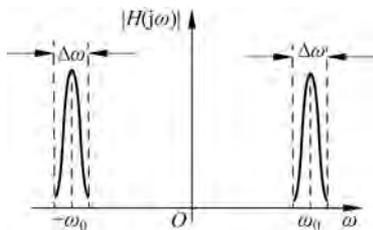


图 5.1 窄带系统的幅频特性

下面,用信号与系统里学过的复频域分析法,对窄带系统的系统函数 $H(s)$ 进行分析。一个实际的线性时不变系统的系统函数 $H(s)$,必是复变量 s 的实有理函数,这是系统函数的最基本的性质。

设窄带系统输入为 $x(t)$,输出为 $y(t)$, $x(t)$ 和 $y(t)$ 的拉普拉斯变换分别为 $X(s)$ 和 $Y(s)$ 。当系统结构已知时,其系统函数

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = A \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad (m < n) \quad (5.1.1)$$

式中,分母多项式为零时方程的根 p_1, p_2, \dots, p_n ,称为系统函数 $H(s)$ 的极点,分子多项式为零时方程的根 z_1, z_2, \dots, z_m 称为系统函数 $H(s)$ 的零点。所以,极点和零点或者位于 s 平面的实轴上,或者成对地位于与实轴对称的位置上。

把系统函数的极点和零点标绘在 s 平面中,就成为系统函数的极零点分布图,简称极零图。极零图也和频率特性一样,能够用来表示系统的特性。

物理可实现的无源网络,其系统函数 $H(s)$ 的极点只能在左半平面或虚轴上。只有理想和纯电抗网络,才能在虚轴上有一阶极点,而实际的无源网络都是有损耗的,所以它的极点只能在左半平面上。

由于窄带系统是低耗的无源网络,因此,它的系统函数 $H(s)$ 的极点一定是靠近虚轴的。又因窄带系统有 $\omega_0 \gg 0$ 和 $\omega_0 \gg \Delta\omega$,则 $H(s)$ 的极点远离原点且各通带内极点紧密成簇。

若系统是窄带的,且其极点簇关于中心线 $j\omega = \pm j\omega_0$ 对称,则该系统为窄带对称系统。窄带对称系统的幅频特性和极点分布分别如图 5.1 和图 5.2 所示。

例如,如图 5.3 所示的 RLC 电路,该电路的频率特性具有对称的带通特性,若选择合适的参数,使其中心频率远大于它的带宽,则可构成一个窄带对称系统。下面以它为

例来说明窄带系统的包络线特性。

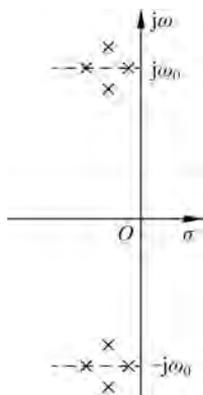


图 5.2 窄带对称系统函数的极点分布

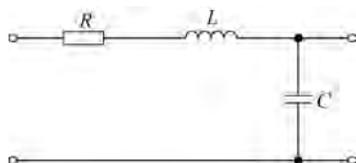


图 5.3 RLC 电路

图 5.3 所示的 RLC 电路的系统函数为

$$H(s) = \frac{1}{sC} = \frac{1}{LC} \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = \frac{1}{LC} \frac{1}{(s - p_1)(s - p_2)} \quad (5.1.2)$$

其中,

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\frac{1}{LC}}}{2} = -\frac{R}{2L} \pm j\frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{CR^2}{4L}} \\ &= -\alpha \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_0^2}} \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

式中, $\alpha = \frac{R}{2L}$ 为电路的衰减因子, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 为电路的谐振频率, $Q_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ 为电路的品质因数。一般地, 有 $Q_0 \gg 1$ 。所以

$$p_{1,2} \approx -\alpha \pm j\omega_0 \quad (5.1.4)$$

所以

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{LC} \frac{1}{(s - p_1)(s - p_2)} \\ &= \frac{1}{LC} \left[\frac{1}{p_1 - p_2} \frac{1}{(s - p_1)} - \frac{1}{p_1 - p_2} \frac{1}{(s - p_2)} \right] \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

则系统的冲激响应为

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{LC} \left[\frac{1}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \right] u(t) \\ &= \frac{1}{LC} \frac{1}{j2\omega_0} [e^{(-\alpha + j\omega_0)t} - e^{(-\alpha - j\omega_0)t}] u(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{j2LC\omega_0} e^{-\alpha t} [e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}] u(t) \\
 &= \frac{\omega_0^2}{j2\omega_0} e^{-\alpha t} 2j \sin\omega_0 t u(t) \\
 &= \omega_0 e^{-\alpha t} \sin\omega_0 t u(t) \tag{5.1.6}
 \end{aligned}$$

由式(5.1.6)可知,RLC 电路的频率特性为

$$H(j\omega) = \frac{\omega_0^2}{(\alpha + j\omega)^2 + \omega_0^2} \tag{5.1.7}$$

只要选择合适参数,使 $\omega_0 \gg 0$, 则 RLC 电路的幅频特性具有如图 5.1 所示的特性,即该电路为一个窄带对称系统。

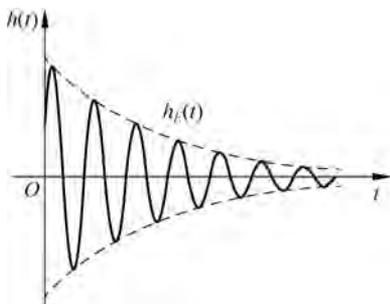


图 5.4 窄带对称系统的冲激响应

从式(5.1.6)可以看出,由 RLC 电路构成的窄带对称系统的冲激响应由慢变化的指数衰减部分 $\omega_0 e^{-\alpha t} u(t)$ 和 高频正弦振荡相乘构成。这一特点具有普遍意义。实际上,对于任何窄带对称系统,系统的冲激响应函数 $h(t)$ 总可以表示为

$$h(t) = h_E(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{5.1.8}$$

也就是说, $h(t)$ 可以分解成慢变化部分 $h_E(t)$ 和快速变化部分 $\cos(\omega_0 t + \varphi)$, 如图 5.4 所示。 $h_E(t)$ 称为窄带对称系统冲激响应的包络。

5.1.2 窄带对称系统的包络线定理

由式(5.1.8)可知,窄带对称系统的冲激响应可以表示为一个包络 $h_E(t)$ 和 高频正弦振荡 $\cos(\omega_0 t + \varphi)$ 相乘,那么,是否可以通过寻求包络 $h_E(t)$ 来确定窄带对称系统的冲激响应 $h(t)$ 呢? 包络线定理给出了解决这个问题的方法。

包络线定理的做法是先求得 $H(s)$, 取出它的包络 $h_E(t)$ 所对应的 $H_E(s)$, 对其进行拉普拉斯反变换,得到 $h_E(t)$, 再用 $h_E(t)$ 恢复 $h(t)$ 。这里拉普拉斯反变换的对象是比 $H(s)$ 简单得多的 $H_E(s)$, 当然问题被大大简化了。

包络线定理的证明比较复杂,这里只给出定理的具体步骤,而不予以证明。包络线定理的具体步骤是:

(1) 求出系统的系统函数 $H(s)$ 。例如,有一个三对共轭极点的系统,其系统函数为

$$H(s) = \frac{A}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)(s - p_1^*)(s - p_2^*)(s - p_3^*)} \tag{5.1.9}$$

(2) 求出 $H(s)$ 的极点分布图。式(5.1.9)的极点分布图如图 5.5 所示。

(3) 去掉一个极点簇(如去掉第三象限的极点簇),把余下的极点簇(如第二象限的极点簇)沿虚轴平移,使其极点簇中心对称线与实轴重合。例如,由图 5.5 可得到图 5.6。图 5.6 就是 $H(s)$ 派生出来的包络线 $H_E(s)$ 的极点分布图,也称为 $H(s)$ 的包络平面。

根据包络平面可求得包络的系统函数

$$H_E(s) = \frac{1}{(s - p'_1)(s - p'_2)(s - p'_3)} \quad (5.1.10)$$

式中, $p'_1 = p_1 - j\omega_0$, $p'_2 = p_2 - j\omega_0$, $p'_3 = p_3 - j\omega_0$ 。

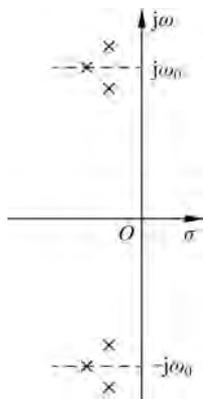


图 5.5 $H(s)$ 极点分布图

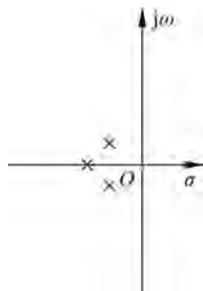


图 5.6 $H_E(s)$ 极点分布图

容易理解, $H_E(s)$ 是该窄带系统等效低通网络的系统函数。

(4) 对 $H_E(s)$ 进行拉普拉斯反变换得到 $h_E(t)$ 。

$$h_E(t) = \mathcal{L}^{-1} [H_E(s)] \frac{2A}{|K|} \quad (5.1.11)$$

式中, $K = (j2\omega_0)^n$, n 是 $H_E(s)$ 的极点的数。

(5) 由 $h_E(t)$ 求 $h(t)$ 。

$$h(t) = h_E(t) \cos(\omega_0 t - \theta_K) u(t) \quad (5.1.12)$$

式中, $\theta_K = \angle K$, 即 K 的辐角。 $u(t)$ 是单位阶跃函数。

包络线定理给出了一个求解窄带对称系统冲激响应的简单办法。特别是在许多情况下, 只关心 $h(t)$ 的包络 $h_E(t)$, 这时, 包络线定理就显得更重要了。此时, 并不需要首先从 $H(s)$ 求 $h(t)$, 然后设法整理成式(5.1.8)的形式来求得 $h_E(t)$, 而可以用包络线定理, 从 $H(s)$ 的 s 平面导出 $H_E(s)$ 的 s 平面, 然后根据式(5.1.11)求得 $h_E(t)$, 省去很多麻烦的运算。

例如, 用包络线定理的方法求图 5.3 所示的 RLC 电路的冲激响应 $h(t)$, 可使计算大大简化。

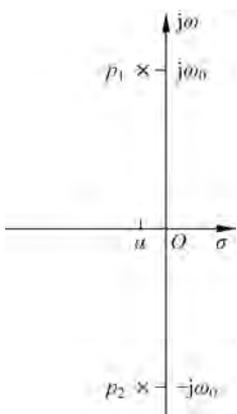
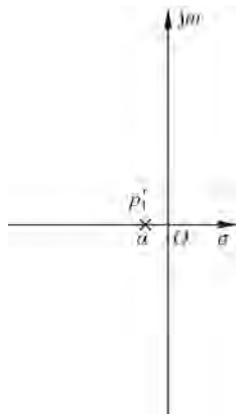
根据图 5.3 所示的 RLC 电路的系统函数式(5.1.2), 画出 $H(s)$ 的极点分布图, 如图 5.7 所示, 再派生得到 $H_E(s)$ 的极点分布图, 如图 5.8 所示。

因此, $H_E(s)$ 的极点为

$$p'_1 = p_1 - j\omega_0 = -\alpha$$

则

$$H_E(s) = \frac{1}{s - \alpha} \quad (5.1.13)$$


 图 5.7 $H(s)$ 极点分布图

 图 5.8 $H_E(s)$ 极点分布图

由式(5.1.13)知, $K = j2\omega_0$, 因而

$$|K| = 2\omega_0, \quad \theta_K = \angle K = \frac{\pi}{2}$$

所以

$$h_E(t) = \frac{2A}{|K|} e^{-at} u(t) = \frac{2\omega_0^2}{2\omega_0} e^{-at} u(t) = \omega_0 e^{-at} u(t) \quad (5.1.14)$$

由式(5.1.12)得

$$h(t) = h_E(t) \cos(\omega_0 t - \theta_K) u(t) = \omega_0 e^{-at} \sin \omega_0 t u(t) \quad (5.1.15)$$

可以看出, 式(5.1.15)与式(5.1.6)是完全一样的。而用包络线定理的方法求 $h(t)$ 比直接由 $H(s)$ 求 $h(t)$ 简单得多。

5.2 窄带随机信号的基本概念

5.2.1 窄带随机信号的定义

窄带随机信号是在通信、雷达等电子系统中经常遇到并需要处理的一类特殊的随机信号。窄带随机信号的定义如下。

定义 一个平稳随机信号 $X(t)$, 若它的功率谱密度函数 $S_X(\omega)$ 具有如下形式:

$$S_X(\omega) = \begin{cases} S_X(\omega) & \left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \leq |\omega| \leq \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right) \\ 0 & \text{(其他)} \end{cases} \quad (5.2.1)$$

而且信号的带宽 $\Delta\omega$ 满足 $\Delta\omega \ll \omega_0$, 则称此随机信号为窄带随机信号或窄带随机过程。 ω_0 为窄带随机信号的中心频率。

图 5.9 给出了典型窄带随机信号的功率谱密度。

由此可知, 窄带随机信号的功率谱分布在一个很窄的频率范围内, 且它的频带宽度

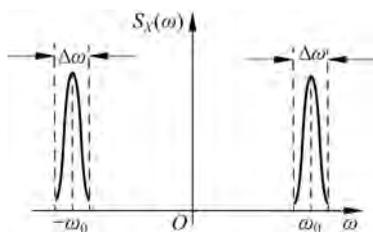


图 5.9 窄带随机信号的功率谱密度

远小于其中心频率。

显然,当具有均匀功率谱密度的白噪声通过窄带系统后,输出即为窄带随机信号。

5.2.2 窄带随机信号的准正弦振荡表示

从示波器上来观测窄带随机信号的样本函数波形,可看到如图 5.10 所示的类似于正弦波的波形,但此正弦波的幅度和相位都在缓慢地随机变化。因此,窄带随机信号表现为具有角频率 ω_0 ,幅度与相位对于角频率 ω_0 而言缓慢变化的正弦振荡形式。因此,可以把窄带随机信号表示为

$$n_0(t) = R(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)] \quad (5.2.2)$$

式中, $R(t)$ 是窄带随机信号的慢变化幅度,称为窄带随机信号的包络; $\theta(t)$ 是信号的慢变化相位,称为窄带随机信号的随机相位,它们都是随机过程。称式(5.2.2)为准正弦振荡。这看起来形似一个调幅的正弦波,调幅包络是一个随机起伏过程,频率的瞬时相位也不是确定的,这可以从图 5.10 中过横轴点之间的距离不相等看出来。

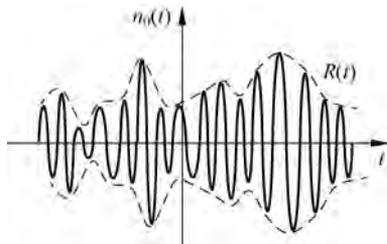


图 5.10 窄带随机信号的样本函数

下面通过分析具有均匀功率谱密度的理想白噪声通过窄带系统时发生的物理现象,来进一步说明窄带随机信号为什么可以表示为准正弦振荡。

如前所述,当窄带系统的输入端加入高斯白噪声 $n_i(t)$ 时,窄带系统输出即为窄带随机信号,如图 5.11 所示。

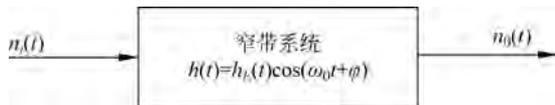


图 5.11 高斯白噪声输入窄带系统

高斯白噪声 $n_i(t)$ 是由大量 δ 型脉冲的随机叠加而成的,可表示为

$$n_i(t) = \sum_{k=1}^N a_k \delta(t - t_k) \quad (5.2.3)$$

当 δ 冲激函数作用于窄带系统时,由式(5.1.8)可知,窄带系统输出端的响应为

$$h(t) = h_E(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (5.2.4)$$

根据线性时不变系统的性质,大量 δ 冲激函数,一个接一个地作用于窄带系统,其输出 $n_0(t)$ 为

$$n_0(t) = \sum_{k=1}^N a_k h(t - t_k) = \sum_{k=1}^N a_k h_E(t - t_k) \cos[\omega_0(t - t_k) + \varphi] \quad (5.2.5)$$

式中的每一项 $a_k h_E(t - t_k) \cos[\omega_0(t - t_k) + \varphi]$ 都是一个衰减的正弦振荡,其振荡频率等于窄带系统本身的中心频率 ω_0 ,振荡振幅由作用脉冲的面积 a_k 决定。由于 δ 型脉冲的面积一般情况下是随机的,因此,每一个衰减的正弦振荡的起始振荡振幅也将是随机的。此外,窄带系统是有损耗的,因此在这种窄带系统中的自由振荡将是衰减的。

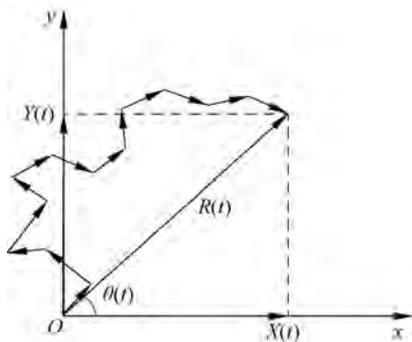


图 5.12 随机衰减矢量叠加示意图

根据电路理论的知识,可以用幅度衰减的旋转矢量来表示一个衰减的正弦振荡 $a_k h_E(t - t_k) \cos[\omega_0(t - t_k) + \varphi]$ 。这样,总和旋转矢量 $R(t)$ 就是这些幅度衰减的旋转矢量之和。这些旋转矢量都是相同的角速度 ω_0 ,并有相同的衰减规律。若坐标系以 ω_0 旋转,则旋转矢量可以画成并不旋转的矢量,如图 5.12 所示。

随着时间的推移,在随机的角度位置上,不断地会出现幅度为 $a_k h_E(t - t_k)$ 的新矢量,与原来的总和矢量相叠加,图 5.12 表示了这样的发展过程。

假定这个累加过程从 $t=0$ 开始,这样,矢量的数量随着时间的增长而增多,它们的叠加构成总和矢量。

由于所有矢量都是衰减的,因此,总和矢量的长度 $R(t)$ 不会因为矢量个数的增加而无限地增长下去,而是当 $R(t)$ 增至一定长度时,趋于上升的倾向与自然衰减的倾向互相平衡,而达到相对稳定状态。

这个所谓相对稳定状态,并不是确定地稳定于一个值上的,有时有可能增长的因素大于衰减的因素,有时则可能出现相反的情况。但是,一旦振幅大于“相对稳定状态值”,衰减的倾向就加强;而一旦振幅小于“相对稳定状态值”,衰减的倾向就减弱。这将有利于使振幅回升到“相对稳定状态”。这些不断出现的新矢量,将不断地随机改变总和矢量的长度,它们在平均意义上补足总矢量的长度,并且也不断地随机地改变总矢量的方位角,但是,总的来说,总矢量基本上还是一个大体上稳定的旋转的矢量,它相当于一个振幅和相位不断缓慢随机起伏的正弦波,称为准正弦波。因此,窄带随机信号的波形是如图 5.10 所示的准正弦振荡的波形。

5.2.3 窄带随机信号的莱斯表示

为了后面的讨论方便,可以将图 5.12 中每一小矢量分解为水平方向和垂直方向的

两个矢量。同样,总和矢量 $R(t)$ 也可看成由水平方向分量 $X(t)$ 和垂直方向分量 $Y(t)$ 的矢量和。这样,总和矢量的水平方向长度 $X(t)$ 由各水平小矢量长度 $x_k(t)$ 累加而得,垂直方向分量长度 $Y(t)$ 由各垂直小矢量长度 $y_k(t)$ 累加而得。

设第 k 个小矢量的振幅为 $r_k(t)$,与横坐标之间的夹角为 $\theta_k(t)$,则有

$$X(t) = \sum_{k=1}^N x_k(t) = \sum_{k=1}^N r_k(t) \cos \theta_k(t) = R(t) \cos \theta(t) \quad (5.2.6)$$

$$Y(t) = \sum_{k=1}^N y_k(t) = \sum_{k=1}^N r_k(t) \sin \theta_k(t) = R(t) \sin \theta(t) \quad (5.2.7)$$

显然

$$R(t) = \sqrt{X^2(t) + Y^2(t)} \quad (5.2.8)$$

$$\theta(t) = \arctan \frac{Y(t)}{X(t)} \quad (5.2.9)$$

于是,窄带随机信号还可以表示为

$$\begin{aligned} n_0(t) &= R(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)] \\ &= R(t) \cos \theta(t) \cos \omega_0 t - R(t) \sin \theta(t) \sin \omega_0 t \\ &= X(t) \cos \omega_0 t - Y(t) \sin \omega_0 t \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

称式(5.2.10)为窄带随机信号的莱斯表示式。

由于包络 $R(t)$ 和相位 $\theta(t)$ 都是时间的随机函数,所以 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 也是时间的随机函数,它们分别也是随机过程。下面不加证明,给出随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的一些性质。设窄带随机信号 $n_0(t)$ 为零均值的宽平稳随机信号,那么

- (1) $X(t)$ 和 $Y(t)$ 分别是宽平稳随机过程,且 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是联合宽平稳的;
- (2) $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的均值都为 0,即 $\overline{X(t)} = \overline{Y(t)} = 0 = \overline{n_0(t)}$;
- (3) $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的自相关函数相等,即 $B_X(\tau) = B_Y(\tau)$;
- (4) $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的功率谱密度相等,即 $S_X(\omega) = S_Y(\omega)$;
- (5) $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的平均功率相等,它们也等于窄带随机信号 $n_0(t)$ 的平均功率,即

$$B_X(0) = B_Y(0) = B_{n_0}(0) = \sigma^2;$$

$$(6) B_{XY}(\tau) = -B_{YX}(\tau);$$

$$(7) B_{XY}(0) = -B_{YX}(0) = 0;$$

$$(8) S_{XY}(\omega) = -S_{YX}(\omega)。$$

由此可见,对于零均值的平稳窄带随机信号 $n_0(t)$,其包络的水平 and 垂直分量 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是零均值的平稳随机过程, $X(t)$ 与 $Y(t)$ 两个分量与 $n_0(t)$ 具有相同的平均功率, $X(t)$ 与 $Y(t)$ 有相同的自相关函数和功率谱密度函数。

5.3 窄带高斯随机信号的包络和相位的分布

窄带高斯随机信号是在电子信息和通信系统中最常遇到的窄带信号。在许多实际应用中,常常需要检测窄带随机信号包络或相位的信息。下面研究窄带高斯随机信号包

络和相位的统计特性。

5.3.1 窄带高斯随机信号的包络和相位的一维分布

在 5.2 节讲过,具有均匀功率谱密度的理想白噪声通过窄带系统,其输出 $n_0(t)$ 为窄带随机信号,可表示为

$$\begin{aligned} n_0(t) &= \sum_{k=1}^N a_k h(t-t_k) = R(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)] \\ &= X(t) \cos \omega_0 t - Y(t) \sin \omega_0 t \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

这里,设 $n_0(t)$ 为零均值的平稳窄带高斯信号,其方差为 σ^2 (通常称为窄带高斯噪声)。

$$X(t) = \sum_{k=1}^N x_k(t) \quad (5.3.2)$$

$$Y(t) = \sum_{k=1}^N y_k(t) \quad (5.3.3)$$

由于各 δ 型脉冲相互独立,使得各 $a_k h(t-t_k)$ 也相互独立。所以,各 $x_k(t)$ 和各 $y_k(t)$ 也相互独立。根据中心极限定理:假设被研究的随机变量可以表示成大量独立随机变量之和,其中每一个随机变量对于总和只起微小的作用,则这个总和随机变量服从高斯分布。因此, $X(t)$ 和 $Y(t)$ 都服从高斯分布,且相互独立。即

$$X(t) \sim N(0, \sigma^2)$$

$$Y(t) \sim N(0, \sigma^2)$$

所以, $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的一维概率密度函数分别为

$$f_{X1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (5.3.4)$$

$$f_{Y1}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < y < +\infty) \quad (5.3.5)$$

$X(t)$ 和 $Y(t)$ 的二维联合概率密度函数为

$$\begin{aligned} f_2(x, y) &= f_{X1}(x) f_{Y1}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty) \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

因为

$$X(t) = R(t) \cos \theta(t) \quad (5.3.7)$$

$$Y(t) = R(t) \sin \theta(t) \quad (5.3.8)$$

因此,随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 在孤立时刻 t 所处的状态与随机过程 $R(t)$ 和 $\theta(t)$ 在孤立时刻 t 所处的状态满足如下函数关系:

$$x = R \cos \theta \quad (5.3.9)$$

$$y = R \sin \theta \quad (5.3.10)$$

通过二维随机变量的函数变换可求得 $R(t)$ 和 $\theta(t)$ 的二维联合概率密度 $\varphi_2(R, \theta)$ 。

根据概率密度函数的定义,有

$$\varphi_2(R, \theta) |dS_{R\theta}| = f_2(x, y) |dS_{xy}| \quad (5.3.11)$$

其中, dS_{xy} 是 xOy 平面的微面积, 而 $dS_{R\theta}$ 是 $RO\theta$ 平面的微面积。则

$$\varphi_2(R, \theta) = f_2(x, y) \left| \frac{dS_{xy}}{dS_{R\theta}} \right| = f_2(x, y) |J| \quad (5.3.12)$$

这里, J 是微面积变换关系的雅可比行列式

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial R} & \frac{\partial Y}{\partial R} \\ \frac{\partial X}{\partial \theta} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -R \sin \theta & R \cos \theta \end{vmatrix} = R \quad (5.3.13)$$

所以

$$\varphi_2(R, \theta) = R f_2(x, y) = \frac{R}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}} \quad (R \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (5.3.14)$$

因此, 随机过程 $R(t)$ 的一维概率密度函数为

$$f_{R1}(R) = \int_0^{2\pi} \varphi_2(R, \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{R}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}} d\theta = \frac{R}{\sigma^2} e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}} \quad (R \geq 0) \quad (5.3.15)$$

式(5.3.15)表明, 窄带高斯信号的包络的一维分布服从瑞利分布。

随机过程 $\theta(t)$ 的一维概率密度函数为

$$f_{\theta1}(\theta) = \int_0^{+\infty} \varphi_2(R, \theta) dR = \int_0^{+\infty} \frac{R}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}} dR$$

$$\text{令 } t = \frac{R^2}{2\sigma^2}$$

$$f_{\theta1}(\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-t} dt = \frac{1}{2\pi} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (5.3.16)$$

式(5.3.16)表明, 窄带高斯信号的相位的一维分布是均匀分布的。

比较式(5.3.14)、式(5.3.15)和式(5.3.16)可得

$$\varphi_2(R, \theta) = f_{R1}(R) f_{\theta1}(\theta) \quad (5.3.17)$$

即窄带高斯信号的包络和相位在同一时刻的状态是两个统计独立的随机变量。但是, 这并不意味着窄带高斯信号的包络 $R(t)$ 和相位 $\theta(t)$ 这两个随机过程是相互独立的。

5.3.2 窄带高斯随机信号的包络和相位的二维分布

按照 5.3.1 节推导窄带高斯随机过程包络和相位的一维分布的思路, 可以首先求得包络和相位的四维联合概率密度函数 $\varphi_4(R_1, R_2; \theta_1, \theta_2)$, 然后通过求边缘概率密度函数, 推导出窄带高斯随机信号包络和相位的二维概率密度函数 $f_{R_1 R_2}(R_1, R_2)$ 和 $f_{\theta_1 \theta_2}(\theta_1, \theta_2)$ 。

当平稳窄带高斯信号 $n_0(t)$ 均值为零、方差为 σ^2 时,其包络的水平分量 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 也是均值为零、方差为 σ^2 高斯平稳过程,且相互独立。

取任意两个不相等的时刻 t_1 和 t_2 ,则 $X(t_1), X(t_2), Y(t_1), Y(t_2)$ 都是均值为零、方差为 σ^2 高斯随机变量,因此,有 $X(t_1), X(t_2), Y(t_1), Y(t_2)$ 的四维联合概率密度函数为

$$f_4(x_1, x_2; y_1, y_2) = \frac{1}{(2\pi)^2 |\mathbf{C}|^{1/2}} e^{-\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{x}}{2}} \quad (5.3.18)$$

其中, $\mathbf{x} = (x_1, x_2; y_1, y_2)^T$, \mathbf{C} 是四阶协方差矩阵。

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} E[X(t_1)^2] & E[X(t_1)X(t_2)] & E[X(t_1)Y(t_1)] & E[X(t_1)Y(t_2)] \\ E[X(t_2)X(t_1)] & E[X(t_2)^2] & E[X(t_2)Y(t_1)] & E[X(t_2)Y(t_2)] \\ E[Y(t_1)X(t_1)] & E[Y(t_1)X(t_2)] & E[Y(t_1)^2] & E[Y(t_1)Y(t_2)] \\ E[Y(t_2)X(t_1)] & E[Y(t_2)X(t_2)] & E[Y(t_2)Y(t_1)] & E[Y(t_2)^2] \end{bmatrix}$$

根据上述条件,有

$$\begin{cases} E[X(t_1)^2] = E[X(t_2)^2] = E[Y(t_1)^2] = E[Y(t_2)^2] = \sigma^2 \\ E[X(t_i)Y(t_j)] = 0 \quad (i, j = 1, 2; i \neq j) \\ E[X(t_1)X(t_2)] = E[X(t_2)X(t_1)] = B_X(\tau) = \text{Cov}_X(\tau) \\ E[Y(t_1)Y(t_2)] = E[Y(t_2)Y(t_1)] = B_Y(\tau) = \text{Cov}_Y(\tau) \\ \text{Cov}_X(\tau) = \text{Cov}_Y(\tau) \end{cases}$$

则

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \text{Cov}_X(\tau) & 0 & 0 \\ \text{Cov}_X(\tau) & \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & \text{Cov}_Y(\tau) \\ 0 & 0 & \text{Cov}_Y(\tau) & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

可以看出,矩阵 \mathbf{C} 是一个对称矩阵,可方便地求出其行列式值 $|\mathbf{C}|$ 和各代数余子式 \mathbf{C}_{ij} 为

$$|\mathbf{C}| = [\sigma^4 - \text{Cov}_X^2(\tau)]^2$$

$$\mathbf{C}_{11} = \mathbf{C}_{22} = \mathbf{C}_{33} = \mathbf{C}_{44} = \sigma^2 [\sigma^4 - \text{Cov}_X^2(\tau)]$$

$$\mathbf{C}_{12} = \mathbf{C}_{21} = \mathbf{C}_{34} = \mathbf{C}_{43} = -\text{Cov}_X(\tau) [\sigma^4 - \text{Cov}_X^2(\tau)]$$

$$\mathbf{C}_{13} = \mathbf{C}_{31} = \mathbf{C}_{14} = \mathbf{C}_{41} = \mathbf{C}_{23} = \mathbf{C}_{32} = \mathbf{C}_{24} = \mathbf{C}_{42} = 0$$

所以,矩阵 \mathbf{C} 的逆矩阵为

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{\mathbf{C}^*}{|\mathbf{C}|} = \frac{1}{\sigma^4 - \text{Cov}_X^2(\tau)} \begin{bmatrix} \sigma^2 & -\text{Cov}_X(\tau) & 0 & 0 \\ -\text{Cov}_X(\tau) & \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & -\text{Cov}_Y(\tau) \\ 0 & 0 & -\text{Cov}_Y(\tau) & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

因此

$$f_4(x_1, x_2; y_1, y_2) = \frac{1}{4\pi^2 [\sigma^4 - \text{Cov}_X^2(\tau)]} e^{-\frac{\sigma^2(x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2) - 2\text{Cov}_X(\tau)(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{2[\sigma^4 - \text{Cov}_X^2(\tau)]}} \quad (5.3.19)$$

式中, $R_1 > 0, R_2 > 0; 0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 2\pi$ 。

因此

$$\varphi_4(R_1, R_2; \theta_1, \theta_2) = |J| f_4(x_1, x_2; y_1, y_2) \quad (5.3.20)$$

由于

$$\begin{cases} x_1 = R_1 \cos\theta_1 \\ x_2 = R_2 \cos\theta_2 \\ y_1 = R_1 \sin\theta_1 \\ y_2 = R_2 \sin\theta_2 \end{cases} \quad (5.3.21)$$

可得

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial R_1} & \frac{\partial x_2}{\partial R_1} & \frac{\partial y_1}{\partial R_1} & \frac{\partial y_2}{\partial R_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial R_2} & \frac{\partial x_2}{\partial R_2} & \frac{\partial y_1}{\partial R_2} & \frac{\partial y_2}{\partial R_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y_2}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial y_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial y_2}{\partial \theta_2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 \\ -R_1 \sin\theta_1 & 0 & R_1 \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & -R_2 \sin\theta_2 & 0 & R_2 \cos\theta_2 \end{vmatrix} = R_1 R_2 \quad (5.3.22) \end{aligned}$$

所以

$$\varphi_4(R_1, R_2; \theta_1, \theta_2) = \frac{R_1 R_2}{4\pi^2 [\sigma^4 - \text{Cov}_X^2(\tau)]} e^{-\frac{\sigma^2(R_1^2 + R_2^2) - 2\text{Cov}_X(\tau)R_1 R_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}{2[\sigma^4 - \text{Cov}_X^2(\tau)]}} \quad (5.3.23)$$

对式(5.3.23)求边缘密度函数,可导出包络和相位的二维概率密度函数 $f_{R_1 R_2}(R_1, R_2)$ 和 $f_{\theta_1 \theta_2}(\theta_1, \theta_2)$ 。

$$\begin{aligned} f_{R_1 R_2}(R_1, R_2) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_4(R_1, R_2; \theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \\ &= \frac{R_1 R_2}{\sigma^4 - \text{Cov}_X^2(\tau)} I_0 \left(\frac{R_1 R_2 \text{Cov}_X(\tau)}{\sigma^4 - \text{Cov}_X^2(\tau)} \right) e^{-\frac{\sigma^2(R_1^2 + R_2^2)}{2[\sigma^4 - \text{Cov}_X^2(\tau)]}} \quad (R_1 > 0, R_2 > 0) \end{aligned} \quad (5.3.24)$$

式中, $I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x \cos\theta} d\theta$ 是第一类零阶修正贝塞尔函数的积分表达式。

$$\begin{aligned}
 f_{\theta_1, \theta_2}(\theta_1, \theta_2) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \varphi_4(R_1, R_2; \theta_1, \theta_2) dR_1 dR_2 \\
 &= \frac{\sigma^4 - \text{Cov}_X^2(\tau)}{4\pi\sigma^2} \left[\frac{(1-\lambda)^{\frac{1}{2}} + \lambda(\pi - \arccos\lambda)}{(1-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 2\pi)
 \end{aligned} \tag{5.3.25}$$

其中, $\lambda = \frac{\text{Cov}_X(\tau)}{\sigma^2} \cos(\theta_2 - \theta_1)$ 。

若令 $\theta_1 = \theta_2$, 代入式(5.3.23)、式(5.3.24)和式(5.3.25), 不难看出

$$\varphi_4(R_1, R_2; \theta_1, \theta_2) \neq f_{R_1 R_2}(R_1, R_2) f_{\theta_1 \theta_2}(\theta_1, \theta_2) \tag{5.3.26}$$

这说明, 窄带高斯随机信号的包络和相位不是彼此独立的。

5.3.3 窄带高斯随机信号的包络平方的概率分布

在通信系统中, 平方律检波是被广泛采用的小信号检波方式。平方律检波检测出的是输入信号包络的平方。为此, 简要讨论窄带高斯信号包络平方的概率分布。

窄带高斯随机信号的包络服从瑞利分布, 即

$$f_{R_1}(R) = \frac{R}{\sigma^2} e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}} \quad (R \geq 0) \tag{5.3.27}$$

设包络的平方为

$$A(t) = R^2(t) \quad (R \geq 0) \tag{5.3.28}$$

因此, 仍然可用求随机变量函数的概率分布的方法求出包络平方的一维概率密度。

由式(5.3.28)可知, 随机过程 $A(t)$ 在孤立时刻 t 所处的状态 a 与随机过程 $R(t)$ 在孤立时刻 t 所处的状态满足如下函数关系

$$a = R^2 \quad (R \geq 0) \tag{5.3.29}$$

即 a 与 R 是单调的函数关系。所以, 随机过程 $A(t)$ 的一维概率密度为

$$f_{A_1}(a) = f_{R_1}(R) \left| \frac{dR}{da} \right|_{R=\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{a}{2\sigma^2}} \quad (a \geq 0) \tag{5.3.30}$$

式(5.3.30)表明, 窄带高斯随机信号包络平方的一维分布服从指数分布。特别地, 当 $\sigma^2 = 1$ 时, 有

$$f_{A_1}(a) = \frac{1}{2} e^{-\frac{a}{2}} \quad (a \geq 0) \tag{5.3.31}$$

此时, 其均值和方差分别为

$$E[A(t)] = 2$$

$$D[A(t)] = 4$$

5.4 窄带随机信号包络的自相关特性

由于在通信系统中, 包络检波器应用得十分广泛, 因此本节将讨论窄带随机信号 $n_0(t)$ 的包络线 $R(t)$ 的自相关特性。

以图 5.3 所示的 RLC 电路为例,来说明不自相关的白色过程作用于窄带系统,其输出窄带随机信号 $n_0(t)$ 为什么会有自相关性。

图 5.3 所示的系统的冲激响应为

$$h(t) = \omega_0 e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t u(t) \quad (5.4.1)$$

这时的 $h(t)$ 有一个尾迹。它的衰减因子为 α , α 越大,衰减越快, $h(t)$ 的尾迹越短;反之, α 越小,衰减越慢, $h(t)$ 的尾迹拖得越长。

由于输入是白色过程,也就是说,一个接一个的 δ 冲激函数应用于该窄带系统,第一个冲激响应的尾迹还没衰减为 0,后续的冲激函数产生的输出冲激响应又来了,那么,各 $h(t)$ 的尾迹相叠加,使得 $n_0(t)$ 有了自相关性。

显然,冲激响应 $h(t)$ 的尾迹的长短体现在它的包络 $h_E(t)$ 上,各 $h_E(t)$ 的叠加,形成了窄带随机信号 $n_0(t)$ 的包络 $R(t)$,因此,包络线 $R(t)$ 的自相关性的强弱完全取决于 $h_E(t)$ 衰减的快慢。

冲激响应 $h(t)$ 的包络 $h_E(t)$ 衰减的快慢,由衰减因子 α 决定。而 $\alpha = \frac{R}{2L}$,也就是说,电阻 R 越大,系统的损耗越大,系统的通频带越宽,惯性越小,此时 $h_E(t)$ 的衰减就越快,那么,由各 $h_E(t)$ 的叠加形成的 $n_0(t)$ 的包络 $R(t)$ 起伏就越大,表示 $R(t)$ 的自相关性越弱。反之,系统损耗越小,系统的通频带就越窄,惯性越大, $h_E(t)$ 的衰减就越慢,那么, $R(t)$ 的起伏频繁程度就越低,这时, $R(t)$ 的自相关性就越强。

综上所述, $R(t)$ 自相关性的强弱只取决于 $h(t)$ 的包络 $h_E(t)$,而与其高频振动项 $\sin \omega_0 t$ 无关。这样一来,利用窄带对称系统的包络线定理的概念,若用冲激响应 $h_E(t)$ 的低通系统等效替代窄带系统,则该系统在白色过程的作用下,其输出响应必为 $R(t)$ 。因此,有

$$B_E(\tau) = B_X(\tau) * \beta_{h_E}(\tau) \quad (5.4.2)$$

式中, $B_E(\tau)$ 为 $n_0(t)$ 的包络 $R(t)$ 自相关函数, $\beta_{h_E}(\tau)$ 是冲激响应 $h(t)$ 的包络 $h_E(t)$ 的自相关积分。

$$\beta_{h_E}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_E(t) h_E(t + \tau) dt \quad (5.4.3)$$

从上面的分析中也可以看出, $n_0(t)$ 自相关性由它的包络 $R(t)$ 决定, $R(t)$ 的自相关性越弱, $n_0(t)$ 变化越快;反之, $R(t)$ 的自相关性越强, $n_0(t)$ 变化越缓慢。那么,它们之间究竟存在一个什么关系呢?下面通过两个例子来说明它们之间的关系。

例 5.1 如图 5.3 所示的 RLC 窄带网络,设输入白噪声的功率谱密度为 $\frac{N_0}{2}$ 。求:

- (1) 输出窄带随机信号 $n_0(t)$ 的自相关函数 $B_0(\tau)$;
- (2) 输出窄带随机信号包络 $R(t)$ 的自相关函数 $B_E(\tau)$ 。

解: (1) 由题知

$$S_X(\omega) = \frac{N_0}{2}$$

则

$$B_X(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

$$h(t) = \omega_0 e^{-at} \sin \omega_0 t u(t) = h_E(t) \sin \omega_0 t u(t)$$

$$\begin{aligned} \beta_h(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)h(t+\tau) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_0 e^{-at} \sin \omega_0 t u(t) \omega_0 e^{-a(t+\tau)} \sin \omega_0(t+\tau) u(t+\tau) dt \end{aligned}$$

当 $\tau \geq 0$ 时,有

$$\begin{aligned} \beta_h(\tau) &= \omega_0^2 \int_0^{+\infty} e^{-at} \sin \omega_0 t e^{-a(t+\tau)} \sin \omega_0(t+\tau) dt \\ &= \omega_0^2 e^{-a\tau} \int_0^{+\infty} e^{-2at} \left\{ \frac{1}{2} [\cos \omega_0 \tau - \cos \omega_0(2t+\tau)] \right\} dt \\ &= \frac{1}{2} \omega_0^2 e^{-a\tau} \left\{ \cos \omega_0 \tau \int_0^{+\infty} e^{-2at} dt - \int_0^{+\infty} e^{-2at} \cos \omega_0(2t+\tau) dt \right\} \end{aligned}$$

当网络为窄带时,必有 $\omega_0 \gg |\alpha|$, 则上式的前一积分 $\int_0^{+\infty} e^{-2at} dt$ 必定远大于后一积分 $\int_0^{+\infty} e^{-2at} \cos \omega_0(2t+\tau) dt$ 。因为 $\cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau)$ 因子的正负取值时的积分大体上是相抵消的,因此在窄带情况下,近似有

$$\beta_h(\tau) \approx \frac{1}{2} \omega_0^2 e^{-a\tau} \cos \omega_0 \tau \int_0^{+\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2} \omega_0^2 e^{-a\tau} \cos \omega_0 \tau \frac{1}{2\alpha} = \frac{\omega_0^2}{4\alpha} e^{-a\tau} \cos \omega_0 \tau$$

由于自相关积分的偶对称性,则当 $\tau < 0$ 时,有

$$\beta_h(\tau) = \frac{\omega_0^2}{4\alpha} e^{a\tau} \cos \omega_0 \tau$$

所以,系统冲激响应的自相关积分为

$$\beta_{h_E}(\tau) = \frac{\omega_0^2}{4\alpha} e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$$

系统输出窄带随机信号 $n_o(t)$ 的自相关函数为

$$B_o(\tau) = B_X(\tau) * \beta_{h_E}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) * \frac{\omega_0^2}{4\alpha} e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau = \frac{N_0 \omega_0^2}{4\alpha} e^{-\alpha|\tau|} \frac{\cos \omega_0 \tau}{2} \quad (5.4.4)$$

(2) 窄带系统冲激响应的包络为

$$h_E(t) = \omega_0 e^{-at} u(t)$$

则冲激响应包络的自相关积分为

$$\beta_{h_E}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_E(t)h_E(t+\tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_0 e^{-at} u(t) \omega_0 e^{-a(t+\tau)} u(t+\tau) dt$$

当 $\tau \geq 0$ 时,有

$$\beta_{h_E}(\tau) = \omega_0^2 \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-a(t+\tau)} dt = \omega_0^2 e^{-a\tau} \int_0^{+\infty} e^{-2at} dt = \frac{\omega_0^2}{2\alpha} e^{-a\tau}$$

所以

$$\beta_{h_E}(\tau) = \frac{\omega_0^2}{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|}$$

根据式(5.4.2),窄带随机信号包络 $R(t)$ 的自相关函数为

$$B_E(\tau) = B_X(\tau) * \beta_{h_E}(\tau) = \frac{N_0 \omega_0^2}{4\alpha} e^{-\alpha|\tau|} \quad (5.4.5)$$

比较式(5.4.4)和式(5.4.5),可以看出

$$B_0(\tau) = B_E(\tau) \frac{\cos \omega_0 \tau}{2} \quad (5.4.6)$$

图 5.13 给出了该窄带随机信号的自相关函数。此图表示 $B_0(\tau)$ 是包络线 $B_E(\tau)$ 乘以 $\frac{\cos \omega_0 \tau}{2}$, 而该包络线 $B_E(\tau)$ 正是窄带网络输出 $n_0(t)$ 的包络线 $R(t)$ 的自相关函数。

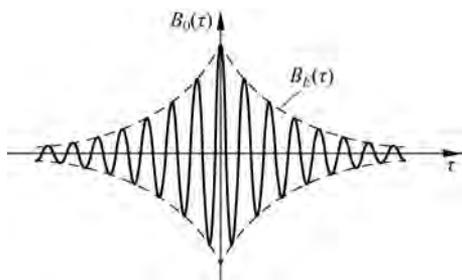


图 5.13 RLC 窄带网络输出窄带随机信号的自相关函数

例 5.2 如图 5.14 所示理想带通滤波器,在通带内, $|H(j\omega)|$ 值为 1, 通带宽度 $2\Delta \ll \omega_0$, 设输入白噪声的功率谱密度为 $\frac{N_0}{2}$ 。求: (1) 输出窄带随机信号 $n_0(t)$ 的自相关函数 $B_0(\tau)$; (2) 输出窄带随机信号包络 $R(t)$ 的自相关函数 $B_E(\tau)$ 。

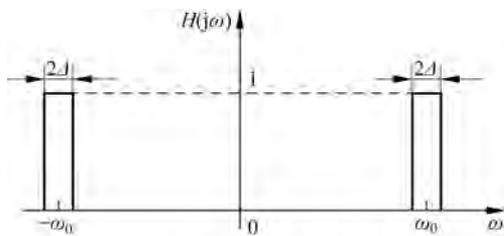


图 5.14 理想带通滤波器

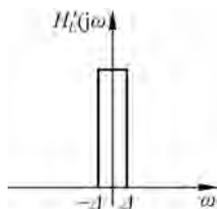


图 5.15 等效低通特性

解: (1) 由题知

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega_0 - \Delta \leq |\omega| \leq \omega_0 + \Delta) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

$\beta_h(\tau)$ 与 $|H(j\omega)|^2$ 互为傅里叶变换对, 即

$$\begin{aligned} \beta_h(\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |H(j\omega)|^2 \cos \omega \tau d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0 - \Delta}^{\omega_0 + \Delta} \cos \omega \tau d\omega \\ &= \frac{1}{\pi \tau} \{ \sin[(\omega_0 + \Delta)\tau] - \sin[(\omega_0 - \Delta)\tau] \} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi\tau} 2\cos\omega_0\tau \sin\Delta\tau = \frac{4\Delta}{\pi} \text{Sa}(\Delta\tau) \frac{\cos\omega_0\tau}{2}$$

输入白噪声的自相关函数为

$$B_X(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

所以,输出窄带随机信号的自相关函数为

$$B_0(\tau) = B_X(\tau) * \beta_h(\tau) = \frac{2N_0\Delta}{\pi} \text{Sa}(\Delta\tau) \frac{\cos\omega_0\tau}{2} \quad (5.4.7)$$

(2) 由于理想带通滤波器的通带宽度 $2\Delta \ll \omega_0$, 则此理想带通滤波器为窄带系统。由包络线定理可知,理想带通滤波器冲激响应包络的等效低通特性 $H'_E(j\omega)$ 如图 5.15 所示,则

$$H'_E(j\omega) = \begin{cases} 1 & (|\omega| \leq \Delta) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

由式(5.1.11)知,冲激响应包络 $h_E(t)$ 与 $H'_E(j\omega)$ 不构成一个傅里叶变换对,而差一个常数 $\frac{2A}{|K|}$ 。而本题没有给出具体的网络,不能得到它的系统函数 $H(s)$,也就无法知道

$H(s)$ 极点数,因此不可能找出常数 $\frac{2A}{|K|}$,暂令该常数为 C ,这样就有

$$h_E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} CH'_E(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$h_E(t)$ 的能量谱密度为 $C^2 |H'_E(j\omega)|^2$, $h_E(t)$ 自相关积分与它的能量谱密度互为傅里叶变换对,所以,有

$$\begin{aligned} \beta_{h_E}(\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |CH'_E(j\omega)|^2 \cos\omega\tau d\omega = \frac{C^2}{\pi} \int_0^{\Delta} \cos\omega\tau d\omega \\ &= \frac{C^2}{\pi\tau} \sin\Delta\tau = \frac{C^2\Delta}{\pi} \text{Sa}(\Delta\tau) \end{aligned}$$

所以,输出窄带随机信号包络的自相关函数为

$$B_E(\tau) = B_X(\tau) * \beta_{h_E}(\tau) = \frac{N_0 C^2 \Delta}{2\pi} \text{Sa}(\Delta\tau) \quad (5.4.8)$$

比较式(5.4.7)和式(5.4.8),不难发现,若常数 $C=2$,同样可得到式(5.4.6)的结果。现在就来看看,常数 C 该不该等于 2 呢? 若常数 $C=2$,表示什么意义呢?

由包络线定理可知,若一个窄带系统的传输特性是 $H(j\omega)$,则 $H'_E(j\omega)$ 是其等效低通网络的传输特性。容易理解,等效低通网络的带宽只有窄带系统的带宽的一半,若要窄带系统与其等效低通网络等效,则它们的输出功率应相等,在带宽减小一半的情况下,只有把 $H'_E(j\omega)$ 的幅度增大一倍,两个系统的输出功率才可能相等。这样常数 C 应该为 2。图 5.16 给出了等效的示意图。图 5.16(a)为窄带系统的传输特性 $H(j\omega)$,图 5.16(b)为其等效低通的传输特性 $H_E(j\omega)$,对于窄带系统输出窄带随机信号的包络而言,两系统的输出功率相等。

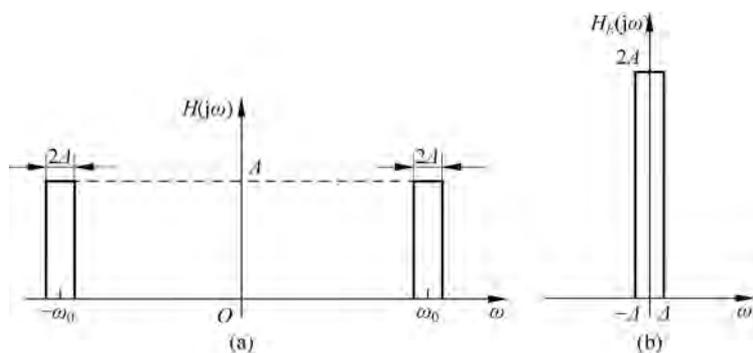


图 5.16 窄带系统及其等效低通系统的传输特性

因此,可以得出这样的结论:白色过程通过窄带线性系统后,输出准正弦过程包络的自相关函数等于该过程的自相关函数的包络。即

$$B_0(\tau) = B_E(\tau) \frac{\cos\omega_0\tau}{2} \quad (5.4.9)$$

5.5 正弦信号叠加窄带高斯噪声的包络和相位的分布

设随机相位的正弦信号为

$$S(t) = P \cos(\omega_0 t + \psi) \quad (5.5.1)$$

式中, P 、 ω_0 为常数, ψ 是在 $[0, 2\pi]$ 区间均匀分布的随机变量。

均值为 0、方差为 σ^2 的窄带高斯噪声可表示为

$$n_0(t) = R(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)] = X(t) \cos\omega_0 t - Y(t) \sin\omega_0 t \quad (5.5.2)$$

此时,正弦信号与窄带高斯噪声的叠加成为

$$\begin{aligned} n_0(t) + S(t) &= X(t) \cos\omega_0 t - Y(t) \sin\omega_0 t + P \cos(\omega_0 t + \psi) \\ &= X(t) \cos\omega_0 t - Y(t) \sin\omega_0 t + P \cos\omega_0 t \cos\psi - P \sin\omega_0 t \sin\psi \\ &= [P \cos\psi + X(t)] \cos\omega_0 t - [P \sin\psi + Y(t)] \sin\omega_0 t \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

令

$$\begin{cases} \xi(t) = P \cos\psi + X(t) \\ \eta(t) = P \sin\psi + Y(t) \end{cases} \quad (5.5.4)$$

则

$$n_0(t) + S(t) = \xi(t) \cos\omega_0 t - \eta(t) \sin\omega_0 t \quad (5.5.5)$$

式(5.5.5)可表示为

$$n_0(t) + S(t) = Q(t) \cos[\omega_0 t + \theta_Q(t)] \quad (5.5.6)$$

其中,

$$\begin{cases} Q(t) = \sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)} \\ \theta_Q(t) = \arctan \frac{\eta(t)}{\xi(t)} \end{cases} \quad (5.5.7)$$

从式(5.5.6)可以看出,准正弦随机过程叠加上正弦信号后的合成信号仍然是准正弦随机信号,合成信号的包络 $Q(t)$ 和初始相位 $\theta_Q(t)$ 也是在作随机变化的随机过程。

$n_0(t)$ 的两个正交分量 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 为

$$X(t) = R(t)\cos\theta(t)$$

$$Y(t) = R(t)\sin\theta(t)$$

它们是独立且同分布的,即 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 都服从均值为零、方差为 σ^2 的高斯分布。因而对于给定的 $\psi = \varphi$ 值, $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 也必然是高斯分布的,而且相互独立。在给定的 $\psi = \varphi$ 的条件下, $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的均值和方差为

$$E[\xi(t) | \psi = \varphi] = P \cos\varphi \quad (5.5.8)$$

$$E[\eta(t) | \psi = \varphi] = P \sin\varphi \quad (5.5.9)$$

$$D[\xi(t) | \psi = \varphi] = D[\eta(t) | \psi = \varphi] = \sigma^2 \quad (5.5.10)$$

所以有

$$\xi \sim N(P \cos\varphi, \sigma^2)$$

$$\eta \sim N(P \sin\varphi, \sigma^2)$$

在给定的 $\psi = \varphi$ 的条件下, $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的一维概率密度分别为

$$f_{\xi_1}(\xi | \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\xi - P \cos\varphi)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < \xi < +\infty) \quad (5.5.11)$$

$$f_{\eta_1}(\eta | \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\eta - P \sin\varphi)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < \eta < +\infty) \quad (5.5.12)$$

因此,在信号相位 $\psi = \varphi$ 为条件下, $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的二维联合概率密度函数为

$$\begin{aligned} f_2(\xi, \eta | \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\xi - P \cos\varphi)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\eta - P \sin\varphi)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(\xi - P \cos\varphi)^2 + (\eta - P \sin\varphi)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < \xi < +\infty, -\infty < \eta < +\infty) \end{aligned} \quad (5.5.13)$$

利用式(5.5.7)给出的 $\xi(t)$ 、 $\eta(t)$ 和合成信号包络 $Q(t)$ 、相位 $\theta_Q(t)$ 在同一时刻的关系式,有

$$Q = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \quad (Q \geq 0) \quad (5.5.14)$$

$$\theta_Q = \arctan \frac{\eta}{\xi} \quad (5.5.15)$$

则

$$\xi = Q \cos\theta_Q \quad (5.5.16)$$

$$\eta = Q \sin\theta_Q \quad (5.5.17)$$

通过二维随机变量的函数变换,可得合成包络 $Q(t)$ 和相位 $\theta_Q(t)$ 的二维联合概率密度函数

$$g_2(Q, \theta_Q | \varphi) = |J| f_2(\xi, \eta | \varphi) \quad (5.5.18)$$

其中,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial Q} & \frac{\partial \eta}{\partial Q} \\ \frac{\partial \xi}{\partial \theta_Q} & \frac{\partial \eta}{\partial \theta_Q} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta_Q & \sin \theta_Q \\ -Q \sin \theta_Q & Q \cos \theta_Q \end{vmatrix} = Q$$

所以

$$g_2(Q, \theta_Q | \varphi) = Q f_2(\xi, \eta | \varphi) = \frac{Q}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{Q^2 - 2PQ \cos(\theta_Q - \varphi) + P^2}{2\sigma^2}} \quad (Q \geq 0, \quad 0 \leq \theta_Q \leq 2\pi) \quad (5.5.19)$$

于是,在信号相位 $\psi = \varphi$ 为条件下,合成信号包络 $Q(t)$ 的一维概率密度函数为

$$\begin{aligned} f_{Q1}(Q | \varphi) &= \int_0^{2\pi} g_2(Q, \theta_Q | \varphi) d\theta_Q = \frac{Q}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{Q^2 + P^2}{2\sigma^2}} \int_0^{2\pi} e^{\frac{PQ \cos(\theta_Q - \varphi)}{\sigma^2}} d\theta_Q \\ &= \frac{Q}{\sigma^2} e^{-\frac{Q^2 + P^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{PQ}{\sigma^2}\right) \quad (Q \geq 0) \end{aligned} \quad (5.5.20)$$

式中, $I_0\left(\frac{PQ}{\sigma^2}\right)$ 是零阶修正贝塞尔函数,即

$$I_0\left(\frac{PQ}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\frac{PQ \cos(\theta_Q - \varphi)}{\sigma^2}} d\theta_Q \quad (5.5.21)$$

贝塞尔函数 $I_0(x)$ 可用无穷级数表示为

$$I_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} = 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \dots \quad (5.5.22)$$

且

$$I_0(0) = 1 \quad (5.5.23)$$

当 $x \ll 1$ 时,有

$$I_0(x) \approx e^{\frac{x^2}{4}} \quad (5.5.24)$$

当 $x \gg 1$ 时,有

$$I_0(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \quad (5.5.25)$$

由式(5.5.20)可以看出,合成信号包络 $Q(t)$ 的一维概率分布与 φ 无关,所以式(5.5.20)可以直接写成

$$f_{Q1}(Q) = \frac{Q}{\sigma^2} e^{-\frac{Q^2 + P^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{PQ}{\sigma^2}\right) \quad (Q \geq 0) \quad (5.5.26)$$

式(5.5.26)称为莱斯分布的概率密度函数。也就是说随机相位正弦信号与窄带高斯噪声叠加的合成信号包络服从莱斯分布。

为了下面的作图和讨论方便,引入下列变量。

令

$$v = \frac{Q}{\sigma}, \quad a = \frac{P}{\sigma} \quad (5.5.27)$$

则式(5.5.26)变为

$$f_{Q1}(\sigma v) = \frac{v}{\sigma} e^{-\frac{v^2+a^2}{2}} I_0(av) \quad (5.5.28)$$

以 a 为参变量的 $v-f_{Q1}(\sigma v)$ 曲线如图 5.17 所示。

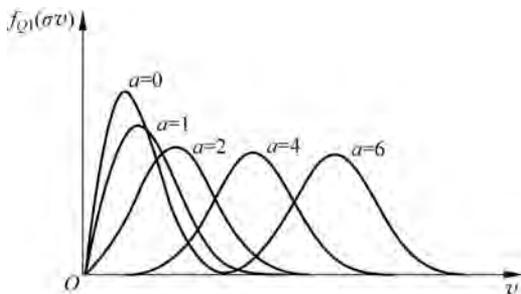


图 5.17 随机相位正弦信号与窄带高斯噪声叠加合成包络的分布

下面分三种情况对式(5.5.28)进行讨论。

(1) 当 $a=0$ 时, 即 $P=0$, 此时无信号, 而噪声总是有的, 有

$$f_{Q1}(\sigma v) = \frac{v}{\sigma} e^{-\frac{v^2}{2}} I_0(0) = \frac{v}{\sigma} e^{-\frac{v^2}{2}} \quad (5.5.29)$$

即

$$f_{Q1}(Q) = \frac{Q}{\sigma^2} e^{-\frac{Q^2}{2\sigma^2}} \quad (Q \geq 0) \quad (5.5.30)$$

这是瑞利分布的概率密度形式。也就是说, 此时合成包络服从瑞利分布。

(2) 当 a 不大时, 说明信号和噪声互相都不能忽略, 此时合成包络服从莱斯分布。

(3) 当 $a \gg 1$, 即 $\frac{P}{\sigma} \gg 1$ 时, 此时说明信噪比大, 信号比噪声强得多, 输出合成包络主要取决于信号振幅 P 。

当 $a \gg 1$ 时, 有 $P \approx Q$, 则有 $av \gg 1$ 。由式(5.5.25)得

$$I_0(av) \approx \frac{e^{av}}{\sqrt{2\pi av}} \quad (5.5.31)$$

把它代入式(5.5.28), 得到

$$\begin{aligned} f_{Q1}(\sigma v) &\approx \frac{v}{\sigma} e^{-\frac{v^2+a^2}{2}} \frac{e^{av}}{\sqrt{2\pi av}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \sqrt{\frac{v}{a}} e^{-\frac{(v-a)^2}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \sqrt{\frac{Q}{\sigma} \frac{P}{\sigma}} e^{-\frac{(v-\frac{P}{\sigma})^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \sqrt{\frac{Q}{P}} e^{-\frac{(\sigma v - P)^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(Q-P)^2}{2\sigma^2}} \quad (5.5.32)$$

此时,合成包络趋于以 P 为均值的高斯分布。

通过上面的分析看到,当一个随机相位正弦波受到零均值平稳窄带高斯噪声干扰时,其合成信号的包络服从莱斯分布。当信噪比很低时,其包络的分布将趋于瑞利分布;而当信噪比很高时,其包络的分布将趋于以 P 为均值的高斯分布。

类似地,可以得到在信号相位 $\psi = \varphi$ 为条件下,相位 $\theta_Q(t)$ 的一维概率密度函数

$$\begin{aligned} f_{\theta_{Q1}}(\theta_Q | \varphi) &= \int_0^{+\infty} g_2(Q, \theta_Q | \varphi) dQ = \int_0^{+\infty} \frac{Q}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{Q^2 - 2PQ\cos(\theta_Q - \varphi) + P^2}{2\sigma^2}} dQ \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{Q}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{Q^2 - 2PQ\cos(\theta_Q - \varphi) + [P\cos(\theta_Q - \varphi)]^2 - [P\cos(\theta_Q - \varphi)]^2 + P^2}{2\sigma^2}} dQ \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{P^2 - [P\cos(\theta_Q - \varphi)]^2}{2\sigma^2}} \int_0^{+\infty} \frac{Q}{\sigma^2} e^{-\frac{[Q - P\cos(\theta_Q - \varphi)]^2}{2\sigma^2}} dQ \end{aligned} \quad (5.5.33)$$

经积分运算后,得

$$f_{\theta_{Q1}}(\theta_Q | \varphi) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{P^2}{2\sigma^2}} + \frac{P\cos(\theta_Q - \varphi)}{\sigma\sqrt{2\pi}} \Phi\left[\frac{P\cos(\theta_Q - \varphi)}{\sigma}\right] e^{-\frac{P^2 - [P\cos(\theta_Q - \varphi)]^2}{2\sigma^2}} \quad (5.5.34)$$

其中, $\Phi(x)$ 是标准高斯分布函数

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (5.5.35)$$

利用式(5.5.27)进行变量代换,得

$$f_{\theta_{Q1}}(\theta_Q | \varphi) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{a^2}{2}} + \frac{a\cos(\theta_Q - \varphi)}{\sqrt{2\pi}} \Phi[a\cos(\theta_Q - \varphi)] e^{-\frac{a^2 \sin^2(\theta_Q - \varphi)}{2}} \quad (0 \leq \theta_Q \leq 2\pi) \quad (5.5.36)$$

下面讨论两种特殊情况。

(1) 当 $a=0$ 时,即 $P=0$,此时无信号,则有

$$f_{\theta_{Q1}}(\theta_Q | \varphi) = \frac{1}{2\pi} \quad (0 \leq \theta_Q \leq 2\pi) \quad (5.5.37)$$

这时,相位分布为 $[0, 2\pi]$ 区间的均匀分布,信号中只包含窄带高斯噪声。

(2) 当 $a \gg 1$ 时,信噪比很大,有 $\Phi[a\cos(\theta_Q - \varphi)] \approx 1$,则相位的条件概率密度近似为

$$f_{\theta_{Q1}}(\theta_Q | \varphi) \approx \frac{a\cos(\theta_Q - \varphi)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2 \sin^2(\theta_Q - \varphi)}{2}} \quad (0 \leq \theta_Q \leq 2\pi) \quad (5.5.38)$$

式(5.5.38)说明,在大信噪比情况下,正弦信号叠加窄带高斯噪声的相位主要集中在信号相位 φ 附近。图 5.18 给出了合成信号相位的概率分布与信噪比的关系。

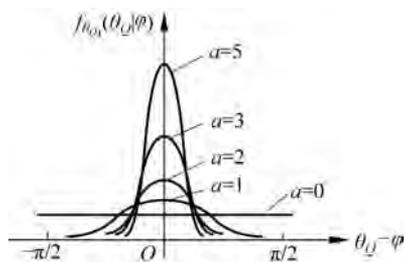


图 5.18 随机相位正弦信号叠加窄带高斯噪声的相位分布

习题

5.1 对于均值为零、方差为 1 的窄带平稳随机信号 $X(t) = R(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)]$ ，试求包络 $R(t)$ 在任意时刻所给出的随机变量的均值和方差。

5.2 设均值为零、方差为 σ^2 的窄带平稳高斯随机信号 $X(t) = R(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)]$ ，令随机过程 $Y(t) = R^2(t)$ ，求随机过程 $Y(t)$ 的一维概率密度函数。

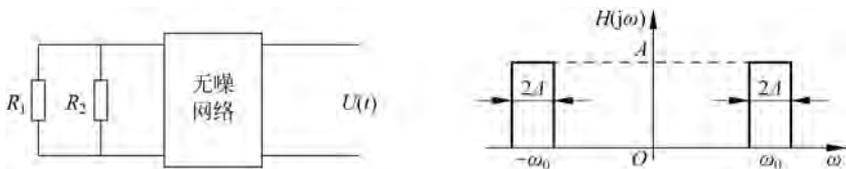
5.3 窄带高斯噪声的包络超过其均方值 3 倍的概率是多少？

5.4 对于窄带随机信号

$$n(t) = X(t) \cos \omega_0 t - Y(t) \sin \omega_0 t$$

证明： $B_n(\tau) = B_X(\tau) \cos \omega_0 \tau + B_{XY}(\tau) \sin \omega_0 \tau$ 。

5.5 如题 5.5 图所示电路，设无噪网络输入阻抗为无穷大，它的传输函数 $H(j\omega)$ 也如图中所示，且 $\omega_0 \gg 2\Delta$ ，求网络输出端噪声电压的自相关函数和噪声电压的均方值。



题 5.5 图

5.6 将一功率谱密度函数为 $N_0/2$ 的白噪声输入到一单位冲激响应如下的滤波器

$$h(t) = \alpha e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t u(t) \quad (\alpha > 0, \omega_0 \gg 0)$$

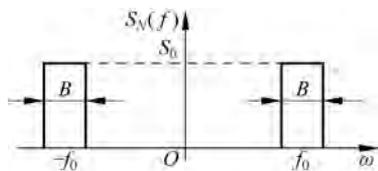
试求输出噪声的自相关函数和平均功率。

5.7 功率谱密度为 S_0 的平稳白噪声经电容耦合加到矩形带通滤波器，滤波器的中心频率为 f_0 ，通带宽度为 B ，通带内的电压增益为 A 。在滤波器后加有一理想线性包络检波器，试求检波器输出波形的一维概率密度函数以及其均值和均方值。

5.8 某一噪声过程 $N(t)$ 的功率谱密度如题 5.8 图所示，且 $f_0 \gg B$ ，将 $N(t)$ 作用于一个理想线性包络检波器，试求检波器输出波形的一维概率密度函数、均值和均方值。

5.9 如题 5.9 图所示系统， $X(t)$ 为白噪声，测得 $Y(t)$ 的平均功率为 1W。试求

$Z(t) < \sqrt{2}V$ 时的概率。



题 5.8 图

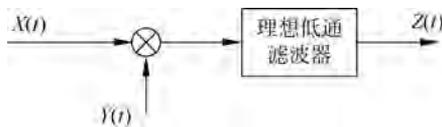


题 5.9 图

5.10 如题 5.10 图所示同步检波器。设 $X(t)$ 为窄带平稳噪声, 其自相关函数为

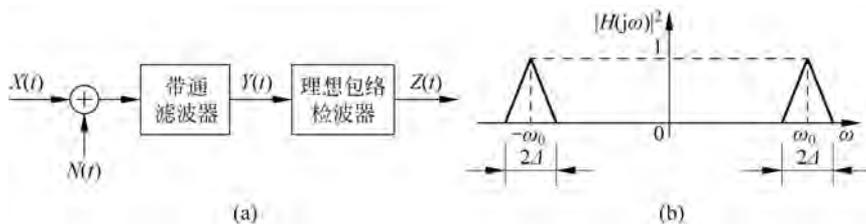
$$B_X(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|} \cos\omega_0\tau \quad (\beta \ll \omega_0)$$

而 $Y(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$, 其中 A 为常数, φ 是与 $X(t)$ 独立的且在 $(0, 2\pi)$ 区间均匀分布的随机变量。试求该检波器输出的自相关函数和平均功率。



题 5.10 图

5.11 如题 5.11 图(a)所示系统, 已知随机相位正弦波 $X(t) = \cos(\omega_0 t + \theta)$, 其中 θ 为 $(0, 2\pi)$ 区间均匀分布的随机变量, 白噪声 $N(t)$ 的功率谱密度为 $N_0/2$, 带通滤波器特性 $|H(j\omega)|^2$ 如题 5.11 图(b)所示, 且 $\omega_0 \gg \Delta$ 。试求: (1) $Y(t)$ 的功率谱密度和自相关函数; (2) $Z(t)$ 的一维概率密度函数。



题 5.11 图