第 1 章　集类与测度

1.1　集合的运算与集类

在本书中, $\mathbb{N}$ 表示全体自然数集, $\mathbb{Z}$ 表示全体整数集, $\mathbb{Q}$ 表示全体有理数集, $\mathbb{R}$ 表示全体实数集, $\mathbb{C}$ 表示全体复数集, $\mathbb{R}_+$ 表示全体非负实数集, $\mathbb{R}_-$ 表示全体非正实数集, $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维欧几里得空间.

集合是现代数学最基本的概念之一, 在测度论中, 我们通常在某个给定的集合上讨论问题.

设 Ω 是一个非空集合, Ω 中的元素用 ω 表示. Ω 的子集用大写英文字母 $A, B, C, \cdots$ 等表示. 如果一个元素 ω 属于集合 A, 记作 $\omega \in A$; 反之, 元素 ω 不属于集合 A, 记作 $\omega \notin A$. 不包含任何元素的集合称为空集, 记为 $\varnothing$. 如果

$$\omega \in A \Rightarrow \omega \in B,$$

则称集合 A 被集合 B 包含, 或集合 A 是集合 B 的子集, 记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称集合 A 等于集合 B, 记为 $A = B$.

用 A^c 表示集合 A 的余集, 这里

$$A^c \overset{\text{def}}{=} \{\omega | \omega \notin A\}.$$

给定两个集合 A, B, 用

$$A \cap B,\ A \cup B,\ A \setminus B,\ A \triangle B$$

分别表示集合 A 与集合 B 的交、并、差和对称差. 这里

$$A \cap B \overset{\text{def}}{=} \{\omega | \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\},$$

$$A \cup B \overset{\text{def}}{=} \{\omega | \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\},$$

$$A \setminus B \overset{\text{def}}{=} \{\omega | \omega \in A \text{ 且 } \omega \notin B\},$$

$$A \triangle B \overset{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

有时也用 AB 表示 $A \cap B$, 把 $A \cup B$ 称为集合 A 与 B 的和. 当 $B \subset A$ 时, 也称 $A \backslash B$ 为 A 和 B 的真差.

显然有

$$A^c=\Omega\backslash A,\ A\backslash B=A\cap B^c,\ A\cap A^c=\varnothing,\ A\cup A^c=\Omega,\ A\triangle B=(A\cup B)\backslash(A\cap B).$$

若 $A\cap B=\varnothing$, 则称集合 A 与 B 是不相交的. 当 A 与 B 不相交时, 我们也称 $A\cup B$ 为集合 A 与 B 的直和, 以 $A+B$ 表示.

集合的运算满足交换律、结合律、分配律和对偶律, 其中对偶律也叫德摩根（De Morgan）律, 即有

$$A\cap B=B\cap A,\ A\cup B=B\cup A;$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C),\ (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C);$$

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),\ (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C);$$

$$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c,\ (A\cup B)^c=A^c\cap B^c.$$

特别地, $(A^c)^c=A$.

交和并的概念及运算法则可以推广到任意多个集合的情形.

设 $\{A_i,i\in I\}$ 是一族集合, 这里 I 是指标集（I 中的元素可数或不可数）, 分别用

$$\bigcap_{i\in I}A_i\stackrel{\text{def}}{=}\{\omega|\text{对一切 } i\in I,\ \text{有 } \omega\in A_i\},$$

$$\bigcup_{i\in I}A_i\stackrel{\text{def}}{=}\{\omega|\exists\, i\in I,\ \text{使 } \omega\in A_i\}$$

表示集合族 $\{A_i,i\in I\}$ 的交和并.

如果对任何 $i,j\in I$, 都有 $A_i\cap A_j=\varnothing$, 则称这族集合 $\{A_i,i\in I\}$ 是两两不交的. 同样, 一族集合 $\{A_i,i\in I\}$ 的交和并运算遵循交换律、结合律、分配律和对偶律. 特别地

$$\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)^c=\bigcap_{i\in I}A_i^c,\ \left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)^c=\bigcup_{i\in I}A_i^c.$$

定义 1.1.1 设 $\{A_n,n\geqslant 1\}$ 为一集合序列, 若对每个 $n=1,2,\cdots$, 有 $A_n\subset A_{n+1}$, 则称 $\{A_n,n\geqslant 1\}$ 为单调增（非降）的集合序列, 记为 $A_n\uparrow$. 若对每个 $n=1,2,\cdots$, 有 $A_n\supset A_{n+1}$, 则称 $\{A_n,n\geqslant 1\}$ 为单调降（非增）的集合序列, 记为 $A_n\downarrow$.

把单调增和单调降的集合序列统称为单调集合序列.

定义 1.1.2 设 $\{A_n,n\geqslant 1\}$ 是一个单调增集合序列, 令 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, 则称 A 为

$\{A_n, n \geqslant 1\}$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, 或 $A_n \uparrow A$. 即 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 是单调增集合序列的极限.

当 $\{A_n, n \geqslant 1\}$ 是一个单调降集合序列, 令 $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, 则称 A 为 $\{A_n, n \geqslant 1\}$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, 或 $A_n \downarrow A$. 即 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 是单调降集合序列的极限.

定义 1.1.2 表明, 单调集合序列总有极限.

由对偶律可知, 如果 $A_n \uparrow A$, 则 $A_n^c \downarrow A^c$. 反之, 如果 $A_n \downarrow A$, 则 $A_n^c \uparrow A^c$.

下面给出一般的集合序列下极限和上极限的定义.

定义 1.1.3 设 $\{A_n, n \geqslant 1\}$ 是任意给定的一个集合序列, 令

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k,$$

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

分别称其为 $\{A_n, n \geqslant 1\}$ 的下极限和上极限.

事实上, 对于任意给定的一个集合序列 $\{A_n, n \geqslant 1\}$, 可构造两个不同的集合序列 $\left\{\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k, n \geqslant 1\right\}$ 和 $\left\{\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k,\ n \geqslant 1\right\}$. 注意到 $\left\{\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k, n \geqslant 1\right\}$ 和 $\left\{\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k, n \geqslant 1\right\}$ 分别是单调增和单调降的集合序列, 因此它们分别有极限 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ 和 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. 此时, 我们就将 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ 和 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ 分别称为 $\{A_n, n \geqslant 1\}$ 的下极限和上极限, 并分别用 $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ 和 $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ 表示 $\Big($ 有时也用 $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n$ 和 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$ 表示 $\Big)$.

由于

$$\begin{aligned} \omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k &\Leftrightarrow \text{存在 } n_0 \geqslant 1,\ \text{使得 } \omega \in \bigcap_{k=n_0}^{\infty} A_k \\ &\Leftrightarrow \text{存在 } n_0 \geqslant 1,\ \text{使得当 } n \geqslant n_0 \text{ 时},\ \omega \in A_n \\ &\Leftrightarrow \omega \text{ 属于 } A_{n_0} \text{ 之后的所有的 } A_n. \end{aligned}$$

$$\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Leftrightarrow \text{对每个 } n \geqslant 1,\ \omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$\Leftrightarrow \text{对每个 } n \geqslant 1,\ \text{存在一个 } k_n \geqslant n,\ \text{使得 } \omega \in A_{k_n}$$

$$\Leftrightarrow \omega \text{ 属于无穷多个 } A_n.$$

所以有

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{\omega | \omega \text{ 至多不属于有限多个 } A_n\}.$$

上式表明了 $\{A_n, n \geqslant 1\}$ 的下极限中元素的特征: 即除去 $\{A_n, n \geqslant 1\}$ 中的有限个集合外, 元素 ω 属于该序列的其余集合. 而

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{\omega | \omega \text{ 属于无穷多个 } A_n\}.$$

意味着 $\{A_n, n \geqslant 1\}$ 的上极限中元素 ω 属于序列 $\{A_n, n \geqslant 1\}$ 中的无穷多个集合.

于是有

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

对于集合序列 $\{A_n, n \geqslant 1\}$, 若

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n,$$

则称 $\{A_n, n \geqslant 1\}$ 的极限存在, 并用 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ 表示. 此时

$$\lim_{n\to\infty} A_n \overset{\text{def}}{=} \liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

例 1.1.1　对 $n \geqslant 1$, 令

$$A_n = \begin{cases} \left(-\dfrac{1}{n}, 1\right], \text{当 } n \text{ 为奇数}, \\ \left(-1, \dfrac{1}{n}\right], \text{当 } n \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

由于

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = (-1, 1],\ \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \{0\},\ n \geqslant 1.$$

因而

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \{0\}, \quad \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = (-1,1].$$

即

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subsetneq \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

设 $\{A_n, n\geqslant 1\}$ 为一集合序列, 若 $\{A_n, n\geqslant 1\}$ 两两不相交（即当 $n\neq m$ 时, $A_n\cap A_m=\varnothing$）, 则可用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 表示 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. 若有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n=\varOmega$, 则称 $\{A_n, n\geqslant 1\}$ 为 $\varOmega$ 的一个（可数）划分.

对任意集合序列 $\{A_n, n\geqslant 1\}$, 通过下述方法可构造一个新的集合序列 $\{B_n, n\geqslant 1\}$.

$$B_1=A_1,\ B_n=A_nA_1^c\cdots A_{n-1}^c=A_n\backslash\bigcup_{k=1}^{n-1}A_k,\ n\geqslant 2,$$

则 $\{B_n, n\geqslant 1\}$ 中的集合是两两不相交的, 且有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

利用这个方法可将任意一个集合序列改造成一个两两不交的新的集合序列.

以集合 $\varOmega$ 中的一些子集合为元素构成的集合称为 $\varOmega$ 上的集类（集合系）. 集类一般用花体字母 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}, \cdots$ 来表示.

定义 1.1.4　设 $\mathcal{C}$ 是 $\varOmega$ 上的一个非空集类, 如果满足

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n\in\mathcal{C}\Rightarrow\bigcap_{i=1}^{n}A_i\in\mathcal{C},$$

则称 $\mathcal{C}$ 对有限交（运算）封闭. 如果满足

$$A_n\in\mathcal{C},\quad n\geqslant 1\Rightarrow\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{C},$$

则称 $\mathcal{C}$ 对可列交（运算）封闭.

类似地可定义“有限并（运算）封闭”“可列并（运算）封闭”以及“单调序列极限（运算）封闭”等概念.

若令

$$\mathcal{C}_{\cap f}=\left\{A|A=\bigcap_{i=1}^{n}A_i,\ A_i\in\mathcal{C},\ i=1,2,\cdots,n,\ \ n\geqslant 1\right\},$$

则 $\mathcal{C}_{\cap f}$ 对有限交（运算）封闭. 我们也称 $\mathcal{C}_{\cap f}$ 为 $\mathcal{C}$ 上使得有限交运算封闭的集类.

类似地, 用

$$\mathcal{C}_{\cup f},\ \mathcal{C}_{\Sigma f},\ \mathcal{C}_{\delta},\ \mathcal{C}_{\sigma},\ \mathcal{C}_{\Sigma\sigma}$$

分别表示 $\mathcal{C}$ 上使得有限并运算、有限不交并运算、可列交运算、可列并运算以及可列不交并运算封闭的集类.

下面介绍测度论中常用的一些集类.

以下总是假定 $\mathcal{C}$ 为 Ω 的若干子集合构成的集类.

定义 1.1.5　若 $\mathcal{C}$ 对交运算封闭, 即

$$A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C},$$

则称 $\mathcal{C}$ 为一个 π 类.

例 1.1.2　用 $\mathbb{R}$ 表示全体实数组成的集合, 对任意 $a \in \mathbb{R}$, 有

$$(-\infty, a] = \{x | x \in \mathbb{R}, -\infty < x \leqslant a\},$$

若令

$$\mathcal{C} = \{(-\infty, a] | a \in \mathbb{R}\},$$

则 $\mathcal{C}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的一个 π 类.

定义 1.1.6　若 $\mathcal{C}$ 满足:

(1) $\varnothing \in \mathcal{C}$;

(2) $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$;

(3) 当 $A, B \in \mathcal{C}$ 且 $A \supset B$ 时, 存在有限个两两不交的 $\{C_k | C_k \in \mathcal{C},\ k = 1, 2, \cdots, n\}$, 使得 $A \backslash B = \bigcup\limits_{k=1}^{n} C_k$. 则称 $\mathcal{C}$ 为一个半环.

例 1.1.3　设 $\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2, \cdots, \omega_n\}$. 令

$$\mathcal{C} = \{\varnothing, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \cdots, \{\omega_n\}\}.$$

此时 $\mathcal{C}$ 就是 Ω 上的一个半环.

注　由半环的定义可知, 半环一定是 π 类.

定义 1.1.7　如果 $\mathcal{C}$ 是半环, 且 $\Omega \in \mathcal{C}$, 则称 $\mathcal{C}$ 是一个半代数.

下面是半代数的一个等价说法.

若 $\mathcal{C}$ 满足:

(1) $\Omega \in \mathcal{C}$;

(2) $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$;

(3) $A, B\in\mathcal{C}$, 且 $A\subset B \Rightarrow B\backslash A=\bigcup\limits_{k=1}^{n} C_k$, 其中 $C_k\in\mathcal{C},\ k=1,2,\cdots,n$, 且两两不交.

则 $\mathcal{C}$ 是一个半代数.

显然, 对于例 1.1.3 中的 $\mathcal{C}$, 若添加 Ω 在 $\mathcal{C}$ 中, 则 $\mathcal{C}$ 构成一个半代数.

定义 1.1.8　若 $\mathcal{C}$ 对并和差运算封闭, 即

$$A, B\in\mathcal{C} \Rightarrow A\cup B\in\mathcal{C},\ A\backslash B\in\mathcal{C}.$$

则称 $\mathcal{C}$ 是一个环.

例 1.1.4　若令

$$\mathcal{C}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\bigcup_{k=1}^{n}(a_k, b_k]|a_k, b_k\in\mathbb{R}\right\},$$

则 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的环.

定义 1.1.9　如果 $\mathcal{C}$ 对有限交及取余运算封闭, 且有 $\Omega\in\mathcal{C}$. 即 $\mathcal{C}$ 满足下列条件:

(1) $\Omega\in\mathcal{C}$;

(2) $A\in\mathcal{C}\Rightarrow A^c\in\mathcal{C}$;

(3) $A, B\in\mathcal{C}\Rightarrow A\cap B\in\mathcal{C}$.

则称 $\mathcal{C}$ 是一个代数（或域）.

若 $\mathcal{C}$ 是一个代数, 易证它对有限并及差运算封闭, 即

$$A, B\in\mathcal{C}\Rightarrow A\cup B\in\mathcal{C}, A\backslash B\in\mathcal{C}.$$

因此代数一定是环.

定义 1.1.10　如果 $\mathcal{C}$ 对可列交及取余运算封闭, 且有 $\Omega\in\mathcal{C}$. 即 $\mathcal{C}$ 满足下列条件:

(1) $\Omega\in\mathcal{C}$;

(2) $A\in\mathcal{C}\Rightarrow A^c\in\mathcal{C}$;

(3) $\{A_n, n\geqslant 1\}\subset\mathcal{C}\Rightarrow\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{C}$.

则称 $\mathcal{C}$ 是一个 σ 代数（或 σ 域）.

若 $\mathcal{C}$ 是一个 σ 代数, 易证它对差及可列并运算封闭, 即有

(4) $\varnothing\in\mathcal{C}$;

(5) $A, B\in\mathcal{C}\Rightarrow A\backslash B\in\mathcal{C}$;

(6) 若 $\{A_n, n\geqslant 1\}\subset\mathcal{C}\Rightarrow\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{C}$.

定理 1.1.1　设 $\mathcal{C}$ 是一个代数, 则下列 5 种可数集运算的封闭性是相互等价的:

(1)“可数并”运算封闭;

(2)“可数交”运算封闭;

(3)“可数直和”运算封闭;

(4)“非降极限”运算封闭;

(5)“非增极限”运算封闭.

证明　设 $\{A_n, n \geqslant 1\} \subset \mathcal{C}$, 由于 $\mathcal{C}$ 是代数, 故 $\{A_n^c, n \geqslant 1\} \subset \mathcal{C}$. 令

$$B_1 = A_1,\ B_n = A_n A_1^c \cdots A_{n-1}^c = A_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k,\ n \geqslant 2,$$

则 $\{B_n, n \geqslant 1\} \subset \mathcal{C}$, $\{B_n, n \geqslant 1\}$ 中的集合两两不交, 且有 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) 若 (1) 成立, 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathcal{C}$. 再由 $\mathcal{C}$ 是代数, 则 $\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c \in \mathcal{C}$, 从而 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c \in \mathcal{C}$. 反之, 若 (2) 成立, 则由 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c \in \mathcal{C}$, 即 (1) 成立.

(1) $\Leftrightarrow$ (3) 由 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 可得.

(1) $\Leftrightarrow$ (4) 若 (1) 成立, 设 $\{A_n, n \geqslant 1\}$ 是非降集合序列, 由于

$$A_n \uparrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C},$$

故 (4) 成立. 反之, 若 (4) 成立, 则集合序列 $\left\{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k, n \geqslant 1\right\} \subset \mathcal{C}$, 且当 $n \to \infty$ 时

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \uparrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{C},$$

故 (1) 成立.

(2) $\Leftrightarrow$ (5) 类似于 (1) 和 (4) 的等价性证明, 可证 (2) 和 (5) 是等价的. 证毕.

由定理 1.1.1 可知, 当我们需要验证某集类 $\mathcal{C}$ 是 σ 代数时, 只需验证 $\mathcal{C}$ 是代数, 同时还须验证定理中所述 5 种可数集运算之一是封闭的, 其中 (3)、(4) 或 (5) 比 (1) 或 (2) 更容易验证.

例 1.1.5　设 $\Omega=\{1,2,3\}$, 分别令

$$\mathcal{C}_1=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\},\qquad \mathcal{C}_2=\{\varnothing,\{1,2,3\}\}.$$

则 $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2$ 都是 Ω 上的 σ 代数.

在例 1.1.5 中, 若以 2^Ω 表示 Ω 的幂集（ Ω 的一切子集构成的类）, 即有 $\mathcal{C}_1=2^\Omega$, 则 2^Ω 是 Ω 上的 σ 代数. 易见 Ω 上的任何 σ 代数都包含于 $\mathcal{C}_1$, 因而 $\mathcal{C}_1$ 是 Ω 上最大的 σ 代数. 同时, $\mathcal{C}_2$ 被任何 σ 代数都包含, 因而是 Ω 上最小的 σ 代数. 如果 A 是 Ω 的一个非空真子集合, 则包含 A 的最小的 σ 代数为 $\{\varnothing,A,A^c,\Omega\}$.

定义 1.1.11　如果 $\mathcal{C}$ 对单调序列极限封闭, 即

$$\{A_n,n\geqslant 1\}\subset\mathcal{C},\ \ A_n\uparrow A\ (\text{或 } A_n\downarrow A)\Rightarrow A\in\mathcal{C}.$$

则称 $\mathcal{C}$ 是一个单调类.

定义 1.1.12　如果 $\mathcal{C}$ 满足下列条件:

(1) $\Omega\in\mathcal{C}$;

(2) $A,B\in\mathcal{C},\ B\subset A\Rightarrow A\backslash B\in\mathcal{C}$;

(3) $\{A_n,n\geqslant 1\}\subset\mathcal{C},\ A_n\uparrow A\Rightarrow A\in\mathcal{C}$.

则称 $\mathcal{C}$ 是一个 λ 类.

λ 类还有另外一种定义.

把上述定义记为 (Ⅰ)，下面给出的另外一种定义记为 (Ⅱ).

(Ⅱ) 如果 $\mathcal{C}$ 满足下列条件:

(1) $\Omega\in\mathcal{C}$;

(2) $A,B\in\mathcal{C},\ B\subset A\Rightarrow A\backslash B\in\mathcal{C}$;

$(3)'\{A_n,n\geqslant 1\}\subset\mathcal{C}$, 且 $A_n\cap A_m=\varnothing,\ m\neq n\Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{C}$.

则 $\mathcal{C}$ 是一个 λ 类.

下面证明这两个定义是等价的.

(Ⅰ) $\Rightarrow$ (Ⅱ) 只需证 $(3)'$ 成立.

设 $\{A_n,n\geqslant 1\}\subset\mathcal{C}$, 且 $A_n\cap A_m=\varnothing,\ m\neq n$, 构造集合序列

$$B_n=\bigcup_{k=1}^{n}A_k,\ n=1,2,\cdots,$$

显然有 $B_n\subset B_{n+1},\ n=1,2,\cdots$, 而

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n.$$

由 (3) 知 $\lim\limits_{n\to\infty} B_n \in \mathcal{C}$, 即 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{C}$.

(Ⅱ) ⇒ (Ⅰ)　只需证 (3) 成立. 设 $\{A_n, n \geqslant 1\} \subset \mathcal{C}$, 构造集合序列 $\{B_n, n \geqslant 1\}$.

$$B_1 = A_1,\ B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k,\ n \geqslant 2,$$

此时 $B_n \cap B_m = \varnothing$, $m \neq n$, 且 $\{B_n, n \geqslant 1\} \subset \mathcal{C}$. 由此

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{C}.$$

总结以上不同定义, 我们得到了不同集类之间由强到弱的顺序:

σ 代数 ⇒ 代数 ⇒ 半代数 ⇒ 半环 ⇒ π 类,

σ 代数 ⇒ 代数 ⇒ 环 ⇒ 半环 ⇒ π 类,

σ 代数 ⇒ λ 类 ⇒ 单调类.

上述这些集类最核心的是 σ 代数, 它的成员就是我们常说的可测集 (在概率论中, σ 代数也称为事件域, 它里面的元素称为事件). 我们最终就是要在 σ 代数上建立测度.

今后, 一个非空集合 Ω 和它上面的一个 σ 代数 $\mathcal{F}$ 放在一起写成的二元组 $(\Omega, \mathcal{F})$, 被称为可测空间.

一个简单的集类在什么情况下能成为一个 σ 代数呢? 下面我们来探讨一下这个问题. 有下面两个理论上的结果.

命题 1.1.1　集类 $\mathcal{F}$ 是 σ 代数的充分必要条件是 $\mathcal{F}$ 既是单调类又是代数.

证明　必要性显然, 下证充分性.

设 $\mathcal{F}$ 是一个单调类且是一个代数, 只需证 $\mathcal{F}$ 对可数并封闭.

设 $\{A_n, n \geqslant 1\} \subset \mathcal{F}$, 记 $B_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k,\ n \geqslant 1$, 则 $\{B_n, n \geqslant 1\}$ 是一个单调增序列, 因此 $B_n \uparrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. 由于 $\mathcal{F}$ 为代数, 故 $B_n \in \mathcal{F}, n \geqslant 1$. 又 $\mathcal{F}$ 为单调类, 从而 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F}$. 因此

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F}.$$

可见, $\mathcal{F}$ 是一个 σ 代数. 证毕.

命题 1.1.2　集类 $\mathcal{F}$ 是 σ 代数的充分必要条件是 $\mathcal{F}$ 既是 λ 类又是 π 类.

该命题有两种证法.