第4章

本章要求了解任何一个线性规划模型都有另一个线性规划模型与之伴随（对偶模型）；理解线性规划对偶模型提出的实际背景，掌握原模型和对偶模型之间的关系；熟悉线性规划对偶模型的基本性质；理解影子价格的经济含义；掌握对偶单纯形法。

对偶模型

4.1 对偶模型的提出

对偶模型可以从实际问题需求角度提出，也可以从理论角度提出。

4.1.1 实际角度对偶模型的提出

例 4-1 某厂用甲、乙、丙三种原料生产 A 和 B 两种产品，每种产品耗用的各种原料、利润及原料库存如表 4-1 所示，如何安排生产使得在现有条件下获得利润最多?

表 4-1 原料消耗、利润及原料库存表

原料	产品		原料库存
	A	B	
甲	1	1	90
乙	5	2	490
丙	2	6	240
利润/元	6	8	

解 设生产 A 和 B 产品数分别为 x_1，x_2，则数学模型为

$$\max s=6x_1+8x_2$$

$$\text{st}\begin{cases}x_1+x_2\leqslant 90\\5x_1+2x_2\leqslant 490\\2x_1+6x_2\leqslant 240\\x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

用 QM 软件解得：$x_1=75$，$x_2=15$。最优值为 570。

现在从另一个角度讨论这一问题，假设决定不生产这两种产品，而将其资源出租，问题是对每种原料如何定价。由于用现有的原料进行生产可带来 570 元的利润，所以决策者不可能一分钱不赚原价出租原料，因此决策者希望在每一种原料进价的基础上增加一部分定价。

设三种原料在原价基础上增加部分的定价分别为 y_1，y_2，y_3，则该问题的数学模型为

$$\min \omega=90y_1+490y_2+240y_3$$

$$\text{st}\begin{cases}y_1+5y_2+2y_3\geqslant 6\\y_1+2y_2+6y_3\geqslant 8\\y_1,\ y_2,\ y_3\geqslant 0\end{cases}$$

用 QM 软件解得：$y_1=5$，$y_2=0$，$y_3=0.5$，最优值为 570。

这样，从两个不同的角度来考虑同一个工厂的最大利润、最小租金问题时，所建立起来的两个线性规划模型就是一对对偶模型，其中一个叫作原模型，另一个就叫作对偶模型。

4.1.2 理论角度对偶模型的提出

线性规划模型

$$\max z=\boldsymbol{CX}$$

$$\text{st}\begin{cases}\boldsymbol{AX}\leqslant\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}\tag{4.1}$$

加上松弛变量以后为

$$\max z=\boldsymbol{CX}+\boldsymbol{0X}_{\mathrm{S}}$$
$$\text{st}\begin{cases}\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{EX}_{\mathrm{S}}=\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{X},\ \boldsymbol{X}_{\mathrm{S}}\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}\tag{4.2}$$

$\boldsymbol{X}_{\mathrm{S}}$ 为松弛变量，$\boldsymbol{X}_{\mathrm{S}}=(x_{n+1},\ x_{n+2},\ \cdots,\ x_{n+m})$，$\boldsymbol{E}$ 为 $m\times m$ 的单位矩阵。

当
$$\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\leqslant\boldsymbol{0}\tag{4.3}$$
$$-\boldsymbol{C}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{B}^{-1}\leqslant\boldsymbol{0}\tag{4.4}$$
时就得到了线性规划的最优解，可见这两个表达式是得到最优解的充分必要条件。

令 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{B}^{-1}$，称它为单纯形表的乘子。则表达式（4.4）可写为 $\boldsymbol{Y}\geqslant\boldsymbol{0}$，表达式（4.3）可写为 $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{YA}\leqslant\boldsymbol{0}$，式（4.3）和式（4.4）两个条件要同时成立，则为

$$\text{st}\begin{cases}\boldsymbol{YA}\geqslant\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{Y}\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}$$

给 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{B}^{-1}$ 两边同右乘以矩阵 $\boldsymbol{b}$，得

$$\boldsymbol{Yb}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\tag{4.5}$$

由 $\boldsymbol{Y}\geqslant\boldsymbol{0}$ 知 $\boldsymbol{Y}$ 的上界为无限大，所以式（4.5）只存在最小值，从而得到另一个线性规划模型

$$\min \omega=\boldsymbol{Yb}$$
$$\text{st}\begin{cases}\boldsymbol{YA}\geqslant\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{Y}\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}\tag{4.6}$$

称这个线性规划模型为线性规划模型（4.1）的对偶模型。

通过比较原线性规划模型和它的对偶模型，发现两个模型的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{b}$ 之间有紧密联系。

4.2 原模型与对偶模型的关系

4.2.1 对称形式线性规划模型的对偶模型

定义 1 具有下列特点的线性规划模型称为对称形式的线性规划模型，变量均具有非负约束，其约束条件为：当目标函数求最大时取“⩽”，目标函数求最小时取“⩾”。

由定义可知求最大时对称形式的线性规划模型为

$$\max z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$
$$\text{st}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2\\ \qquad\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant b_m\\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\geqslant 0\end{cases}\tag{4.7}$$

若用 $y_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 表示第 i 种资源的定价，则其对偶模型为

$$\min \omega = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m$$

$$\text{st}\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geqslant c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geqslant c_2 \\ \vdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geqslant c_n \\ y_1, \ y_2, \ \cdots, \ y_m \geqslant 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

原线性规划与其对应的对偶规划也可简写为

（原线性规划）　　　（对偶规划）

$$\max z = \boldsymbol{CX} \qquad\qquad \min \omega = \boldsymbol{Yb}$$

$$\text{st}\begin{cases} \boldsymbol{AX} \leqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \qquad\qquad \text{st}\begin{cases} \boldsymbol{YA} \geqslant \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{Y} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C} = (c_1, \ c_2, \ \cdots, \ c_n), \quad \boldsymbol{Y} = (y_1, y_2, \ \cdots, \ y_m)$$

例 4－2　写出下列模型的对偶模型。

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{st}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 4x_1 \leqslant 16 \\ 4x_2 \leqslant 12 \\ x_1, \ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解　对偶模型为

$$\min \omega = 8y_1 + 16y_2 + 12y_3$$

$$\text{st}\begin{cases} y_1 + 4y_2 \geqslant 2 \\ 2y_1 + 4y_3 \geqslant 3 \\ y_1, \ y_2, \ y_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

总结两个模型之间的关系：原模型的变量个数是其对偶模型的约束方程个数，原模型的约束方程个数是其对偶模型的变量个数，原模型的目标函数系数是其对偶模型的约束方程右端常数项，原模型的约束方程右端常数项是其对偶模型的目标函数系数，原模型约束方程的系数矩阵的转置是其对偶模型约束方程的系数矩阵，原模型和对偶模型目标函数属性相反。按照这样的对应关系就可以写出任何一个对称形式线性规划模型的对偶模型。

4.2.2　一般形式的线性规划模型与对偶模型之间的关系

原模型（4.7）与对偶模型（4.8）之间的这种对应关系仅仅适合于对称形式。对于非对称形式的线性规划模型如何写出其对偶模型，其思路是首先将非对称形式转换为对称形式，然后再按照上面的对应关系写出其对偶模型。

例 4－3　写出下列线性规划模型的对偶模型。

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

$$\text{st}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \geqslant b_3 \\ x_1 \geqslant 0，x_2 \leqslant 0，x_3\text{无约束} \end{cases} \tag{4.9}$$

解　步骤如下。

(1) 将约束条件 2 的等式约束转化为以下两个不等式约束

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leqslant b_2 \quad \text{和} \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \geqslant b_2$$

再变换为

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leqslant b_2 \quad \text{和} \quad -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 \leqslant -b_2$$

(2) 将约束条件 3 两端同乘“-1”得

$$-a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 \leqslant -b_3$$

(3) 非负变量约束变换为 $x_2 = -x_2'$，$x_3 = x_3' - x_3''$，其中 $x_2' \geqslant 0$，$x_3' \geqslant 0$，$x_3'' \geqslant 0$。

经过以上三步的变换，原数学模型（4.9）就转换为如下对称形式的数学模型：

$$\max z = c_1x_1 - c_2x_2' + c_3x_3' - c_3x_3''$$

$$\text{st}\begin{cases} a_{11}x_1 - a_{12}x_2' + a_{13}x_3' - a_{13}x_3'' \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 - a_{22}x_2' + a_{23}x_3' - a_{23}x_3'' \leqslant b_2 \\ -a_{21}x_1 + a_{22}x_2' - a_{23}x_3' + a_{23}x_3'' \leqslant -b_2 \\ -a_{31}x_1 + a_{32}x_2' - a_{33}x_3' + a_{33}x_3'' \leqslant -b_3 \\ x_1 \geqslant 0，x_2' \geqslant 0，x_3' \geqslant 0，x_3'' \geqslant 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

对于上面对称形式的线性规划模型，按照 4.2 节中的对应关系就可以写出其对偶模型。令各约束对应的对偶变量分别为 y_1，y_2'，y_2''，y_3'，则对偶模型为

$$\min \omega = b_1y_1 + b_2y_2' - b_2y_2'' - b_3y_3'$$

$$\text{st}\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2' - a_{21}y_2'' - a_{31}y_3' \geqslant c_1 \\ -a_{12}y_1 - a_{22}y_2' + a_{22}y_2'' + a_{32}y_3' \geqslant -c_2 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2' - a_{23}y_2'' - a_{33}y_3' \geqslant c_3 \\ -a_{13}y_1 - a_{23}y_2' + a_{23}y_2'' + a_{33}y_3' \geqslant -c_3 \\ y_1 \geqslant 0，y_2' \geqslant 0，y_2'' \geqslant 0，y_3' \geqslant 0 \end{cases} \tag{4.11}$$

在对偶模型（4.11）中，令 $y_2 = y_2' - y_2''$，$y_3 = -y_3'$，则得

$$\min \omega = b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3$$

$$\text{st}\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 \geqslant c_1 \\ -a_{12}y_1 - a_{22}y_2 - a_{32}y_3 \geqslant -c_2 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + a_{33}y_3 \geqslant c_3 \\ -a_{13}y_1 - a_{23}y_2 - a_{33}y_3 \geqslant -c_3 \\ y_1 \geqslant 0，y_2\text{无约束}，y_3 \leqslant 0 \end{cases} \tag{4.12}$$

进一步将式（4.12）中的条件 2 两端同乘“-1”，将条件 3 和条件 4 合并为等式，得

$$\min \omega = b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3$$

$$
\text{st}\begin{cases}a_{11}y_1+a_{21}y_2+a_{31}y_3\geqslant c_1\\ a_{12}y_1+a_{22}y_2+a_{32}y_3\leqslant c_2\\ a_{13}y_1+a_{23}y_2+a_{33}y_3=c_3\\ y_1\geqslant 0,\ y_2\text{无约束},\ y_3\leqslant 0\end{cases}\tag{4.13}
$$

对于一般形式的线性规划模型，将原模型与对偶模型之间的关系总结如下。

（1）原模型是最大值，则对偶模型按照以下写出：原模型的变量个数是其对偶模型的约束方程个数，原模型的约束方程个数是其对偶模型的变量个数，原模型的目标函数系数是其对偶模型的约束方程右端常数项，原模型的约束方程右端常数项是其对偶模型的目标函数系数，原模型约束方程的系数矩阵的转置是其对偶模型约束方程的系数矩阵，原模型和对偶模型目标函数属性相反。原模型变量的符号确定对偶模型约束条件的符号，关系为一致；原模型约束条件的符号确定对偶模型变量的符号，关系为相反。

（2）原模型是最小值，则对偶模型按照以下写出：原模型的变量个数是其对偶模型的约束方程个数，原模型的约束方程个数是其对偶模型的变量个数，原模型的目标函数系数是其对偶模型的约束方程右端常数项，原模型的约束方程右端常数项是其对偶模型的目标函数系数，原模型约束方程的系数矩阵的转置是其对偶模型约束方程的系数矩阵，原模型和对偶模型目标函数属性相反。原模型变量的符号确定对偶模型约束条件的符号，关系为相反；原模型约束条件的符号确定对偶模型变量的符号，关系为一致。

以上关系可以用表 4-2 来描述。

表 4-2　原模型与对偶模型之间的关系

原模型（或对偶模型）		对偶模型（或原模型）	
目标函数 $\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$ 约束条件右端项 目标函数中变量的系数 约束矩阵 **A**		目标函数 $\min \omega=\sum_{i=1}^{m}b_iy_i$ 目标函数中变量的系数 约束条件右端项 **A** 的转置为约束矩阵	
变量	n 个变量	n 个约束方程	约束条件
	第 j 个变量，$x_j\geqslant 0$	第 j 个约束方程 $\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i\geqslant c_j$	
	第 j 个变量，$x_j\leqslant 0$	第 j 个约束方程 $\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i\leqslant c_j$	
	第 j 个变量 x_j 无约束	第 j 个约束方程 $\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i=c_j$	
约束条件	m 个约束方程	m 个变量	变量
	第 i 个约束方程 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i$	第 i 个变量 $y_i\geqslant 0$	
	第 i 个约束方程 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\geqslant b_i$	第 i 个变量 $y_i\leqslant 0$	
	第 i 个约束方程 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i$	第 i 个变量 y_i 无约束	

例 4-4　写出下列线性规划模型的对偶模型。

$$\min z=2x_1+3x_2-5x_3+x_4$$

$$
\text{st}\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4\geqslant 5 \\ 2x_1+2x_3\leqslant 4 \\ x_2+x_3+x_4=6 \\ x_1\leqslant 0,\ x_2,\ x_3\geqslant 0,\ x_4\text{无约束} \end{cases}
$$

解　设对应于三个约束条件的对偶变量分别为 y_1，y_2，y_3，可以直接写出其对偶模型。由于该例的原模型是最小值，因此其对偶模型，按照非对称形式的线性规划模型的对偶模型的关系，可写出从右到左的对应关系。

$$
\max \omega=5y_1+4y_2+6y_3
$$

$$
\text{st}\begin{cases} y_1+2y_2\geqslant 2 \\ y_1+y_3\leqslant 3 \\ -y_1+2y_2+y_3\leqslant -5 \\ y_1+y_3=1 \\ y_1\geqslant 0,\ y_2\leqslant 0,\ y_3\text{无约束} \end{cases}
$$

4.3　对偶模型的基本性质

原模型和对偶模型的数学模型之间有紧密关系，因此人们就会关心它们解之间的关系。如果原模型为求最大值，下面就给出它们解之间的关系。

性质 1　对称性：对偶模型的对偶模型是原模型。

性质 2　弱对偶性：原模型可行解的目标函数值不可能超过对偶模型可行解的目标函数值。如果 $\overline{x}_j$（$j=1，2，\cdots，n$）是原模型的可行解，$\overline{y}_i$（$i=1，2，\cdots，m$）是对偶模型的可行解，则恒有

$$
\sum_{j=1}^{n}c_j\overline{x}_j\leqslant\sum_{i=1}^{m}b_i\overline{y}_i
$$

由弱对偶性可得出以下推论。

(1) 原模型任意可行解的目标函数值是其对偶模型目标函数值的下界；反之，对偶模型任意可行解的目标函数值是其原模型目标函数值的上界。

(2) 如果原模型（或对偶模型）的目标函数值无界，那么其对偶模型（或原模型）必然无可行解。但不能由原模型（或对偶模型）无可行解推出其对偶模型（或原模型）为无界解。

(3) 若原模型有可行解而其对偶模型无可行解，则原模型目标函数值无界；反之，对偶模型有可行解而其原模型无可行解，则对偶模型的目标函数值无界。

性质 3　最优性：设 $\overline{\boldsymbol{X}}$ 是原模型的可行解，$\overline{\boldsymbol{Y}}$ 是对偶模型的可行解，当 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{Y}}$，即

$$
\sum_{j=1}^{n}c_j\overline{x}_j=\sum_{i=1}^{m}b_i\overline{y}_i \tag{4.14}
$$

则 $\overline{\boldsymbol{X}}$ 和 $\overline{\boldsymbol{Y}}$ 是原模型和对偶模型的最优解。

性质 4　强对偶性（对偶定理）：若其中之一有最优解，则另一个必有最优解，且目标函数值相同。

性质 5　互补松弛性：设 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 是原问题的可行解，$\overline{\boldsymbol{y}}$ 是对偶模型的可行解，那么，$\overline{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{S}}=0$，

$\boldsymbol{y}_S\bar{\boldsymbol{x}}=0$当且仅当 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 为最优解。其中，$\boldsymbol{x}_S$，$\boldsymbol{y}_S$是原模型和对偶模型的松弛变量。

例 4－5 已知线性规划模型

$$\max z=2x_1+4x_2+x_3+x_4$$

$$\text{st}\begin{cases}x_1+3x_2+x_4\leqslant 8\\2x_1+x_2\leqslant 6\\x_1+x_2+x_3\leqslant 9\\x_2+x_3+x_4\leqslant 6\\x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,3,4\end{cases}$$

(1) 写出该模型的对偶模型；

(2) 已知原模型的最优解为：$\boldsymbol{x}=(2,2,4,0)^{\mathrm{T}}$。根据对偶理论，直接求对偶模型的最优解。

解 (1) 对偶模型为

$$\min \omega=8y_1+6y_2+9y_3+6y_4$$

$$\text{st}\begin{cases}y_1+2y_2+y_3\geqslant 2\\3y_1+y_2+y_3+y_4\geqslant 4\\y_3+y_4\geqslant 1\\y_1+y_4\geqslant 1\\y_i\geqslant 0,\quad i=1,2,3,4\end{cases}$$

(2) 根据原线性规划模型的最优解知：

原模型的松弛变量 $x_5=0$，$x_6=0$，$x_7=1$，$x_8=0$。

设对偶模型的最优解为 $\boldsymbol{y}^*$，由互补松弛性 $\boldsymbol{y}^*\boldsymbol{x}_S=0$，知 $y_3^*=0$。

设对偶模型的剩余变量为 y_5，y_6，y_7，y_8，由互补松弛性 $\boldsymbol{y}_S\boldsymbol{x}=0$ 知 $2y_5+2y_6+4y_7+0y_8=0$，由于剩余变量皆为正，因此，$y_5=0$，$y_6=0$，$y_7=0$，此时对偶模型的约束条件为

$$\begin{cases}y_1^*+2y_2^*+y_3^*=2\\3y_1^*+y_2^*+y_3^*+y_4^*=4\\y_3^*+y_4^*=1\\y_3^*=0\end{cases}$$

解上面的方程组得 $y_1^*=\dfrac{4}{5}$，$y_2^*=\dfrac{3}{5}$，$y_3^*=0$，$y_4^*=1$。

4.4 对偶模型的经济意义——影子价格

在例 4－1 中，从对偶模型的最优解 $y_1=5$，$y_2=0$，$y_3=0.5$ 可以看出，如果原料甲由 90 变成 91，由于 $y_1=5$，则目标函数值增加 5，即总利润增加 5，可见 $y_1=5$ 描述了在生产最优安排下，原料甲的变动给总利润带来的影响。即 $y_1=5$ 代表的意义是在第一种原料最优利用条件下对该原料的单位估价，这种估价不是市场价格，而是根据原料在生产最优安排中的贡献而作出的估价。为区别对偶模型的最优解，称 $y_1=5$ 为原料甲在生产最优安排下的影子价格（shadow price）。一般将 y_i^* 称为第 i 种原料的影子价格。

从另一角度来看，在单纯形法的每一步迭代中，目标函数取值 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ 和检验数

$\boldsymbol{C}_{\mathrm{N}}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$ 中都有乘子 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{B}^{-1}$，如果 $\boldsymbol{B}$ 是式（4.1）的最优基，则 $\boldsymbol{Z}^{*}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{Y}^{*}\boldsymbol{b}$，从而，$\dfrac{\partial \boldsymbol{Z}^{*}}{\partial \boldsymbol{b}}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{Y}^{*}$，故经济学家称 $\boldsymbol{Y}^{*}$ 为资源的影子价格。

从最优值对第 i 种资源求偏导数为 y_i^* 可知，变量 y_i^* 的经济意义是在最优资源利用条件下，右端常数项增加 1 个单位，目标函数值增加的量称为该资源的影子价格。

由以上的分析可以进一步得出以下结论。

（1）不同的资源影子价格不一定相同。无剩余（松弛变量＝0）的资源，影子价格不等于 0；有剩余（松弛变量≠0）的资源，影子价格等于 0。

（2）影子价格是一种边际价格。一种资源的影子价格越大，则增加或减少一单位的这种资源对总利润的影响越大。

（3）影子价格的确定依赖于一定的范围与条件。资源的市场价格是已知数，是相对稳定的，而它的影子价格则依赖于资源的利用情况。企业进行生产时，由于生产任务、工艺水平、产品结构等发生变化，影子价格也随之发生变化。

（4）影子价格在最优方案中才能体现出来。因此在企业内部，可以借助影子价格确定内部结算价格，以便控制有限资源的使用和考核下属企业经营的绩效；国家可以根据影子价格规定使用紧缺资源时必须上缴的利润额，以促使经营效益低的企业自觉地节约使用紧缺资源，使有限的资源发挥更大的经济效益。

（5）影子价格是 20 世纪 40 年代苏联数学家康托洛维奇提出的。影子价格对市场有调节作用，实际上影子价格是一种机会成本。在完全市场经济条件下，资源市场价格高于影子价格时可以卖出这种资源，资源市场价格低于影子价格时可以买进这种资源。随着资源的买进卖出，它的影子价格也将随之发生变化，一直到影子价格与市场价格保持到同一水平，才处于平衡状态。

（6）从影子价格的含义可以解释在单纯形表的计算中检验数的意义。在单纯形表的计算中，检验数为

$$\sigma_j=c_j-\boldsymbol{C}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_j=c_j-\boldsymbol{Y}\boldsymbol{P}_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i \tag{4.15}$$

其中 c_j 代表第 j 种产品的产值或利润，由于 a_{ij}（$i=1$，2，…，m）代表生产一单位的第 j 种产品所耗用的资源，$\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}y_i$ 就代表生产该种产品所耗用各项资源和影子价格乘积的总和，也就是产品的隐含成本。当产品的产值或利润大于隐含成本时，表明该项产品利润，可以继续提高，可在计划中安排，否则就不安排而生产其他产品，这就是单纯形表中检验数的经济意义。

4.5 原模型的最优解与对偶模型的最优解

4.5.1 对偶模型的最优解

在求解原模型最优解的最终单纯形表中可以得到对偶模型最优解。对于标准型线性规划模型，用单纯形法进行迭代求解得到原模型最优单纯形表，那么对偶模型的最优解就为最优单纯形表中松弛变量和剩余变量对应的检验数的相反数。

以例 4－1 来说明上述方法，例 4－1 中的线性规划模型用单纯形解法迭代过程如图 4－1 所示。

Cj	Basic Variables	6 X1	8 X2	0 slack 1	0 slack 2	0 slack 3	Quantity
Iteration 1							
	cj-zj	6.	8.	0.	0.	0.	
0	slack 1	1.	1.	1.	0.	0.	90.
0	slack 2	5.	2.	0.	1.	0.	490.
0	slack 3	2.	6.	0.	0.	1.	240.
Iteration 2							
	cj-zj	3.3333	0.	0.	0.	-1.3333	
0	slack 1	0.6667	0.	1.	0.	-0.1667	50.
0	slack 2	4.3333	0.	0.	1.	-0.3333	410.
8	X2	0.3333	1.	0.	0.	0.1667	40.
Iteration 3							
	cj-zj	0.	0.	-5.	0.	-0.5	
6	X1	1.	0.	1.5	0.	-0.25	75.
0	slack 2	0.	0.	-6.5	1.	0.75	85.
8	X2	0.	1.	-0.5	0.	0.25	15.

图 4－1　例 4－1 线性规划模型的单纯形解法迭代过程

可以看出，原模型的最优解为 75，15。剩余变量对应的检验数为（－5，0，－0.5）。由此可得对偶模型的最优解为：$\boldsymbol{y}^*=(y_1^*,\ y_2^*,\ y_3^*)=(5,\ 0,\ 0.5)$。

如果进一步来求解例 4－1 线性规划模型的对偶模型

$$\min \omega=90y_1+490y_2+240y_3$$

$$\text{st}\begin{cases}y_1+5y_2+2y_3\geqslant 6\\ y_1+2y_2+6y_3\geqslant 8\\ y_1,\ y_2,\ y_3\geqslant 0\end{cases}$$

用单纯形法求解，其迭代过程如图 4－2 所示。

Cj	Basic Variables	90 X1	490 X2	240 X3	0 artfcl 1	0 surplus 1	0 artfcl 2	0 surplus 2	Quantity
Iteration 1									
	cj-zj	2.	7.	8.	0.	-1.	0.	-1.	
0	artfcl 1	1.	5.	2.	1.	-1.	0.	0.	6.
0	artfcl 2	1.	2.	6.	0.	0.	1.	-1.	8.
Iteration 2									
	cj-zj	0.6667	4.3333	0.	0.	-1.	0.	0.3333	
0	artfcl 1	0.6667	4.3333	0.	1.	-1.	0.	0.3333	3.3333
240	X3	0.1667	0.3333	1.	0.	0.	0.1667	-0.1667	1.3333
Iteration 3									
	cj-zj	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	
490	X2	0.1538	1.	0.	0.2308	-0.2308	0.	0.0769	0.7692
240	X3	0.1154	0.	1.	0.	0.0769	0.1667	-0.1923	1.0769
Iteration 4									
	cj-zj	13.0769	0.	0.	113.0769	-94.6154	40.	-8.4615	
490	X2	0.1538	1.	0.	0.2308	-0.2308	0.	0.0769	0.7692
240	X3	0.1154	0.	1.	0.	0.0769	0.1667	-0.1923	1.0769
Iteration 5									
	cj-zj	0.	-85.	0.	113.0769	-75.	40.	-15.	
90	X1	1.	6.5	0.	1.5	-1.5	0.	0.5	5.
240	X3	0.	-0.75	1.	0.	0.25	0.1667	-0.25	0.5

图 4－2　例 4－1 的迭代过程

从最终单纯形表里可以看出原模型的最优解为 $(y_1^*,\ y_2^*,\ y_3^*)=(5,\ 0,\ 0.5)$，对偶模型的最优解为剩余变量对应的检验数的相反数 $(x_1^*,\ x_2^*)=(75,\ 15)$。

由对偶模型的性质可以发现，对于原模型和对偶模型，只要求出其中一个模型的最优解，另一个模型的最优解也就求出来了。因此，如果求解的模型比较复杂，而它的对偶模型比较简单，那么就可以去求解后者，同样可以得到原模型的解。求解一个线性规划模型需要的时间取决于约束条件的数目而不是变量的数目，因此应该选择约束条件少的模型来求解。

4.5.2 影子价格与对偶模型最优解的关系

并非所有的约束条件都是资源的约束，但是每一个约束条件对应的对偶最优解的分量 y_i^* 都可以解释为目标函数最优值 z^* 对右端项 b_i 的变化率。然而影子价格是右端项增加时目标函数最优值的改进率而不是变化率，所以对偶模型的最优解和影子价格是不同的，对偶模型的最优解和影子价格的关系如表 4－3 所示。正的影子价格在最大化中使目标函数值增加，在最小化中使目标函数值减少。即使目标函数最优值受益，负的影子价格将在最大化中使目标函数值减少；在最小化中使目标函数增加，即使目标函数最优值受损。

表 4－3 对偶模型最优解和影子价格的关系

约束种类	影子价格
$\leqslant$	对偶最优解（y_i^* 的值）
$\geqslant$	对偶最优解的相反数（y_i^* 值的相反数）

例 4－6 求解例 2－2 中 M&D 公司生产问题的线性规划模型

$$\min z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{st}\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 350 \\ x_1 \geqslant 125 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 600 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解 用单纯形法进行求解，其迭代过程如图 4－3 所示。

Cj	Basic Variables	-2 X1	-3 X2	0 artfcl 1	0 surplus 1	0 artfcl 2	0 surplus 2	0 slack 3	Quantity
Iteration 1									
	cj-zj	2.	1.	0.	-1.	0.	-1.	0.	
0	artfcl 1	1.	1.	1.	-1.	0.	0.	0.	350.
0	artfcl 2	1.	0.	0.	0.	1.	-1.	0.	125.
0	slack 3	2.	1.	0.	0.	0.	0.	1.	600.
Iteration 2									
	cj-zj	0.	1.	0.	-1.	0.	1.	0.	
0	artfcl 1	0.	1.	1.	-1.	0.	1.	0.	225.
-2	X1	1.	0.	0.	0.	1.	-1.	0.	125.
0	slack 3	0.	1.	0.	0.	0.	2.	1.	350.
Iteration 3									
	cj-zj	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	
-3	X2	0.	1.	1.	-1.	0.	1.	0.	225.
-2	X1	1.	0.	0.	0.	1.	-1.	0.	125.
0	slack 3	0.	0.	0.	1.	0.	1.	1.	125.
Iteration 4									
	cj-zj	0.	0.	3.	-3.	2.	1.	0.	
-3	X2	0.	1.	1.	-1.	0.	1.	0.	225.
-2	X1	1.	0.	0.	0.	1.	-1.	0.	125.
0	slack 3	0.	0.	0.	1.	0.	1.	1.	125.
Iteration 5									
	cj-zj	0.	0.	3.	-4.	2.	0.	-1.	
-3	X2	0.	1.	1.	-2.	0.	0.	-1.	100.
-2	X1	1.	0.	0.	1.	1.	0.	1.	250.
0	surplus 2	0.	0.	0.	1.	0.	1.	1.	125.

图 4－3 单纯形法的迭代求解过程及结果

通过上面的最优单纯形表可以得到原模型的最优解为：$x_1=250$，$x_2=100$。对偶模型的最优解为剩余变量和松弛变量的相反数，即 4、0、1。根据表 4－3 中对偶模型最优解与影子价格的关系，可知三个约束条件的影子价格为－4，0，1。由于目标函数是求最小值，影子价格经济意义为：第二种资源增加一个单位不会引起目标函数值的增加；第一种资源增加一个单位，将会使目标函数值增加 4；第三种资源增加一个单位使目标函数值减少 1（图 4－4）。

X1	X2		RHS	Dual
2.	3.			
1.	1.	>=	351.	-4.
1.	0.	>=	125.	0.
2.	1.	<=	600.	1.
249.	102.		$804.	

图 4－4　各种资源的影子价格

4.6　对偶单纯形法

4.6.1　对偶单纯形法的原理

由单纯形表法可知 $\boldsymbol{A}$ 中一个 m 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 如果是最优的，必须同时满足以下三个条件：

（1）$\boldsymbol{B}$ 可逆；

（2）$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant\boldsymbol{0}$；

（3）$\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\leqslant\boldsymbol{0}$。

在利用单纯形表法求解线性规划模型的过程中，令 $\boldsymbol{B}$ 先满足（1）和（2），然后在迭代过程中逐步满足（3），最后就得到最优解；而对偶单纯形法就是令 $\boldsymbol{B}$ 先满足（1）和（3），然后在迭代过程中逐步满足（2），最后也同样得到最优解。把满足 $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\leqslant\boldsymbol{0}$ 的基称为正则基。在对偶单纯形法中称 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ 为检验数。

4.6.2　利用对偶单纯形法求解线性规划模型的步骤

步骤 1：先把线性规划化为标准型，并写出 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{C}$。

步骤 2：找基。在系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中任取一个 m 阶方阵，如 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$，则 $\boldsymbol{B}$ 是基；否则，另选取。

步骤 3：判断 $\boldsymbol{B}$ 是否为正则基。写出 $\boldsymbol{C}_{\mathrm{B}}$，计算 $\boldsymbol{B}^{-1}$，$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$，并判断是否 $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\leqslant\boldsymbol{0}$。如是，则 $\boldsymbol{B}$ 是正则基，否则另找基。

步骤 4：计算单纯形表中的各子矩阵 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{C}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$，写出单纯形表。

步骤 5：判断是否为最优解。如果全部检验数大于等于 0，则 $\boldsymbol{B}$ 就是最优基；如果检验数中有负数，但其对应的行没有负数，则此线性规划模型无最优解；如果检验数中有负数，但其对应的行有负数，则转入换基迭代。

步骤 6：换基迭代。

（1）找换出基变量：在负检验数中选负检验数对应的下标最小的基变量作为换出基

变量。

(2) 找换入基变量：用换出基变量对应的行中的负元数分别去除对应的 $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$ 中的数，选取比值最小者所对应的非基变量为换入基变量。如果比值最小者同时有几个，取下标最小的。

(3) 定轴心项：换入基变量和换出基变量的交叉项为轴心项。

(4) 做“行”变换：同单纯形表法。

(5) 交换变量：用换入基变量替代出基变量，返回步骤 (5)。

关于对偶单纯形法要了解以下几点。

(1) 对偶单纯形法是求解线性规划模型的另一种方法，而不要简单地理解为对偶单纯形法就是求解对偶线性规划模型。

(2) 用对偶单纯形法求解线性规划模型时，初始解可以是非可行解，只要检验数为负时，就可以进行换基迭代了，也不需要加入人工变量，可以简化计算。

(3) 当变量多于约束条件时，用对偶单纯形法计算可以减少计算工作量。

(4) 对偶单纯形法并不是普遍使用的，一般情况下，很难找到一个初始正则基。因此对偶单纯形法很少单独使用，常常和单纯形表法配合使用以进行灵敏度分析。

例 4-7　用对偶单纯形法求解下面线性规划模型。

$$\min z=2x_1+x_2$$

$$\text{st}\begin{cases}-3x_1-x_2\leqslant -3\\ -4x_1-3x_2\leqslant -6\\ -x_1-2x_2\leqslant -2\\ x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解

步骤 1：化为满秩标准型

$$\max z=-2x_1-x_2+0x_3+0x_4+0x_5$$

$$\text{st}\begin{cases}3x_1+x_2-x_3=3\\ 4x_1+3x_2-x_4=6\\ x_1+2x_2-x_5=2\\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\geqslant 0\end{cases}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 4 & 3 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=(-2,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0)$$

步骤 2：找基。取 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{P}_3,\ \boldsymbol{P}_4,\ \boldsymbol{P}_5)=-\boldsymbol{E}$，由于 $|\boldsymbol{B}|=-1\neq 0$，所以 $\boldsymbol{B}$ 为基。

步骤 3：判断 $\boldsymbol{B}$ 是否为正则基。

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{B}}=(0,\ 0,\ 0),\quad \boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$$

$\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}=(-2,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0)\leqslant\boldsymbol{0}$，因此 $\boldsymbol{B}$ 是正则基。

步骤 4：计算单纯形表的各子矩阵：$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{E}\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{C}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，写出单纯形表，如表 4-4 所示。

步骤 5：判断是否为最优解。由于检验数有负数，所以 $\boldsymbol{B}$ 不是最优基；并且负检验数对应的行中的数有负数，转入换基迭代。

表 4-4　单 纯 形 表

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	$-3^{\oplus}$	-1	1	0	0	-3
x_4	-4	-3	0	1	0	-6
x_5	-1	-2	0	0	1	-2
σ_j	-2	-1	0	0	0	0

步骤 6：换基迭代。

（1）找换出基变量：由于检验数列中的数全为负，对应的基变量为 x_3，x_4，x_5，下标最小为 3，所以 x_3为换出基变量。

（2）找换入基变量：换出基变量对应的行中有两个负数：-3 和 -1，取比值（$-2/-3$）和（$-1/-1$）中最小的，即（$-2/-3$），因此 x_1为换入基变量。

（3）定轴心项：-3 为轴心项。

（4）做行变换：把轴心项-3 变为 1，-3 所在列上的其他数变为 0。

（5）交换变量：把基变量中的 x_3改为 x_1。

经过步骤 6 以后，就得到另一个正则基（$\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_4$，$\boldsymbol{P}_5$）对应的单纯形表，如表 4-5 所示。

返回步骤 5 判断，由于检验数中有负数且对应的行有负数，因此继续迭代得到最优单纯形表，如表 4-6 所示。

表 4-5　经过迭代后的单纯形表

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	1
x_4	0	$-\frac{5}{3}^{\oplus}$	$-\frac{4}{3}$	1	0	-2
x_5	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	-1
σ_j	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	2

表 4-6　最优单纯形表

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
x_5	0	0	1	-1	1	1
σ_j	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{12}{5}$

返回步骤 5 判断，由于全部检验数非负，所以（$\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，$\boldsymbol{P}_5$）是最优基，最优解为（3/5，6/5，0，0，1），最优值为 12/5。

习题

1. 写出线性规划模型的对偶模型。

$$\max z=10x_1+3x_2+5x_3$$
$$\text{st}\begin{cases}2x_1+5x_2+x_3\leqslant 15\\4x_1+3x_3\leqslant 7\\x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0\end{cases}$$

$$\max z=5x_1+6x_2+3x_3$$
$$\text{st}\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3=5\\-x_1+5x_2-x_3\geqslant 3\\4x_1+7x_2+3x_3\leqslant 8\\x_1\text{无约束},\ x_2\geqslant 0,\ x_3\leqslant 0\end{cases}$$

$$\min z=3x_1-2x_2+4x_3+2x_5$$
$$\text{st}\begin{cases}3x_1+5x_2+x_4-2x_5\geqslant 6\\x_2+4x_3+x_5\leqslant 8\\2x_1-3x_2+7x_3-x_4+5x_5=0\\x_1,\ x_2\geqslant 0,\ x_4\leqslant 0,\ x_3,\ x_5\ \text{无约束}\end{cases}$$

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$
$$\text{st}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\quad i=1,2,\cdots,m\\\sum\limits_{i=1}^{n}x_{ij}=b_j,\quad j=1,2,\cdots,n\\x_{ij}\geqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,n;\ i=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

2. 判断下列说法是否正确，并说明理由。

（1）如果线性规划的原模型存在可行解，则其对偶模型也一定存在可行解。

（2）如果线性规划的对偶模型无可行解，则其原模型也一定无可行解。

（3）在互为对偶模型的一对原模型与对偶模型中，不管原模型是求最大或最小，原模型可行解的目标函数值一定不超过其对偶模型的可行解的目标函数值。

（4）任何线性规划模型具有唯一的对偶模型。

3. 用计算机求解线性规划模型，说明每一种资源的影子价格。

$$\max z=50x_1+100x_2$$
$$\text{st}\begin{cases}x_1+x_2\leqslant 300\\2x_1+x_2\leqslant 400\\x_2\leqslant 250\\x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

4. 某企业生产甲、乙两种产品，其单位利润分别为 2 元和 3 元。每生产一件甲产品需劳动力 3 个单位，原材料 2 个单位；每生产一件乙产品需劳动力 6 个单位，原材料 1 个单位。企业现有劳动力 24 个，原材料 10 个单位。试问：（1）该企业应如何安排生产才能获得最大利润？（2）若另一个企业想利用该企业的这两种资源（劳动力和原材料），该企业最低应以多少价格转让？

5. 已知线性规划模型

$$\min z=8x_1+6x_2+3x_3+6x_4$$
$$\text{st}\begin{cases}-x_1-2x_2-x_4\leqslant -3\\3x_1+x_2+x_3+x_4\geqslant 6\\x_3+x_4\geqslant 2\\x_1+x_3\geqslant 2\\x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,3,4\end{cases}$$

（1）写出该模型的对偶模型。

（2）已知原模型的最优解为 $\boldsymbol{x}^*=(1, 1, 2, 0)^{\mathrm{T}}$，根据对偶理论，直接求出对偶模型的最优解。

6. 对线性规划模型

$$\max z=x_1+2x_2+x_3$$

$$\text{st}\begin{cases}x_1+x_2-x_3\leqslant 2\\ x_1-x_2+x_3=1\\ 2x_1+x_2+x_3\geqslant 2\\ x_1\geqslant 0, x_2\leqslant 0, x_3\text{无约束}\end{cases}$$

（1）写出其对偶模型；

（2）利用对偶模型性质证明原模型目标函数值 $z\leqslant 1$。

7. 给出线性规划模型

$$\max z=x_1+x_2$$

$$\text{st}\begin{cases}-x_1+x_2+x_3\leqslant 2\\ -2x_1+x_2-x_3\leqslant 1\\ x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, x_3\geqslant 0\end{cases}$$

利用对偶模型性质证明上述模型的目标函数值无界。

8. 用对偶单纯形方法求解下列线性规划模型

（1）$\min z=4x_1+12x_2+18x_3$

$$\text{st}\begin{cases}x_1+3x_3\geqslant 3\\ 2x_2+2x_3\geqslant 5\\ x_1, x_2, x_3\geqslant 0\end{cases}$$

（2）$\min z=5x_1+2x_2+4x_3$

$$\text{st}\begin{cases}3x_1+x_2+2x_3\geqslant 4\\ 6x_1+3x_2+5x_3\geqslant 10\\ x_1, x_2, x_3\geqslant 0\end{cases}$$

9. 对线性规划模型

$$\min z=60x_1+40x_2+80x_3$$

$$\text{st}\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3\geqslant 2\\ 4x_1+x_2+3x_3\geqslant 4\\ 2x_1+2x_2+2x_3\geqslant 3\\ x_1, x_2, x_3\geqslant 0\end{cases}$$

（1）写出对偶模型；

（2）用对偶单纯形法求解原模型；

（3）用单纯形法求解其对偶模型；

（4）比较（2）与（3）中每一步计算得到的结果。

10. 已知有下述线性规划模型

$$\max z=8x_1+4x_2+6x_3+3x_4+9x_5$$

$$\text{st}\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+3x_4+3x_5\leqslant 180\\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4+x_5\leqslant 270\\ x_1+3x_2+2x_3+x_4+3x_5\leqslant 180\\ x_j\geqslant 0, \quad j=1, 2, 3, 4, 5\end{cases}$$

要求根据上述信息确定三种资源各自的影子价格。

11．下述线性规划模型

$$\min z = 2x_1 - (1+\lambda_1)x_2 + 2x_3$$
$$\text{st}\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 - kx_3 \leqslant 6 + \lambda_2 \\ x_1 \leqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \text{ 无约束} \end{cases}$$

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 时，求得其最优解为 $x_1 = -5$，$x_2 = 0$，$x_3 = -1$。

要求：(1) 确定 k 的值；(2) 写出其对偶模型最优解。