张永辉 主编

高考数学培优40讲

三角、向量、数列、不等式与复数

清华大学出版社
北京

内容简介

《高考数学培优40讲》针对高考数学中的重难点内容，分为四个分册：函数与导数；解析几何；三角、向量、数列、不等式与复数；立体几何与概率统计.全套书用高观点的视角、联系变化的眼光分析问题，洞悉问题背后的本质，达到“万理归一，大道至简”的境界.

本书为“三角、向量、数列、不等式与复数”分册，重点从数与形两个维度研究三角函数、向量、复数问题，并揭示其内在联系.用构造的思想方法解决不等式最值与证明问题；用类比转化或函数的视角研究数列通项及数列不等式问题.丰富的方法和技巧贯穿始末，精彩纷呈.本书适合数学成绩优秀的学生挑战高分甚至满分使用，也适合高中数学教师、高考数学研究者，以及广大数学爱好者参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

高考数学培优40讲.三角、向量、数列、不等式与复数/张永辉主编.—北京：清华大学出版社，2023.5
ISBN 978-7-302-63446-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①张… Ⅲ.①中学数学课－高中－升学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国国家版本馆CIP数据核字(2023)第081412号

责任编辑：汪　操
封面设计：常雪影
责任校对：王淑云
责任印制：丛怀宇

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编：**100084
社 总 机：010-83470000　　**邮　　购：**010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市龙大印装有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：210mm×285mm　　**印　张：**15.25　　**字　　数：**318千字
版　　次：2023年5月第1版　　**印　　次：**2023年5月第1次印刷
定　　价：69.00元

产品编号：099104-01

《高考数学培优 40 讲》编委会

主　编

张永辉

副主编

张宏卫　余　臣

编　委

彭剑平　章世骏　蒋新峰　高艳山　张喜金　李拴柱

何　龙　董家兴　周逸飞　于明辉　孙光磊　黄垠超

袁　志　颜亚冰　张　潇　李明红　赵晓翠　李艳丽

前　言

《高考数学培优40讲》是一套诞生于新高考时代，面向数学培优的教辅作品.

自2017年教育部实行新课程标准以来，我国高中数学的教学和考试发生了根本性的变化.新课程标准明确提出将“学科素养”作为培养人、选拔人的最重要指标，无论是教学还是考试都贯穿“基础性、综合性、创新性和应用性”四大特征，这意味着未来的数学考题，将从偏重经验归纳，转向加强思维品质考查，加强考查思维的灵活性，发挥数学学科的高考选拔功能.如何在教学中渗透对数学思维的培养？这对广大教师和学生提出了新的要求.

2019年起新教材在部分省市被陆续使用.由于各地教学规划不同，近几年出现了新教材新高考、老教材老高考、新教材老高考等多种教学现状，这无疑进一步增加了教学备考的复杂度.与此同时，数学高考也从过去的多省市独自命题，逐步转向教育部统一命题.随着山东省、江苏省、浙江省等一大批高考强省陆续加入全国卷的队伍，高考大军竞争异常激烈.

在过去的两年中，我们团队的老师们深入全国10多个省份，陆续为接近100所重点高中作了300多场数学培优讲座.在与广大一线师生的交流中，很多教师最关心的问题就是：“未来高考会怎么考，我们的数学课堂该如何教，高考培优应该讲什么？”由此可见，在新的时代背景下，如何能组织好教学过程，真正培养出国家需要的人才，让学生具备较高的数学素养，进而在高考中脱颖而出，成为了最核心的问题.

这套书最大的亮点就是完全出自教学实践.由于我们的课程是面向数学功底较好的学生开展进行，所以在300多场讲座中经历了无数次教师和学生之间、学生和学生之间的思想交锋.甚至在一些互动交流过程中，出现了学生和老师分成不同阵营，相互辩论的场面.而每一次的交流辩论都让我们更加接近数学解题的本质，更加明白数学培优课程应该讲什么、怎么讲.所以书中的内容既包含了团队老师的辛勤付出，也包含了很多一线教师和数学尖子生的集体智慧.综上所述，本套图书的内容不是一蹴而就的，它经历了原创研发——教学实践——反思优化，再教学实践——反思优化……这样一个又一个的轮回，在这样螺旋式上升的迭代过程中，内容的质量与实用性都达到了我们前所未有的高度.

本套图书的另一大亮点便是其深邃的思想性，主要体现在以下几个方面：

1.启迪智慧，知所以然

好的教育永远都不是告知，而是启发引导.在本套讲义的编写过程中充分尊重了这一规律，例如通过分而治之的策略拆分函数实现不等式证明时，我们没有止步于题目本身的解答，而是

设置了一系列的问题进行反思，甚至陪同读者一起走过错路与弯路，在知识的探索与内化过程中，这些都是必经之路，通过抛出一系列的问题，引导学生的思维步步深入，达到知其然也知其所以然的境界.

2.深入本质，返璞归真

比勤奋更重要的是深度思考的能力，在纷繁复杂的题目背后抽丝剥茧或追本溯源以接近问题的本质，这是数学精神，也是在书中带领并帮助读者习得的一项能力.例如在解析几何的开篇，讲义一针见血地点明了数与形的辩证关系，即以形助数和以数化形，抓住这一本源如同获取一把钥匙.大道至简，衍化至繁，本套图书一直在通往“道”的层面上前进不息.

3.引申触类，远见卓识

在学习过程中，有纵向的“深”与横向的“伸”两个维度，本书兼顾这两个维度并加以挖掘和拓展.在许多例题后面设置了探究总结等版块，引申出了更多的定理与推论，它们将带领读者进入一个更广阔的领域.

4.高数视角，知己知彼

会当凌绝顶，一览众山小.当我们身处高一级的层面，再反观原有的层面时，我们会发现问题的布局或背景等原来看不到的事物.本书中有的内容，例如泰勒展开、极点极线等专题就是在高等数学的视角下来俯视问题，进入命题人的思维，这样真是知己知彼，百战不殆.

《高考数学培优40讲》共含《函数与导数》《解析几何》《三角、向量、数列、不等式与复数》以及《立体几何与概率统计》四本分册.从初稿到出版，我们不断在教学实践中调整、完善，历经了四个版本的迭代，积极采纳各方意见，数易其稿.同时，为了满足部分尖子生的学习需要，我们在内容编写的过程中，有选择地加入了一定比例的清北强基考试题目.这部分题目与高考题目相结合，呈现出更加完整且富于变化的知识体系，对培养数学思维能力和综合能力大有裨益.

在本书的创作过程中，团队的老师们付出了很多，感谢张宏卫、余臣、孙光磊、李艳丽、张潇等各位老师的不懈努力，也感谢清华大学出版社给予的大力支持.

路漫漫其修远兮，吾将上下而求索.

在追求教学创新和培优精进的道路上，注定没有尽头.限于编写水平有限，书中错漏难免.欢迎各位读者帮我们纠正错误，我们也将在后续版本中不断修订、调整.

张永辉

2023年1月

23

三角函数的图像与性质

三角函数是基本初等函数中的一种超越函数，三角函数的图像、性质是高考数学中一个灵活考查的内容，高考重点考查正弦函数、余弦函数的周期性、对称性、单调性、奇偶性、平移和伸缩变换等，其中数形结合是关键，也是解决三角函数问题最重要的思想．利用图像研究性质，利用性质刻画图像，相辅相成．

在三角函数性质中，对称性处于核心地位，不同性质之间的相互转化是关键；在图像变换中，对 ω 的几何意义的理解至关重要，是图像在 x 轴上的伸缩变换，三角函数经过伸缩变换仍然具有周期性、对称性、单调性、奇偶性．根据变换后的性质反解 ω，对于这类问题，相比传统的代数法，本讲将从几何的角度给出更直观的思考方向．

三角函数图像的变换及应用

对于函数 $y=\sin(x+\varphi)$，经伸缩变换后得到 $y=\sin(\omega x+\varphi)$.

ω 的几何意义：在伸缩变换前后，对应点横坐标的比值为 ω 或在伸缩变换前后，对应点在 x 轴上的投影的比值.

理解 ω 的几何意义对于处理 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 和 $y=\cos(\omega x+\varphi)$ 的问题有极大的帮助，从几何角度入手比代数方法更直观、简洁.

23.1 三角函数解析式

研究密钥

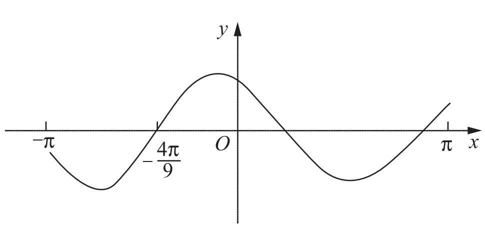
结合图像求三角函数解析式，即求 A,ω,φ 的值，最主要的是看图像上的关键点和特殊点.

A 值的确定方法：图像中最高点的纵坐标减去最低点的纵坐标所得差的一半.

ω 值的确定方法：①代数法：求出 A,φ 的值之后，可由特殊点的坐标确定 ω 的值；②几何法：利用 ω 的几何意义，特殊点伸缩变换前后对应点横坐标的比值即为 ω.

例 23.1 (2020 新课标全国Ⅰ卷理 7)设函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图像大致如图所示，则 $f(x)$ 的最小正周期为(　　).

A. $\frac{10\pi}{9}$　　B. $\frac{7\pi}{6}$　　C. $\frac{4\pi}{3}$　　D. $\frac{3\pi}{2}$



分析 ▶▶ 思路一(代数法)：从函数图像与 x 轴的交点可以看出 $f(x)$ 的周期大于 π 小于 2π，所以 $1<|\omega|<2$；再根据特殊点 $\left(-\frac{4\pi}{9},0\right)$ 可得 $-\frac{4\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，表示出 ω；最后结合范围可求出 ω 的值，最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

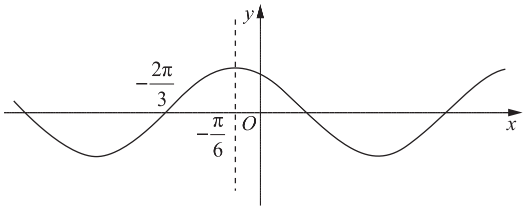
思路二(几何法)：若 $\omega=1$，则图中的点 $\left(-\frac{4\pi}{9},0\right)$ 伸缩前对应点为 $\left(-\frac{2\pi}{3},0\right)$，根据 ω 的几何

意义可得$\omega=\dfrac{-\dfrac{2\pi}{3}}{-\dfrac{4\pi}{9}}$，代入 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

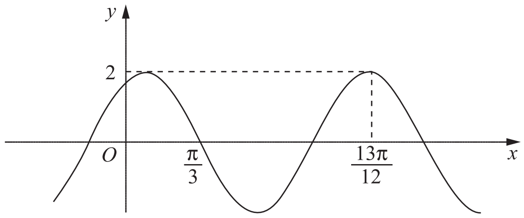
解析 解法一(代数法)：由图像可得 $f(x)$ 的周期大于 π 小于 2π，所以 $\pi<\left|\dfrac{2\pi}{\omega}\right|<2\pi$，$1<|\omega|<2$. 函数图像过点$\left(-\dfrac{4\pi}{9},0\right)$，所以$-\dfrac{4\pi}{9}\omega+\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，$\omega=\dfrac{3}{2}-\dfrac{9}{2}k$，$1<\dfrac{3}{2}-\dfrac{9}{2}k<2$，可得$-\dfrac{1}{9}<k<\dfrac{1}{9}(k\in\mathbf{Z})$，则 $k=0$，此时 $\omega=\dfrac{3}{2}$，所以最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{4\pi}{3}$，故选 C.

解法二(几何法)：令 $\omega=1$，则 $f(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，如图所示.

因为 $\omega=1$，所以$\left(-\dfrac{2\pi}{3},0\right)$经过伸缩变换以后对应点$\left(-\dfrac{4\pi}{9},0\right)$，根据 ω 的几何意义知 $\omega=\dfrac{-\dfrac{2\pi}{3}}{-\dfrac{4\pi}{9}}=\dfrac{3}{2}$，则 $T=\dfrac{2\pi}{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{4\pi}{3}$，故选 C.

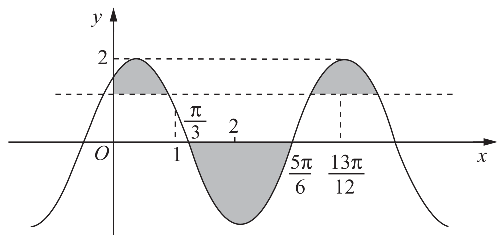


变式 1 (2021 新课标全国甲卷 16)已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)$的部分图像如图所示，则满足条件$\left(f(x)-f\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right)\right)\left(f(x)-f\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)\right)>0$ 的最小正整数 x 为________.

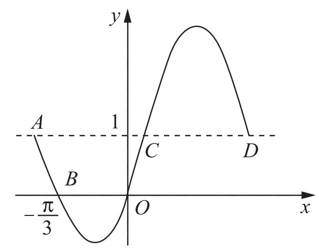


解析 由图可得$\dfrac{3T}{4}=\dfrac{13\pi}{12}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3\pi}{4}$，所以 $T=\pi$，$\omega=2$，$f\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)>0$，$f\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=0$，$\left(f(x)-f\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right)\right)\left(f(x)-f\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)\right)>0$ 等价于$\left(f(x)-f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)f(x)>0$，显然不等式的解集应为如图所示阴影部分区域.

由$\dfrac{\pi}{4}<1<\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{3}<2<\dfrac{5\pi}{6}$得满足不等式的最小正整数 x 为 2.



变式2 已知 $\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)+1$ 的图像如图所示，A,C,D 是 $f(x)$ 的图像与 $y=1$ 相交后相邻的三个交点，与 x 轴交于相邻的两个交点 O,B. 若在区间 (a,b) 上，$f(x)$ 有 2024 个零点，则 $b-a$ 的最大值为（　　）.



A. 2020π　　B. $\frac{3034\pi}{3}$　　C. $\frac{3038\pi}{3}$　　D. 1012π

解析 由题意易知 $y=1$ 是 $f(x)$ 的中轴线，则 $|AC|$ 为 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}$，则有 $|OB|=\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{\omega}\Rightarrow 0<\omega<3$，进而 $f(0)=2\sin(\omega\cdot 0+\varphi)+1=0$，$\sin\varphi=-\frac{1}{2}$，且 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，可得 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

又由 $2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{6}\right)+1=0$ 得 $-\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 或 $-\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $\omega=-6k$ 或 $-6k-4(k\in\mathbf{Z})$.

因为 $0<\omega<3$，所以 $\omega=2$，则 $T=\pi$，相邻 2 个零点的距离有两种 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{2\pi}{3}$，则当 $b-a$ 为 1012 个 $\frac{\pi}{3}$ 与 1013 个 $\frac{2\pi}{3}$ 的和时最大，为 $\frac{3038\pi}{3}$，故选 C.

23.2　ω 的范围

1. 单调性⇒周期性

研究密钥

对于 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$，根据单调性求 ω，主要是关注单调区间的端点.

方法一（代数法）：根据单调区间的长度初步确定 ω 的取值范围：

如果函数在单调区间内递增，则 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\omega x+\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

如果函数在单调区间内递减，则 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\omega x+\varphi\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

如果函数只是在区间内单调，则 $k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\omega x+\varphi\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，取交集可得 ω 的取值范围.

方法二(几何法)：在 ω 的作用下，单调区间内的函数图像在伸缩前后单调性不变，由区间端点伸缩前后的比值可得 ω 的取值范围：压缩时取到最大值，伸长时取到最小值.

例 23.2 已知 $\omega>0$，函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上单调递减，则实数 ω 的取值范围是(　　).

A. $\left[\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right]$　　B. $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$　　C. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$　　D. $(0,2]$

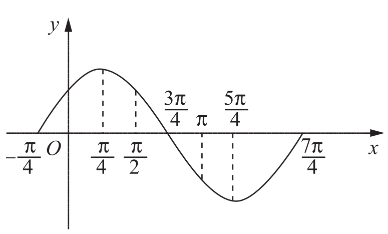
分析 思路一(代数法)：根据单调区间的长度可得 $\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{T}{2}$，所以 $0<\omega\leqslant 2$. 又 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上单调递减，则 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4}<\pi\omega+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，取交集可得 ω 的取值范围.

思路二(几何法)：$f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的单调递减区间 $\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{4}$ 经过伸缩以后落到区间 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 内，根据 ω 的几何意义可得 $\omega_{\min}=\frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$，$\omega_{\max}=\frac{\frac{5\pi}{4}}{\pi}=\frac{5}{4}$.

解析 **解法一(代数法)**：因为 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上单调，所以 $\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{T}{2}$，可得 $0<\omega\leqslant 2$. 当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 时，$\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4},\pi\omega+\frac{\pi}{4}\right]$.

要使得 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上单调递减，需要满足 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4}<\pi\omega+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\frac{1}{2}+4k\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{4}+2k$，令 $k=0$，则 $\frac{1}{2}\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{4}$，故选 A.

解法二(几何法)：令 $\omega=1$，则 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，其图像如右图所示.



若将 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像伸长至 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$，使得 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上单调递减，则 $\frac{\pi}{4}\xrightarrow{\max}\frac{\pi}{2}$，可得 $\omega_{\min}=\frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$；若将 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

的图像缩短至 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$，使得 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上单调递减，则 $\frac{5\pi}{4}\xrightarrow{\min}\pi$，可得 $\omega_{\max}=\frac{5}{4}$. 所以 $\frac{1}{2}\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{4}$，故选 A.

变式 1 若函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 在区间 $(\pi,2\pi)$ 内没有最值，则 ω 的取值范围是(　　).

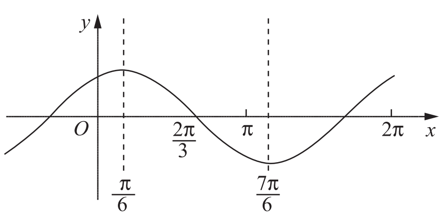
A. $\left(0,\frac{1}{12}\right]\cup\left[\frac{1}{6},\frac{7}{12}\right]$　　B. $\left(0,\frac{1}{6}\right]\cup\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$　　C. $\left(0,\frac{7}{12}\right]$　　D. $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$

解析 **解法一(代数法)**：因为 $f(x)$ 在区间 $(\pi,2\pi)$ 内没有最值，所以 $f(x)$ 在 $(\pi,2\pi)$ 内单调，即 $\frac{T}{2}\geqslant 2\pi-\pi$，$\frac{\pi}{\omega}\geqslant\pi$，则 $0<\omega\leqslant 1$.

当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时，$\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left(\pi\omega+\frac{\pi}{3},2\pi\omega+\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\pi\omega+\frac{\pi}{3}<2\pi\omega+\frac{\pi}{3}\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 $k-\frac{5}{6}\leqslant\omega\leqslant\frac{k}{2}+\frac{1}{12}$.

由 $\begin{cases}\frac{k}{2}+\frac{1}{12}\geqslant k-\frac{5}{6}\\ \frac{k}{2}+\frac{1}{12}>0\end{cases}$ 解得 $-\frac{1}{6}<k\leqslant\frac{11}{6}$ $(k\in\mathbf{Z})$，所以 $k=0$ 或 $k=1$.

当 $k=0$ 时，$-\frac{5}{6}\leqslant\omega\leqslant\frac{1}{12}$，又因为 $\omega>0$，所以 $0<\omega\leqslant\frac{1}{12}$；当 $k=1$ 时，$\frac{1}{6}\leqslant\omega\leqslant\frac{7}{12}$，故选 A.



解法二(几何法)：$f_1(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图像如右图所示，若 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$ 在 $(\pi,2\pi)$ 内没有最值，则 $f(x)$ 在区间 $(\pi,2\pi)$ 上单调，$\pi\leqslant\frac{T}{2}$，即 $T\geqslant 2\pi$，可得 $0<\omega\leqslant 1$. 显然将函数 $f_1(x)$ 的图像伸长到 $f(x)$，则 $\frac{\pi}{6}\xrightarrow{\min}2\pi$，可得 $0<\omega\leqslant\frac{1}{12}$ 或 $\frac{\pi}{6}\xrightarrow{\max}\pi$，$\omega_{\min}=\frac{1}{6}$，$\frac{7\pi}{6}\xrightarrow{\min}2\pi$，可得 $\omega_{\max}=\frac{7}{12}$，则 ω 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{12}\right]\cup\left[\frac{1}{6},\frac{7}{12}\right]$，故选 A.

2. 对称性(对称中心和对称轴)⇒周期性

研究密钥

$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 在区间内有几个对称轴、对称中心(零点)，关注区间的端点.

方法一(代数法)：根据区间长度可以初步确定 ω 的范围：

如果函数在区间(x_1,x_2)内没有最大值点，则$\frac{\pi}{2}+2n\pi<\omega x_i+\varphi<\frac{5\pi}{2}+2n\pi(n\in\mathbf{Z},i=1,2)$.

如果函数在区间$(0,\pi]$内至少有 n 个最大值点，则 $\omega\pi+\varphi\geqslant\frac{\pi}{2}+2(n-1)\pi(n\in\mathbf{N}^*)$.

如果函数在区间$(0,\pi]$内恰好有 n 个最大值点，则$\frac{\pi}{2}+2n\pi>\omega\pi+\varphi\geqslant\frac{\pi}{2}+2(n-1)\pi(n\in\mathbf{N}^*)$.

如果函数在区间$(0,\pi]$内至多有 n 个最大值点，则 $\omega\pi+\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}+2(n-1)\pi(n\in\mathbf{N}^*)$.

方法二(几何法)：将 $f(x)=A\sin(x+\varphi)$的对称轴或对称中心(零点)伸缩变换至区间端点处，若包含这个点则变换至区间内，若不包含则变换至区间外，根据变换前后横坐标的比值确定 ω.

例 23.3 已知函数 $f(x)=\sin^2\frac{\omega x}{2}+\frac{1}{2}\sin\omega x-\frac{1}{2}(\omega>0)$，$x\in\mathbf{R}$，若 $f(x)$在区间$(\pi,2\pi)$内没有零点，则 ω 的取值范围是(　　).

A. $\left(0,\frac{1}{8}\right]$　　B. $\left(0,\frac{1}{4}\right]\cup\left[\frac{5}{8},1\right)$　　C. $\left(0,\frac{5}{8}\right]$　　D. $\left(0,\frac{1}{8}\right]\cup\left[\frac{1}{4},\frac{5}{8}\right]$

分析 思路一(代数法)：没有零点的区间最多为半个周期，所以根据区间长度可得 $2\pi-\pi\leqslant\frac{T}{2}$，即 $0<\omega\leqslant1$；再考虑到区间端点可得 $k\pi\leqslant\omega x+\varphi\leqslant k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，表示出 ω，求交集即可.

思路二(几何法)：可以将 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的没有零点的区间$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$或$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$伸缩变换至区间$(\pi,2\pi)$内，解得 $\omega_{\min}=\frac{0}{\pi}=0$，$\omega_{\max}=\frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi}=\frac{1}{8}$或 $\omega_{\min}=\frac{\frac{\pi}{4}}{\pi}=\frac{1}{4}$，$\omega_{\max}=\frac{\frac{5\pi}{4}}{2\pi}=\frac{5}{8}$.

思路三(几何法)：首先根据区间长度可得 $0<\omega\leqslant1$，用 ω 表示出所有零点，依次将不含零点的区间与$(\pi,2\pi)$对应，求出 ω 的范围，再与 $0<\omega\leqslant1$ 求交集.

解析 **解法一(代数法)**：$f(x)=\sin^2\frac{\omega x}{2}+\frac{1}{2}\sin\omega x-\frac{1}{2}=\frac{1-\cos\omega x}{2}+\frac{1}{2}\sin\omega x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin\omega x-\frac{1}{2}\cos\omega x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)$，$f(x)$在区间$(\pi,2\pi)$内没有零点，所以 $2\pi-\pi\leqslant\frac{T}{2}$，即 $0<\omega\leqslant1$.

$k\pi\leqslant\omega\pi-\frac{\pi}{4}<2\omega\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $\omega\geqslant k+\frac{1}{4}$ 且 $\omega\leqslant\frac{k}{2}+\frac{5}{8}$，由$\begin{cases}\frac{k}{2}+\frac{5}{8}\geqslant k+\frac{1}{4}\\\frac{k}{2}+\frac{5}{8}>0\end{cases}$解得 $-\frac{5}{4}<k\leqslant\frac{3}{4}$ $(k\in\mathbf{Z})$，所以 $k=-1,0$.

令 $k=-1$，$0<\omega\leqslant\frac{1}{8}$；令 $k=0$，$\frac{1}{4}\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{8}$，故选 D.

解法二(几何法):同解法一,化简可得 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)$,$f(x)$在区间$(\pi,2\pi)$内没有零点,所以 $2\pi-\pi\leqslant\frac{T}{2}$,即 $0<\omega\leqslant 1$.

令 $\omega=1$,则 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$,若将 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的图像伸长至 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\omega x-\frac{\pi}{4})$,如图 1 所示,使得 $f(x)$在区间$(\pi,2\pi)$内没有零点,第一种情形:$\frac{\pi}{4}\xrightarrow{\min}2\pi$,则 $\omega_{\max}=\frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi}=\frac{1}{8}$,故 $0<\omega\leqslant\frac{1}{8}$. 第二种情形:$\frac{\pi}{4}\xrightarrow{\max}\pi$,$\omega_{\min}=\frac{\frac{\pi}{4}}{\pi}=\frac{1}{4}$,$\frac{5\pi}{4}\xrightarrow{\min}2\pi$,$\omega_{\max}=\frac{\frac{5\pi}{4}}{2\pi}=\frac{5}{8}$,则 $\frac{1}{4}\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{8}$.

所以 $0<\omega\leqslant\frac{1}{8}$ 或 $\frac{1}{4}\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{8}$,故选 D.

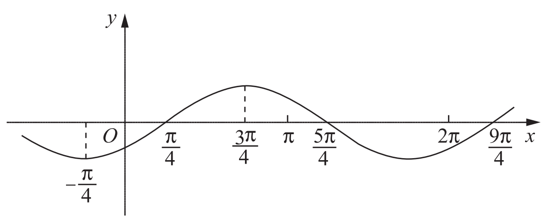


图 1

解法三(几何法):同解法一可得 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)$,且 $0<\omega\leqslant 1$.

根据图 2 可得:若 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)$在区间$(\pi,2\pi)$内没有零点,则 $2\pi\leqslant\frac{\pi}{4\omega}$,解得 $0<\omega\leqslant\frac{1}{8}$;若$\frac{\pi}{4\omega}\leqslant\pi<2\pi\leqslant\frac{5\pi}{4\omega}$,解得$\frac{1}{4}\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{8}$;若$\frac{5\pi}{4\omega}\leqslant\pi<2\pi\leqslant\frac{9\pi}{4\omega}$,解得 $\omega\geqslant\frac{5}{4}$ 且 $\omega\leqslant\frac{9}{8}$,无解.

所以 $0<\omega\leqslant\frac{1}{8}$ 或 $\frac{1}{4}\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{8}$,故选 D.

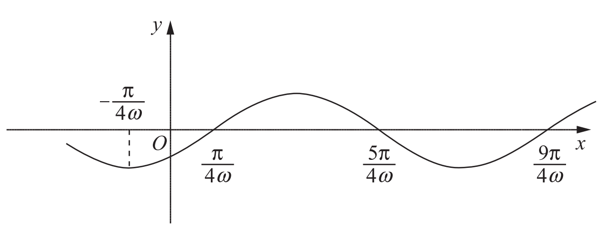


图 2

变式 1 (2019 **新课标全国Ⅲ卷理** 12)设函数 $y=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{5}\right)(\omega>0)$,已知 $f(x)$在$[0,2\pi]$有且仅有 5 个零点. 下述四个结论:

①$f(x)$在$(0,2\pi)$有且仅有 3 个极大值点;②$f(x)$在$(0,2\pi)$有且仅有 2 个极小值点;

③$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{10}\right)$上单调递增;④$\omega$ 的取值范围是$\left[\frac{12}{5},\frac{29}{10}\right)$.

其中所有正确结论的编号是(　　).

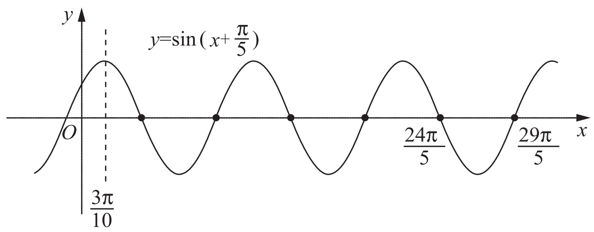
A. ①④　　B. ②③　　C. ①②③　　D. ①③④

解析 根据图像可得 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)$在 y 轴右侧的第 5 个零点为$\frac{24\pi}{5}$,第 6 个零点为$\frac{29\pi}{5}$,要使得 $f(x)$在$[0,2\pi]$有且仅有 5 个零点,故$\frac{24\pi}{5}\xrightarrow{\max}2\pi$(取得到),$\omega_{\min}=\frac{12}{5}$,$\frac{29\pi}{5}\xrightarrow{\min}2\pi$(取不到),$\omega_{\max}=\frac{29}{10}$,因此$\frac{12}{5}\leqslant\omega<\frac{29}{10}$,故④正确.

由图像可得,当 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)$取到 5 个零点时,有且仅有 3 个极大值点,有 2 个或者 3 个极小值点,故①正确,②错误.

因为 $\omega\in\left[\frac{12}{5},\frac{29}{10}\right)$,所以 $\omega<3$,则对称轴$\frac{3\pi}{10}$伸缩变换以后在$\frac{\pi}{10}$的右侧,所以 $f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{10}\right)$上单调递增,故③正确.

综上所述,正确结论的编号有①③④,故选 D.



例 23.4 函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$的图像在$[0,2]$上至少有三个最大值点,求 ω 的取值范围.

分析 思路一(代数法):$f(x)=\sin x$ 对应的第三个最大值点的横坐标为$\frac{9\pi}{2}$,只需要保证 $\omega x+\frac{\pi}{4}$所在区间包含第三个最大值点即可.

思路二(几何法):将 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的第 3 个最大值点的横坐标$\frac{17\pi}{4}$压缩至区间$[0,2]$内,可得 ω 的取值范围.

解析 **解法一(代数法)**:由图 1 可得 $f(x)=\sin x$ 对应的第三个最大值点的横坐标为$\frac{9\pi}{2}$,$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$的图像在$[0,2]$上至少有三个最大值点,则 $2\omega+\frac{\pi}{4}\geqslant\frac{9\pi}{2}$,解得 $\omega\geqslant\frac{17\pi}{8}$,所以 ω 的取值范围是$\left[\frac{17\pi}{8},+\infty\right)$.

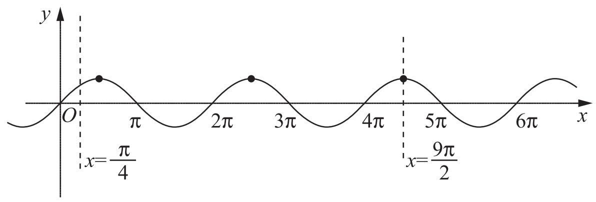


图 1

解法二(几何法):根据图 2 可得 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的第 3 个最大值点的横坐标为$\frac{17\pi}{4}$,根据题意将$\frac{17\pi}{4}\xrightarrow{\max}2$,可得 $\omega_{\min}=\frac{\frac{17\pi}{4}}{2}=\frac{17\pi}{8}$,所以 $\omega\geqslant\frac{17\pi}{8}$,故 ω 的取值范围是$\left[\frac{17\pi}{8},+\infty\right)$.

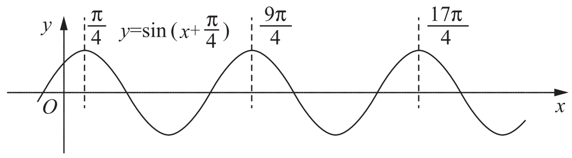


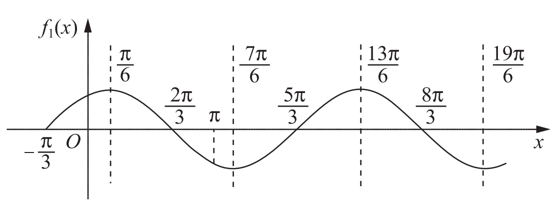
图 2

变式 1 (2022 新课标全国甲卷理 11)设函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$在区间$(0,\pi)$恰有三个极值点、两个零点,则 ω 的取值范围是( ).

A. $\left[\frac{5}{3},\frac{13}{6}\right)$ B. $\left[\frac{5}{3},\frac{19}{6}\right)$ C. $\left(\frac{13}{6},\frac{8}{3}\right]$ D. $\left(\frac{13}{6},\frac{19}{6}\right]$

解析 **解法一(代数法)**:令 $t=\omega x+\frac{\pi}{3}$,因为 $x\in(0,\pi)$,$\omega>0$,所以 $t\in\left(\frac{\pi}{3},\omega\pi+\frac{\pi}{3}\right)$,结合 $y=\sin t$ 的图像得$\frac{5\pi}{2}<\omega\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant3\pi$,解得$\frac{13}{6}<\omega\leqslant\frac{8}{3}$,故选 C.

解法二(几何法):令 $\omega=1$,$f_1(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$,其图像如下图所示.



若 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$在区间$(0,\pi)$上恰有三个极值点、两个零点,则$\frac{13\pi}{6}\xrightarrow{\max}\pi$(取不到),可得 $\omega_{\min}=\frac{13}{6}$,取不到;$\frac{8\pi}{3}\xrightarrow{\min}\pi$(取得到),可得 $\omega_{\max}=\frac{8}{3}$,取得到.

因此$\frac{13}{6}<\omega\leqslant\frac{8}{3}$,故选 C.

变式 2 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x(\omega>0)$在区间$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$上恰有一个最大值点

和一个最小值点，则实数 ω 的取值范围为(　　).

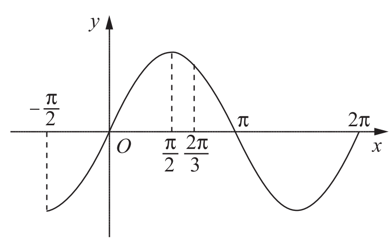
A. $\left[\frac{8}{3},7\right)$　　B. $\left[\frac{8}{3},4\right)$　　C. $\left[4,\frac{20}{3}\right)$　　D. $\left(\frac{20}{3},7\right)$

解析 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x+\frac{1}{2}\cos\omega x\right)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$. 因为 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$ 上恰有一个最大值点和一个最小值点，令 $f_1(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，若 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$ 上恰有一个最大值点和一个最小值点，则函数 $f_1(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 到 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$ 一定是压缩变换，且 $-\frac{2\pi}{3}\xrightarrow{\max}-\frac{\pi}{4}$(取得到)，$\omega_{\min}=\frac{8}{3}$；$\frac{4\pi}{3}\xrightarrow{\min}\frac{\pi}{3}$(取不到)，$\omega_{\max}=4$，因此 $\frac{8}{3}\leqslant\omega<4$，故选 B.

变式 3 已知函数 $f(x)=2\sin\omega x(\omega>0)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上是增函数，且在区间 $[0,\pi]$ 上恰好取得一次最大值，则 ω 的取值范围是(　　).

A. $(0,1]$　　B. $\left(0,\frac{3}{4}\right]$　　C. $[1,+\infty)$　　D. $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$

解析 令 $f_1(x)=2\sin x$，如右图所示.

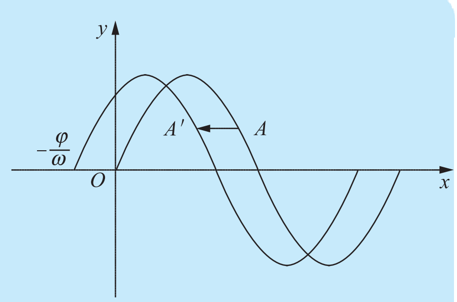


若 $f(x)=2\sin\omega x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递增，且在 $[0,\pi]$ 上恰好取得一次最大值，则 $\frac{\pi}{2}\xrightarrow{\min}\frac{2\pi}{3}$，$\omega_{\max}=\frac{3}{4}$；$\frac{\pi}{2}\xrightarrow{\max}\pi$，$\omega_{\min}=\frac{1}{2}$，因此 ω 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$，故选 D.

23.3　φ 的范围

研究密钥

对于函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 经平移变换后得到 $g(x)=\sin(\omega x+\varphi)=\sin\left[\omega\left(x+\frac{\varphi}{\omega}\right)\right](\omega>0)$.



$\frac{\varphi}{\omega}$ 的几何意义：如右图所示，在平移变换前后，对应点横坐标的差值，$\frac{\varphi}{\omega}=x_A-x_{A'}$，即 $\varphi=\omega(x_A-x_{A'})$.

例 23.5 若函数 $f(x)=\cos(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减，且在区间 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上存在零点，则 φ 的取值范围是(　　).

A. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$　　B. $\left[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$　　C. $\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$　　D. $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$

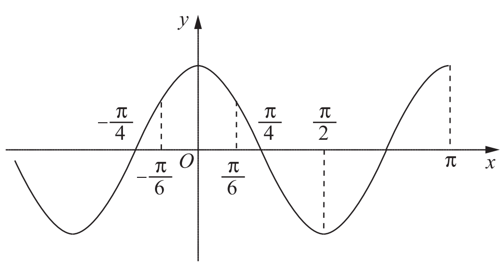
分析 运用图像平移变换求解 φ 的取值范围.

解析 令 $\varphi=0$，其图像如图所示.

若 $f(x)=\cos(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减，则 $\frac{\varphi}{2}\geqslant\frac{\pi}{6}$，可得 $\varphi\geqslant\frac{\pi}{3}$.

又 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上存在零点，$\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}<\frac{\varphi}{2}<\frac{\pi}{4}$，可得 $\frac{\pi}{6}<\varphi<\frac{\pi}{2}$.

综上所述，φ 的取值范围为 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$，故选 D.

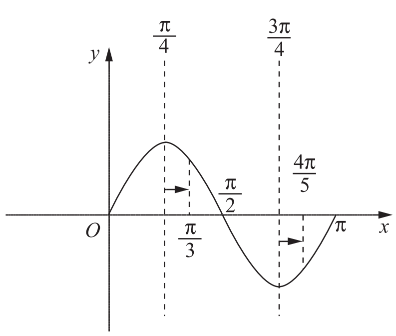


变式 1 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期为 π，且 $f(x)$ 是 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{5}\right)$ 上的单调函数，则 φ 的取值范围是(　　).

A. $\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right]$　　B. $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right]$

C. $\left[-\frac{\pi}{6},-\frac{\pi}{10}\right]$　　D. $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$

解析 依题意得 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，则 $\omega=2$，$f(x)=\sin(2x+\varphi)$，令 $f_0(x)=\sin2x$，将 $y=f_0(x)$ 向右平移 $\frac{|\varphi|}{2}$ 个单位，则 $\begin{cases}\frac{|\varphi|}{2}\geqslant\frac{4\pi}{5}-\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{20}\\ \frac{|\varphi|}{2}\leqslant\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}\end{cases}$，可得 $-\frac{\pi}{6}\leqslant\varphi\leqslant-\frac{\pi}{10}\left(\frac{\pi}{2}<\varphi<0\right)$. 如右图所示，将 $y=f_0(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\varphi}{2}$ 个单位长度 $\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$，显然 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{5}\right)$ 上不单调，故选 C.



23.4　转化中枢——对称性

研究密钥

三角函数的性质(对称性、周期性、奇偶性、单调性)有着密切的联系,它们经常交织在一起综合应用.其中,对称性处于一个较核心的位置,由它辐射可挖掘出许多隐含的性质信息.

对称性⇒奇偶性

若函数图像关于坐标原点对称,则函数 $f(x)$ 为奇函数;若函数图像关于 y 轴对称,则函数 $f(x)$ 为偶函数.

对称性⇒周期性

相邻的两条对称轴之间的距离为 $\frac{T}{2}$;相邻的对称中心之间的距离为 $\frac{T}{2}$;相邻的对称轴与对称中心之间的距离为 $\frac{T}{4}$.

对称性⇒单调性

在相邻的对称轴之间,函数 $f(x)$ 单调.特别地,若 $f(x)=A\sin\omega x$,$A>0$,$\omega>0$,函数 $f(x)$ 在 $[\theta_1,\theta_2]$ 上单调,且 $0\in[\theta_1,\theta_2]$,设 $\theta=\max\{|\theta_1|,\theta_2\}$,则 $\frac{T}{4}\geqslant\theta$,深刻体现了三角函数的单调性与周期性、对称性之间的紧密联系.

例 23.6　设函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$,若 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 上具有单调性,且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-f\left(\frac{\pi}{6}\right)$,则 $f(x)$ 的最小正周期为________.

分析　由单调性可以确定周期的范围,根据 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-f\left(\frac{\pi}{6}\right)$,可得 $f(x)$ 的一条对称轴和一个对称中心,再由此可以得到最小正周期.

解析　如图 1、图 2 所示,因为 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 上具有单调性,所以 $\frac{T}{2}\geqslant\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$,解得 $T\geqslant\frac{2\pi}{3}$.

又 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$,所以 $f(x)$ 的一条对称轴为 $x=\dfrac{\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{7\pi}{12}$;$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-f\left(\frac{\pi}{6}\right)$,$f(x)$ 的一个对称中心的横坐标为 $x=\dfrac{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{\pi}{3}$,故 $\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{T}{4}$,$T=\pi$.

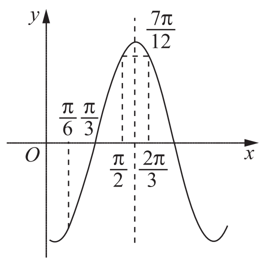


图 1

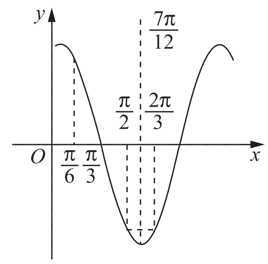
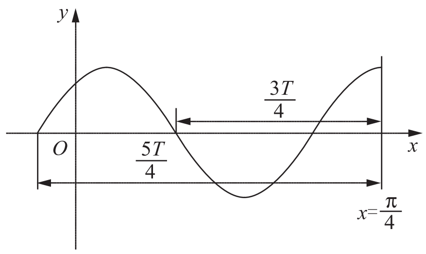


图 2

变式 1 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$，其中 $\omega>0$，$0<\varphi<\pi$，$f(x)\leqslant f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 恒成立，且 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上恰有两个零点，则 ω 的取值范围是（　　）.

A. $(6,10)$　　B. $(6,8)$　　C. $(8,10)$　　D. $(6,12)$

解析 由题意可得函数图像的一条对称轴为 $x=\frac{\pi}{4}$，所以 $\frac{\pi}{4}\omega+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$. 因为 $\varphi\in(0,\pi)$，所以 $\omega\in(8k-2,8k+2)(k\in\mathbf{Z})$ ①. 因为 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上恰有两个零点，所以 ω 的取值范围的临界情况如图所示.



则 $\frac{3T}{4}<\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{5T}{4}$，即 $\frac{\pi}{5}\leqslant T<\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{5}\leqslant\frac{2\pi}{\omega}<\frac{\pi}{3}$，解得 $6<\omega\leqslant10$ ②.

综合①②可得 ω 的取值范围为 $(6,10)$，故选 A.

变式 2 （多选题）设 $f(x)=a\sin2x+b\cos2x$，其中 $a,b\in\mathbf{R}$，$ab\neq0$. 若 $f(x)\leqslant\left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则以下结论正确的是（　　）.

A. $f\left(\frac{11\pi}{12}\right)=0$

B. $\left|f\left(\frac{7\pi}{10}\right)\right|<\left|f\left(\frac{\pi}{5}\right)\right|$

C. $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数

D. $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{2\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$

E. 存在经过点 (a,b) 的直线与函数 $f(x)$ 的图像不相交

解析 $f(x)=a\sin2x+b\cos2x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(2x+\varphi)$，$\tan\varphi=\frac{b}{a}$，其最小正周期 $T=\pi$，因为 $f(x)\leqslant\left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，所以 $f(x)$ 一条对称轴为 $x=\frac{\pi}{6}$，则 $f(x)$ 的对称轴可以表示为 $x=\frac{\pi}{6}+k\frac{T}{2}=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，对称中心的横坐标可以表示为 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2k+1}{4}T=\frac{5\pi}{12}+$

$\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

A 选项：$\frac{11\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{2}$，所以$\left(\frac{11\pi}{12},0\right)$是 $f(x)$的对称中心，故 A 正确.

B 选项：$\frac{7\pi}{10}-\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{2}=\frac{T}{2}$，所以$\left|f\left(\frac{7\pi}{10}\right)\right|=\left|f\left(\frac{\pi}{5}\right)\right|$，故 B 错误.

C 选项：因为$\frac{\pi}{6}$既不是$\frac{T}{4}$的奇倍数，也不是$\frac{T}{4}$的偶倍数，所以 $f(x)$既不是奇函数，也不是偶函数，故 C 正确.

D 选项：$x=\frac{\pi}{6}$和 $x=\frac{2\pi}{3}$是 $f(x)$的两条相邻的对称轴，所以 $f(x)$在$\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$上单调，但不能确定是单调递减还是单调递增，故 D 错误.

E 选项：$f(x)=a\sin 2x+b\cos 2x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(2x+\varphi)$，所以$|f(x)|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$，又 $ab\neq 0$，所以$|b|<\sqrt{a^2+b^2}$，则过点(a,b)的直线与函数 $f(x)$的图像一定相交，故 E 错误.

综上所述，故选 AC.

例 23.7 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，$x=-\frac{\pi}{4}$为 $f(x)$的零点，$x=\frac{\pi}{4}$为 $y=f(x)$图像的对称轴，且 $f(x)$在$\left(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36}\right)$上单调，则 ω 的最大值为(　　).

A. 11　　B. 9　　C. 7　　D. 5

分析 由单调性可以确定 ω 的范围，根据对称性可得 $\omega=1+2k$，从大到小依次验证.

解析 由题意可得$\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2k+1}{4}T(k\in\mathbf{Z})$，即$\frac{\pi}{2}=\frac{2k+1}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}$，解得 $\omega=1+2k$. 又 $f(x)$在$\left(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36}\right)$上单调，所以$\frac{5\pi}{36}-\frac{\pi}{18}\leqslant\frac{T}{2}$，即$\frac{\pi}{12}\leqslant\frac{\pi}{\omega}$，解得 $\omega\leqslant 12$，则 ω 的取值有 1，3，5，7，9，11.

①当 $\omega=11$ 时，$T=\frac{2\pi}{11}$，$x=\frac{\pi}{4}$为 $f(x)$的一条对称轴，则 $x_1=\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{11}=\frac{3\pi}{44}$，也是 $f(x)$的对称轴，而$\frac{3\pi}{44}\in\left(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36}\right)$，所以 $f(x)$在$\left(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36}\right)$上不单调，故 $\omega=11$ 不成立.

②当 $\omega=9$ 时，$T=\frac{2\pi}{9}$，$x=\frac{\pi}{4}$为 $f(x)$的一条对称轴，$x_1=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{9}=\frac{5\pi}{36}$和 $x_2=\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{9}=\frac{\pi}{36}$也是 $f(x)$的对称轴，所以 $f(x)$在$\left(\frac{\pi}{36},\frac{5\pi}{36}\right)$上单调，又因为$\frac{\pi}{36}<\frac{\pi}{18}$，所以 $f(x)$在$\left(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36}\right)$上也单调，即 $\omega=9$ 成立.

故选 B.

变式 1 已知函数 $y=\sqrt{2}\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$的图像关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$对称，且 $f\left(\frac{3\pi}{8}\right)=1$，$f(x)$在区间$\left[-\frac{3\pi}{8},-\frac{\pi}{4}\right]$上单调，则 ω 可取数值的个数为(　　).

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

解析 由 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{3\pi}{8},-\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调，则 $-\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{8}\leqslant\frac{T}{2}$，可得 $T\geqslant\frac{\pi}{4}$.

又 $\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{8}$，则区间 $\left[\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right]$ 之间的距离 $\leqslant\frac{T}{2}$，则符合题意的 $f(x)$ 的图像如图 1、图 2 所示.

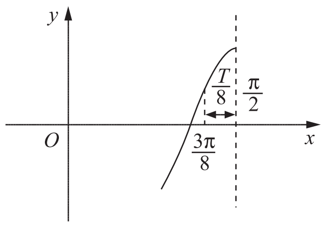


图 1

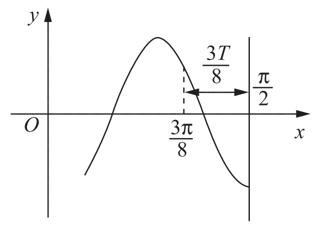


图 2

若为图 1：由 $\frac{T}{8}=\frac{\pi}{8}$ 可得 $T=\pi$，此时 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，再推导在区间 $\left[-\frac{3\pi}{8},-\frac{\pi}{4}\right]$ 是否有对称轴，

$x=-\frac{\pi}{2}\xleftarrow{\frac{T}{2}}x=0\xleftarrow{\frac{T}{2}}x=\frac{\pi}{2}$.

不难发现 $-\frac{\pi}{2}<-\frac{3\pi}{8}<-\frac{\pi}{4}<0$，在区间 $\left[-\frac{3\pi}{8},-\frac{\pi}{4}\right]$ 内没有对称轴，因此 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{3\pi}{8},-\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调.

若为图 2：由 $\frac{3T}{8}=\frac{\pi}{8}$ 可得 $T=\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{\omega}$，$\omega=6$，再推导在区间 $\left[-\frac{3\pi}{8},-\frac{\pi}{4}\right]$ 上是否有对称轴，

$x=-\frac{\pi}{3}\xleftarrow{\frac{T}{2}}x=-\frac{\pi}{6}\xleftarrow{T}x=\frac{\pi}{6}\xleftarrow{T}x=\frac{\pi}{2}$.

不难发现 $-\frac{3\pi}{8}<-\frac{\pi}{3}<-\frac{\pi}{4}$，因此在区间 $\left[-\frac{3\pi}{8},-\frac{\pi}{4}\right]$ 上含有对称轴，所以 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{3\pi}{8},-\frac{\pi}{4}\right]$ 上不单调.

综上所述，ω 的值只能为 2，故选 A.

评注

对于正弦型或余弦型函数，给出在区间 $[a,b]$ 上单调，进而得出其区间长 $b-a\leqslant\frac{T}{2}$，这是其必要条件，还需验证充分性.

变式 2 函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，已知 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 为 $f(x)$ 图像的一个对称中心，直线 $x=\frac{13\pi}{12}$ 为 $f(x)$ 图像的一条对称轴，且 $f(x)$ 在 $\left[\frac{13\pi}{12},\frac{19\pi}{12}\right]$ 上单调递减. 记满足条件

的所有 ω 的值的和为 S，则 S 的值为________.

解析 依题意得 $\frac{13\pi}{12}+\frac{\pi}{6}=\frac{T}{4}(2k-1)(k\in\mathbf{N}^*)$，即 $\frac{5\pi}{4}=\frac{T}{4}(2k-1)$，可得 $T=\frac{5\pi}{2k-1}$ $(k\in\mathbf{N}^*)$.

又 $f(x)$ 在 $\left[\frac{13\pi}{12},\frac{19\pi}{12}\right]$ 上单调递减，则 $\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{T}{2}$，即 $T\geqslant\pi$，由 $\frac{5\pi}{2k-1}\geqslant\pi$ 得 $0<2k-1\leqslant5(k\in\mathbf{N}^*)$，所以 $k=1,2,3$.

①若 $k=1$，$T=5\pi$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2}{5}$，此时 $f(x)$ 在 $\left[\frac{13\pi}{12},\frac{19\pi}{12}\right]$ 上单调递减，如图 1 所示，符合题意.

②若 $k=2$，此时 $T=\frac{5\pi}{3}=\frac{2\pi}{\omega}$，得 $\omega=\frac{6}{5}$，那么 $\frac{13\pi}{12}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{4}=\frac{3T}{4}$，如图 2 所示，易知 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{13\pi}{12},\frac{19\pi}{12}\right]$ 上单调递增，与题意不符，故舍去.

③若 $k=3$，此时 $T=\frac{5\pi}{5}=\pi$，得 $\omega=2$，那么 $\frac{13\pi}{12}+\frac{\pi}{6}=\frac{5T}{4}$，如图 3 所示. 易知 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{13\pi}{12},\frac{19\pi}{12}\right]$ 上单调递减，满足题意.

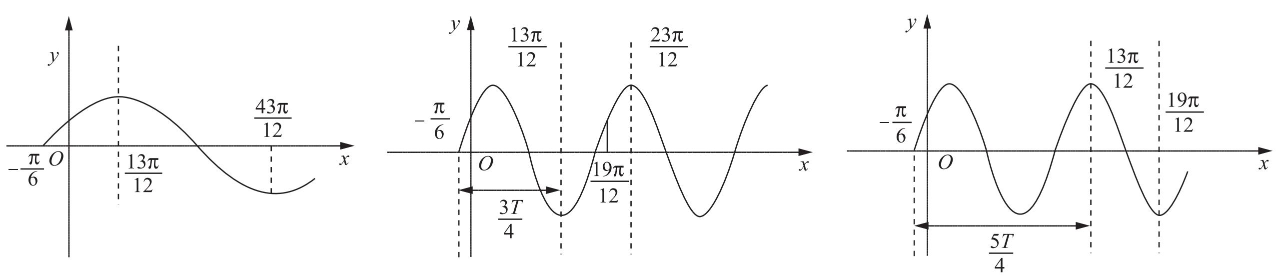


图 1　图 2　图 3

综上所述，ω 的值为 2 或 $\frac{2}{5}$，S 的值为 $\frac{12}{5}$.

含三角函数的复合函数

23.5　探究含三角函数的函数性质

研究密钥

研究一个含有三角函数的未知函数，我们可以根据所包含已知的三角函数的性质入手，研究未知函数的奇偶性、对称性、周期性. 如果具有对称性，则可缩小研究范围.

对于此函数是否具有某些性质，可以运用定义来判断. 另外图像也是一个好工具，我们可以通过画图利用数形结合帮助思考.

例 23.8 (2020 新课标全国Ⅲ卷理 16)关于函数 $f(x)=\sin x+\frac{1}{\sin x}$有如下四个命题：

①$f(x)$的图像关于 y 轴对称；②$f(x)$的图像关于原点对称；

③$f(x)$的图像关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$对称；④$f(x)$的最小值为 2.

其中所有真命题的序号是________.

分析 判断奇偶性，首先看定义域，$\{x\mid x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$关于原点对称，再验证 $f(-x)$与 $f(x)$的关系即可；由 $f(a)=f(b-a)$可得对称轴为 $x=\frac{b}{2}$；利用基本不等式可得最小值.

解析 因为 $f(x)$定义域为$\{x\mid x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$且满足 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$是奇函数，则图像关于原点对称，则①错误，②正确.

因为 $f(\pi-x)=\sin(\pi-x)+\frac{1}{\sin(\pi-x)}=\sin x+\frac{1}{\sin x}=f(x)$，所以 $f(x)$关于 $x=\frac{\pi}{2}$对称，则③正确.

当 $\sin x\in(0,1]$时，$f(x)\geqslant 2\sqrt{\text{[redacted]}inx\cdot\frac{1}{\sin x}}=2$；当 $\sin x\in[-1,0)$时，$f(x)<0$，则④错误.

综上所述，真命题的序号是②③.

变式 1 关于函数 $f(x)=\sin x\cos 2x$ 有下述四个结论：

①$f(x)$是偶函数；②$f(x)$的图像关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$对称；

③$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上有 5 个零点；④$f(x)$的最大值为 1.

其中所有正确结论的序号是(　　).

A. ①②④　　B. ②④　　C. ①④　　D. ②③

分析 利用函数的奇偶性可判断①的正误；利用函数的对称性可判断②的正误；在 $x\in[-\pi,\pi]$上解方程 $f(x)=0$，可判断③的正误；利用函数最值的定义可判断④的正误.

解析 因为函数 $f(x)=\sin x\cos 2x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=\sin(-x)\cos(-2x)=-\sin x\cos 2x=-f(x)$，所以函数 $f(x)$为奇函数，①错误.

因为 $f(\pi-x)=\sin(\pi-x)\cos[2(\pi-x)]=\sin x\cos 2x=f(x)$，所以 $f(x)$的图像关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$对称，②正确.

令 $f(x)=\sin x\cos 2x=0$，可得 $\sin x=0$ 或 $\cos 2x=0$，因为 $x\in[-\pi,\pi]$，则 $2x\in[-2\pi,2\pi]$，方程 $\sin x=0$ 在$[-\pi,\pi]$上的解分别为 $x=-\pi$ 或 $x=0$ 或 $x=\pi$，由 $\cos 2x=0$ 可得 $2x=\pm\frac{3\pi}{2}$或 $2x=\pm\frac{\pi}{2}$，解得 $x=\pm\frac{3\pi}{4}$或 $x=\pm\frac{\pi}{4}$. 所以 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上有 7 个零点，③错误.

因为 $-1\leqslant \sin x\leqslant 1$，$-1\leqslant \cos 2x\leqslant 1$，所以 $f(x)\leqslant 1$，又 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos(-\pi)=1$，则函数 $f(x)$ 的最大值为 1，④正确.

综上所述，故选 B.

训练 23

1. 函数 $f(x)=\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 在 $[0,\pi]$ 上的值域为 $\left[\frac{1}{2},1\right]$，则 ω 的取值范围是(　　).

A. $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$　　B. $\left[0,\frac{2}{3}\right]$　　C. $\left[\frac{2}{3},1\right]$　　D. $\left[\frac{1}{3},1\right]$

2. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 的图像在区间 $(1,2)$ 上不单调，则 ω 的取值范围为(　　).

A. $\left(\frac{3\pi}{8},+\infty\right)$　　B. $\left(\frac{3\pi}{8},\frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{7\pi}{8},+\infty\right)$

C. $\left(\frac{3\pi}{8},\frac{7\pi}{8}\right)\cup\left(\frac{7\pi}{4},+\infty\right)$　　D. $\left(\frac{3\pi}{4},+\infty\right)$

3. 函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$，在 $x\in[0,1]$ 上恰好可取得 5 个最大值，则实数 ω 的取值范围为(　　).

A. $\left[\frac{9\pi}{4},\frac{25\pi}{4}\right)$　　B. $\left[\frac{19\pi}{2},\frac{27\pi}{2}\right)$

C. $\left[\frac{33\pi}{4},\frac{41\pi}{4}\right)$　　D. $\left[\frac{41\pi}{4},\frac{50\pi}{4}\right)$

4. 函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})(\omega>0)$ 在 $[0,2\pi]$ 上恰有 2 个极值点，则 ω 的取值范围是________.

5. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$，其中 $\omega>0$，$|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点，且 $f(x)\leqslant\left|f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|$ 恒成立，$f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{24}\right)$ 上有最小值无最大值，则 ω 的最大值是(　　).

A. 11　　B. 13　　C. 15　　D. 17

6. (多选题)已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$(其中 $\omega>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$)，$f\left(-\frac{\pi}{8}\right)=0$，$f(x)\leqslant\left|f\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right|$ 恒成立，且 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{24}\right)$ 上单调，则下列说法正确的是(　　).

A. 存在 φ，使得 $f(x)$ 是偶函数　　B. $f(0)=f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

C. ω 是奇数　　　　D. ω 的最大值是 3

7. 关于函数 $f(x)=\cos|x|+|\cos x|$，给出下列结论：

①$f(x)$是偶函数；②$f(x)$ 在区间$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$上单调；

③$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上有 4 个零点；④$f(x)$的最大值为 2.

其中所有正确结论的序号是(　　).

A. ①②④　　B. ②④　　C. ①④　　D. ①③

8. 为使得函数 $y=A\sin\omega x(A>0,\omega>0)$在$[0,\pi]$上至少出现 50 次最小值，则 ω 的最小值为________.

24

三角恒等变换

三角变换涉及的公式很多，变换的方法也很灵活，但无论怎样变换，它们都是围绕着三条主线展开的，即变换角、变换函数、变换式子结构.

在角的变换上，和角、差角、倍角、半角与单角都是一个相对的概念，它们的变换，关键在于深入观察，分析联系，从而进行适当的组合、变换.

在函数名的变换上，要根据题目的条件，观察函数的差异与联系，并需熟练掌握常用的变形技巧，如切割化弦、化异为同、降次、“1”的变换等.

在式子结构的变换上，常需分析、探索等式左、右的关系，条件与结论可能存在的联系，通过化归实现“对接”，解题中需掌握一些常用的技巧，如和积互化、公式变形等.

另外，在三角变换中，若能结合代数、几何的一些方法，常能使问题得到简化. 如万能代换，可把三角问题转化为代数问题；利用复数的方法，可使三角问题有直观的解释或通过单位根实现与数列问题的对接；构造几何图形，并结合正、余弦定理，可使三角问题简明易求.

三角恒等变换求值

24.1 三角恒等式的应用

研究密钥

求值中常见的问题有:求已知角的三角函数值;求已知条件下的三角函数值;求几个三角函数式的和、差、积的混合式的值;求角问题通常是先求有关三角函数值,再由角的范围,结合单调性求出角;化简问题的解法与三角求值问题的解法有共通之处,但要注意必须化到最简,最后结果能求出值的应求出值.

在求值、求角、化简的解题过程中,熟练掌握恒等变形公式是关键.

(1)和(差)角公式

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\&\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}} \to \boxed{\begin{aligned}&\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\&\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\boxed{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}} \to \boxed{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}}$$

(2)倍角公式与降次(幂)公式

$$\boxed{\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha} \to \boxed{\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin2\alpha}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos2\alpha&=2\cos^2\alpha-1\\&=1-2\sin^2\alpha\\&=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\end{aligned}} \to \boxed{\begin{aligned}&\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2}\\&\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}\end{aligned}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$$

(3)辅助角公式

$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$,其中 φ 满足 $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$,$\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

(4)和差化积、积化和差公式

a. 积化和差公式

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$.

$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$.

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$.

$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$.

b. 和差化积公式

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

(5)万能公式

$\sin2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$，$\cos2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$，$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

(6)三倍角公式

$\sin3x=3\sin x-4\sin^3x=4\sin x\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$.

$\cos3x=4\cos^3x-3\cos x=4\cos x\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$.

$\tan3x=4\tan x\tan\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$.

例 24.1 (2019 江苏卷 13)已知$\frac{\tan\alpha}{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{2}{3}$，则 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$的值是________.

分析 思路一：关注角的变换和函数名的变换，$2\alpha+\frac{\pi}{4}=\alpha+\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$以及$\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\alpha=\frac{\pi}{4}$关于弦的齐次式，进行弦化切.

思路二：已知条件使用两角和公式后，只有一个未知数 $\tan\alpha$，可以直接解出；待求式使用两角和公式后出现 $\sin2\alpha$，$\cos2\alpha$，使用万能公式 $\sin2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$，$\cos2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$弦化切，代入 $\tan\alpha$ 即可求值.

解析 ▶▶ **解法一**：由 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left[\alpha+\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sin\alpha\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$，且 $\sin\frac{\pi}{4}=\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\alpha\right]=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\alpha-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\alpha$，可得 $\sqrt{2}\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$

$$\frac{\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\alpha\right]}{\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\alpha\right]}=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\alpha}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\alpha-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\alpha}=\frac{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\alpha}{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\tan\alpha}=$$

$$\frac{1+\dfrac{\tan\alpha}{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}}{1-\dfrac{\tan\alpha}{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}}=\frac{1-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{1}{5}$$，因此 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

解法二：由 $\frac{\tan\alpha}{\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})}=-\frac{2}{3}$ 得 $\frac{\tan\alpha(1-\tan\alpha)}{1+\tan\alpha}=-\frac{2}{3}$，解得 $\tan\alpha=2$ 或 $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha+\frac{\pi}{4})&=\sin2\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos2\alpha\sin\frac{\pi}{4}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin2\alpha+\cos2\alpha)\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}+\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\right)\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1+2\tan\alpha-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}.\end{aligned}$$

当 $\tan\alpha=2$ 时，原式 $=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1+2\times2-2^2}{1+2^2}=\frac{\sqrt{2}}{10}$；当 $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$ 时，原式 $=\frac{\sqrt{2}}{2}\times$

$$\frac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

综上所述，$\sin(2\alpha+\frac{\pi}{4})$ 的值是 $\frac{\sqrt{2}}{10}$.

变式 1 已知 $\begin{cases}\sin x+\sin y=\frac{1}{3}\\\cos x-\cos y=\frac{1}{5}\end{cases}$，求 $\cos(x+y)$ 与 $\sin(x-y)$ 的值.

解析 ▶▶ 由题意得 $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$，将 $\sin x+\sin y=\frac{1}{3}$ 和 $\cos x-\cos y=\frac{1}{5}$ 两式平方相加得 $(\sin x+\sin y)^2+(\cos x-\cos y)^2=\frac{1}{9}+\frac{1}{25}=\frac{34}{225}$，即 $2+2(\sin x\sin y-$

$\cos x\cos y)=\frac{34}{225}$，得 $2-2\cos(x+y)=\frac{34}{225}$，即 $\cos(x+y)=1-\frac{17}{225}=\frac{208}{225}$.

$\sin(x-y)=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$（二倍角公式），由 $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$　①，$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$　②，$\frac{②}{①}$得 $-\tan\frac{x-y}{2}=\frac{\cos x-\cos y}{\sin x+\sin y}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{5}$，即 $\tan\frac{x-y}{2}=-\frac{3}{5}$，那么 $\sin(x-y)=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\frac{2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{\sin^2\frac{x-y}{2}+\cos^2\frac{x-y}{2}}=\frac{2\tan\frac{x-y}{2}}{\tan^2\frac{x-y}{2}+1}=\frac{-\frac{6}{5}}{\frac{9}{25}+1}=-\frac{15}{17}$.

变式 2　已知 $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$\tan\alpha\tan\beta=\frac{13}{7}$，求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值.

解析　因为 $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，由万能公式得 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=-\frac{1}{5}$.

又因为 $\tan\alpha\tan\beta=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}=\frac{13}{7}$，所以 $\cos(\alpha-\beta)=-\frac{10}{3}\cos(\alpha+\beta)=-\frac{10}{3}\times(-\frac{1}{5})=\frac{2}{3}$.

例 24.2　已知 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 为锐角，在 $\sin\alpha+\cos\beta$，$\sin\beta+\cos\gamma$，$\sin\gamma+\cos\delta$，$\sin\delta+\cos\alpha$ 四个值中，大于 $\sqrt{2}$ 的个数的最大值记为 m，小于 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 的个数的最大值记为 n，则 $m+n=$________.

分析　4 个值为一个轮换对称的形式，可把 4 个值相加，将同角三角函数值转化至便于求和的范围，由于此和 $\leqslant 4\sqrt{2}$，所以大于 $\sqrt{2}$ 的个数不可能是 4. 接下来适当赋值，看 $m=3$ 是否满足要求. n 的值也可通过赋值确定.

解析　由 $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$，$\sin\beta+\cos\beta=\sqrt{2}\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)$，$\sin\gamma+\cos\gamma=\sqrt{2}\sin\left(\gamma+\frac{\pi}{4}\right)$，$\sin\delta+\cos\delta=\sqrt{2}\sin\left(\delta+\frac{\pi}{4}\right)$，可得 $\sin\alpha+\cos\beta+\sin\beta+\cos\gamma+\sin\gamma+\cos\delta+\sin\delta+\cos\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)+(\sin\beta+\cos\beta)+(\sin\gamma+\cos\gamma)+(\sin\delta+\cos\delta)=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin\left(\gamma+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin\left(\delta+\frac{\pi}{4}\right)$.

又 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\alpha+\frac{\pi}{4},\beta+\frac{\pi}{4},\gamma+\frac{\pi}{4},\delta+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，因此上式 $\leqslant 4\sqrt{2}$，所以在

$\sin\alpha+\cos\beta,\sin\beta+\cos\gamma,\sin\gamma+\cos\delta,\sin\delta+\cos\alpha$ 四个数中大于$\sqrt{2}$的个数至多有 3 个.

不妨取 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\sin\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sin\gamma=\dfrac{1}{2},\sin\delta=\dfrac{12}{13}$，此时 $\sin\alpha+\cos\beta=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}>\sqrt{2},\sin\beta+\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}>\sqrt{2},\sin\gamma+\cos\delta=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{13}<\sqrt{2},\sin\delta+\cos\alpha=\dfrac{12}{13}+\dfrac{1}{2}>\sqrt{2}$.

故在 $\sin\alpha+\cos\beta,\sin\beta+\cos\gamma,\sin\gamma+\cos\delta$ 以及 $\sin\delta+\cos\alpha$ 中大于$\sqrt{2}$的个数的最大值 $m=3$，且在 $\sin\alpha+\cos\beta,\sin\beta+\cos\gamma,\sin\gamma+\cos\delta,\sin\delta+\cos\alpha$ 中，若 $\alpha=\beta=\gamma=\delta$，则 $\sin\alpha+\cos\beta=\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right),\sin\beta+\cos\gamma=\sin\beta+\cos\beta=\sqrt{2}\sin\left(\beta+\dfrac{\pi}{4}\right),\sin\gamma+\cos\delta=\sin\gamma+\cos\gamma=\sqrt{2}\sin\left(\gamma+\dfrac{\pi}{4}\right),\sin\delta+\cos\alpha=\sin\delta+\cos\delta=\sqrt{2}\sin\left(\delta+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

当 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\left(0,\dfrac{\pi}{12}\right)$时，可得 $\sin\alpha+\cos\beta,\sin\beta+\cos\gamma,\sin\gamma+\cos\delta,\sin\delta+\cos\alpha$ 均小于$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，则 $n=4$，所以 $m+n=7$.

变式 1 已知 α,β,γ 是三个互不相等的锐角，则在 $\sin\alpha\cos\beta,\sin\beta\cos\gamma,\sin\gamma\cos\alpha$ 三个值中，大于$\dfrac{1}{2}$的个数的最大值是(　　).

A. 0 个　　　　B. 1 个　　　　C. 2 个　　　　D. 3 个

解析 **解法一**：由题意得 $\alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$且 α,β,γ 互不相同，则 $\sin\alpha\cos\beta\leqslant\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\beta}{2}$，$\sin\beta\cos\gamma\leqslant\dfrac{\sin^2\beta+\cos^2\gamma}{2},\sin\gamma\cos\alpha\leqslant\dfrac{\sin^2\gamma+\cos^2\alpha}{2}$.

因此 $\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha\leqslant\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\beta}{2}+\dfrac{\sin^2\beta+\cos^2\gamma}{2}+\dfrac{\sin^2\gamma+\cos^2\alpha}{2}=\dfrac{3}{2}$，当且仅当 $\alpha+\beta=\beta+\gamma=\gamma+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$时，即 $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{4}$时，取等号.

又 α,β,γ 是三个互不相等的锐角，则 $\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha<\dfrac{3}{2}$，所以 $\sin\alpha\cos\beta$，$\sin\beta\cos\gamma,\sin\gamma\cos\alpha$ 三个值中，大于$\dfrac{1}{2}$的个数至多有 2 个，

不妨令 $\alpha=\dfrac{\pi}{3},\beta=\dfrac{\pi}{4},\gamma=\dfrac{\pi}{6}$时，$\sin\alpha\cos\beta=\sin\beta\cos\gamma>\dfrac{1}{2}$，故选 C.

解法二：由 $\sin\alpha\cos\beta\cdot\sin\beta\cos\gamma\cdot\sin\gamma\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\sin2\alpha\cdot\dfrac{1}{2}\sin2\beta\cdot\dfrac{1}{2}\sin2\gamma=\dfrac{1}{8}\sin2\alpha\sin2\beta\sin2\gamma<\dfrac{1}{8}$(因为 α,β,γ 是三个互不相等的锐角)，因此 $\sin\alpha\cos\beta,\sin\beta\cos\gamma,\sin\gamma\cos\alpha$ 三者中至多有 2 个大于$\dfrac{1}{2}$.

不妨令 $\alpha=\frac{\pi}{3}, \beta=\frac{\pi}{4}, \gamma=\frac{\pi}{6}$，则有 $\sin\alpha\cos\beta=\sin\beta\cos\gamma>\frac{1}{2}$，故选 C.

变式 2　已知 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 为锐角，在 $\sin\alpha\cos\beta, \sin\beta\cos\gamma, \sin\gamma\cos\delta, \sin\delta\cos\alpha$ 四个值中，大于 $\frac{1}{2}$ 的个数的最大值记为 m，小于 $\frac{1}{4}$ 的个数的最大值记为 n，则 $m+n$ 等于（　　）.

A. 8　　B. 7　　C. 6　　D. 5

解析　由 $\alpha, \beta, \gamma, \delta\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 得 $\sin\alpha\cos\beta\leqslant\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\beta}{2}$，$\sin\beta\cos\gamma\leqslant\frac{\sin^2\beta+\cos^2\gamma}{2}$，$\sin\gamma\cos\delta\leqslant\frac{\sin^2\gamma+\cos^2\delta}{2}$，$\sin\delta\cos\alpha\leqslant\frac{\sin^2\delta+\cos^2\alpha}{2}$，即 $\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\delta+\sin\delta\cos\alpha\leqslant\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\beta+\cos^2\beta+\sin^2\gamma+\cos^2\gamma+\sin^2\delta+\cos^2\delta}{2}=2$，当且仅当 $\alpha+\beta=\beta+\gamma=\gamma+\delta=\delta+\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，取等号.

则 $\sin\alpha\cos\beta, \sin\beta\cos\gamma, \sin\gamma\cos\delta, \sin\delta\cos\alpha$ 中至多有 3 个大于 $\frac{1}{2}$，取 $\sin\alpha=\frac{3}{5}, \sin\beta=\frac{5}{13}, \sin\gamma=\frac{12}{13}, \sin\delta=\frac{4}{5}$，则 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}=\frac{36}{65}>\frac{1}{2}$，$\sin\beta\cos\gamma=\left(\frac{5}{13}\right)^2<\frac{1}{2}$，$\sin\gamma\cos\delta=\frac{12}{13}\times\frac{3}{5}=\frac{36}{65}>\frac{1}{2}$，$\sin\delta\cos\alpha=\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{16}{25}>\frac{1}{2}$，因此 $\sin\alpha\cos\beta, \sin\beta\cos\gamma, \sin\gamma\cos\delta, \sin\delta\cos\alpha$ 中最多有 3 个大于 $\frac{1}{2}$，$m=3$.

令 $\alpha=\beta=\gamma=\delta$ 且 $\sin\alpha=\frac{1}{5}$，则 $\sin\alpha\cos\beta=\sin\beta\cos\gamma=\sin\gamma\cos\delta=\sin\delta\cos\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{25}<\frac{1}{4}$.

因此 $n=4$，所以 $m+n=7$，故选 B.

变式 3　已知 α, β, γ 是三个互不相同的锐角，则在 $\sin\alpha+\cos\beta, \sin\beta+\cos\gamma, \sin\gamma+\cos\alpha$ 三个值中，大于 $\sqrt{2}$ 的个数最多有（　　）个.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

解析　由 $\sin\alpha+\cos\beta+\sin\beta+\cos\gamma+\sin\gamma+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin\left(\gamma+\frac{\pi}{4}\right)<3\sqrt{2}$，则 $\sin\alpha+\cos\beta, \sin\beta+\cos\gamma, \sin\gamma+\cos\alpha$ 三个值中，大于 $\sqrt{2}$ 的个数至多有 2 个.

如取 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\alpha+\cos\beta>\sqrt{2}$；$\sin\beta=\frac{1}{2}, \cos\gamma=\frac{1}{2}$，$\sin\beta+\cos\gamma<\sqrt{2}$；$\sin\gamma=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin\gamma+\cos\alpha>\sqrt{2}$.

综上所述，故选 C.

例 24.3 认识 $\sin 18^\circ$的代数求法与几何求法.

分析 思路一(代数法):$\sin(2\times 18^\circ)=\cos(3\times 18^\circ)$,使用倍角公式和同角三角函数的基本关系恒等变形,转化为关于 $\sin 18^\circ$的一元二次方程,使用求根公式可得 $\sin 18^\circ$的值.

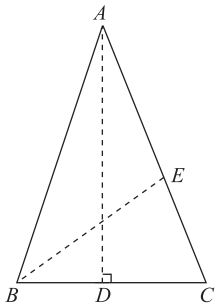
思路二(几何法):做一个顶角为 36°的等腰三角形,再做底角的角平分线,通过相似三角形对应边成比例可得 $\sin 18^\circ$的值.

解析 **解法一(代数法)**:因为 $\sin 36^\circ=\cos 54^\circ$,即 $\sin(2\times 18^\circ)=\cos(3\times 18^\circ)$,所以 $2\sin 18^\circ\cos 18^\circ=4\cos^3 18^\circ-3\cos 18^\circ$.

又 $\cos 18^\circ\neq 0$,所以 $2\sin 18^\circ=4\cos^2 18^\circ-3$,故 $4\sin^2 18^\circ+2\sin 18^\circ-1=0$.

因为 $\sin 18^\circ>0$,所以 $\sin 18^\circ=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

解法二(几何法):如图所示构造等腰三角形 ABC,使 $AB=AC=1$,$\angle BAC=36^\circ$. 作 $AD\perp BC$ 交 BC 于 D,则$\angle BAD=\angle CAD=18^\circ$, $BD=CD=\dfrac{1}{2}BC$.



又作 BE 平分$\angle ABC$ 交 AC 于 E,则$\angle ABC=\angle C=72^\circ$,$\angle ABE=\angle EBC=36^\circ$,所以$\angle BEC=\angle C=72^\circ$.

设 $AE=BE=BC=x$,则 $EC=1-x$,所以$\triangle ABC\backsim\triangle BEC$, $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BE}{EC}$,即$\dfrac{1}{x}=\dfrac{x}{1-x}$,解得 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. 又 $x>0$,所以 $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

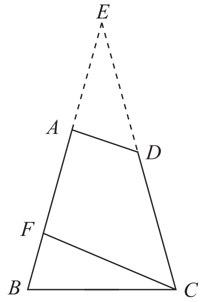
在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中,$\sin\angle BAD=\sin 18^\circ=\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{x}{2}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

变式 1 (2015 新课标全国Ⅰ卷理 16)在平面四边形 $ABCD$ 中,$A=B=C=75^\circ$,$BC=2$,则 AB 的取值范围是________.

解析 **解法一(几何法)**:如图所示,延长 BA,CD 交于点 E,平移 AD.

①当 A 点,D 点与 E 点重合时,AB 最长,所以$\dfrac{2}{\sin 30^\circ}=\dfrac{BE}{\sin 75^\circ}$,$BE=\sqrt{6}+\sqrt{2}$,则 $AB<\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

②当 D 点与 C 点重合,A 点与 F 点重合时,AB 最短,所以$\dfrac{BF}{\sin 30^\circ}=\dfrac{2}{\sin 75^\circ}$,$BF=\sqrt{6}-\sqrt{2}$,则 $AB>\sqrt{6}-\sqrt{2}$.



综上所述,AB 的取值范围为$(\sqrt{6}-\sqrt{2},\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

解法二(代数法):由题意得 $AC>AB$,$AC>2$,因为 $AC^2=AB^2+4-2AB\times$

$2\times\cos75^\circ$，所以 $AB^2+4-2AB\times2\times\cos75^\circ>AB^2$，$AB^2+4-2AB\times2\times\cos75^\circ>4$，因此 $4\cos75^\circ<AB<\dfrac{1}{\cos75^\circ}$，则 $4\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}<AB<\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$，即 $\sqrt{6}-\sqrt{2}<AB<\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

故 AB 的取值范围为 $(\sqrt{6}-\sqrt{2},\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

例 24.4 求下列三角函数式的值.

(1) $\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}\cos\dfrac{6\pi}{7}$；(2) $8\cos^2\dfrac{\pi}{7}\cos^2\dfrac{2\pi}{7}\cos^2\dfrac{3\pi}{7}$；(3) $\sin6^\circ\sin42^\circ\sin66^\circ\sin78^\circ$；(4) $\cos6^\circ\cos42^\circ\cos66^\circ\cos78^\circ$.

分析 (1) $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$，这个公式可以实现 $\cos\alpha\to\sin2\alpha$ 的转变，根据诱导公式 $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ 可得 $\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}\cos\dfrac{6\pi}{7}=-\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}$，使得所有角度呈倍数关系，只需匹配一个 $\sin\dfrac{\pi}{7}$，连续用 3 次二倍角公式就可以实现函数名统一为 sin，角度统一为 $\dfrac{8\pi}{7}$，再使用诱导公式 $\sin\dfrac{8\pi}{7}=-\sin\dfrac{\pi}{7}$，抵消匹配的 $\sin\dfrac{\pi}{7}$.

(2) 由 $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ 可得 $\cos\alpha=\dfrac{\sin2\alpha}{2\sin\alpha}$，将函数名变换成 sin，根据诱导公式 $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ 可得 $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)}{\sin\alpha}=1$，使得不同角的正弦函数可以约分.

(3) 根据同角三角函数的基本关系改变函数名，使得角度呈倍数关系，只需匹配一个 $\cos6^\circ$，连续用 4 次二倍角公式可以实现函数名统一为 sin，角度统一为 96°，再使用诱导公式 $\sin96^\circ=\cos6^\circ$，抵消匹配的 $\cos6^\circ$.

(4) 观察式子中的角度可以发现 $\cos66^\circ=\cos(60^\circ+6^\circ)$，若匹配一个 $\cos(60^\circ-6^\circ)=\cos54^\circ$，可用三倍角公式 $\cos3\alpha=4\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\alpha\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)$ 化简.

同理，$\cos42^\circ=\cos(60^\circ-18^\circ)$，$\cos78^\circ=\cos(60^\circ+18^\circ)$，若匹配一个 $\cos18^\circ$ 可用三倍角公式化简，原式转化为 $=\dfrac{\dfrac{1}{4}\cos(3\times6^\circ)\cdot\dfrac{1}{4}\cos(3\times18^\circ)}{\cos54^\circ\cos18^\circ}$.

解析 (1) $\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}\cos\dfrac{6\pi}{7}=-\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}=-\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}}{\sin\dfrac{\pi}{7}}=-\dfrac{\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}}{\sin\dfrac{\pi}{7}}=-\dfrac{\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{4\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}}{\sin\dfrac{\pi}{7}}=-\dfrac{\dfrac{1}{8}\sin\dfrac{8\pi}{7}}{\sin\dfrac{\pi}{7}}=-\dfrac{-\dfrac{1}{8}\sin\dfrac{\pi}{7}}{\sin\dfrac{\pi}{7}}=\dfrac{1}{8}$.

(2) $8\cos^2\frac{\pi}{7}\cos^2\frac{2\pi}{7}\cos^2\frac{3\pi}{7}=8\left(\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\right)^2=8\left(\frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}\cdot\frac{\sin\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}}\cdot\frac{\sin\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{3\pi}{7}}\right)^2=8\times\frac{1}{8^2}=\frac{1}{8}$.

(3) 原式 $=\sin6^\circ\sin42^\circ\cos24^\circ\cos12^\circ=\frac{2\sin6^\circ\cos6^\circ}{2\cos6^\circ}\cos12^\circ\cos24^\circ\cos48^\circ=\frac{2\sin12\cos12^\circ}{4\cos6^\circ}\cdot\cos24^\circ\cos48^\circ=\frac{2\sin24^\circ\cos24^\circ}{8\cos6^\circ}\cos48^\circ=\frac{2\sin48^\circ\cos48^\circ}{16\cos6^\circ}=\frac{\sin96^\circ}{16\cos6^\circ}=\frac{1}{16}$.

(4) $\cos3\alpha=4\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$，不难发现 $\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{2\pi}{3}$，$\frac{\pi}{3}+\alpha-\alpha=\frac{\pi}{3}$，$66^\circ-6^\circ=60^\circ$，$42^\circ+78^\circ=120^\circ$，因此我们运用三倍角公式的逆变换 $\cos6^\circ\cos66^\circ\cos42^\circ\cos78^\circ=\frac{\cos54^\circ\cos6^\circ\cos66^\circ}{\cos54^\circ}\cdot\frac{\cos42^\circ\cos18^\circ\cos78^\circ}{\cos18^\circ}=\frac{\frac{1}{4}\cos18^\circ\cdot\frac{1}{4}\cos54^\circ}{\cos54^\circ\cos18^\circ}=\frac{1}{16}$.

评注

第(3)题也可通过三倍角公式的逆变换来求解.

$\sin6^\circ\sin42^\circ\sin66^\circ\sin78^\circ=\sin6^\circ\sin66^\circ\sin42^\circ\sin78^\circ$，结合 $\sin3\alpha=-4\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\sin\alpha\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=4\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\sin\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $\sin6^\circ\sin66^\circ=\frac{\sin54^\circ\sin6^\circ\sin66^\circ}{\sin54^\circ}$，$\sin42^\circ\sin78^\circ=\frac{\sin42^\circ\sin18^\circ\sin78^\circ}{\sin18^\circ}$，则 $\sin6^\circ\sin66^\circ\sin42^\circ\sin78^\circ=\frac{\sin54^\circ\sin6^\circ\sin66^\circ}{\sin54^\circ}\cdot\frac{\sin42^\circ\sin18^\circ\sin78^\circ}{\sin18^\circ}=\frac{\frac{1}{4}\sin18^\circ}{\sin54^\circ}\cdot\frac{\frac{1}{4}\sin54^\circ}{\sin18^\circ}=\frac{1}{16}$.

变式 1 (2008 清华自主招生)求 $\sin^4 10^\circ+\sin^4 50^\circ+\sin^4 70^\circ$.

解析 $\sin^4 10^\circ+\sin^4 50^\circ+\sin^4 70^\circ$

$=\cos^4 80^\circ+\cos^4 40^\circ+\cos^4 20^\circ$

$=\left(\frac{1+\cos160^\circ}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos80^\circ}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos40^\circ}{2}\right)^2$

$=\frac{3}{4}+\frac{\cos^2 160^\circ+\cos^2 80^\circ+\cos^2 40^\circ}{4}+\frac{1}{2}(\cos160^\circ+\cos80^\circ+\cos40^\circ)$

$=\frac{3}{4}+\frac{1}{8}(1+\cos320^\circ+1+\cos160^\circ+1+\cos80^\circ)+\frac{1}{2}(\cos160^\circ+\cos80^\circ+\cos40^\circ)$

$=\frac{9}{8}+\frac{1}{8}(\cos320^\circ+\cos160^\circ+\cos80^\circ)+\frac{1}{2}(\cos160^\circ+\cos80^\circ+\cos40^\circ)$

$=\frac{9}{8}+\frac{1}{8}(2\cos240^\circ\cos80^\circ+\cos80^\circ)+\frac{1}{2}(2\cos100^\circ\cos60^\circ+\cos80^\circ)$

$$=\frac{9}{8}+\frac{1}{8}\left[2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\cos80°+\cos80°\right]+\frac{1}{2}\left[2\times(-\cos80°)\times\frac{1}{2}+\cos80°\right]$$

$$=\frac{9}{8}.$$

三角形中的三角恒等变换

24.2　三角形形状的判定

研究密钥

判断三角形形状的两种途径：

(1)利用正弦定理、余弦定理，把已知条件转化为边边关系，再分析.

(2)转化为内角的三角函数之间的关系，通过恒等变换得出内角的关系，再判断.

正弦定理

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$($2R$ 为$\triangle ABC$ 的外接圆直径).

余弦定理

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$(已知两边 a，b 及夹角 C，求第三边 c).

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$(已知三边求角).

例 24.5 在$\triangle ABC$ 中，A 和 B 均为锐角，且 $\sin^2A+\sin^2B=\sin C$. 证明：$C=90°$.

分析 根据条件可得 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin^2A+\sin^2B$，即 $\sin A(\cos B-\sin A)+\sin B(\cos A-\sin B)=0$，又因为 A 和 B 均为锐角，所以 $\sin A$ 和 $\sin B$ 都为正数. 当 $\cos B<\sin A$，$\cos A<\sin B$ 时，方程不成立，此时 $A+B>\frac{\pi}{2}$，$C<90°$；当 $\cos B>\sin A$，$\cos A>\sin B$ 时，方程也不成立，此时 $A+B<\frac{\pi}{2}$，$C>90°$. 所以使用反证法，可以先假设 $C\neq90°$，即 $A+B\neq\frac{\pi}{2}$，分两种情况讨论，分别推出矛盾.

解析 **解法一：**依题意可得 A 和 B 均为锐角，若 $A+B>\frac{\pi}{2}$，则 $\sin A>\cos B$，$\sin B>\cos A$. 故 $\sin^2A+\sin^2B>\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin(A+B)=\sin C$，矛盾.

同理，若 $A+B<\frac{\pi}{2}$，也推出矛盾.

所以，$A+B=\frac{\pi}{2}$，则 $C=90°$.

解法二：由 $\sin^2A+\sin^2B=\sin C$ 得 $\sin^2A+\sin^2B=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，即 $\sin A(\sin A-\cos B)=\sin B(\cos A-\sin B)$，可得 $\sin A\left[\sin A-\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)\right]=\sin B\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)-\sin B\right]$，故 $\sin A\cdot 2\cos\frac{A+\frac{\pi}{2}-B}{2}\sin\frac{A+B-\frac{\pi}{2}}{2}=2\sin B\cos\frac{\frac{\pi}{2}-A+B}{2}\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{2}-A-B}{2}$，即 $2\sin\frac{A+B-\frac{\pi}{2}}{2}\left[\sin A\cos\frac{A+\frac{\pi}{2}-B}{2}+\sin B\cos\frac{\frac{\pi}{2}-A+B}{2}\right]=0$.

又 $0<A,B<\frac{\pi}{2}$，则 $\cos\frac{A-B+\frac{\pi}{2}}{2}>0$，$\cos\frac{\frac{\pi}{2}-A+B}{2}>0$，得 $\sin\frac{A+B-\frac{\pi}{2}}{2}=0$，即 $A+B=\frac{\pi}{2}$，$C=\frac{\pi}{2}$，故 $\triangle ABC$ 为直角三角形，$C=90°$.

变式 1 在 $\triangle ABC$ 中，$\cos A\cos B\cos C=\frac{1}{8}$，试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

解析 **解法一**：由题意得 $\cos A\cos B\cos C=-\cos A\cos B\cos(A+B)=\frac{1}{8}$，且 $\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$，则 $-\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]\cdot\cos(A+B)=\frac{1}{8}$，即 $\cos^2(A+B)+\cos(A-B)\cos(A+B)+\frac{1}{4}\cos^2(A-B)+\frac{1}{4}\sin^2(A-B)=0$，因此 $\left[\cos(A+B)+\frac{1}{2}\cos(A-B)\right]^2+\frac{1}{4}\sin^2(A-B)=0$，故 $\cos(A+B)+\frac{1}{2}\cos(A-B)=0$，且 $\sin(A-B)=0$.

又 $A,B\in(0,\pi)$，则 $A=B$，且 $A+B=\frac{2\pi}{3}$，即 $A=B=\frac{\pi}{3}$，$C=\frac{\pi}{3}$，所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形.

解法二：由余弦定理知 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，则 $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{8}$，可得 $(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=a^2b^2c^2$ (＊)，不宜直接展开，运用不等式放缩技巧.

由 $\sqrt{b^2+c^2-a^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2-b^2}\leqslant\frac{b^2+c^2-a^2+a^2+c^2-b^2}{2}=c^2$（当且仅当“$b^2+c^2-a^2=a^2+c^2-b^2$”，即 $a=b$ 时取等号），同理 $\sqrt{a^2+c^2-b^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2-c^2}\leqslant a^2$（当且仅当“$b=c$”时，取等号），$\sqrt{b^2+c^2-a^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2-c^2}\leqslant b^2$（当且仅当“$a=c$”时，取等号），所以 $(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)\leqslant a^2b^2c^2$（当且仅当“$a=b=c$”时，取等号）.

则(＊)式成立时，也即当且仅当 $a=b=c$ 时，$\triangle ABC$ 为等边三角形.

变式 2 在 $\triangle ABC$ 中，$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=\frac{9}{4}$，试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

解析 由 $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=\frac{1-\cos2A}{2}+\frac{1-\cos2B}{2}+\frac{1-\cos2C}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\cos2A+\cos2B+\cos2C)=\frac{9}{4}$，可得 $\cos2A+\cos2B+\cos2C=-\frac{3}{2}$.

又 $\cos2A+\cos2B+\cos2C=2\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos2(A+B)=2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2(A+B)-1=-\frac{3}{2}$，即 $\cos^2(A+B)+\cos(A-B)\cos(A+B)=-\frac{1}{4}$.

$\cos^2(A+B)+\cos(A-B)\cos(A+B)+\frac{1}{4}\cos^2(A-B)+\frac{1}{4}\sin^2(A-B)=0$，得 $\left[\cos(A+B)+\frac{1}{2}\cos(A-B)\right]^2+\frac{1}{4}\sin^2(A-B)=0$，因此 $\cos(A+B)+\frac{1}{2}\cos(A-B)=0$ 且 $\sin(A-B)=0$.

故 $A=B=\frac{\pi}{3}$，$\triangle ABC$ 为等边三角形.

变式3 证明：$\triangle ABC$ 为直角三角形的充分必要条件是 $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2$.

解析 不妨设 $A=90°$，$B+C=90°$，则 $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=1+\sin^2B+\cos^2B=2$.

证法一：若 $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2$，由正弦定理得 $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=\frac{1}{2R}$，故 $\left(\frac{1}{2R}\right)^2(a^2+b^2+c^2)=2$，即 $\left(\frac{1}{2R}\right)^2=\frac{2}{a^2+b^2+c^2}$.

因此，$\sin^2A=\frac{2a^2}{a^2+b^2+c^2}$，$\cos^2A=\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{2bc\cos A}{a^2+b^2+c^2}$.

同理，$\cos^2B=\frac{2ac\cos B}{a^2+b^2+c^2}$，$\cos^2C=\frac{2ab\cos C}{a^2+b^2+c^2}$.

若 $\cos A,\cos B,\cos C$ 均为非零实数，则 $\cos A=\frac{2bc}{a^2+b^2+c^2}$　（$*$），$\cos B=\frac{2ac}{a^2+b^2+c^2}$，$\cos C=\frac{2ab}{a^2+b^2+c^2}$.

由式（$*$）得 $(b^2+c^2-a^2)(b^2+c^2+a^2)=(2bc)^2\Rightarrow(b^2+c^2)^2-a^4=4b^2c^2\Rightarrow(b^2-c^2)^2-a^4=0\Rightarrow(b^2-c^2-a^2)(b^2-c^2+a^2)=0$.

因此，$\cos B\cos C=0$，矛盾.

所以假设 $\cos A,\cos B,\cos C$ 均为非零实数不成立，故 $\cos A,\cos B,\cos C$ 中有一个为 0，即 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

证法二：
$$\begin{aligned}0&=2-\sin^2A-\sin^2B-\sin^2C=\cos^2A+\cos^2B-\sin^2(A+B)\\&=\cos^2A+\cos^2B-\sin^2A\cos^2B-2\sin A\cos A\sin B\cos B-\cos^2A\sin^2B\\&=\cos^2A(1-\sin^2B)+\cos^2B(1-\sin^2A)-2\sin A\cos A\sin B\cos B\end{aligned}$$

$=2\cos^2A\cos^2B-2\sin A\cos A\sin B\cos B$

$=2\cos A\cos B(\cos A\cos B-\sin A\sin B)$

$=-2\cos A\cos B\cos C.$

由 A,B,C 为 $\triangle ABC$ 的三个内角，可知 $\cos A,\cos B,\cos C$ 中有一个为 0，其所对应的角为直角，即 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

24.3　三角形中恒等式与不等式

研究密钥

三角等式分三角恒等式与条件恒等式，证明的关键在于消除等式左、右的差异、消除条件与结论的差异，一般地，根据需要可化繁为简、从左证右、从右证左或左右同时化为另一个式子.

(1) $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2(1+\cos A\cos B\cos C)$.

(2) $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1-2\cos A\cos B\cos C$.

(3) $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3x=4\sin x\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$.

(4) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=1$.

(5) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

(6) $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot A\cot C=1$.

三角不等式首先是不等式，要掌握证明不等式的常用方法：配方法、比较法、放缩法、基本不等式、柯西不等式等. 另外，要充分利用好三角形内角和为 180° 这一结论，如果同时涉及边和角，应尽量使用正、余弦定理实现边角统一.

例 24.6 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角的正切值均为正整数，请求出这三个内角的正切值.

分析 已知条件没有体现角度和函数关系，需要充分利用三角形内角和为 180° 这一结论及其变形. $A+B+C=\pi$，结合条件三个内角的正切值均为正整数，可得最小的角的正切值为 1，借助恒等式 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$ 建立起三个正切值之间的关系，代入转化为两个正切值之间的关系，求整数解即可证明.

解析 因为 $\triangle ABC$ 的三个内角的正切值均为正整数，即 $\tan A>0,\tan B>0,\tan C>0$.

设 $A\leqslant B\leqslant C$，所以 $A+B+C=\pi\geqslant 3A$，$A\leqslant\frac{\pi}{3}$，则 $\tan A\leqslant\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，由于 $\tan A$ 为正整数，所以 $\tan A=1$.

又 $\tan C=\tan(\pi-A-B)=-\tan(A+B)=\frac{-\tan A-\tan B}{1-\tan A\tan B}$，所以有 $\tan A+\tan B+$

$\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

将 $\tan A=1$ 代入上式得 $\tan B\tan C=\tan B+\tan C+1$，即 $(\tan C-1)(\tan B-1)=2$.

又 $\tan B\in\mathbf{N}^*$，则 $\tan B\geqslant 2$，因为 $\tan B=1$ 时，C 为直角，不合题意.

因为 $\tan A,\tan B,\tan C$ 为正整数，所以由上式可得 $\begin{cases}\tan B-1=1\\ \tan C-1=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\tan B-1=2\\ \tan C-1=1\end{cases}$，由假设 $A\leqslant B\leqslant C$，则 $\tan B\leqslant\tan C$，所以 $\begin{cases}\tan B=2\\ \tan C=3\end{cases}$.

综上所述，这三个内角的正切值分别为 1，2，3.

变式 1　在锐角 $\triangle ABC$ 中，若 $\sin A=2\sin B\sin C$，则 $\tan A\tan B\tan C$ 的最小值是________.

解析 ▶▶ 由题得 $\sin A=\sin(B+C)=2\sin B\sin C$，即 $\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin B\sin C$.

两边同除以 $\cos B\cos C$ 得 $\tan B+\tan C=2\tan B\tan C$，则 $\tan A\tan B\tan C=\tan A+\tan B+\tan C=\tan A+2\tan B\tan C\geqslant 2\sqrt{2\tan A\tan B\tan C}$，即 $\tan A\tan B\tan C\geqslant 8$，当且仅当 $\tan A=2\tan B\tan C$ 时取等号，即 $\tan A=4$，$\tan B\tan C=2$ 时，取等号.

所以 $\tan A\tan B\tan C$ 的最小值是 8.

变式 2　证明：在锐角 $\triangle ABC$ 中，有 $\tan A\tan B\tan C\geqslant 3\sqrt{3}$.

解析 ▶▶ **解法一：**由题得 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C\geqslant 3\sqrt[3]{\tan A\tan B\tan C}$，则 $\tan A\tan B\tan C\geqslant 3\sqrt{3}$，当且仅当 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时取等号.

解法二：设 $f(x)=\tan x$，易知 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上是下凸函数，则对于 $A,B,C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，有 $\frac{f(A)+f(B)+f(C)}{3}\geqslant f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $\tan A+\tan B+\tan C\geqslant 3\sqrt{3}$，即 $\tan A\tan B\tan C\geqslant 3\sqrt{3}$.

变式 3　证明：在锐角 $\triangle ABC$ 中，有 $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geqslant\sqrt{3}$.

解析 ▶▶ **解法一：**不等式 $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geqslant\sqrt{3}\Leftrightarrow\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)^2\geqslant 3$，即 $\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}+2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+2\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}\geqslant 3$.

又 $\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\geqslant\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}$，依据 $x,y,z\in\mathbf{R}$，有 $x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+xz$ 恒成立，因此 $\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}+2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+2\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}\geqslant 3\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}\right)=3$（其中用到三角形中的恒等式

$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=1$).

综上所述，$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geqslant\sqrt{3}$，当且仅当 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时取等号.

解法二： 由 $A+B+C=\pi$ 得 $\tan\frac{A}{2}=\tan\frac{\pi-(B+C)}{2}=\frac{1}{\tan\frac{B+C}{2}}=\frac{1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}}$，因此 $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}$，且 $\tan\frac{B}{2}$，$\tan\frac{C}{2}>0$，$\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\leqslant\left(\frac{\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}}{2}\right)^2$，因此 $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geqslant\frac{1-\frac{\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)^2}{4}}{\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}}+\frac{3}{4}\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\geqslant2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，当且仅当 $B=C=\frac{\pi}{3}$，即 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时取等号.

例 24.7 在锐角△ABC 中，证明：$\sin A+\sin B+\sin C>2$.

分析 ▶▶ 为减少变量，先对要证的式子进行变形 $\sin A+\sin B+\sin C=\sin A+\sin B+\sin(A+B)=\sin A+\sin B+\sin A\cos B+\sin B\cos A>2=\sin^2A+\sin^2B+\cos^2B+\cos^2A$. 根据正、余弦函数的有界性可得 $\sin A>\sin^2A$，$\sin B>\sin^2B$，因为 A,B,C 都是锐角，所以 $A+B>\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\sin A>\cos B$，同理有 $\sin B>\cos A$，所以 $\sin A\cos B>\cos^2B$，$\sin B\cos A>\cos^2A$，相加即可得证.

解析 ▶▶ 因为△ABC 为锐角三角形，所以 $A+B>\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow A>\frac{\pi}{2}-B\Leftrightarrow\sin A>\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)\Leftrightarrow\sin A>\cos B$，同理有 $\sin B>\cos A$.

$\sin A+\sin B+\sin C>\sin^2A+\sin^2B+\sin(A+B)=\sin^2A+\sin^2B+\sin A\cos B+\sin B\cos A>\sin^2A+\sin^2B+\cos^2B+\cos^2A=2$.

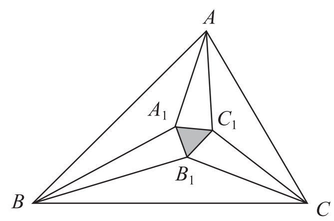
变式 1 在△ABC 中，证明：$\frac{1}{1+\cos^2A+\cos^2B}+\frac{1}{1+\cos^2A+\cos^2C}+\frac{1}{1+\cos^2B+\cos^2C}\leqslant2$.

解析 ▶▶ $\sin^2C=\sin^2(A+B)=(\sin A\cos B+\sin B\cos A)^2$，由柯西不等式可得 $(\sin A\cos B+\sin B\cos A)^2\leqslant(\sin^2A+\sin^2B)(\cos^2A+\cos^2B)$，所以 $\cos^2A+\cos^2B\geqslant\frac{\sin^2C}{\sin^2A+\sin^2B}$，即 $\cos^2A+\cos^2$

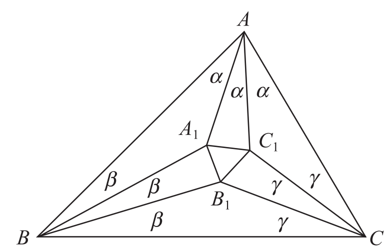
$B+1 \geqslant \dfrac{\sin^2 C+\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}$，则 $\dfrac{1}{\cos^2 A+\cos^2 B+1} \leqslant \dfrac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}$．同理 $\dfrac{1}{\cos^2 B+\cos^2 C+1} \leqslant \dfrac{\sin^2 B+\sin^2 C}{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}$，$\dfrac{1}{\cos^2 C+\cos^2 A+1} \leqslant \dfrac{\sin^2 C+\sin^2 A}{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}$．

以上三式相加得 $\dfrac{1}{1+\cos^2 A+\cos^2 B}+\dfrac{1}{1+\cos^2 A+\cos^2 C}+\dfrac{1}{1+\cos^2 B+\cos^2 C} \leqslant \dfrac{2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)}{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}=2$.

例 24.8 如图所示，任意$\triangle ABC$，作其三个角的三等分线，两两成对相交，证明：三个交点一定构成正三角形.



分析 已知条件是三个内角三等分，所以考虑将结果向角度方向转换．边 A_1C_1 在$\triangle AA_1C_1$中，由余弦定理得 $A_1C_1^2=AA_1^2+AC_1^2-2AA_1\cdot AC_1\cos\alpha$，使用正弦定理把边 AA_1 和 AC_1 转换成角度，根据式子的结构特征构造三角形，并结合正弦、余弦定理进行化简．由于 A_1C_1，A_1B_1，B_1C_1 地位对等，将 A_1B_1，B_1C_1 用轮换的原则表示出来，若相等则命题得证.



解析 如图所示，设 $A=3\alpha$，$B=3\beta$，$C=3\gamma$，$\triangle ABC$ 的外接圆的直径为 $2R$，$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{3}$.

在$\triangle AA_1C_1$中，由余弦定理得 $A_1C_1^2=AA_1^2+AC_1^2-2AA_1\cdot AC_1\cos\alpha$，且在$\triangle A_1AB$中，由正弦定理得 $\dfrac{AA_1}{\sin\beta}=\dfrac{AB}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{AB}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\gamma\right)}=\dfrac{2R\sin 3\gamma}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\gamma\right)}=8R\sin\gamma\sin\left(\gamma+\dfrac{\pi}{3}\right)$（用到正弦的三倍角公式），即 $AA_1=8R\sin\beta\sin\gamma\sin\left(\gamma+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

同理，在$\triangle ACC_1$中，由正弦定理得 $\dfrac{AC_1}{\sin\gamma}=\dfrac{AC}{\sin(\alpha+\gamma)}=\dfrac{AC}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\beta\right)}=\dfrac{2R\sin 3\beta}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\beta\right)}=8R\sin\beta\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\beta\right)$，即 $AC_1=8R\sin\gamma\sin\beta\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\beta\right)$，所以 $A_1C_1^2=AA_1^2+AC_1^2-2AA_1\cdot AC_1\cos\alpha=(8R\sin\beta\sin\gamma)^2\left[\sin^2\left(\dfrac{\pi}{3}+\gamma\right)+\sin^2\left(\dfrac{\pi}{3}+\beta\right)-2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\gamma\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\beta\right)\cos\alpha\right]$.

对于 $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{3}+\gamma\right)+\sin^2\left(\dfrac{\pi}{3}+\beta\right)-2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\gamma\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\beta\right)\cos\alpha$ 这个式子，构造三角形，使得三内角分别为 $\dfrac{\pi}{3}+\gamma$，$\dfrac{\pi}{3}+\beta$ 和 α，且三角形的外接圆直径为 1，则 $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{3}+\gamma\right)+\sin^2\left(\dfrac{\pi}{3}+\beta\right)-2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\gamma\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\beta\right)\cos\alpha=\sin^2\alpha$，因此 $A_1C_1^2=(8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2$，即 $A_1C_1=8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

同理 $A_1B_1=8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$，$B_1C_1=8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$，所以 $A_1B_1=A_1C_1=B_1C_1$，故$\triangle A_1B_1C_1$为等边三角形. 得证.

训练 24

1. (2022 新高考全国Ⅱ卷理 6)α,β 满足 $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\beta$，则(　　).

A. $\tan(\alpha+\beta)=1$　　B. $\tan(\alpha+\beta)=-1$

C. $\tan(\alpha-\beta)=1$　　D. $\tan(\alpha-\beta)=-1$

2. 在$\triangle ABC$ 中，若 $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2$，则 $\cos A+\cos B+2\cos C$ 的最大值为(　　).

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{6}$

3. $\tan 15^\circ+2\sqrt{2}\sin 15^\circ=$________.

4. 已知 $\alpha,\beta\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$，$\cos(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$，$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{12}{13}$，则 $\cos\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)=$________.

5. 已知 $\sin\alpha+\sqrt{3}\sin\beta=1$，$\cos\alpha+\sqrt{3}\cos\beta=\sqrt{3}$，则 $\cos(\alpha-\beta)$的值为________.

6. $\cos\frac{\pi}{11}-\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}-\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}=$________(用数字作答).

7. 化简：$\sin 12^\circ\sin 48^\circ\sin 54^\circ=$________(用数字作答).

8. $\triangle ABC$ 的三个内角 A,B,C 满足 $A=3B=9C$，则 $\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A=$________.

9. 已知在$\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $3a^2=c^2-b^2$，则 $\tan A\tan B$ 的取值范围是________.

25

解三角形

解三角形往往将代数、几何、三角等知识联系起来，这类试题灵活多变，但无论是三角形解的个数问题、三角形形状的判断问题、三角形中的边角求值或最值问题，还是多边形中的解三角形问题，其本质都是对某三角形中“边角互化”的研究，对正弦、余弦定理的选择也需要一定的技巧.

如果将三角形与平面几何中的性质、定理结合起来，对于快速解题大有裨益，特别是与圆有着密不可分的关系.三角学通常借助圆来研究，三角函数也是通过圆定义的.除了定义以外，三角形中还有很多与圆有关的性质，本讲将介绍三角形中与圆有关的性质.

有关解三角形问题，除了借助平面几何性质处理外，我们更要关注三角恒等变换本身，在$\triangle ABC$中，$A+B+C=\pi$，再结合正弦、余弦定理、三角恒等变换公式，可以拓展出很多三角形中的三角恒等式及不等式，如果能够熟练运用这些公式及其变形，也能为解决三角形问题带来巨大的便利.

25.1　解的个数

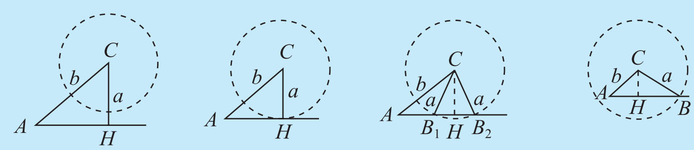
研究密钥

三角形解的个数问题是个难点和易错点，类型也比较丰富，针对不同的类型，是选用正弦定理还是余弦定理很好地考查了学生分析问题和解决问题的能力，其主要设问形式是三角形有几个解、形状有几种、已知解的个数求参等，解决方式为正弦定理＋有界性，也可以找到临界情况不断进行调整.

如在已知两边及一边对角（即 a,b,A）时，可利用数形结合法判断解的个数.

我们作图来直观地观察一下. 不妨设已知$\triangle ABC$ 的两边 a,b 和角 A，作图步骤如下：①先作出已知角 A，把未知边 c 画为水平的，角 A 的另一条边为已知边 b；②以边 b 的不是 A 点的另外一个端点为圆心，以 a 为半径作圆 C；③观察圆 C 与边 c 交点的个数，便可得此三角形解的个数.

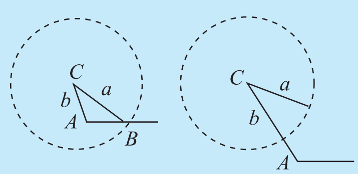
显然，当 A 为锐角时，有如图 1 所示的四种情况.



(a) $a<CH=b\sin A$ 无解　(b) $a=CH=b\sin A$ 仅有一个解　(c) $CH=b\sin A<a<b$ 有两个解　(d) $a>b$ 仅有一个解

图 1

当 A 为钝角或直角时，有如图 2 所示的两种情况.



(a) $a>b$ 仅有一解　(b) $a<b$ 无解

图 2

根据上面的分析可知，由于 a,b 长度关系的不同，导致了问题有不同个数的解，若 A 为锐角，只有当 a 不小于 $b\sin A$ 时才有解，随着 a 的增大得到的解的个数也是不相同的.

当 A 为钝角时，只有当 a 大于 b 时才有解.

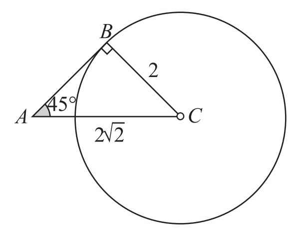
例 25.1 在$\triangle ABC$中，已知$b=2\sqrt{2}$，$a=2$，如果三角形有解，则A的取值范围是________.

分析 思路一（代数法）：使用正弦定理把边的关系转化为角度的关系，再用有界性确定范围.

思路二（几何法）：假设C为圆心，B为圆上的动点，根据相切的临界情况确定A的取值范围.

解析 **解法一（代数法）**：由正弦定理可得$\dfrac{2}{\sin A}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin B}$，即$\sin B=\sqrt{2}\sin A$.

因为$\sin B\in(0,1]$，所以$\sin A\in\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$，则$A\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right]$.



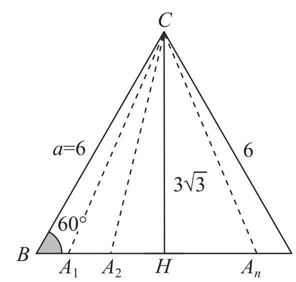
解法二（几何法）：由图像可得当$A>45^\circ$时，不能构成三角形，所以$A\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right]$.

变式 1 在$\triangle ABC$中，三个内角A,B,C的对边分别为a,b,c，$A+C=2B$，$b\sin A=6\sin B$，若符合条件的三角形有两解，则b的取值范围是________.

解析 由$A+C=2B=\pi-B$可得$B=\dfrac{\pi}{3}$，所以$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

由$b\sin A=6\sin B$可得$\dfrac{6}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，所以$a=6$.

解法一（代数法）：要使得符合条件的三角形有两解，则$a\sin 60^\circ<b<a$，即$3\sqrt{3}<b<6$，所以b的取值范围是$(3\sqrt{3},6)$.



解法二（数形结合法）：$b=\dfrac{6\sin B}{\sin A}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sin A}$，因为$\sin A\in(0,1]$，所以$b\geqslant 3\sqrt{3}$，由图可得当$b=3\sqrt{3}$时，只有一解，所以$b>3\sqrt{3}$，要使得符合条件的三角形有两解，还需要满足$b<a=6$.

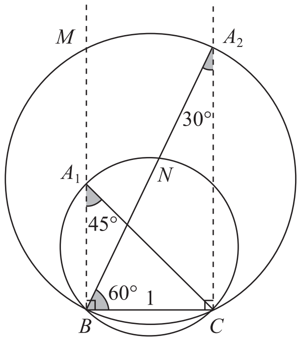
所以b的取值范围是$(3\sqrt{3},6)$.

变式 2 在锐角$\triangle ABC$中，$BC=1$，$B=2A$，则$\dfrac{AC}{\cos A}=$______，AC的取值范围为______.

解析 **解法一**：因为$\triangle ABC$为锐角三角形，所以$\begin{cases}0<A<\dfrac{\pi}{2}\\0<B<\dfrac{\pi}{2}\\0<C<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，即$\begin{cases}0<A<\dfrac{\pi}{2}\\0<2A<\dfrac{\pi}{2}\\\dfrac{\pi}{2}<3A<\pi\end{cases}$，则$\dfrac{\pi}{6}<$

$A<\frac{\pi}{4}$，$\frac{AC}{\cos A}=\frac{2R\sin B}{\cos A}=\frac{\frac{a}{\sin A}\sin 2A}{\cos A}=\frac{a\cdot 2\sin A\cos A}{\sin A\cos A}=2a=2$，所以 $AC=2\cos A\in(\sqrt{2},\sqrt{3})$，故 AC 的取值范围为 $(\sqrt{2},\sqrt{3})$.

解法二(几何法)：如图所示，根据题意可得点 A 在 A_1,N,A_2,M 围成的不规则图形内部.



由正弦定理可得 $\frac{BC}{\sin A}=2R$，$\sin A=\frac{1}{2R}$，$2R=\frac{AC}{\sin B}=\frac{AC}{\sin 2A}=\frac{AC}{2\sin A\cos A}=\frac{2R\cdot AC}{2\cos A}$，所以 $\frac{AC}{\cos A}=2$，$AC=2\cos A$.

在 A_1,N,A_2,M 围成的不规则图形内部任意一点 A_i，都有 $30^\circ<\angle BA_iC<45^\circ$，所以 A 在 A_1 时，AC 有最小值 $\frac{1}{\sin 45^\circ}=\sqrt{2}$；$A$ 在 A_2 时，AC 有最大值 $2\cos 30^\circ=\sqrt{3}$，故 AC 的取值范围为 $(\sqrt{2},\sqrt{3})$.

25.2　边角互化判定形状

研究密钥

三角形形状的判定有两种典型方法：

统一化为边，再判断；统一化为角，再判断.

不管是哪一种方法都是用正弦、余弦定理实现边角互化.

正弦定理

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（$2R$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆直径）.

余弦定理

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$（已知两边 a,b 及夹角 C，求第三边 c）.

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$（已知三边求角）.

例 25.2 已知 $\triangle ABC$ 中，三个内角 A,B,C 所对应边分别为 a,b,c，且 $\cos A+\cos B=\frac{a+b}{c}$，试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

分析 思路一：利用正弦定理 $\frac{a+b}{c}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}$，通过三角恒等变形，寻找角的关系.

思路二：利用余弦定理 $\cos A+\cos B=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，化简、因式分解，寻找边的关系.

解析 解法一：由正弦定理可得 $\cos A+\cos B=\dfrac{\sin A+\sin B}{\sin C}$，所以 $\sin C\cos A+\sin C\cos B=\sin A+\sin B$.

又 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，即 $\cos A\sin C+\cos B\sin C=\sin A+\sin B=\sin B\cos C+\cos B\sin C+\sin A\cos C+\cos A\sin C$，可得 $\sin B\cos C+\sin A\cos C=0$，即 $(\sin A+\sin B)\cos C=0$，又 $A,B,C\in(0,\pi)$，则 $\cos C=0$，$C=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

解法二：由余弦定理可得 $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{a+b}{c}$，去分母、化简得 $(a+b)(c^2-a^2-b^2)=0$，因为 $a+b>0$，所以 $a^2+b^2=c^2$，故 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

变式 1 已知 $\triangle ABC$ 的三条边 a,b,c 和与之对应的三个角 A,B,C 满足等式 $a\cos B+b\cos C+c\cos A=b\cos A+c\cos B+a\cos C$，则此三角形的形状是(　　).

A. 等腰三角形　　　　B. 直角三角形

C. 等腰或直角三角形　　　　D. 等腰直角三角形

分析 利用余弦定理将角化为边整理，即可得三角形的边之间的关系；或利用正弦定理将边化为角整理，得三角形中角的关系，从而可得此三角形的形状.

解析 解法一（角化边）：由余弦定理可得 $a\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+c\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+a\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，整理得 $\dfrac{a^2-b^2}{c}+\dfrac{b^2-c^2}{a}+\dfrac{c^2-a^2}{b}=0$.

所以 $\dfrac{a^2-b^2}{c}+\dfrac{b^2-c^2}{a}+\dfrac{c^2-b^2+b^2-a^2}{b}=0$，$(a^2-b^2)\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{b}\right)+(b^2-c^2)\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)=0$，即 $(a-b)(b-c)\cdot\dfrac{a+b}{bc}+(b-a)(b-c)\cdot\dfrac{b+c}{ab}=0$，$(a-b)(b-c)\left(\dfrac{a+b}{bc}-\dfrac{b+c}{ab}\right)=0$，$(a-b)(b-c)\cdot\dfrac{a^2+ab-bc-c^2}{abc}=0$，则 $(a-b)(b-c)(a-c)\cdot\dfrac{a+c+b}{abc}=0$，所以 $a=b$ 或 $b=c$ 或 $a=c$，则三角形为等腰三角形，故选 A.

解法二（边化角）：依题意可得 $\sin A\cos B+\sin B\cos C+\sin C\cos A=\sin B\cos A+\sin C\cos B+\sin A\cos C$，即 $\sin A\cos B-\cos A\sin B+\sin B\cos C-\cos B\sin C+\sin C\cos A-\cos C\sin A=0$，可得 $\sin(A-B)+\sin(B-C)+\sin(C-A)=0$，$2\sin\dfrac{A-C}{2}\cos\dfrac{A+C-2B}{2}=\sin(A-C)=2\sin\dfrac{A-C}{2}\cos\dfrac{A-C}{2}$，即 $2\sin\dfrac{A-C}{2}\left(\cos\dfrac{A+C-2B}{2}-\cos\dfrac{A-C}{2}\right)=0$，得 $\sin\dfrac{A-C}{2}=0$ 或 $\cos\dfrac{A+C-2B}{2}=\cos\dfrac{A-C}{2}$.

故 $A=C$ 或 $\dfrac{A+C-2B}{2}=\dfrac{A-C}{2}$ 或 $\dfrac{A+C-2B}{2}+\dfrac{A-C}{2}=0$，可得 $A=C$ 或 $B=C$ 或 $A=B$，则

三角形为等腰三角形，故选 A.

25.3　三角形中的最值

研究密钥

有关解三角形的问题是高考重点考查的内容，也是热点问题．其主要分为两种类型：一类是完全可解的三角形，可以做到知三求一；另一类则是不完全可解的三角形，即通过减少已知条件转变为函数和不等式问题，其主要题型以求周长（边）和面积的最值（范围）为主.

解决此类问题有两种方法：代数法：余弦定理＋基本不等式．几何法：当某个角度已知时，可以将顶点看作动点；当某条边已知时，可以将对角的顶点看作动点.

例 25.3 已知 a,b,c 分别为△ABC 的三个内角 A,B,C 的对边，$a=2$，且 $(2+b)(\sin A-\sin B)=(c-b)\sin C$，则△$ABC$ 面积的最大值为________.

分析 使用正弦定理角化边，再使用余弦定理由三边关系推出 $A=\frac{\pi}{3}$.

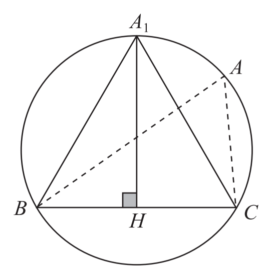
思路一（代数法）：$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$，使用基本不等式可得 bc 的范围.

思路二（数形结合法）：因为同弦对应的圆周角相等，所以把点 A 看作圆弧上的一点，角 A 对应的弦长为 2，以弦为底，当三角形的高取到最大值时面积可以取得最大值，此时点 A 位于弦的垂直平分线上.

解析 由题意可得 $(a+b)(\sin A-\sin B)=(c-b)\sin C$，由正弦定理可得 $(a+b)(a-b)=(c-b)c$，即 $a^2-b^2=c^2-bc$，所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，则 $A=\frac{\pi}{3}$.

解法一（代数法）：因为 $a^2=b^2+c^2-bc\geqslant bc$，所以 $bc\leqslant 4$，故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A\leqslant\sqrt{3}$，即 $S_{\triangle ABC}$ 的最大值为 $\sqrt{3}$.

解法二（数形结合法）：由题意可得 $a=2,A=\frac{\pi}{3}$.



如图所示，BC 对应的圆周角为 $\frac{\pi}{3}$，点 A 在优弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上运动，作 BC 的垂直平分线 A_1H.

以 BC 为△ABC 的底边，当 A 运动到 A_1 时，△ABC 的高 A_1H 有最大值，此时△ABC 为边长为 2 的等边三角形，易得 $A_1H=\sqrt{3}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot A_1H=\sqrt{3}$.

评注

若本题改为求$\triangle ABC$周长的最大值呢？由题意得$A=\frac{\pi}{3}$.

用代数法求周长的最大值：因为$a^2=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc=4$，又因为$bc\leqslant\left(\frac{b+c}{2}\right)^2$，所以$(b+c)^2-3bc\geqslant(b+c)^2-\frac{3(b+c)^2}{4}=\frac{(b+c)^2}{4}$，即$4\geqslant\frac{(b+c)^2}{4}$，$b+c\leqslant4$，当且仅当$b=c$时等号成立，所以$\triangle ABC$的周长$C_{\triangle ABC}=a+b+c\leqslant6$，即$\triangle ABC$周长的最大值为6.

用几何法求周长的最大值：如图1所示，延长BA到点P，使得$AP=AC$，所以$AB+AC=AB+AP=BP$，要使得周长最大，则需满足BP长度最大.

将问题转化为已知一边$a=2$，一对角$\angle P=30^\circ$，求另一边BP的长度的最大值.

由图2可得，当BP为该圆直径时，BP最大，即$|BP|_{max}=\frac{a}{\sin P}=\frac{2}{\sin30^\circ}=4$，所以$C_{\triangle ABC}=BC+BP\leqslant2+4=6$.

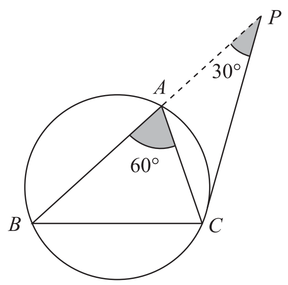


图 1

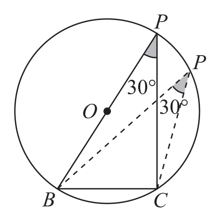


图 2

变式 1　已知$\triangle ABC$的三边长分别为a,b,c，面积为S，且$\frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+b^2-c^2)=S$，$c=1$，求$\sqrt{3}b-a$的最大值.

解析　根据余弦定理$\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot2ab\cos C=\frac{1}{2}ab\sin C$，于是$C=\frac{\pi}{6}$，又$c=1$(定弦定角模型)，根据正弦定理$\sqrt{3}b-a=\sqrt{3}\frac{\sin B}{\sin C}\cdot c-\frac{\sin A}{\sin C}\cdot c=2\sqrt{3}\sin B-2\sin A=2\sqrt{3}\sin B-2\sin\left(\frac{5\pi}{6}-B\right)=\sqrt{3}\sin B-\cos B\leqslant2$.

当$B=\frac{2\pi}{3}$，$A=\frac{\pi}{6}$时，取得等号，因此所求最大值为2.

评注

对目标式$\sqrt{3}b-a$采用柯西不等式进行放缩，此路不通，因为“=”取不到.

变式2 在$\triangle ABC$中，外接圆半径$R=2$，且$4(\sin^2 A-\sin^2 B)=(\sqrt{3}a-b)\sin B$，$S_{\triangle ABC}=\frac{c}{2}(a-b)$，则$\sin\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}=$________.

解析 $4(\sin^2 A-\sin^2 B)=(\sqrt{3}a-b)\sin B$等价于$2R(\sin^2 A-\sin^2 B)=(\sqrt{3}a-b)\sin B$，即$4R^2(\sin^2 A-\sin^2 B)=2R\sin B(\sqrt{3}a-b)$，可得$a^2-b^2=(\sqrt{3}a-b)b$，所以$a^2=\sqrt{3}ab$，得$a=\sqrt{3}b$.

又$S_{\triangle ABC}=\frac{c}{2}(a-b)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}bc=\frac{1}{2}bc\sin A$，所以$\sin A=\sqrt{3}-1$，$\sin B=\frac{\sin A}{\sqrt{3}}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$，则

$$\begin{aligned}\sin\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}&=\sin\frac{A-B}{2}+\sin\frac{\pi-(A+B)}{2}\\&=\sin\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\\&=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\\&=\cos\frac{B}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)-\sin\frac{B}{2}\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)\\&=\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)\left(\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{B}{2}\right).\end{aligned}$$

又$\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2=1+\sin A$，$\left(\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{B}{2}\right)^2=1-\sin B$，$\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2\cdot\left(\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{B}{2}\right)^2=(1+\sin A)(1-\sin B)=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=1$，又已知$a>b$，所以$A>B$，$\sin\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}>0$，因此$\sin\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}=1$.

评注

本题对于题干中"$4(\sin^2 A-\sin^2 B)=(\sqrt{3}a-b)\sin B$"的变形，运用$R=2$来替换为$2R(\sin^2 A-\sin^2 B)=(\sqrt{3}a-b)\sin B$，即$4R^2(\sin^2 A-\sin^2 B)=(\sqrt{3}a-b)2R\sin B$.

将角化边$a^2-b^2=\sqrt{3}ab-b^2$，可得$a=\sqrt{3}b$，与2014新课标全国Ⅰ卷理16题中将2用a来替换，具有异曲同工之妙.

例25.4 (2019新课标全国Ⅲ卷理18)$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$a\sin\frac{A+C}{2}=b\sin A$.

(1)求B的值；

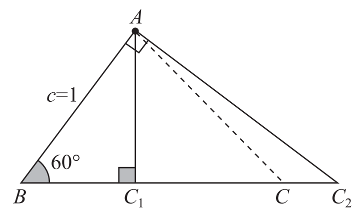
(2)若$\triangle ABC$为锐角三角形，且$c=1$，求$\triangle ABC$面积的取值范围.

分析 (1)使用正弦定理边化角，因为有$\frac{A+C}{2}$，所以用三角形内角和为180°减少角度

的个数，$\frac{B}{2}$和 B 同时出现，使用二倍角公式使角度大小统一，利用余弦函数的有界性减少三角函数名的个数，最后可直接求出 B 的大小.

(2)已知角 B 和一个邻边 c，把点 C 看作角 B 的另一邻边上的动点，根据临界情况(角 A 或角 C 为直角)求出另一邻边的取值范围，由 $S=\frac{1}{2}ac\sin B$ 可得面积的取值范围.

解析 (1)已知 $a\sin\frac{A+C}{2}=b\sin A$，边化角可得 $\sin A\sin\frac{A+C}{2}=\sin B\sin A$，即 $\sin\frac{A+C}{2}=\sin B$，所以 $\sin\frac{\pi-B}{2}=\cos\frac{B}{2}=\sin B=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$，即 $\cos\frac{B}{2}\left(2\sin\frac{B}{2}-1\right)=0$，则 $\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$，又 $\frac{B}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以$\frac{B}{2}=\frac{\pi}{6}$，$B=\frac{\pi}{3}$.



(2)如图所示，由题意可得点 C 位于 C_1 和 C_2 之间的线段上，$S_{\triangle ABC_1}<S_{\triangle ABC}<S_{\triangle ABC_2}$.

当 C 位于 C_1 时，$BC_1=1\times\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$，$S_{\triangle ABC_1}=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}\times\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{8}$；当 C 位于 C_2 时，$BC_2=\frac{1}{\cos 60^\circ}=2$，$S_{\triangle ABC_2}=\frac{1}{2}\times 1\times 2\times\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以$\frac{\sqrt{3}}{8}<S_{\triangle ABC}<\frac{\sqrt{3}}{2}$，即$\triangle ABC$ 的面积的取值范围为$\left(\frac{\sqrt{3}}{8},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

例 25.5 在$\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，且满足 $2a+c=2b\cos C$，若 AC 边上的高为$\frac{1}{2}$，求$\triangle ABC$ 面积的最小值.

分析 使用正弦定理边化角，用三角形内角和为 180°减少角度的个数，根据正弦函数的有界性减少三角函数名的个数，可直接求出 $B=\frac{2\pi}{3}$.

思路一(代数法)：已知 $B=\frac{2\pi}{3}$，使用余弦定理和基本不等式可得三角形三边的不等关系 $b^2\geqslant 3ac$，三角形面积公式 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}AC\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}b$，可得三角形三边的等量关系 $b=\sqrt{3}ac$，代入可得 ac 的范围，即可求出$\triangle ABC$ 面积的范围.

思路二(几何法)：把点 B 看作是与底边的距离为$\frac{1}{2}$的直线上的动点，使用正弦定理将面积问题转化为圆的半径问题，结合图形，使用垂径定理和勾股定理可得半径的取值范围.

解析 已知 $2a+c=2b\cos C$，使用正弦定理边化角可得 $2\sin A+\sin C=2\sin B\cos C$，所以 $2\sin(B+C)+\sin C=2\sin B\cos C$，即 $2\sin B\cos C+2\cos B\sin C+\sin C=2\sin B\cos C$，$2\cos B\sin C+$

$\sin C=0$，$\sin C(2\cos B+1)=0$.

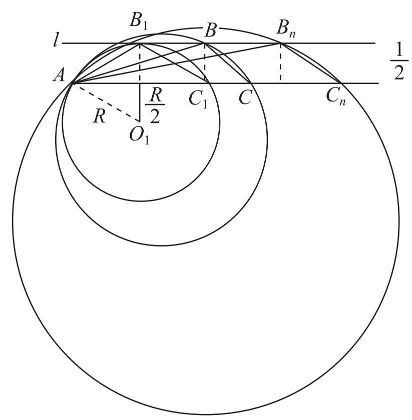
因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C\neq0$，则 $2\cos B+1=0$，$\cos B=-\dfrac{1}{2}$.

又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\dfrac{2\pi}{3}$.

解法一（代数法）：$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2+ac\geqslant3ac$.

因为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}b$，所以 $b=\sqrt{3}ac$，$3a^2c^2\geqslant3ac$，即 $ac\geqslant1$，则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，故$\triangle ABC$面积的最小值为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

解法二（几何法）：因为 $\dfrac{b}{\sin B}=2R$，所以 $b=2R\sin\dfrac{2\pi}{3}=\sqrt{3}R$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}b=\dfrac{\sqrt{3}}{4}R$.

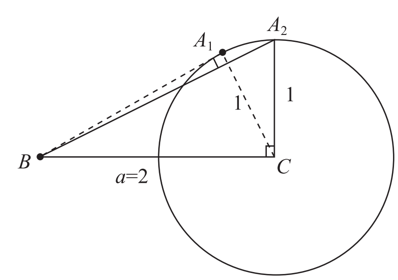


如图所示，设与 AC 平行且相距为$\dfrac{1}{2}$的直线为 l，B 为直线 l 上的点，且满足$\angle ABC=\dfrac{2\pi}{3}$，在这一系列圆中满足 $B=\dfrac{2\pi}{3}$且与 l 相切时的 $S_{\triangle ABC}$ 最小，设此圆为$\odot O_1$，此时$\triangle AO_1B_1$ 为等边三角形，$\dfrac{R}{2}=R-\dfrac{1}{2}$，解得 $R=1$，即 $R_{\min}=1$.

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}R\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，故$\triangle ABC$面积的最小值为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

例 25.6 已知锐角$\triangle ABC$的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，其中 $a=2$，$b=1$，求$\triangle ABC$面积的取值范围.

分析 以 C 为圆心，b 为半径作圆 C，则 A 是圆周上的动点，构成锐角三角形的临界条件是角 A 或角 C 为直角，当角 A 为直角时面积有最小值，当角 C 为直角时面积有最大值.



解析 如图所示，由题意可得点 A 位于 A_1 和 A_2之间的劣弧上，$S_{\triangle A_1BC}<S_{\triangle ABC}<S_{\triangle A_2BC}$.

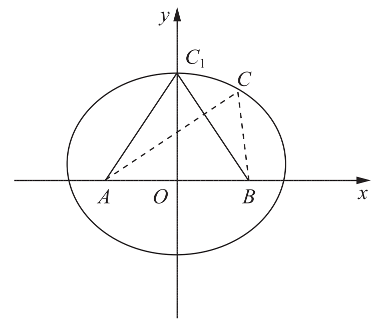
当 A 位于 A_1 时，$\cos\angle A_1CB=\dfrac{1}{2}$，$\angle A_1CB=\dfrac{\pi}{3}$，$S_{\triangle A_1BC}=\dfrac{1}{2}\times1\times2\times\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；当 A 位于 A_2 时，$S_{\triangle A_2BC}=\dfrac{1}{2}\times1\times2=1$.

所以$\triangle ABC$面积的取值范围是$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right)$.

例 25.7 已知 a,b,c 分别为 $\triangle ABC$ 的三个内角 A,B,C 的对边，且 $c=2,a+b=4$，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

分析 思路一：运用数形结合思想求解，由 $a+b=4$，即点 C 到点 A 和点 B 的距离之和为定值，把点 A 和点 B 看作定点，则点 C 的轨迹是以 A,B 为焦点的椭圆，结合图像可得，当点 C 位于椭圆上、下顶点时，$\triangle ABC$ 的面积有最大值.

思路二：可运用函数思想求解最值.



解析 **解法一（数形结合思想）**：根据题意可得 $\triangle ABC$ 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的焦点三角形，由图像可得当点 C 位于椭圆的上顶点 C_1 时，$\triangle ABC$ 的面积有最大值，$(S_{\triangle ABC})_{\max}=\frac{1}{2}AB\cdot OC_1=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

解法二（函数思想）：由题意可得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\sqrt{1-\cos^2C}$，且 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，即 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2}$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)}$$

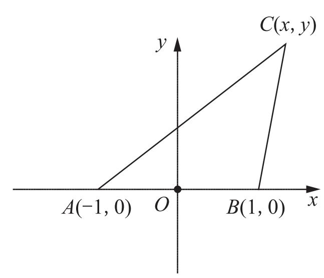
$$=\frac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]}.$$

又 $a+b=4$，且 $c=2$，当 $a=b$ 时，$S_{\triangle ABC}$ 取最大值为 $\frac{1}{4}\sqrt{(4^2-2^2)\times 2^2}=\sqrt{3}$.

评注 解法一体现数形结合思想，解法二体现函数思想，解法具有一般性，若已知 c 和 a,b 之间的数量关系，可尝试使用函数方法.

变式 1 已知 a,b,c 分别为 $\triangle ABC$ 的三个内角 A,B,C 的对边，且 $c=2,b=\sqrt{2}a$，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

分析 其一运用数形结合思想求解：$b=\sqrt{2}a$，即点 C 到点 B 和点 A 的距离之比为定值，把点 A 和点 B 看作定点，则点 C 的轨迹是阿波罗尼斯圆，圆心在直线 AB 上，把线段 AB 看作 $\triangle ABC$ 的底边，则当高为半径时面积有最大值. 其二也可运用函数思想求解最值.



解析 **解法一（数形结合思想）**：根据题意，以 AB 的中点为原点，建立如图所示的平面直角坐标系 xOy.

设点 C 的坐标为 (x,y)，$b=\sqrt{2}a$，即 $AC=\sqrt{2}BC$，$(x+1)^2+y^2=$

$2\times[(x-1)^2+y^2]$，$x^2+2x+1+y^2=2x^2-4x+2+2y^2$，即$(x-3)^2+y^2=8$，则点 C 的轨迹为以$(3,0)$为圆心，$2\sqrt{2}$为半径的圆.

所以当$\triangle ABC$以 AB 为底边时，高最大为 $2\sqrt{2}$，故$(S_{\triangle ABC})_{\max}=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

解法二（函数思想）：$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\sqrt{1-\cos^2C}$，且 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，即

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]}.$$

又 $b=\sqrt{2}a$，$c=2$，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{4}\sqrt{[(\sqrt{2}+1)^2a^2-4][4-(\sqrt{2}-1)^2a^2]}$

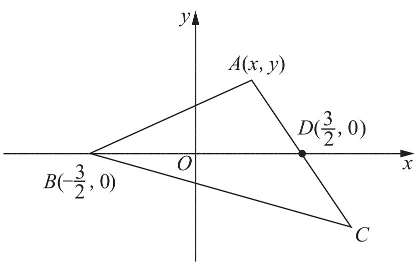
$$=\frac{1}{4}\sqrt{4(\sqrt{2}+1)^2a^2-a^4-16+4(\sqrt{2}-1)^2a^2}=\frac{1}{4}\sqrt{-a^4+24a^2-16}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{-(a^2-12)^2+128}\leqslant\frac{1}{4}\times8\sqrt{2}=2\sqrt{2}.$$

当且仅当 $a=2\sqrt{3}$ 时，取等号. 故$\triangle ABC$面积的最大值为 $2\sqrt{2}$.

变式 2 在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D 为 AC 的中点，且 $BD=3$，求$\triangle ABC$面积的最大值.

解析 根据题意，以 BD 的中点为原点，建立如图所示的平面直角坐标系 xOy.



设点 A 的坐标为(x,y)，根据题意可得 $AB=AC=2AD$，所以$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=4\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2\right]$，得$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=4$，则点 A 的轨迹为以$\left(\frac{5}{2},0\right)$为圆心，以 2 为半径的圆，即当$\triangle ABD$以 AD 为底边时，高最大为 2，所以$(S_{\triangle ABD})_{\max}=\frac{1}{2}\times3\times2=3$，$(S_{\triangle ABC})_{\max}=2(S_{\triangle ABD})_{\max}=6$，故$\triangle ABC$面积的最大值为 6.

例 25.8 （2022 新课标全国甲卷理 16）已知$\triangle ABC$中，点 D 在边 BC 上，$\angle ADB=120^\circ$，$AD=2$，$CD=2BD$. 当$\frac{AC}{AB}$取得最小值时，$BD=$________.

分析 设 $CD=2BD=2m>0$，利用余弦定理表示出$\frac{AC^2}{AB^2}$后，结合基本不等式即可得解.

解析 设 $CD=2BD=2m>0$，则在$\triangle ABD$中，$AB^2=BD^2+AD^2-2BD\cdot AD\cos\angle ADB=m^2+4+2m$，在$\triangle ACD$中，$AC^2=CD^2+AD^2-2CD\cdot AD\cos\angle ADC=4m^2+$

$4-4m$，所以 $\frac{AC^2}{AB^2}=\frac{4m^2+4-4m}{m^2+4+2m}=\frac{4(m^2+4+2m)-12(1+m)}{m^2+4+2m}=4\ \frac{12}{(m+1)+\frac{3}{m+1}}\geqslant 4-$

$\frac{12}{2\sqrt{(m+1)\frac{3}{m+1}}}=4-2\sqrt{3}$，当且仅当 $m+1=\frac{3}{m+1}$，即 $m=\sqrt{3}-1$ 时，等号成立.

所以当 $\frac{AC}{AB}$ 取最小值时，$m=\sqrt{3}-1$，即 $BD=\sqrt{3}-1$.

变式 1　(2022 新高考全国Ⅰ卷 18)记△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$.

(1)若 $C=\frac{2\pi}{3}$，求 B；

(2)求 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值.

分析　(1)根据二倍角公式以及两角差的余弦公式可将 $\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$ 化成 $\cos(A+B)=\sin B$，再结合 $0<B<\frac{\pi}{2}$，即可求出.

(2)由(1)知，$C=\frac{\pi}{2}+B$，$A=\frac{\pi}{2}-2B$，再利用正弦定理以及二倍角公式将 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ 化成 $4\cos^2B+\frac{2}{\cos^2B}-5$，然后利用基本不等式即可解出.

解析　(1)因为 $\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}=\frac{2\sin B\cos B}{2\cos^2B}=\frac{\sin B}{\cos B}$，即 $\sin B=\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos(A+B)=-\cos C=\frac{1}{2}$，而 $0<B<\frac{\pi}{2}$，所以 $B=\frac{\pi}{6}$.

(2)由(1)知，$\sin B=-\cos C>0$，所以 $\frac{\pi}{2}<C<\pi$，$0<B<\frac{\pi}{2}$，而 $\sin B=-\cos C=\sin\left(C-\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $C=\frac{\pi}{2}+B$，即有 $A=\frac{\pi}{2}-2B$.

则 $\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{\sin^2A+\sin^2B}{\sin^2C}=\frac{\cos^2 2B+1-\cos^2B}{\cos^2B}=\frac{(2\cos^2B-1)^2+1-\cos^2B}{\cos^2B}=4\cos^2B+\frac{2}{\cos^2B}-5\geqslant 2\sqrt{8}-5=4\sqrt{2}-5$.

当且仅当 $\cos^2B=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号，所以 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值为 $4\sqrt{2}-5$.

变式 2　(2022 北大强基 19)若△ABC 三边长为等差数列，则 $\cos A+\cos B+\cos C$ 的取值范围是________.

解析 由 a,b,c 成等差数列，则 $2b=a+c$，$2\sin B=\sin A+\sin C=\sin\left(\frac{A+C}{2}+\frac{A-C}{2}\right)+\sin\left(\frac{A+C}{2}-\frac{A-C}{2}\right)=2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}$，即 $\sin B=\sin\frac{\pi-B}{2}\cos\frac{A-C}{2}$，可得 $2\sin\frac{B}{2}=\cos\frac{A-C}{2}$.

且 $\cos A+\cos B+\cos C=2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}+\cos B=4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A+C}{2}+\cos B=4\sin^2\frac{B}{2}+\cos B=2-\cos B$，又 $B\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$，因此 $1<2-\cos B\leqslant\frac{3}{2}$.

综上所述，$\cos A+\cos B+\cos C$ 的取值范围是 $\left(1,\frac{3}{2}\right]$.

25.4 四边形问题

研究密钥

托勒密定理：圆内接四边形中，两条对角线的乘积等于两组对边乘积之和，即若四边形 $ABCD$ 内接于圆，如图 1 所示，则有 $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$.

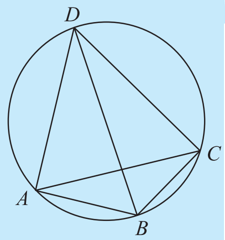


图 1

等价叙述：四边形的两组对边之积的和等于两对角线之积的充要条件是四顶点共圆.

证明：如图 2 所示，过点 C 作 $\angle DCE=\angle ACB$，即 $\angle 3=\angle 4$，易证 $\triangle ACB\backsim\triangle DCE$，则 $\frac{AB}{AC}=\frac{DE}{DC}$，即 $AB\cdot CD=AC\cdot DE$.

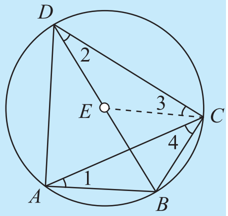


图 2

同理 $\triangle ADC\backsim\triangle BEC$，则 $\frac{AD}{AC}=\frac{BE}{BC}$，即 $AD\cdot BC=AC\cdot BE$，所以 $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot DE+AC\cdot BE=AC\cdot BD$.

托勒密定理推广（广义托勒密公式）：在四边形 $ABCD$ 中，有 $AB\cdot CD+AD\cdot BC\geqslant AC\cdot BD$.

当且仅当四边形 $ABCD$ 内接于圆时，等式成立.

证明：如图 3 所示，在边 AB 或其延长线上取一点 M，在边 AD 或其延长线上取一点 N，使得 $AB\cdot AM=AC^2=AD\cdot AN$.

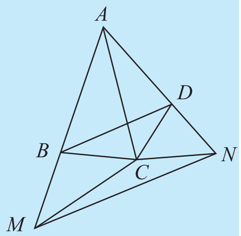


图 3

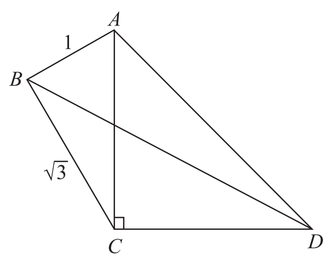
连接 MC,NC,MN，则$\triangle ABC\backsim\triangle ACM$. 于是 $MC=BC\cdot\dfrac{AC}{AB}$. 同理，$NC=CD\cdot\dfrac{AC}{AD}$.

又$\triangle ABD\backsim\triangle ANM$，则 $MN=BD\cdot\dfrac{AM}{AD}=\dfrac{BD}{AD}\cdot\dfrac{AC^2}{AB}$.

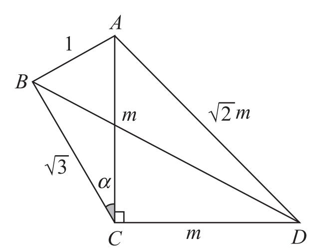
由于 $MN\leqslant CM+CN$，结合上面几个式子得$\dfrac{BD}{AD}\cdot\dfrac{AC^2}{AB}\leqslant BC\cdot\dfrac{AC}{AB}+CD\cdot\dfrac{AC}{AD}$，去分母并化简得 $AB\cdot CD+AD\cdot BC\geqslant AC\cdot BD$，当且仅当 M,C,N 三点共线时，上式等号成立.

此时，$\angle ABC+\angle ADC=\angle ACM+\angle ACN=180^\circ$，即 A,B,C,D 四点共圆.

例 25.9 如图所示，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$BC=\sqrt{3}$，$\triangle ACD$ 是等腰直角三角形，且$\angle ACD=90^\circ$，则 BD 长的最大值为________.



分析 思路一：如图所示，BD 在$\triangle BCD$ 中，使用余弦定理可得 $BD^2=m^2+3+2\sqrt{3}m\sin\alpha$，在$\triangle ABC$ 中使用余弦定理可得 $m^2=4-2\sqrt{3}\cos\angle ABC$，使用正弦定理可得 $m\sin\alpha=\sin\angle ABC$，最后化为同角同函再求最值.



思路二：直接应用托勒密定理 $AB\cdot CD+AD\cdot BC\geqslant AC\cdot BD$.

解析 **解法一**：在$\triangle BCD$ 中，设 $AC=CD=m$，$\angle ACB=\alpha$，$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=3+m^2-2\sqrt{3}m(-\sin\alpha)=m^2+3+2\sqrt{3}m\sin\alpha$.

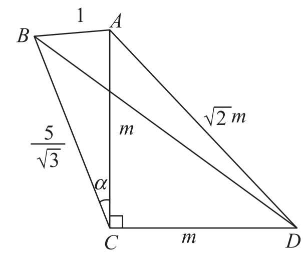
在$\triangle ABC$ 中，$\dfrac{1}{\sin\alpha}=\dfrac{m}{\sin\angle ABC}$，即 $\sin\angle ABC=m\sin\alpha$，又因为 $m^2=1+3-2\times1\times\sqrt{3}\cos\angle ABC=4-2\sqrt{3}\cos\angle ABC$，所以 $BD^2=7-2\sqrt{3}\cos\angle ABC+2\sqrt{3}\sin\angle ABC=7+2\sqrt{6}\sin\left(\angle ABC-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

当$\angle ABC=\dfrac{3\pi}{4}$时，$(BD^2)_{\max}=7+2\sqrt{6}=(\sqrt{6}+1)^2$，故 $BD_{\max}=\sqrt{6}+1$.

解法二：根据托勒密定理可得 $AB\cdot CD+AD\cdot BC\geqslant AC\cdot BD$，即 $m+\sqrt{6}m\geqslant m\cdot BD$，所以 $BD\leqslant1+\sqrt{6}$，故 BD 长的最大值为 $1+\sqrt{6}$.

变式 1　已知平面四边形 $ABCD$ 是由 $\triangle ABC$ 与等腰直角 $\triangle ACD$ 拼接而成，其中 $\angle ACD=90°$，$AC=CD$，$AB=\frac{\sqrt{3}}{5}BC=1$，则当点 B 到点 D 的距离最大时，$\angle ABC$ 的大小为________.

解析 ▶▶ **解法一**：如图所示，设 $\angle ACB=\alpha$，由题意可得 $AB=1$，$BC=\frac{5}{\sqrt{3}}$，设 $AC=CD=m$，在 $\triangle BCD$ 中，$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{25}{3}+m^2+\frac{10\sqrt{3}}{3}m\sin\alpha$.



在 $\triangle ABC$ 中，$\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{m}{\sin\angle ABC}$，即 $m\sin\alpha=\sin\angle ABC$，且 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$，即 $m^2=1+\frac{25}{3}-2\times1\times\frac{5}{\sqrt{3}}\times\cos\angle ABC$，所以 $BD^2=\frac{25}{3}+m^2+\frac{10\sqrt{3}}{3}m\sin\alpha=\frac{25}{3}+\left(1+\frac{25}{3}-2\times1\times\frac{5}{\sqrt{3}}\times\cos\angle ABC\right)+\frac{10\sqrt{3}}{3}\sin\angle ABC=\frac{53}{3}+\frac{10\sqrt{3}}{3}(\sin\angle ABC-\cos\angle ABC)=\frac{53}{3}+\frac{10\sqrt{6}}{3}\sin\left(\angle ABC-\frac{\pi}{4}\right)$.

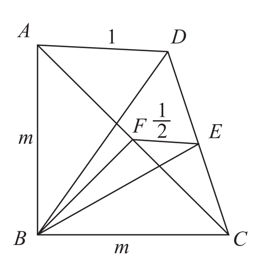
当 $\angle ABC=\frac{3\pi}{4}$ 时，BD 有最大值，此时 $(BD^2)_{\max}=\frac{53+10\sqrt{6}}{3}$，所以 $\angle ABC$ 的大小为 $\frac{3\pi}{4}$.

解法二：根据托勒密定理可得 $AB\cdot CD+AD\cdot BC\geqslant AC\cdot BD$，即 $m+\frac{5}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2}m\geqslant m\cdot BD$，$1+\frac{5\sqrt{6}}{3}\geqslant BD$.

当 A,B,C,D 四点共圆时，取得等号，此时 $\angle ABC+\angle ADC=\pi$，又因为 $\angle ADC=\frac{\pi}{4}$，所以 $\angle ABC$ 的大小为 $\frac{3\pi}{4}$.

变式 2　已知 $\triangle ABC$ 是以 AC 为斜边的等腰直角三角形，D 为 $\triangle ABC$ 外一点，且 $CD=2AD=2$，则 $\triangle BCD$ 的面积最大值为________.

解析 ▶▶ 如图所示，记 CD，AC 的中点分别为 E，F，设 $AB=BC=m$.

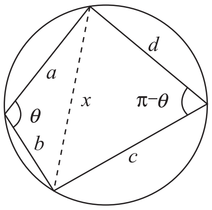


根据题意可得 $BF=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{2}}{2}m$，$CF=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{2}}{2}m$，$CE=\frac{1}{2}CD=1$.

在四边形 $BCEF$ 中，根据托勒密定理可得 $FB\cdot EC+FE\cdot BC\geqslant BE\cdot CF$，即 $\frac{\sqrt{2}}{2}m+\frac{1}{2}m\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}m\cdot BE$，$BE\leqslant1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，当 B,C,E,F 四点共圆时，取得

等号，所以 $S_{\triangle BCD}\leqslant\frac{1}{2}CD\cdot(BE)_{\max}=\frac{1}{2}\times2\times\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

例 25.10 圆内接四边形的四条边长为 a,b,c,d，令 $P=\frac{a+b+c+d}{2}$，证明：四边形的面积 $S=\sqrt{(P-a)(P-b)(P-c)(P-d)}$.



分析 如图所示，做辅助线将四边形分割为两个三角形，则四边形的面积等于两个三角形面积之和，在两个三角形中分别使用余弦定理，可求得 $\cos\theta$，将 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$ 代入面积公式即可证明.

解析 如图所示，由余弦定理得 $a^2+b^2-2ab\cos\theta=x^2=c^2+d^2+2cd\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$，所以

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta+\frac{1}{2}cd\sin(\pi-\theta)=\frac{ab+cd}{2}\sin\theta$$

$$=\frac{ab+cd}{2}\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{ab+cd}{2}\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2ab+2cd}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(2ab+2cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2-(c-d)^2][(c+d)^2-(a-b)^2]}$$

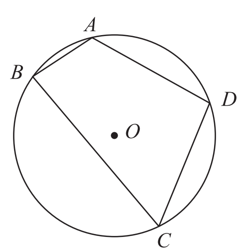
$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)(c+d-a+b)}$$

$$=\sqrt{(P-d)(P-c)(P-b)(P-a)}.$$

评注

通过圆内接四边形面积公式的证明，思考如何推导三角形面积的海伦公式：$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，其中 $p=\frac{a+b+c}{2}$.

变式 1 如图所示，四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，且 $AB=2,BC=6,CD=DA=4$.

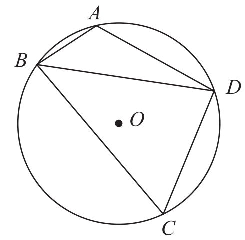


(1)求 A；

(2)求圆 O 的面积 S_1 及四边形 $ABCD$ 的面积 S_2.

解析 (1)因为四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，所以 $A+C=\pi$，即

$\cos A=-\cos C$，如图所示，连接 BD.



在$\triangle ABD$ 中，$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos A=4+16-2\times 2\times 4\cos A$.

在$\triangle BCD$ 中，$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos C=36+16+2\times 6\times 4\cos A$，所以 $20-16\cos A=52+48\cos A$，解得 $\cos A=-\dfrac{1}{2}$.

又 $A\in(0,\pi)$，则 $A=\dfrac{2\pi}{3}$.

(2)由(1)可得 $A=\dfrac{2\pi}{3}$，$C=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $S_2=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle A+\dfrac{1}{2}BC\cdot CD\sin C=\dfrac{1}{2}\times 2\times 4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\times 6\times 4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}+6\sqrt{3}=8\sqrt{3}$.

在$\triangle ABD$ 中，根据正弦定理可得$\dfrac{BD}{\sin A}=2R$，而 $BD=\sqrt{20-16\cos A}=2\sqrt{7}$，所以 $2R=\dfrac{2\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{4\sqrt{21}}{3}$，则 $R=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$，$S_1=\pi R^2=\dfrac{4\times 21}{9}\pi=\dfrac{28}{3}\pi$.

评注

借助圆内接四边形面积公式，对于快速解题大有裨益.

训练 25

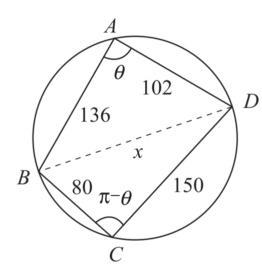
1. $\triangle ABC$ 的三个内角 A,B,C 所对的边长为 a,b,c，满足 $\sin^2A-\sin^2B=-\sin B\sin C+\sin^2C$，$a=2$，则 $S_{\triangle ABC}$ 的最大值为(　　).

A. $\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{5}$

2. 如图所示，圆内接四边形 $ABCD$ 中，$AB=136$，$BC=80$，$CD=150$，$AD=102$，则它的外接圆直径为(　　).

A. 170　　B. 180

C. $8\sqrt{605}$　　D. 以上答案都不对



3. 如果满足$\angle ABC=60^\circ$，$AB=8$，$AC=k$ 的$\triangle ABC$ 只有两个，那么 k 的取值范围是________.

4. 在四边形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$BC=2$，$\triangle ACD$ 为正三角形，则$\triangle BCD$ 面积最大值为________.

5. 在$\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若角 A,B,C 的大小成等比数列，且 $b^2-a^2=ac$，则角 B 的弧度为________.

6. 在$\triangle ABC$中，已知三个角A,B,C成等差数列，假设它们所对的边分别为a,b,c，并且$c-a$等于AC边上的高h，则$\sin\dfrac{C-A}{2}=$________.

7. 在$\triangle ABC$中，已知$A=\alpha$，CD，BE分别是AB，AC上的高，则$\dfrac{DE}{BC}=$________.

8. 在$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$a=b\cos C+c\sin B$.

(1)求B的大小；

(2)若$b=2$，求$\triangle ABC$面积的最大值.

9. 在$\triangle ABC$中，$\sin^2A-\sin^2B-\sin^2C=\sin B\sin C$.

(1)求A的大小；

(2)若$BC=3$，求$\triangle ABC$周长的最大值.

10. 已知在$\triangle ABC$中，$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=4\cos C$，且$\cos(A-B)=\dfrac{1}{6}$，求$\cos C$的值.

26

平面向量等值线模型与常见恒等式

向量具有“几何形式”与“代数形式”的双重身份，既有明确的几何意义，又有像代数那样的运算，是沟通代数与几何的一个桥梁．通过向量法使代数问题几何化、几何问题代数化，将代数问题与几何问题根据各自的优势相互转化，从而体现向量法在解决代数问题和几何问题的一些作用和优点，因此这类题的关键就在于转化思想的运用．

平面向量可以分解与合成，因为根据平面向量基本定理可知向量可以沿任一指定的两个方向分解，也可由任意两向量合成．有时在平面向量基本定理的表达式$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$中，会需要研究两系数$\lambda$与$\mu$的和、差、积、商、线性表达式，此时可以用等值线法．解决这类问题时，首先确定等值线为1的线；然后平移(旋转或伸缩)该线，结合动点的可行域，分析何处取得最大值和最小值；最后从长度比或者点的位置两个角度，计算最大值和最小值．解决平面向量基本定理中两系数λ与μ的和、差、积、商的问题，数形结合起到了很重要的作用，要注意运用．

极化恒等式：已知向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$是平面上的两个向量，则有$\boldsymbol{ab}=\frac{1}{4}[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2]=\left(\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}\right)^2-\left(\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2}\right)^2$，表明向量的数量积运算可由向量线性运算的模导出(可认为是向量数量积的另外一种定义)，它是沟通向量数量积运算和线性运算的重要公式．

极化恒等式的优点就是将向量数量积关系转化为两个平面向量的长度关系，使不可度量的向量数量积关系转化为可度量、可计算的数量关系，借助极化恒等式解决向量数量积问题可以起到化繁为简的作用．极化恒等式的精妙之处在于建立起向量与几何长度也即数量之间的桥梁，实现了向量与几何、代数的巧妙结合．

等值线模型

设$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$是平面的一组基底,该平面内任一向量$\overrightarrow{OP}$,总存在唯一的一对实数 λ,μ 使$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$成立,这就是平面向量基本定理.

平面向量基本定理是平面向量这一讲最基本的内容之一,它是在学生掌握了向量的基本概念、向量的线性运算的基础上学习的,是向量坐标表示的逻辑前提,是用向量法求解几何问题的重要理论基础,从近几年的高考、竞赛试题中明显感觉到对这个基本定理的考查力度,尤其对定理中位于基底前的两个系数的深入考查.本讲将通过两个系数的和、差、积、商的组合,结合近几年的高考、竞赛试题探究由这个基本定理引出的几条“等值线”,供各位考生备考之用.

26.1　等和线

研究密钥

如图 1 所示,设$\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\}$为基底,$P_0$ 为 AB 的中点,则$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OP_0}$,$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$.

$\forall P\in$平面 OAB,$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$.

当 $x+y=k$(定值),$\overrightarrow{OP}=(k-y)\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OA}+y(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=k\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{AB}$,所以$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA_1}=y\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{OA_1}=k\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{A_1P}=y\overrightarrow{AB}$,故$\overrightarrow{A_1P}/\!/\overrightarrow{AB}$.

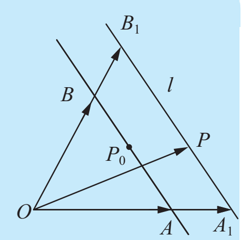


图 1

特别地,$x+y=1$, A,P,B 三点共线.

如图 2 所示,平面内一组基底$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$及任一向量$\overrightarrow{OP}$,$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$($\lambda$,$\mu\in\mathbf{R}$),若点 P 在直线 AB 上或在平行于 AB 的直线上,则 $\lambda+\mu=k$(定值),反之也成立,我们把直线 AB 以及与直线 AB 平行的直线称为等和线.

等和线性质

(1)当等和线恰为直线 AB 时,$k=1$.

(2)当等和线在 O 点和直线 AB 之间时,$k\in(0,1)$.

(3)当直线 AB 在 O 点和等和线之间时,$k\in(1,+\infty)$.

(4)当等和线过 O 点时,$k=0$.

(5)若两等和线关于 O 点对称,则定值 k 互为相反数.

(6)定值 k 的变化与等和线到 O 点的距离成正比.

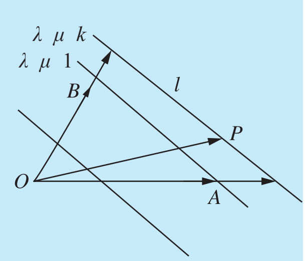


图 2

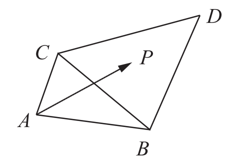
等和线解题步骤：

(1)确定等和线为 1 的线.

(2)平移该线，结合动点的可行域，分析何处取得最大值和最小值.

(3)从长度比的位置角度，计算最大值和最小值.

例 26.1 如图所示，$\triangle BCD$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比为 $2:1$，点 P 是区域 $ABCD$ 内任意一点(含边界)，且 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，则 $\lambda+\mu$ 的取值范围是(　　).

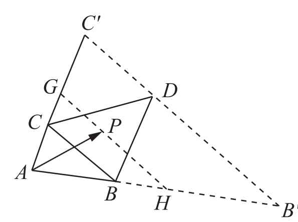


A. $[0,1]$　　B. $[0,2]$

C. $[0,3]$　　D. $[0,4]$

分析 向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AC}$ 起点相同，过点 P 作 BC 的平行线构成一系列等和线，$\lambda+\mu$ 值的大小与起点 A 到等和线的距离成正比，过点 D 作 $B'C'\,/\!/\,BC$，求出此时 $\lambda+\mu$ 的值，即最大值；当点 P 位于 A 时，$\lambda+\mu=0$，即最小值. 由此得到 $\lambda+\mu$ 的取值范围.

解析 如图所示，过点 P 作 $GH\,/\!/\,BC$，交 AC,AB 的延长线于 G,H，则 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AG}+y\overrightarrow{AH}$，且 $x+y=1$，当点 P 位于 D 点时，G,H 分别位于 C',B'.



因为 $\triangle BCD$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比为 $2:1$，所以 $AC'=3AC,AB'=3AB$.

则 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AG}+y\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AC'}+y\overrightarrow{AB'}=x\cdot 3\cdot\overrightarrow{AC}+y\cdot 3\cdot\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，所以 $\lambda=3y,\mu=3x\Rightarrow\lambda+\mu=3x+3y=3$.

当点 P 位于 A 点时，显然有 $\lambda+\mu=0$，所以 $\lambda+\mu$ 的取值范围是 $[0,3]$，故选 C.

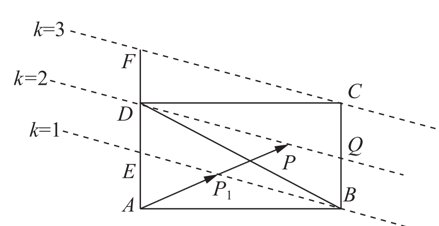
变式 1 设长方形 $ABCD$ 边长分别是 $AD=1,AB=2$，点 P 在 $\triangle BCD$ 内部和边界上运动，设 $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AD}$，则 $\alpha+2\beta$ 的取值范围是(　　).

A. $[1,2]$　　B. $[1,3]$

C. $[2,3]$　　D. $[0,2]$

分析 $\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$ 三个向量的起点相同. 由基底 $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\}$ 可知，$\alpha+2\beta$ 与等和线相关.

解析 如图所示，在长方形 $ABCD$ 中，取线段 AD 的中点为 E，连接 BE，取 BC 中点 Q，连接 DQ，延长 AD 到 F，使得 $DF=CQ$，连接 CF.

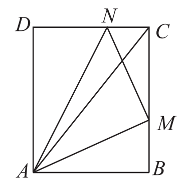


设 AP 与 BE 交点为 P_1，$\overrightarrow{AP_1}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AE}$，则 $x+y=1$.

令$\dfrac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AP_1}|}=k$，则$\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+2\beta\overrightarrow{AE}=kx\overrightarrow{AB}+ky\overrightarrow{AE}$，所以$\alpha+2\beta=kx+ky=k(x+y)=k$.

考虑等和线结论可知，当点 P 在$\triangle BCD$ 内部运动时，$k\in(1,3)$；当 P 与 B 重合时，$k=1$，当 P 与 C 重合时，$k=3$.

则 $k\in[1,3]$，故选 B.



变式 2　如图所示，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$AD=4$，M，N 分别为线段 BC，CD 上的点，且满足$\dfrac{1}{CM^2}+\dfrac{1}{CN^2}=1$，若$\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AM}+y\overrightarrow{AN}$，求 $x+y$ 的最小值.

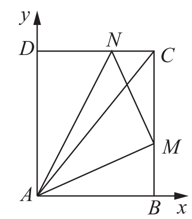


图 1

解析 ▶▶ **解法一**：如图 1 所示，以 A 为坐标原点，AB 为 x 轴、AD 为 y 轴建立直角坐标系，则 $C(3,4)$，设 $M(3,b)$，$N(a,4)$，由$\dfrac{1}{CM^2}+\dfrac{1}{CN^2}=1$ 得$\dfrac{1}{(4-b)^2}+\dfrac{1}{(3-a)^2}=1$　①.

由$\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AM}+y\overrightarrow{AN}$得$\begin{cases}3x+ay=3\\bx+4y=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3-3x}{y}\\b=\dfrac{4-4y}{x}\end{cases}$，把 a，b 代入式①得$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=(x+y-1)^2$.

令 $t=x+y(t>1)$，则有 $9x^2+16(t-x)^2=(t-1)^2\times16\times9$，整理得 $25x^2-32tx+16t^2-144(t-1)^2=0$，因为 $\Delta\geqslant0\Rightarrow(32t)^2-4\times25\times[16t^2-144(t-1)^2]\geqslant0$，整理得 $24t^2-50t+25\geqslant0$，解得 $t\geqslant\dfrac{5}{4}$或 $t\leqslant\dfrac{5}{6}$（舍去），即 $x+y$ 的最小值为$\dfrac{5}{4}$，当且仅当 $x=\dfrac{4}{5}$，$y=\dfrac{9}{20}$时取到等号.

解法二：过点 C 作 $CQ\perp MN$，垂足为 Q，如图 2 所示.

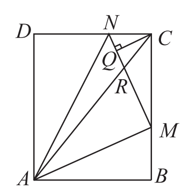


图 2

因为$\dfrac{1}{CM^2}+\dfrac{1}{CN^2}=1$ 所表示的几何意义为在 $\mathrm{Rt}\triangle CMN$ 中，点 C 到斜边 MN 的距离为 1，即$|\overrightarrow{CQ}|=1$.

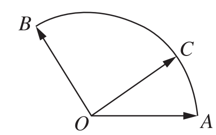
由条件$\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AM}+y\overrightarrow{AN}$可得$\dfrac{1}{x+y}\overrightarrow{AC}=\dfrac{x}{x+y}\overrightarrow{AM}+\dfrac{y}{x+y}\overrightarrow{AN}$，令$\overrightarrow{AR}=\dfrac{1}{x+y}\overrightarrow{AC}$，有$\overrightarrow{AR}=\dfrac{1}{x+y}\overrightarrow{AC}=\dfrac{x}{x+y}\overrightarrow{AM}+\dfrac{y}{x+y}\overrightarrow{AN}$，所以 M，R，N 三点共线，得 AC 与 MN 的交点为 R，且$|\overrightarrow{AC}|=5$.

又$|\overrightarrow{AR}|=\dfrac{1}{x+y}|\overrightarrow{AC}|=\dfrac{5}{x+y}$，所以要求 $x+y$ 的最小值，等价于求$|\overrightarrow{AR}|$的最大值，即求$|\overrightarrow{RC}|$的最小值，易得$|\overrightarrow{RC}|_{\min}=|\overrightarrow{QC}|=1$，即当点 Q，R 重合时，$(x+y)_{\min}=\dfrac{5}{4}$.

评注

在解法二中洞察$\frac{1}{CM^2}+\frac{1}{CN^2}=1$所代表的几何意义是解决本题的关键.

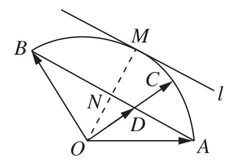
例 26.2 给定两个长度为 1 的平面向量$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$,它们的夹角为 120°,如图所示,点 C 在以 O 为圆心的$\overset{\frown}{AB}$上运动,若$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$,其中$x,y\in\mathbf{R}$,则 $x+y$ 的最大值是________.



分析 首先确定等和线为 1 的直线,向量$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$为基底,连接 AB,AB 即为等和线为 1 的直线. 平移 AB,使其与$\overset{\frown}{AB}$相切于一点. 此时等和线的定值 $x+y$ 最大.

根据定值的变化与等和线到 O 点的距离成正比求出此定值.

解析 如图所示,连接 AB 交 OC 于 D 点,令$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OD}$,则$\overrightarrow{OD}=\frac{x}{\lambda}\overrightarrow{OA}+\frac{y}{\lambda}\overrightarrow{OB}$,因为 A,B,D 三点共线,所以$\frac{x}{\lambda}+\frac{y}{\lambda}=1$,即 $x+y=\lambda$. 若点 C 落在直线 AB 上,则 $x+y=1$;若 C 落在圆弧的切线 l 上,此时$\frac{OM}{ON}=2$,则 $x+y=2$. 所以 $\lambda\in[1,2]$,即$(x+y)_{\max}=2$.



变式 1 (2017 新课标全国Ⅲ卷理 12)在矩形 $ABCD$ 中,$AB=1$,$AD=2$,动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上. 若$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$,则 $\lambda+\mu$ 的最大值为( ).

A. 3　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. 2

分析 思路一:等和线角度,作与 BD 平行且与圆 C 相切的直线,则圆上动点 P 在 BD 与所作切线之间的一系列等和线上. 与圆相切的等和线对应的定值即为 $\lambda+\mu$ 的最大值.

思路二:目标函数角度,求出点 P 的轨迹方程,并用参数方程的形式表达,将 $\lambda+\mu$ 表示为关于参数 θ 的三角函数形式,将问题转化为求含三角函数形式的函数的最值问题,利用三角函数有界性求解.

解析 **解法一(数形结合)**:如图 1 所示,考虑向量线性分解的等和线,可得 $\lambda+\mu$ 的最大值为 3,故选 A.

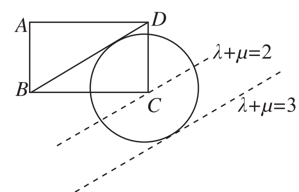


图 1

解法二(目标函数法):根据题意作出图像,如图 2 所示. 设 BD 与 $\odot C$ 切于点 E,连接 CE.

以点 A 为坐标原点,AD 为 x 轴正半轴,AB 为 y 轴正半轴建立直角坐标系,则点 C 坐标为 $(2,1)$. 因为$|CD|=1$,$|BC|=2$,所以 $BD=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

又 BD 切$\odot C$于点 E,所以 $CE\perp BD$,CE 是 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 斜边 BD 上的高,则$|EC|=\frac{2S_{\triangle BCD}}{|BD|}=\frac{2\times\frac{1}{2}|BC||CD|}{|BD|}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,即$\odot C$的半径为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

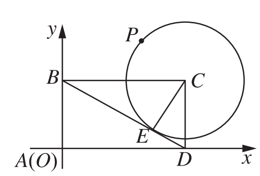


图 2

因为点 P 在⊙C 上，所以点 P 的轨迹方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=\frac{4}{5}$.

设点 P 的坐标为 (x_0,y_0)，可以设出点 P 坐标满足的参数方程 $\begin{cases} x_0=2+\frac{2\sqrt{5}}{5}\cos\theta \\ y_0=1+\frac{2\sqrt{5}}{5}\sin\theta \end{cases}$，而 $\overrightarrow{AP}=(x_0,y_0)$，$\overrightarrow{AB}=(0,1)$，$\overrightarrow{AD}=(2,0)$.

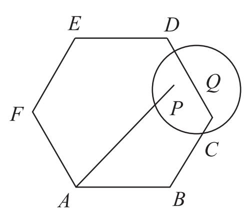
因为 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}=\lambda(0,1)+\mu(2,0)=(2\mu,\lambda)$，所以 $\mu=\frac{1}{2}x_0=1+\frac{\sqrt{5}}{5}\cos\theta$，$\lambda=y_0=1+\frac{2\sqrt{5}}{5}\sin\theta$.

两式相加得 $\lambda+\mu=1+\frac{2\sqrt{5}}{5}\sin\theta+1+\frac{\sqrt{5}}{5}\cos\theta=2+\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}\sin(\theta+\varphi)=2+\sin(\theta+\varphi)\leqslant 3$（其中 $\sin\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$），当且仅当 $\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi-\varphi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$\lambda+\mu$ 取得最大值为 3，故选 A.

评注

若本题将题目改为“在平行四边形 $ABCD$ 中，动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上. 若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，则 $\lambda+\mu$ 的最大值为________.”改过之后的题目，更深入地表现了向量基本定理、几何意义和数形结合等基本方法和思想.

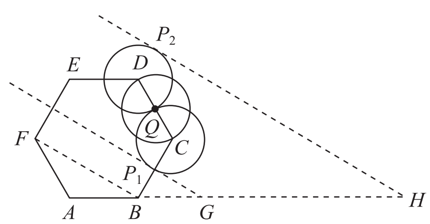
变式 2　如图所示，在边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ 中，动圆 Q 半径为 1，圆心在线段 CD（含端点）上运动，P 是圆 Q 上及其内部的动点，设向量 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AF}$，则 $m+n$ 的取值范围为________.



解析　如图所示，圆心 Q 在点 C 处时，设 $\overrightarrow{AP_1}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AF}$，由等和线的结论得 $m+n=\frac{AG}{AB}=\frac{2AB}{AB}=2$，2 即为 $m+n$ 的最小值.

同理，圆心 Q 在点 D 处时，设 $\overrightarrow{AP_2}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AF}$，由等和线的结论得 $m+n=\frac{AH}{AB}=5$，5 即为 $m+n$ 的最大值.

综上所述，$m+n$ 的取值范围为 $[2,5]$.



变式3　已知正△ABC的边长为2，D是边BC的中点，动点P满足$|\overrightarrow{PD}|\leqslant 1$，且$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，其中$x+y\geqslant 1$，则$2x+y$的取值范围是________.

解析　因为$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，$|\overrightarrow{PD}|\leqslant 1$且$x+y\geqslant 1$，所以点$P$落在以点$D$为圆心，1为半径的圆上(△$ABC$的外侧部分，如图1所示).

因为$\overrightarrow{AP}=2x\cdot\dfrac{\overrightarrow{AB}}{2}+y\overrightarrow{AC}=2x\overrightarrow{AA'}+y\overrightarrow{AC}$，所以当点$P$在$C$点时，$2x+y$取到最小值1.

当点P在K点(半圆与$A'C$平行的切线的切点，如图2所示)时，$2x+y$取到最大值，由相似三角形知识可知最大值为$\left|\dfrac{AM}{AA'}\right|=\dfrac{5}{2}$.

故$2x+y$的范围为$\left[1,\dfrac{5}{2}\right]$.

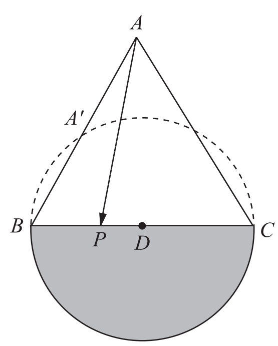


图 1

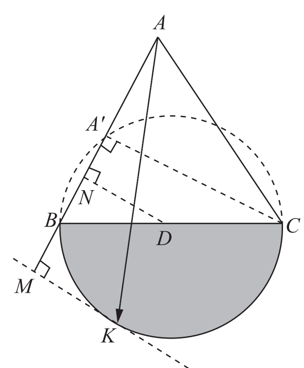


图 2

26.2　等差线

研究密钥

如图1所示，当$x-y=k$(定值)，$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=(k+y)\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OA}+y(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=k\overrightarrow{OA}+2y\overrightarrow{OP_0}$.

令$\overrightarrow{OA_0}=k\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA_0}=2y\overrightarrow{OP_0}$，即$\overrightarrow{A_0P}=2y\overrightarrow{OP_0}$，因此$\overrightarrow{A_0P}/\!/\overrightarrow{OP_0}$.

$\lambda-\mu=k$的几何意义是$\dfrac{\overrightarrow{OA_0}}{\overrightarrow{OA}}$.

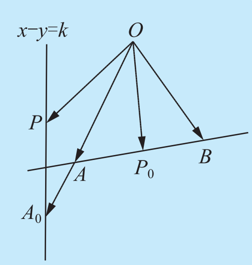


图 1

等差线的性质

如图2所示，平面内一组基底$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$及任一向量$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，$C$为

线段 AB 的中点，若点 P 在直线 OC 上或在平行于 OC 的直线上，则 $\lambda-\mu=k$（定值），反之也成立，我们把直线 OC 以及与直线 OC 平行的直线称为等差线.

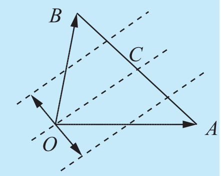


图 2

（1）当等差线恰为直线 OC 时，$k=0$.

（2）当等差线过 A 点时，$k=1$.

（3）当等差线在直线 OC 与点 A 之间时，$k\in(0,1)$.

（4）当等差线与 BA 延长线相交时，$k\in(1,+\infty)$.

（5）若等差线关于直线 OC 对称，则两定值 k 互为相反数.

等差线解题步骤：

（1）画出中线向量 $\overrightarrow{OC}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$.

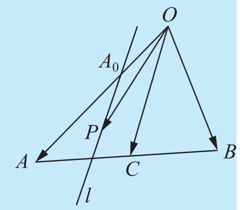


图 3

（2）如图 3 所示，过点 P 作与中线向量 $\overrightarrow{OC}$ 所在直线平行的直线 l 交 OA 或其延长线于点 A_0，则 $\overrightarrow{OA_0}=k\overrightarrow{OA}$.

（3）计算 k 值，即 $k=\lambda-\mu$，$|k|=\dfrac{|\overrightarrow{OA_0}|}{|\overrightarrow{OA}|}$，其符号与向量 $\overrightarrow{OA_0}$ 和 $\overrightarrow{OA}$ 的方向相关，若 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OA_0}$ 同向，则 $k>0$；若 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OA_0}$ 反向，则 $k<0$.

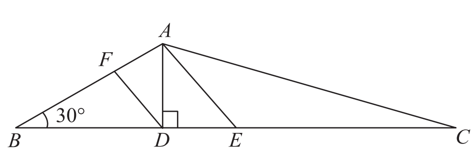
例 26.3 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=2$，$BC=3\sqrt{3}$，$\angle ABC=30^\circ$，AD 为 BC 边上的高. 若 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则 $\lambda-\mu=$（　　）.

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $-\dfrac{1}{3}$

分析 ▶▶ 思路一：利用等差线，作中线向量 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，过点 D 作 $DF\parallel AE$ 交 AB 于点 F，设 $\lambda-\mu=k$，k 的几何意义是 $\dfrac{|\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{AB}|}$，以下在图形中求出 $\dfrac{|\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{AB}|}$ 即可.

思路二：用基底表示向量，以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 为基底表示为 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$ 的形式，再求 $\lambda-\mu$ 的值.

解析 ▶▶ **解法一（向量的等差线）**如图所示，设 AE 为 BC 边上的中线，过点 D 作 $DF\parallel AE$ 交 AB 于点 F，则由题意可得 $BD=AB\cos30^\circ=\sqrt{3}$，$BE=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，所以 $DE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\dfrac{DE}{BE}=\dfrac{1}{3}$，故此 $\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{DE}{BE}=\dfrac{1}{3}$，且向量 $\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{AB}$ 方向相同，由向量等差线可知 $\lambda-\mu=\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{1}{3}$，故选 B.



解法二(用基底表示向量)如解法一中图所示,设 AE 为 BC 边上的中线,过点 D 作 $DF\parallel AE$ 交 AB 于点 F,则由题意可得 $BD=AB\cos30^\circ=\sqrt{3}$,$BE=\frac{1}{2}BC=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,所以 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$,又 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\left(\frac{1}{3}+\frac{k}{2}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{k}{2}\overrightarrow{AC}$.

则 $\lambda-\mu=\left(\frac{1}{3}+\frac{k}{2}\right)-\frac{k}{2}=\frac{1}{3}$,故选 B.

变式 1 已知 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,过点 O 作直线 AB 的垂线,垂足为点 P. 若 $|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$,$\angle AOB=30^\circ$,$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$,则 $x-y=$________.

分析 由基底$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$及$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$,求 $x-y$ 可考虑等差线结论.

解析 **解法一**:如图 1 所示,设点 C 为 AB 的中点,则 $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,过点 P 作 $PD\parallel OC$ 交直线 OB 于点 D,则 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DP}=k\overrightarrow{OB}+l\overrightarrow{OC}=k\boldsymbol{b}+\frac{l}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{l}{2}\boldsymbol{a}+\left(k+\frac{l}{2}\right)\boldsymbol{b}$,所以 $x-y=-k$.

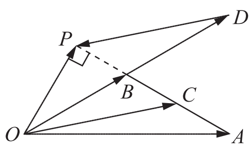


图 1

在$\triangle OAB$ 中,由余弦定理可得 $AB=\sqrt{OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\angle AOB}=\sqrt{3}$,所以 $BC=AC=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$OB=AB$,所以 $\angle AOB=A=30^\circ$,又 $\angle OPA=90^\circ$,所以 $\angle AOP=60^\circ$,$\angle BOP=\angle AOP-\angle AOB=30^\circ$,即 $BP=\frac{1}{2}OB=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则 $BP=BC$,$OB=BD$,$\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OB}$,$k=2$,故 $x-y=-k=-2$.

解法二:如图 2 所示,取 AB 中点 C,连接$\overrightarrow{OC}$,过 O 作 $OP\perp AB$ 交 AB 的延长线于点 P,过 P 作 $PD\parallel OC$,延长 DP 与 OA 的反向延长线相交于点 A_0. 在$\triangle OAB$ 中,因为 $|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$,且$\angle AOB=30^\circ$,易知 $|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{a}^2=3-2\times3\times\sqrt{3}\times\cos30^\circ+9=3$,所以 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3}=|\overrightarrow{OB}|$,则 $A=30^\circ$.

在 Rt$\triangle OAP$ 中,$\angle AOP=60^\circ$,$|\overrightarrow{OP}|=\frac{3}{2}$,$|AP|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,所以 B 为 PC 中点.

令 $x-y=k$,由等差线结论知 $|k|=\frac{|OA_0|}{|OA|}=\frac{|PC|}{|CA|}=2$,又因为$\overrightarrow{OA_0}$与$\overrightarrow{OA}$反向,所以 P 点对应的 $k=-2$,即 $x-y=-2$.

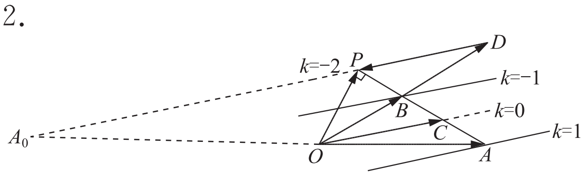


图 2

26.3　等商线

研究密钥

如图 1 所示，$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OP'}\,/\!/\,\overrightarrow{OP}$，不妨设$\overrightarrow{AP'}=\lambda\overrightarrow{P'B}$，可得$\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP'})$，即$(\lambda+1)\overrightarrow{OP'}=\lambda\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}$，得$\overrightarrow{OP'}=\frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{OA}+\frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{OB}$，所以$\frac{x}{y}=\frac{1}{\lambda}=\frac{|\overrightarrow{P'B}|}{|\overrightarrow{AP'}|}$.

平面内一组基底$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$及任一向量$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$（$\lambda,\mu\in\mathbf{R}$），若点 P 在过 O 点（不与 OA 重合）的直线上，则$\frac{\lambda}{\mu}=k$（定值），反之也成立，我们把过 O 点的直线（除 OA 外）称为等商线，如图 2 所示.

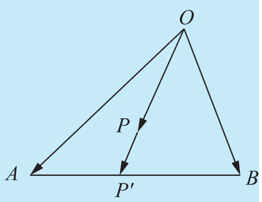


图 1

等商线结论：

（1）当等商线过 AB 中点 C 时，$k=1$.

（2）当等商线与线段 AC（除端点）相交时，$k\in(1,+\infty)$.

（3）当等商线与线段 BC（除端点）相交时，$k\in(0,1)$.

（4）当等商线为 OB 时，$k=0$.

（5）当等商线与线段 BA 延长线相交时，$k\in(-\infty,-1)$.

（6）当等商线与线段 AB 延长线相交时，$k\in(-1,0)$.

（7）当等商线与直线 AB 平行时，$k=-1$.

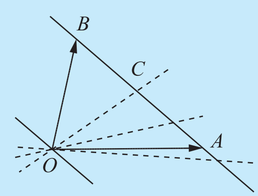


图 2

等商线解题步骤：

（1）如图 3 所示，找到三点共线的情形，如$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，延长 OP 交 AB 或其延长线（反向延长线）于点 P'，则 A,P',B 三点共线.

（2）计算$\frac{|\overrightarrow{P'B}|}{|\overrightarrow{AP'}|}$，则$\frac{x}{y}=\frac{|\overrightarrow{P'B}|}{|\overrightarrow{AP'}|}$.

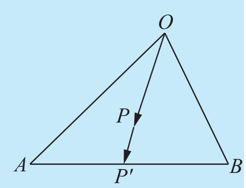
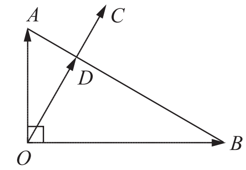


图 3

例 26.4　已知$|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，点 C 在$\angle AOB$ 的内部，且$\angle AOC=30^\circ$，设$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$，则$\frac{m}{n}$的值为________.

分析　思路一：由$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$，求$\frac{m}{n}$的值，故考虑用等商线结论求解．设直线 OC 与直线 AB 交于点 D，则$\frac{m}{n}=\frac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{DA}|}$，在图中求 BD，DA 即可.

思路二：考虑用基底表示向量，以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$为基底表示$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$的形式，再求$\frac{m}{n}$的值.



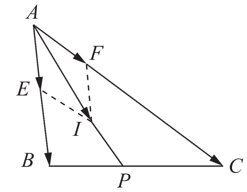
解析 解法一（基底表示）：如图所示，设直线 OC 与直线 AB 交于点 D，则根据题意易求得 $AD=\frac{1}{2}$，$AB=2$，所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$，则 $\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OD}=k\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}\right)=\frac{3k}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{k}{4}\overrightarrow{OB}$，故 $\frac{m}{n}=\frac{3k}{4}\div\frac{k}{4}=3$.

解法二（利用等商线结论）：如解法一中的图所示，在 $\angle AOB$ 内，设射线 OC 与线段 AB 交于点 D，因为 $|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=$ [redacted]，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，所以 $|AB|=2$，又 $\angle AOC=30^\circ$，所以 $|AD|=\frac{1}{2}$.

由等商线结论可知 $\frac{m}{n}=\frac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{DA}|}=3$.

变式 1 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=BC=2$，$AC=3$，设点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，若 $\overrightarrow{AI}=p\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AC}$，则 $\frac{p}{q}$ 的值是________.

解析 如图所示，延长 AI 交 BC 于点 P，因为 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，故 $\angle BAP=\angle CAP$.



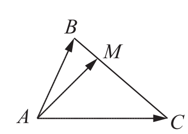
由角平分线的性质知 $\frac{PC}{PB}=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{2}$. 又 $\overrightarrow{AI}=p\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AI}=kp\overrightarrow{AB}+kq\overrightarrow{AC}$.

由等商线结论可知 $\frac{kp}{kq}=\frac{p}{q}=\frac{|\overrightarrow{CP}|}{|\overrightarrow{PB}|}=\frac{3}{2}$.

变式 2 已知 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，$|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{AC}|=3$，$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，且 $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BC}$，则 $\frac{\lambda}{\mu}=$（　　）.

A. $\frac{1}{6}$　　B. 6　　C. $\frac{1}{4}$　　D. 4

分析 由 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，求 $\frac{\lambda}{\mu}$ 的值，故考虑等商线结论.



解析 如图所示，由等商线结论知 $\frac{\lambda}{\mu}=\frac{|\overrightarrow{CM}|}{|\overrightarrow{MB}|}$，故求出 CM 及 MB 的长度即可.

在 $\triangle ABC$ 中，因为 $AB=2$，$AC=3$，$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，所以 $BC=\sqrt{[redacted]+9-2\times2\times3\cos\frac{\pi}{3}}=$ [redacted]7.

由等积法知 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 2\times 3\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\times\sqrt{7}\times AM$，易知 $AM=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACM$ 及 $\mathrm{Rt}\triangle ABM$ 中，易知 $CM=\frac{6\sqrt{7}}{7}$，$BM=\frac{\sqrt{7}}{7}$，所以 $\frac{\lambda}{\mu}=\frac{|\overrightarrow{CM}|}{|\overrightarrow{MB}|}=6$，故选 B.

平面向量中的常见恒等式

26.4　极化恒等式

向量是连接代数与几何的桥梁，虽然向量运算已经深入人心，但与几何的运算联系却略显单薄，而极化恒等式恰恰弥补了这个缺憾.

极化恒等式基本模型：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{4}[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2]=\left(\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}\right)^2-\left(\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2}\right)^2$，其几何意义是向量的数量积可以表示为以这组向量为邻边的平行四边形的“和对角线”与“差对角线”平方差的 $\frac{1}{4}$.

1. 极化恒等式在三角形中的应用

研究密钥

在三角形中可进一步得出如下结论：在 $\triangle ABC$ 中，O 是边 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}((\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2-(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})^2)=\frac{1}{4}((2\overrightarrow{AO})^2-\overrightarrow{CB}^2)=|\overrightarrow{AO}|^2-\frac{1}{4}|\overrightarrow{BC}|^2$.

中点向量将共起点数量积转化成对应中线长与对边长的式子，其基本使用条件：

(1)两个共起点的向量作数量积.

(2)一般两个向量终点连线长度固定(目的转化成单动态问题).

极化恒等式把向量的数量积问题用形象的几何图形展示得淋漓尽致.

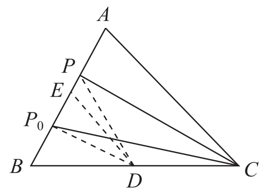
例 26.5 在 $\triangle ABC$ 中，P_0 是边 AB 上一定点，满足 $P_0B=\frac{1}{4}AB$，且对于边 AB 上任一点 P，恒有 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\geqslant\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$，则(　　).

A. $\angle ABC=90°$　　B. $\angle BAC=90°$　　C. $AB=AC$　　D. $AC=BC$

分析 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\geqslant\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$ 表明 $\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$ 是 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的最小值，目标应是探究 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的变化情况. 因此尝试极化恒等式处理，先取 BC 的中点 D，则 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ 与 $\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$ 可同时转化为两组线段 PD 和 BD，P_0D 和 BD 的平方差，再转化为 PD 与 P_0D 的关系，由垂线段最短

得 $P_0D\perp AB$.

解析 如图所示,取 BC 的中点 D,连接 PD,P_0D.



在$\triangle PBC$内使用极化恒等式得$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=|\overrightarrow{PD}|^2-|\overrightarrow{BD}|^2$;在$\triangle P_0BC$内使用极化恒等式得$\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}=|\overrightarrow{P_0D}|^2-|\overrightarrow{BD}|^2$,由条件恒有$|\overrightarrow{PD}|^2\geqslant|\overrightarrow{P_0D}|^2$,即 $P_0D\perp AB$.

取 AB 的中点 E,连接 DE,因为 $P_0B=\frac{1}{4}AB$,所以 P_0 为 BE 的中点,则 $BD=DE$,因此 $AC=BC$,故选 D.

评注 用极化恒等式的优点就是将向量数量积的关系,转化为两个平面向量的长度关系,即线段的长度,化抽象为具体,使问题变得更直观.

例 26.6 在$\triangle ABC$中,点 E,F 分别是线段 AB,AC 的中点,点 P 在直线 EF 上,若$\triangle ABC$的面积为 2,则$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{BC}^2$的最小值是________.

分析 思路一:$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$如何使用公式转化?从形式上看可使用极化恒等式.取 BC 的中点 O,$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$使用极化恒等式转化成$|\overrightarrow{PO}|^2-\frac{1}{4}|\overrightarrow{CB}|^2$,则$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{BC}^2=|\overrightarrow{PO}|^2+\frac{3}{4}|\overrightarrow{CB}|^2$.另一方面,$\triangle ABC$的面积为定值 2,利用基本不等式积定和最小求出和的最小值.

思路二:建立合适的平面直角坐标系,得出相关点的坐标,对$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{BC}^2$进行坐标运算再进一步求最值.

解析 **解法一(利用极化恒等式)**:如图 1 所示,取 BC 的中点 O,连接 PO.

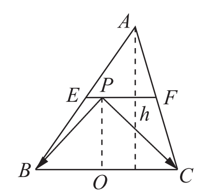


图 1

$$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{BC}^2=|\overrightarrow{PO}|^2-\frac{1}{4}|\overrightarrow{CB}|^2+\overrightarrow{BC}^2=|\overrightarrow{PO}|^2+\frac{3}{4}|\overrightarrow{CB}|^2\geqslant 2\sqrt{|\overrightarrow{PO}|^2\cdot\frac{3}{4}|\overrightarrow{CB}|^2}=\sqrt{3}|\overrightarrow{PO}||\overrightarrow{CB}|.$$

因为$|\overrightarrow{PO}|\geqslant\frac{1}{2}h$,所以$\sqrt{3}|\overrightarrow{PO}||\overrightarrow{CB}|\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}h|\overrightarrow{CB}|=\sqrt{3}S_{\triangle ABC}=2\sqrt{3}$,故$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{BC}^2$的最小值是 $2\sqrt{3}$.

解法二(坐标法):由题意可得$\triangle PBC$的面积为 1,以 B 为原点,BC 所在直线为 x 轴,过点 B 与直线 BC 垂直的直线为 y 轴,建立平面直角坐标系,如图 2 所示.

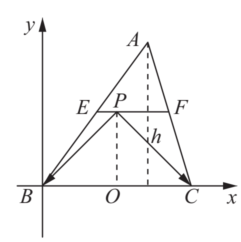


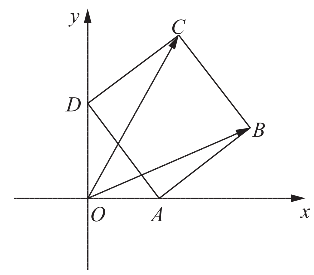
图 2

设 $C(a,0)$，$P\left(t,\frac{2}{a}\right)(a>0)$，则 $\overrightarrow{PB}=\left(-t,-\frac{2}{a}\right)$，$\overrightarrow{PC}=\left(a-t,-\frac{2}{a}\right)$，所以 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}^2=$

$-t(a-t)+\frac{4}{a^2}+a^2=\left(t-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{4}{a^2}+\frac{3a^2}{4}\geqslant 2\sqrt{3}$.

当且仅当 $t=\frac{a}{2}$，$a=\sqrt[4]{\frac{16}{3}}$ 时取等号，所以 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{BC}^2$ 的最小值是 $2\sqrt{3}$.

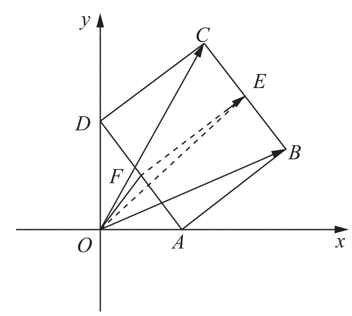
例 26.7 如图所示，放置边长为 1 的正方形 $ABCD$，顶点 A，D 分别在 x 轴，y 轴正半轴(含原点)上滑动，则 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$ 的最大值为________.



分析 思路一：利用极化恒等式，取 BC 的中点 E，将 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$ 转化为 $|\overrightarrow{OE}|^2-\frac{1}{4}|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{OE}|^2-\frac{1}{4}$，这样减少了变量，只需求 $|\overrightarrow{OE}|$ 的最大值.

思路二：考虑坐标法.设出一角，求出相关点的坐标表示，进行数量积的坐标运算建立目标函数，利用三角函数有界性求最值.

解析 **解法一(利用极化恒等式)**：如图所示，取 BC，AD 的中点 E，F，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OE}|^2-\frac{1}{4}|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{OE}|^2-\frac{1}{4}$.



因为 $|\overrightarrow{OE}|\leqslant OF+EF=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$(当 O，F，E 三点共线时取等号)，所以 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\leqslant\frac{9}{4}-\frac{1}{4}=2$，即 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$ 的最大值为 2.

解法二(坐标法)：设 $\angle ODA=\theta$，$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则 $A(\sin\theta,0)$，$D(0,\cos\theta)$，$B(\sin\theta+\cos\theta,\sin\theta)$，$C(\cos\theta,\cos\theta+\sin\theta)$，所以 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=(\sin\theta+\cos\theta,\sin\theta)(\cos\theta,\cos\theta+\sin\theta)=\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta=1+\sin 2\theta$.

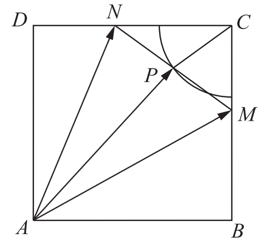
又 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\sin 2\theta\in[0,1]$，即 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$ 的最大值为 2.

变式 1 在正方形 $ABCD$ 中，$AB=AD=2$，M，N 分别为边 BC，CD 上的两个动点，且 $MN=\sqrt{2}$，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ 的取值范围为(　　).

A. $[4,8-2\sqrt{2}]$　　B. $[4-2\sqrt{2},8]$　　C. $[4,8+2\sqrt{2}]$　　D. $[4-2\sqrt{2},8-2\sqrt{2}]$

分析 如何把 $\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AN}$ 两个“动”的向量转化为“定”的内容？取 MN 的中点 P，由极化恒等式得 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=|\overrightarrow{AP}|^2-\frac{1}{4}|\overrightarrow{MN}|^2=|\overrightarrow{AP}|^2-\frac{1}{2}$，只需研究 $|\overrightarrow{AP}|$ 的范围即可.

解析 **解法一(极化恒等式)**：如图所示，取 MN 的中点 P，由极化恒等式得 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=|\overrightarrow{AP}|^2-\frac{1}{4}|\overrightarrow{MN}|^2=|\overrightarrow{AP}|^2-\frac{1}{2}$，又 $\triangle MNC$ 为直角三角形，所以 $CP=\frac{1}{2}MN=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 P 在以



C 为圆心，$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为半径的圆弧上运动.

故 $|\overrightarrow{AP}|\in\left[\frac{3\sqrt{2}}{2},\sqrt{2^2+\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right]$，即 $|\overrightarrow{AP}|\in\left[\frac{3\sqrt{2}}{2},\sqrt{\frac{17}{2}-2\sqrt{2}}\right]$，从而 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=|\overrightarrow{AP}|^2-\frac{1}{2}\in[4,8-2\sqrt{2}]$，故选 A.

解法二(坐标法)：以 C 为坐标原点，CD，CB 所在的直线分别为 x 轴，y 轴，设 $\angle MNC=\alpha$，$\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则 $CM=\sqrt{2}\sin\alpha$，$CN=\sqrt{2}\cos\alpha$，故 $M(0,\sqrt{2}\sin\alpha)$，$N(\sqrt{2}\cos\alpha,0)$.

又 $A(2,2)$，所以 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=(-2,\sqrt{2}\sin\alpha-2)\cdot(\sqrt{2}\cos\alpha-2,-2)=8-2\sqrt{2}\sin\alpha-2\sqrt{2}\cos\alpha=8-4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$.

因为 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\alpha+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，故 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，从而 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=8-4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\in[4,8-2\sqrt{2}]$，故选 A.

评注

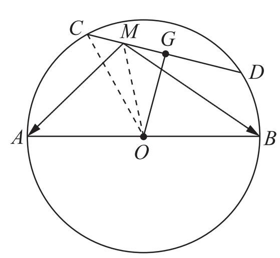
坐标法为一般性方法，也是这类题目的通法. 本题为了方便研究，最好将坐标原点放在 C 处.

例 26.8 若 AB 是 $\odot O$ 的直径，M 是 $\odot O$ 的弦 CD 上的一个动点，$AB=8$，$CD=6$，则 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ 的取值范围是________.

分析 思路一：考虑极化恒等式. 由极化恒等式得 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=|\overrightarrow{MO}|^2-\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{MO}|^2-16$，这样减少了变量，问题转化为求 $|\overrightarrow{MO}|$ 的取值范围. 而 M 是弦 CD 上的一个动点，故此 $|\overrightarrow{MO}|$ 在 $[OG,OC]$ 上变化.

思路二：以 $\overrightarrow{MO}$，$\overrightarrow{OA}$ 为基底表示出向量 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，求出其数量积.

思路三：建立坐标系，将相关点的坐标表示出来，对 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ 进行坐标运算表示为一个函数.



解析 **解法一(极化恒等式)**：如图所示，过 O 作 $OG\perp CD$，垂足为 G，连接 OG，OC.

由极化恒等式得 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=|\overrightarrow{MO}|^2-\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{MO}|^2-16$，因为 $|\overrightarrow{MO}|=MO\in[OG,OC]$，即 $|\overrightarrow{MO}|\in[\sqrt{7},4]$，所以 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}\in[-9,0]$.

解法二(基底法)：因为 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OA})=$

$\overrightarrow{MO}^2-\overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{MO}^2-16$，下同解法一.

解法三(坐标法)：以 O 为原点，AB 所在的直线为 x 轴，过点 O 且与 AB 垂直的直线为 y 轴建立直角坐标系，则 $A(-4,0)$，$B(4,0)$. 设 $M(x,y)$，则 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=x^2+y^2-16$，因为 $OM=\sqrt{x^2+y^2}\in[\sqrt{7},4]$，下同解法一.

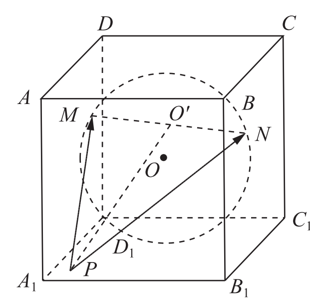
评注

在三种解法中，极化恒等式最为简洁. 极化恒等式在综合问题的应用中，需要大家恰当地运用转化思想，化动为定，特别是要结合题中的隐性特征进行转化处理，如题中的圆是“定”这一重要条件，化动为定可使得本题快速突破.

例 26.9 正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，MN 是它内切球的一条弦(把球面上任意 2 个点之间的线段称为球的弦)，P 为正方体表面上的动点，当弦 MN 最长时，$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的最大值为________.

分析 首先理解“MN 最长”，弦 MN 最长时，即为球的直径，此时 MN 的中点为球心 O. 根据极化恒等式，$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=|\overrightarrow{PO'}|^2-\frac{1}{4}|\overrightarrow{MN}|^2=|\overrightarrow{PO'}|^2-1$，根据题意 O' 即为 O，因此问题转化为求在正方体表面上的动点到球心 O 的最大值.

解析 如图所示，设球心为 O，球半径为 r，则 $r=1$，因为弦 MN 最长，所以 $|\overrightarrow{MN}|=2r=2$.



根据极化恒等式，$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=|\overrightarrow{PO}|^2-\frac{1}{4}|\overrightarrow{MN}|^2=|\overrightarrow{PO}|^2-1$，因为 P 为正方体表面上的动点，所以 $|\overrightarrow{PO}|$ 的最大值为正方体体对角线长的一半，为 $\sqrt{3}$.

故 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的最大值为 2.

评注

向量是连接代数与几何的桥梁，由于向量的坐标运算的引入，向量与代数的互换运算可以说是深入人心，而与几何(平面几何、空间几何)的运算略显单薄，极化恒等式恰恰就弥补了这一“遗憾”，可以认为极化恒等式将向量的数量积问题用形象化的几何图形展现得淋漓尽致.

例 26.10 已知点 A，B 在椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上，且线段 AB 经过原点，M 为直线 $3x-4y-15=0$ 上的动点，则 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ 的最小值为(　　).

A. $-\frac{50\sqrt{13}}{39}-4$　　B. $\frac{50\sqrt{13}}{39}-4$　　C. 5　　D. 8

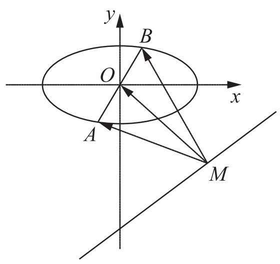
分析 线段 AB 是“动”的，M 是直线上的动点.

思路一：利用极化恒等式将$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$的数量积转化为线段间的关系，即$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=|\overrightarrow{MO}|^2-\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2$. 由于$|\overrightarrow{MO}|$与$|\overrightarrow{AB}|$在变化上无关，所以下面就分别研究$|\overrightarrow{MO}|$的最小值与$|\overrightarrow{AB}|$的最大值即可.

思路二：坐标法. 设出 M，A，B 的坐标，对$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$进行数量积的坐标运算，根据其表达式求最值.

解析 **解法一（极化恒等式）**：由极化恒等式得$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=|\overrightarrow{MO}|^2-\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2$.

因为$|\overrightarrow{MO}|$与$|\overrightarrow{AB}|$之间无关，且$|\overrightarrow{AB}|_{\max}=4$，$|\overrightarrow{MO}|_{\min}=\frac{|-15|}{5}=3$，从而$(\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB})_{\min}=|\overrightarrow{MO}|^2_{\min}-\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2_{\max}=5$，故选 C.



解法二（坐标法）：如图所示，设点 $M(x,y)$，点 $A(m,n)$，则 $B(-m,-n)$，且 $3x-4y-15=0$，$\frac{m^2}{4}+n^2=1$，则$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(m-x,n-y)\cdot(-m-x,-n-y)=x^2+y^2-(m^2+n^2)$，表示原点 O 到点 M 的距离的平方减去原点 O 到点 A 的距离的平方，即$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=|\overrightarrow{OM}|^2-|\overrightarrow{OA}|^2$，下同解法一.

2. 极化恒等式在矩形中的应用

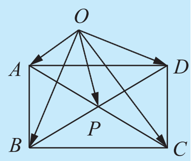
研究密钥

在矩形中应用极化恒等式可得如下结论：

【极化恒等式——矩形对角线性质】在矩形 $ABCD$ 中，平面内任意一点到矩形两对角线顶点的距离平方和相等.

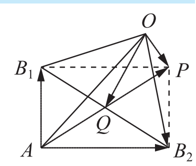
【证明】如图所示，$ABCD$ 为矩形，AC 与 BD 相交于点 P.

因为 $AC=BD$，所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}^2=\overrightarrow{OP}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}^2=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}$，又$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})^2=(2\overrightarrow{OP})^2$，$(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})^2=(2\overrightarrow{OP})^2$，故$\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OC}^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OD}^2+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}$.



所以 $OA^2+OC^2=OB^2+OD^2$.

例 26.11 如图所示，在平面上，$\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{AB_2}$，$|\overrightarrow{OB_1}|=|\overrightarrow{OB_2}|=1$，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AB_2}$. 若$|\overrightarrow{OP}|<\frac{1}{2}$，则$|\overrightarrow{OA}|$的取值范围是（　　）.



A. $\left(0,\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$　　B. $\left(\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{7}}{2}\right]$　　C. $\left(\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{2}\right]$　　D. $\left(\frac{\sqrt{7}}{2},\sqrt{2}\right]$

分析 ▶▶ 矩形 AB_1PB_2 中应用极化恒等式，即平面内任意一点到矩形两对角线顶点的距离平方和相等. 在本题中就是 $|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OB_1}|^2+|\overrightarrow{OB_2}|^2=2$，$|\overrightarrow{OA}|^2=2-|\overrightarrow{OP}|^2$，由 $|\overrightarrow{OP}|$ 的范围确定 $|\overrightarrow{OA}|$ 的范围.

解析 ▶▶ 设 $B_1B_2\cap AP=Q$，$\overrightarrow{OB_1}\cdot\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OQ}^2-\overrightarrow{QB_1}^2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}^2-\overrightarrow{QA}^2$.

所以在矩形 AB_1PB_2 中，$\overrightarrow{OB_1}\cdot\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}$. 又 $(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2})^2=(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA})^2$，则 $|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OB_1}|^2+|\overrightarrow{OB_2}|^2\Rightarrow|\overrightarrow{OA}|^2=2-|\overrightarrow{OP}|^2$，而 $|\overrightarrow{OP}|\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right)$，所以 $|\overrightarrow{OA}|^2\in\left(\dfrac{7}{4},2\right]$，得 $|\overrightarrow{OA}|\in\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2},\sqrt{2}\right]$，故选 D.

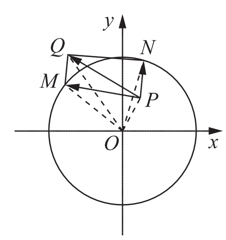
变式 1 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的最小值是________，最大值是________.

解析 ▶▶ 最小值：$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\geqslant\max\{|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|,|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|\}=4$，当且仅当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线时等号成立.

最大值：因为 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=2(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2)=10$，所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant 2\sqrt{\dfrac{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2}{2}}=2\sqrt{5}$.

故 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的最小值是 4，最大值是 $2\sqrt{5}$.

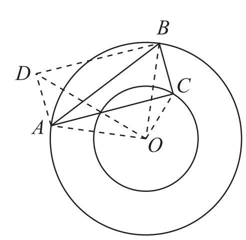
变式 2 已知点 M,N 在圆 $O:x^2+y^2=16$ 上，点 $P(1,2)$，且 $\overrightarrow{PM}\perp\overrightarrow{PN}$，$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}$，则 $|\overrightarrow{PQ}|$ 的最小值为________.



解析 ▶▶ 如图所示，连接辅助线 OM,OQ,ON,OP，则有 $OP^2+OQ^2=OM^2+ON^2$，解得 $OQ=3\sqrt{3}$，$PQ\geqslant OQ-OP=3\sqrt{3}-\sqrt{5}$，当且仅当 Q,O,P 三点共线时等号成立.

所以 $|\overrightarrow{PQ}|$ 的最小值为 $3\sqrt{3}-\sqrt{5}$.

变式 3 两个同心圆 O，小圆半径为 2，大圆半径为 $2\sqrt{5}$，点 A,B 在大圆上，点 C 在小圆上，满足 $AC\perp BC$，则 AB 长度的最大值为________.



解析 ▶▶ 如图所示，作一个矩形 $ACBD$，有 $OC^2+OD^2=OA^2+OB^2\Rightarrow OD^2=36$.

在 $\triangle ODC$ 中，有 $DC\leqslant OD+OC=8$，当且仅当 D,O,C 三点共线时等号成立. 又 $DC=AB$，所以 AB 长度的最大值为 8.

变式 4 已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{c}|=1$，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的最大值是(　　).

A. $2\sqrt{3}-1$　　B. $\sqrt{7}-1$　　C. $\sqrt{7}+1$　　D. $2\sqrt{3}+1$

解析 解法一(构造几何图形):依题意构造如图1所示的几何图形,设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BA}$,$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$,且$|\boldsymbol{c}|=1$.

若$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$,则$\odot O$与$\odot M$有公共点,设圆$O$半径为$r$,圆$M$半径为$R$,则$R-r\leqslant|OM|\leqslant R+r$.

因为$|OM|=\sqrt{4-R^2}$,则$R-1\leqslant\sqrt{4-R^2}\leqslant R+1$,解得$\frac{\sqrt{7}-1}{2}\leqslant R\leqslant\frac{\sqrt{7}+1}{2}$,因此$|AB|=2R\in\left[\sqrt{7}-1,\sqrt{7}+1\right]$.

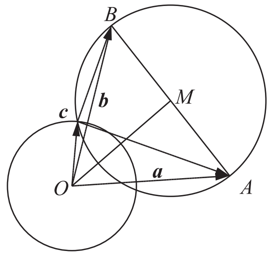


图 1

所以$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$的最大值为$\sqrt{7}+1$,故选C.

解法二(利用极化恒等式在矩形中的推广结论):如图2所示,设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,因为$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$,即$\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$,又$\overrightarrow{OC}^2+\overrightarrow{OD}^2=\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2$,故$\overrightarrow{OD}^2=7$.

所以$|\overrightarrow{CD}|\leqslant|\overrightarrow{OC}|+|\overrightarrow{OD}|=\sqrt{7}+1$,故选C.

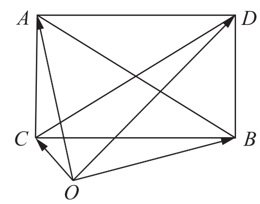


图 2

26.5 向量数乘余弦定理

研究密钥

向量数乘余弦定理:$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}$.

【证明】根据余弦定理,易得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cdot\dfrac{\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{BC}^2}{2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{BC}^2}{2}$,即$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}$.

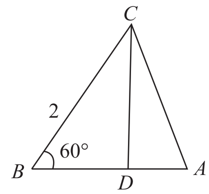
例 26.12 在$\triangle ABC$中,若$(4\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\perp\overrightarrow{CB}$,则$\sin A$的最大值为________.

分析 将条件转化为数量积的关系式,通过向量数乘余弦定理得出边a,b,c之间的关系式,并应用余弦定理、基本不等式得角度范围.

解析 因为$(4\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\perp\overrightarrow{CB}$,所以$(4\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{CB}=0\Rightarrow4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=0\Rightarrow4\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$.

依据向量数乘余弦定理有$4\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2}+\dfrac{b^2+a^2-c^2}{2}=0$,即$a^2=\dfrac{3}{5}(b^2-c^2)$,$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{b^2+4c^2}{5bc}\geqslant\dfrac{2\sqrt{4b^2c^2}}{5bc}=\dfrac{4}{5}$,故$\sin A\leqslant\dfrac{3}{5}$,即$\sin A$的最大值为$\dfrac{3}{5}$.

变式 1　在锐角$\triangle ABC$中，$B=\frac{\pi}{3}$，$|\overrightarrow{CB}|=2$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$的取值范围为________.



解析　如图所示，根据向量数乘余弦定理有$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{b^2+c^2-4}{2}$.

由余弦定理得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=c^2-2c+4$，所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=c(c-1)>0$ $\Rightarrow c>1$，$\triangle ABC$为锐角三角形$\Rightarrow A\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \sin A\in\left(\frac{1}{2},1\right)$. 由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow b=\frac{\sqrt{3}}{\sin A}\in(\sqrt{3},2\sqrt{3})$，所以$b^2\in(3,12)$，$3<c^2-2c+4<12\Rightarrow 1<c<4$.

故$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=c(c-1)\in(0,12)$.

变式 2　在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$. 求$\sin C$的最大值.

解析　由向量数乘余弦定理，化简得$a^2+2b^2=3c^2$.

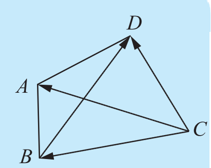
代入$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\frac{2}{3}a^2+\frac{1}{3}b^2}{2ab}\geqslant\frac{2\sqrt{\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times a^2b^2}}{2ab}=\frac{\sqrt{2}}{3}$，所以$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}\leqslant\frac{\sqrt{7}}{3}$，当且仅当$a:b:c=\sqrt{3}:\sqrt{6}:\sqrt{5}$时取得等号.

故$\sin C$的最大值为$\frac{\sqrt{7}}{3}$.

26.6　对角线向量定理

研究密钥

对角线向量定理：$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{(\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2)-(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2)}{2}$



【证明】如图所示，在$\triangle ABC$中，由向量数乘余弦定理有$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{CB}^2-\overrightarrow{AB}^2}{2}$.

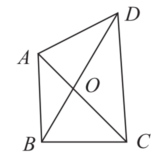
在$\triangle ADC$中，同理有$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{CD}^2-\overrightarrow{AD}^2}{2}$.

所以在四边形$ABCD$中，有$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB})=\frac{(\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2)-(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2)}{2}$.

推论 1：当$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$时，有$\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2$.

推论 2：$\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\rangle=\frac{(\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2)-(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2)}{2|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|}$.

例 26.13 如图所示，已知平面四边形 $ABCD$，$AB\perp BC$，$AB=BC=AD=2$，$CD=3$，AC 与 BD 交于点 O，若记 $I_1=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$，$I_2=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$，$I_3=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$，则（　　）.



A. $I_1<I_2<I_3$　　B. $I_1<I_3<I_2$

C. $I_3<I_1<I_2$　　D. $I_2<I_1<I_3$

分析 作差进行向量的加减、数量积等运算来比较大小. 由于 4 条边长已知，所以尽量转化为边的向量来表示.

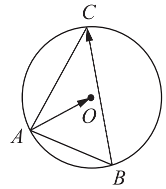
解析 由对角线向量定理得 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=\dfrac{(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2)-(\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{CB}^2)}{2}=\dfrac{5}{2}>0$，所以 $I_2-I_1=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}>0(t>0)$.

而 $I_3-I_1=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OD}|-|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|)\cos\angle AOB<0$，所以 $I_3<I_1<I_2$. 故选 C.

变式 1 在圆 O 中，若弦 $AB=3$，弦 $AC=5$，则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值是（　　）.

A. -8　　B. -1　　C. 1　　D. 8

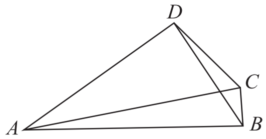
解析 如图所示，由对角线向量定理得 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{(\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{OB}^2)-(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{OC}^2)}{2}=8$，故选 D.



变式 2 在四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp BC$，$AD\perp DC$. 若 $|\overrightarrow{AB}|=a$，$|\overrightarrow{AD}|=b$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=$（　　）.

A. b^2-a^2　　B. a^2-b^2　　C. a^2+b^2　　D. ab

解析 如图所示，由对角线向量定理得 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\dfrac{(\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2)-(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2)}{2}=\dfrac{(b^2-a^2)+(\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{CD}^2)}{2}=\dfrac{(b^2-a^2)+(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2)-(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AD}^2)}{2}=b^2-a^2$，故选 A.



训练 26

1. 在 Rt△ABC 中,$CA=CB=3$,M,N 是斜边 AB 上的两个动点,且 $MN=\sqrt{2}$,则$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CN}$的取值范围为(　　).

A. $\left[2,\frac{5}{2}\right]$　　B. $[2,4]$　　C. $[3,6]$　　D. $[4,6]$

2. 已知点 A,B 分别在直线 $x=1$,$x=3$ 上,$|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|=4$,当$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|$取得最小值时,$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$的值为(　　).

A. 0　　B. 2　　C. 3　　D. 6

3. 在平面直角坐标系中,O 是坐标原点,两定点 A,B 满足$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$,则点集$\{P\,|\,\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},|\lambda|+|\mu|\leqslant1,\lambda,\mu\in\mathbf{R}\}$所表示的区域面积是(　　).

A. $2\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $4\sqrt{2}$　　D. $4\sqrt{3}$

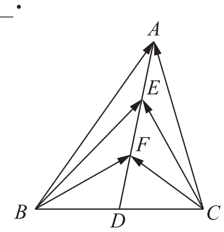
4. 在直角梯形 $ABCD$ 中,$AB\perp AD$,$AD=DC=1$,$AB=3$,动点 P 在以点 C 为圆心,且与直线 BD 相切的圆内运动,设$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}(x,y\in\mathbf{R})$,则 $x+y$ 的取值范围是________.

5. (2017 清华领军·多选题)设 $\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$是两个单位向量,x,y 是实数.若 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 的夹角是$\frac{\pi}{3}$,$|x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2|=1$,则(　　).

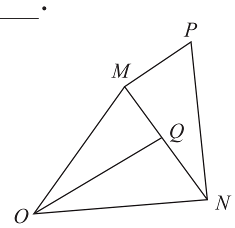
A. x 的最大值为 1　　B. x 的最大值为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C. $x+y$ 的最大值为$\sqrt{3}$　　D. $x+y$ 的最大值为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

6. 如图所示,在△ABC 中,D 是 BC 的中点,E,F 是 AD 上两个三等分点,$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=4$,$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=-1$,则$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}$的值是________.

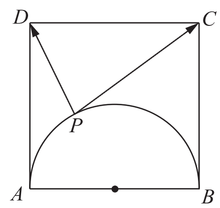


7. 如图所示,已知 $OM=ON=1$,$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OM}+y\overrightarrow{ON}(x,y\in\mathbf{R})$,若△$PMN$ 为以 M 为直角顶点的直角三角形,则 $x-y$ 的值为________.



8. 已知正三角形 ABC 内接于半径为 2 的圆 O,E 为线段 BC 上一动点,延长 AE 交圆 O 于点 F,则$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}$的取值范围是________.

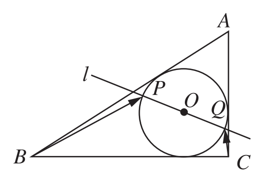
9. 设正方形 $ABCD$ 的边长为 4,动点 P 在以 AB 为直径的圆弧$\overset{\frown}{PAB}$上(如图所示),则$\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PC}$的取值范围是________.



10. 已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,且满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,$|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}|=1$,$1\leqslant|\boldsymbol{c}|\leqslant\sqrt{5}$,则$|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$的取值范围为________.

11. 已知 A,B 是$\odot O$:$x^2+y^2=1$ 上的两个点,P 是线段 AB 上的动点,当$\triangle AOB$ 的面积最大时,则$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AP}^2$ 的最大值是________.

12. 如图所示,圆 O 为 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的内切圆,已知 $AC=3$,$BC=4$,$\angle C=90^\circ$,过圆心 O 的直线 l 交圆 O 于 P,Q 两点,则$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}$的取值范围是____________.



13. 已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,$|\boldsymbol{c}|=1$,$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|=5$,则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$的最大值为________.

[redacted] 27 [redacted]

[redacted]

向量具有“几何形式”与“代数形式”的双重身份，既有明确的几何意义，又有像代数那样的运算，是连接代数与几何的一个桥梁. 因此平面向量的运算根据思考问题的角度不同，可在代数与几何不同的背景中解答问题.

从代数方面，主要是指对向量式进行等价变形，借助设角、同时平方、作数量积、建系进行坐标转化等方法进行向量运算，从而理解向量式所反映的向量之间的关系；在几何方面，主要从向量式本身所反映的几何事实出发进行构造，转化为几何问题，将平面几何的一些性质定理参与到解题中来.

以上方法均属向量法，通过向量法使代数问题几何化、使几何问题代数化，代数问题与几何问题根据各自的优势相互转化，从而体现向量法在解决代数问题和几何问题的作用和优点，因此在何种背景下解答关键就在于转化思想的运用.

本讲中的例题与变式均以不同的视角展开思考与尝试，帮助读者领悟并掌握平面向量运算的不同视角. 这些不同的视角是相辅相成的，有时兼收并蓄，有时只可取其一，这一点需要读者通过解决具体问题去品味.

27.1　从数与形看向量运算

研究密钥

向量既有几何表示的直观性，又有代数运算的灵活性，这意味着它既有自身的灵活性，也有广泛的交互应用功能. 因此，向量运算的题型各式各样，要从以下几方面把握历练：①向量的基本运算；②基于几何结构助推向量运算；③以基向量聚焦向量运算；④以坐标使向量运算代数化.

例 27.1 已知向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{e}$，$|\boldsymbol{e}|=1$，满足对任意 $t\in\mathbf{R}$，恒有 $|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}|$，则（　　）.

A. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{e}$　　B. $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$　　C. $\boldsymbol{e}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$　　D. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$

分析 思路一：代数角度考虑，将 $|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}|$ 两边平方展开，整理得一个关于 t 的一元二次不等式恒成立，再由 $\Delta\leqslant 0$ 得出 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 的关系式.

思路二：几何角度考虑，利用向量加减的几何意义. 已知 $|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}|$，根据点到直线的距离中垂线段最短，构造符合此不等式的图形，在图形上看 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}$ 的位置关系.

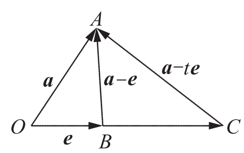
思路三：构造辅助函数，根据函数的性质求解.

解析 **解法一（代数角度）**：因为 $t\in\mathbf{R}$，恒有 $|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}|$，等价于 $|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|^2\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}|^2$ 恒成立，展开整理得 $t^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}t+(2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}-1)\geqslant 0$ 对任意 $t\in\mathbf{R}$ 均成立.

则需方程的判别式 $\Delta=(-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e})^2-4(2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}-1)\leqslant 0$，整理得 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e})^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}+1\leqslant 0$，即 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}-1)^2\leqslant 0$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=1$.

对四个选项进行验证，易得 $\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}-\boldsymbol{e}^2=0$，故选 C.

解法二（几何角度）：构造图形，如图所示，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{e}$，$\overrightarrow{OC}=t\boldsymbol{e}$，则 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}$.



因为对任意 t 恒有 $|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}|$，故无论点 C 在直线 OB 上何处恒有 $|\overrightarrow{CA}|\geqslant|\overrightarrow{BA}|$ 成立，则只有 $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{OB}$ 时满足，即 $\boldsymbol{e}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$ 成立，故选 C.

解法三（函数角度）：设 $f(t)=|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|=\sqrt{t^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}t+\boldsymbol{a}^2}$，由 $f(t)\geqslant f(1)$ 得 $-\dfrac{-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}}{2\times 1}=1$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}^2$，可得 $\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})=0$.

因此 $\boldsymbol{e}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$，故选 C.

评注

在解法一中我们对其两边平方，这是处理向量模的一般方法，应熟练掌握；解法二利用了向量的几何意义. 这两种解法充分体现了向量兼有代数和几何的双重属性.

变式 1　设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 为单位向量，非零向量 $\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$，$x,y\in\mathbf{R}$，若 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$，则 $\frac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}$ 的最大值等于________.

解析 ▶▶ **解法一（坐标运算角度）**：从坐标入手，借助配方法求最值.

设 $\boldsymbol{e}_1=(1,0)$，$\boldsymbol{e}_2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，则 $\boldsymbol{b}=\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}y,\frac{1}{2}y\right)$，当 $x=0$ 时，$\frac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}=0$.

当 $x\neq 0$ 时，$\frac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}=\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2+\sqrt{3}xy}}=\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+\sqrt{3}\left(\frac{y}{x}\right)+1}}=\sqrt{\frac{1}{t^2+\sqrt{3}t+1}}=\sqrt{\frac{1}{\left(t+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}}\leqslant\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4}}}=2$.

综上所述，$\frac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}$ 的最大值为 2.

解法二（方程角度）：从方程的角度，运用判别式法.

设 $\frac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}=t$，$|\boldsymbol{b}|=|x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2|$，可得 $|\boldsymbol{b}|^2=x^2+y^2+\sqrt{3}xy$，$x^2=t^2(x^2+y^2+\sqrt{3}xy)$；当 $x=0$ 时，$\frac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}=0$；当 $x\neq 0$ 时，$t^2\left(\frac{y}{x}\right)^2+\sqrt{3}t^2\left(\frac{y}{x}\right)+(t^2-1)=0$，有 $\Delta=(\sqrt{3}t^2)^2-4t^2(t^2-1)\geqslant 0$，解得 $t\in(0,2]$.

综上所述，$t\in[0,2]$，即 $\frac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}$ 的最大值为 2.

解法三（几何角度）：如图 1 所示，不妨设 $x\boldsymbol{e}_1=\overrightarrow{OA}$，$y\boldsymbol{e}_2=\overrightarrow{AB}$，则 $\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2=\overrightarrow{OB}$.

在 $\triangle OAB$ 中，$\frac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OB}|}=\frac{\sin\angle OBA}{\sin\angle OAB}$，又 $\langle\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1\rangle=\frac{\pi}{6}$，所以 $\angle OAB=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$，即 $\sin\angle OAB=\frac{1}{2}$.

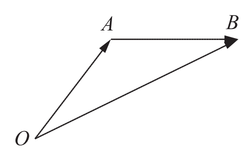


图 1

所以 $\frac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}=2\sin\angle OBA\leqslant 2$，即 $\frac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}$ 的最大值为 2.

解法四（从点到直线的距离这一角度入手）：要求 $\frac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}$ 的最大值，只需求 $\frac{|\boldsymbol{b}|}{|x|}=\left|\boldsymbol{e}_1+\frac{y}{x}\boldsymbol{e}_2\right|$ 的最小值. 构造共起点 O 的两个向量 $\boldsymbol{e}_1,\frac{y}{x}\boldsymbol{e}_2$，如图 2 所示.

设 $\boldsymbol{e}_1$ 的终点为 A，则 $\frac{y}{x}\boldsymbol{e}_2$ 的终点 P 的轨迹为一条经过点 O 的直线，记为 l.

由题意知，OA 与 l 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$，则 A 到 l 的距离为 $1\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，又由向量加法的平行四边

形法则可知 $\boldsymbol{e}_1+\frac{y}{x}\boldsymbol{e}_2$ 的终点在过 A 且与 l 平行的直线 m 上，则 $\left|\boldsymbol{e}_1+\frac{y}{x}\boldsymbol{e}_2\right|$ 就是 m 上的一动点与 O 点的距离，其最小值为 O 到直线 m 的距离，也就是点 A 到 l 的距离，即 $\frac{1}{2}$. 此即为 $\frac{|\boldsymbol{b}|}{|x|}$ 的最小值，因此 $\frac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}$ 的最大值为 2.

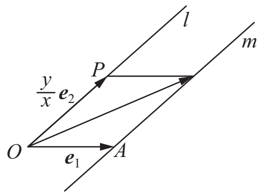


图 2

解法五（直接求解）：因为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 为单位向量且 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$，$\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$，则 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{x^2+y^2+\sqrt{3}xy}$.

当 $x\neq0$ 时，有 $\frac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}=\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2+\sqrt{3}xy}}=\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+\sqrt{3}\left(\frac{y}{x}\right)+1}}\leqslant2.$

故 $\frac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}$ 的最大值为 2.

评注

本题表述简洁清晰，灵活考查了平面向量基本定理、平面向量坐标表示、平面向量的数量积、平面向量的几何意义等知识，渗透了多种数学思想方法，因此我们可以从以上多个视角来解决.

例 27.2 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，$AB=3$，$AC=5$，则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=$________.

分析 本题可从多个角度入手解答. 思路一：特殊化思想，考虑特殊情形；思路二：作一般性的向量加减、数量积运算；思路三：将 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}$ 转化求 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 之间的关系；思路四：由于 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，即三边的垂直平分线的交点，因此构造垂直向量参与运算.

解析 **解法一（特殊化角度）**：如图 1 所示，考虑特殊情形，作 Rt$\triangle ABC$，使得 $B=90°$，$AB=3$，$AC=5$，则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{5}{2}\times4\times\cos C=10\times\frac{4}{5}=8.$

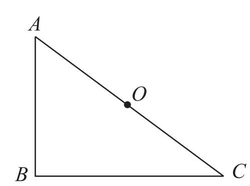


图 1

解法二（向量运算：数量积）：记 $\triangle ABC$ 外接圆半径为 R，作一般性计算，如图 2 所示，有 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=R^2(\cos\angle AOB-\cos\angle AOC)=R^2\left(\frac{2R^2-AB^2}{2R^2}-\frac{2R^2-AC^2}{2R^2}\right)=\frac{1}{2}(AC^2-AB^2)=8.$

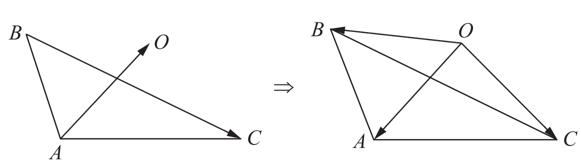


图 2

解法三（向量运算：向量平方）：对$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$向量等式两边平方，可得 $2R^2-2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=25$；对$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$向量等式两边平方，得 $2R^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=9$.

所以，两式相减得 $2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=16$.

故$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=\dfrac{2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{2}=8$.

解法四（向量运算：构造垂直向量）：如图 3 所示，分别取 AC,AB 的中点 D,E，则

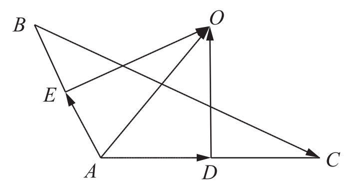


图 3

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}&=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}\\&=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO})\cdot\overrightarrow{AC}-(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EO})\cdot\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{AC^2}{2}-\frac{AB^2}{2}=8.\end{aligned}$$

评注

虽然课程不断改革，理念不断更新，题目不断出奇，但是数学探究思维方式是不变的. 广泛地经历向量运算与平面图形的几何性质的交汇，就能体会到一个题目可以常做常新——解题无止境，反思出新解.

变式 1　圆 O 的半径为 3，一条弦 $AB=4$，P 为圆 O 上任意一点，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP}$的最大值为(　　).

A. $\dfrac{3}{2}$　　　　B. 1　　　　C. 2　　　　D. 4

解析　如图 1 所示，应用射影处理.

为使 $f=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP}$最大，$\langle\overrightarrow{BP},\overrightarrow{AB}\rangle$必须为锐角，此时 $f=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP}=4\cdot\overrightarrow{BP}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AB}}{4}=4\cdot|\overrightarrow{BP}|\cos\langle\overrightarrow{BP},\overrightarrow{AB}\rangle$，即 f 为 4 $\overrightarrow{BP}$在$\overrightarrow{AB}$方向上的投影.

如图 2 所示，作 $PM\perp AB$ 于 M，则 $f=4|\overrightarrow{BM}|$，$f_{\max}=4|\overrightarrow{BM}|_{\max}$.

如图 3 所示，作直径 $CD/\!/AB$，则当 P 与点 D 重合时，得到最大值 $f_{\max}=4|\overrightarrow{BM}|_{\max}=4\times(3-2)=4$，故选 D.

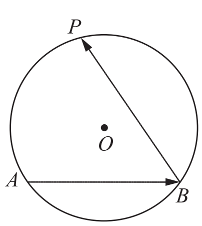


图 1

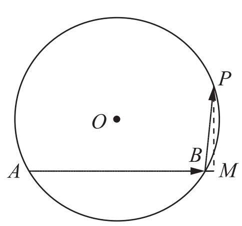


图 2

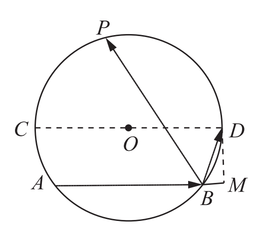


图 3

例 27.3　设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\dfrac{1}{2}$，$\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=60^\circ$，则 $|\boldsymbol{c}|$ 的最大值等于(　　).

A. 2　　　　B. $\sqrt{3}$　　　　C. $\sqrt{2}$　　　　D. 1

分析 思路一：通过平面向量的运算，借助均值不等式解关于$|\boldsymbol{c}|$的不等式；思路二：构造满足条件的几何图形直观求解.

解析 **解法一（向量运算）：**基于向量自身运算，构建目标.

因为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}$，所以$(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=-\frac{1}{2}$，展开得$\boldsymbol{c}^2+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=-\frac{1}{2}$，所以$2\boldsymbol{c}^2-2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}-1=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}||\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|\leqslant\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})^2+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2}{2}=1+\boldsymbol{c}^2-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$，$|\boldsymbol{c}|^2-2\leqslant(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{c}|$.

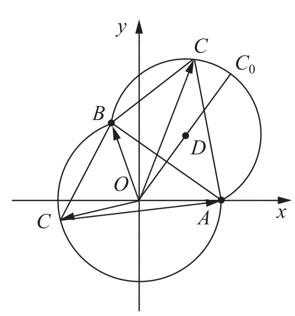
故$|\boldsymbol{c}|\leqslant 2$，其中“=”成立的条件是$\begin{cases}\boldsymbol{c}=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\lambda>0)\\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|\end{cases}$.

由此可计算得$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})|=\sqrt{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|^2-2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})+|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|^2}=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|$.

将$\boldsymbol{c}=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$代入$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$得$|(1-\lambda)\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，$\sqrt{(1-\lambda)^2+\lambda^2+\lambda(1-\lambda)}=\sqrt{3}$，$\lambda^2-\lambda-2=0\Rightarrow\lambda=2$或$\lambda=-1$（舍去），$\boldsymbol{c}=2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

则$|\boldsymbol{c}|_{\max}=2$，故选A.

评注 很明显，上述解法展示了向量自身运算的灵活性，但缺乏几何的直观性，致使解题过程很烦琐.



解法二（选择恰当的坐标系，坐标化，实现运算求解）：由$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$以及$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}$得$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=120°$，如果选择$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$作为基向量，实现运算转化，其过程将十分烦琐，通常取正交的单位向量作基底较为简单.

如图所示，建立平面直角坐标系，以坐标原点O为起点作向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$以及$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，则条件$\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=60°$转化为$\angle ACB=60°$，动点$C$的轨迹是两段以线段$AB$为公共弦的弧，圆心分别是原点$O$与$D\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，作简单几何计算，即得$|\boldsymbol{c}|_{\max}=|\overrightarrow{OC_0}|=2$，此时$\boldsymbol{c}=2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，故选A.

评注 挖掘向量条件的几何性质，探究相应的几何计算，能构建出简洁明快的解法. 通过训练，逐步提升探究思维能力.

例 27.4 已知平面单位向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 满足 $|2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2|\leqslant\sqrt{2}$，且 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $\cos^2\theta$ 的最小值为________.

分析 本题入手点较多，可设角后进行向量运算或引入参数或坐标来进行向量运算，还可结合向量加减的几何意义得出向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的关系式，并以此设坐标进行向量运算.

解析 **解法一（直接设角运算）**：设 α 为向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 的夹角.

因为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4+4\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=4+4\cos\alpha$.

又 $|2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2|\leqslant\sqrt{2}$，所以 $5-4\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\leqslant 2$，$\cos\alpha\geqslant\dfrac{3}{4}$，因为 $|\boldsymbol{a}|^2=2+2\cos\alpha$，$|\boldsymbol{b}|^2=10+6\cos\alpha$，

所以 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{4+4\cos\alpha}{\sqrt{2+2\cos\alpha}\cdot\sqrt{10+6\cos\alpha}}$.

故 $\cos^2\theta=\dfrac{4(1+\cos\alpha)}{5+3\cos\alpha}=\dfrac{4}{3}\left(1-\dfrac{2}{5+3\cos\alpha}\right)\geqslant\dfrac{28}{29}$，即 $\cos^2\theta$ 的最小值为 $\dfrac{28}{29}$.

解法二（设参数转化运算）：设 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=t$，因为 $|2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2|\leqslant\sqrt{2}$，两边平方可得 $\dfrac{3}{4}\leqslant t\leqslant 1$.

因为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，所以 $\boldsymbol{e}_1=\dfrac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{2}$，$\boldsymbol{e}_2=\dfrac{3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2}$，则 $|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}|=2$.

由 $|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}|^2$，化简得 $2\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，故 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{2|\boldsymbol{a}|^2}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{2|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$，所以 $\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}=\sqrt{\dfrac{5+3t}{1+t}}=\sqrt{3+\dfrac{2}{1+t}}\leqslant\sqrt{\dfrac{29}{7}}$，则 $\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\geqslant\sqrt{\dfrac{7}{29}}$.

所以 $\cos^2\theta=4\left(\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\right)^2\geqslant\dfrac{28}{29}$，即 $\cos^2\theta$ 的最小值为 $\dfrac{28}{29}$.

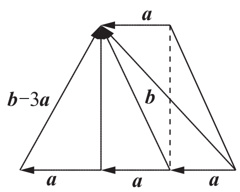
解法三（借助坐标运算）：设 $\boldsymbol{e}_1=(1,0)$，$\boldsymbol{e}_2=(x,y)$，则 $x^2+y^2=1$，$\boldsymbol{a}=(x+1,y)$，$\boldsymbol{b}=(x+3,y)$.

由 $|2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2|\leqslant\sqrt{2}$ 得 $(x-2)^2+y^2\leqslant 2$，将 $y^2=1-x^2$ 代入 $(x-2)^2+y^2\leqslant 2$，得 $\dfrac{3}{4}\leqslant x\leqslant 1$.

$\cos^2\theta=\left(\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\right)^2=\left[\dfrac{(x+1)(x+3)+y^2}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+3)^2+y^2}}\right]^2=\dfrac{4(x+1)^2}{(x+1)(3x+5)}=\dfrac{4(x+1)}{3x+5}=4\left[\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3(3x+5)}\right]$.

所以当 $x=\dfrac{3}{4}$ 时，$\cos^2\theta$ 取最小值 $\dfrac{28}{29}$.

解法四（结合几何意义）：由解法二知 $|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}|$，如图所示.



结合向量加减的几何意义，可知 $(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{a}=0$，又 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1$，所以 $|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|=2$.

不妨设 $\boldsymbol{a}=(x_0,0)$，$\boldsymbol{b}=(2x_0,t)$，且 $x_0^2+t^2=4$，由已知可得 $\boldsymbol{e}_1=\dfrac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{2}=$

$\left(\frac{x_0}{2},\frac{t}{2}\right)$，$\boldsymbol{e}_2=\frac{3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2}=\left(\frac{x_0}{2},-\frac{t}{2}\right)$，$2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2=\left(\frac{x_0}{2},\frac{3t}{2}\right)$，又$|2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2|\leqslant\sqrt{2}$，可得$x_0^2+9t^2\leqslant 8$．于是$x_0^2+9(4-x_0^2)\leqslant 8$，所以$x_0^2\geqslant\frac{7}{2}$，故$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{2x_0^2}{|x_0|\sqrt{4x_0^2+t^2}}=\frac{2|x_0|}{\sqrt{4x_0^2+t^2}}$，$\cos^2\theta=\frac{4x_0^2}{4x_0^2+t^2}=$

$$\frac{4x_0^2}{4x_0^2+4-x_0^2}=\frac{4}{3+\frac{4}{x_0^2}}\geqslant\frac{28}{29}.$$

故$\cos^2\theta$的最小值为$\frac{28}{29}$．

例 27.5 (2016 [redacted] 16) [redacted] $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，[redacted] $\boldsymbol{e}$，[redacted] $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}|+|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}|\leqslant\sqrt{6}$，[redacted] $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ [redacted]？

分析 [redacted]，[redacted]，[redacted]．

解析 **解法一**：$|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{e}|=|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}|\leqslant|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}|+|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}|\leqslant\sqrt{6}\Rightarrow|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant\sqrt{6}\Rightarrow|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leqslant 6\Rightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leqslant\frac{1}{2}$，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$的最大值为$\frac{1}{2}$．

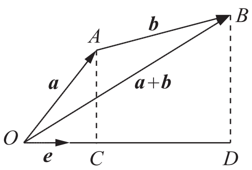
解法二：设$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}\rangle=\alpha$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\beta$，则$\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{e}\rangle=\alpha-\beta$．（$\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{e}\rangle=\alpha-\beta$，或$\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{e}\rangle=\alpha+\beta$同理）

所以$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}|=\cos\alpha+2\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta$

$$\begin{aligned}&=(2\cos\beta+1)\cos\alpha+2\sin\beta\sin\alpha\\&=\sqrt{(2\cos\beta+1)^2+(2\sin\beta)^2}\sin(\alpha+\varphi)\\&\leqslant\sqrt{(2\cos\beta+1)^2+(2\sin\beta)^2}=\sqrt{5+4\cos\beta}\leqslant\sqrt{6}.\end{aligned}$$

则$\cos\beta\leqslant\frac{1}{4}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\beta=2\cos\beta\leqslant\frac{1}{2}$，故$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$的最大值为$\frac{1}{2}$．

解法三：如图所示，设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AB}$在向量$\boldsymbol{e}$上投影分别为$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{CD}$，则由已知$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}|+|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}|\leqslant\sqrt{6}$得$|\overrightarrow{OD}|\leqslant\sqrt{6}$．



因为$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，所以$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$在向量$\boldsymbol{e}$上的投影，即$|\overrightarrow{OD}|=|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{e}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant\sqrt{6}$，所以$\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2\leqslant 6$，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leqslant\frac{1}{2}$，故$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$的最大值是$\frac{1}{2}$．

评注 [redacted] $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}|+|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}|=|(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{e}|$．[redacted]，[redacted]．

变式 1 [redacted] $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，[redacted] $\boldsymbol{e}$，[redacted] $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}|+|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}|\geqslant\frac{1}{2}$，[redacted] $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ [redacted]________．

解析 ▶▶ **解法一**：先建系，设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 当中有一个的纵坐标为零．现在有两种选择，第一种设 $\boldsymbol{a}$，第二种设 $\boldsymbol{b}$．如果设 $\boldsymbol{b}$ 的纵坐标为零，为保证所求绝对值最小，不妨先试一下 $\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(x,y)$，$\boldsymbol{e}=(\cos\theta,\sin\theta)$，则 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}|+|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}|=|\cos\theta|+|x\cos\theta+y\sin\theta|=|(x+1)\cos\theta+y\sin\theta|$ 或 $|(x-1)\cos\theta+y\sin\theta|$．这个时候最小值要么是 0，要么根据辅助角是 $|x+1|$，$|x-1|$ 或者 $|y|$．要比较这三个需要讨论，可以换一种设法：$\boldsymbol{b}=(2,0)$，$\boldsymbol{a}=(x,y)$，$\boldsymbol{e}=(\cos\theta,\sin\theta)$，这样的话就会出现 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}|+|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}|=|2\cos\theta|+|x\cos\theta+y\sin\theta|=|(x+2)\cos\theta+y\sin\theta|$ 或 $|(x-2)\cos\theta+y\sin\theta|$．这个时候最小值要么是 0，要么根据辅助角是 $|x+2|$，$|x-2|$ 或者 $|y|$．因为 $x^2+y^2=1\Rightarrow$ $\begin{cases}|x+2|\geqslant 1\geqslant |y|\\ |x-2|\geqslant 1\geqslant |y|\end{cases}$，所以最小值为 $|y|\geqslant\dfrac{1}{2}\Rightarrow y^2=1-x^2\geqslant\dfrac{1}{4}\Rightarrow-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2x\in$ $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$．

解法二：如图 1 所示画出 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，向量 $\boldsymbol{e}$ 的起点是 E，终点在圆 E 上运动，CD 垂直 $\boldsymbol{b}$，AB 垂直 $\boldsymbol{a}$．

此时 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}|+|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}|=\begin{cases}|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{e}|,\boldsymbol{e}\text{ 在扇形 }ACE\text{ 与扇形 }BED\text{ 内}\\ |(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{e}|,\boldsymbol{e}\text{ 在扇形 }BCE\text{ 与扇形 }AED\text{ 内}\end{cases}$，无论在哪个扇形区域运动，投影的绝对值最小，即当 $\boldsymbol{e}$ 与 CD 重合即可，即 $\boldsymbol{e}\perp\boldsymbol{b}$（原因 $|\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}|$）．

所以 $(|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}|+|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}|)_{\min}=|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}|=|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}\rangle|\geqslant\dfrac{1}{2}\Rightarrow\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}\rangle\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]\cup\left[\dfrac{2\pi}{3},\pi\right]$，如图 2 所示，$\boldsymbol{e}\perp\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}$ 的终点在加粗的圆弧上运动，则此时 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$，故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$．

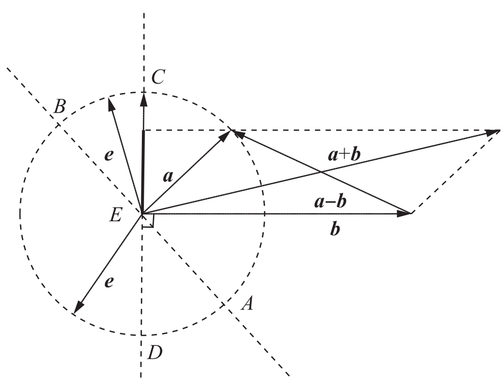


图 1

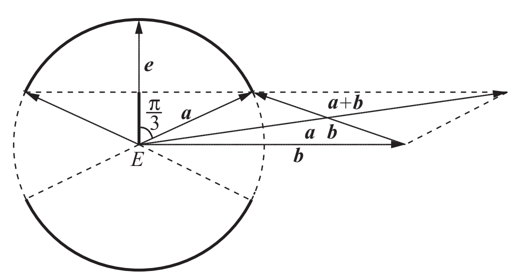


图 2

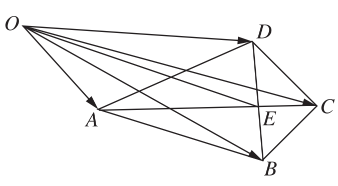
训练 27

1. 已知$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$，$|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$，求$|\boldsymbol{d}|$的最大值.

2. 在正$\triangle ABC$中，D是BC上的点，$AB=3$，$BD=1$，求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.

3. 在$\triangle ABC$中，$AB=2$，$AC=3$，D是边BC的中点，求$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$.

4. 如图所示，已知在四边形$ABCD$中，AC是BD的垂直平分线，垂足为E，O为直线BD外一点，设向量$|\overrightarrow{OB}|=5$，$|\overrightarrow{OD}|=3$. 求$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD})$的值.



5. [redacted] P [redacted] 1 [redacted] $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ [redacted] $A_1B_1C_1D_1$ [redacted], [redacted] $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$ [redacted].

6. [redacted] O [redacted] F [redacted] $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ [redacted], [redacted] P [redacted], [redacted] $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}$ [redacted].

7. [redacted] $ABCD$ [redacted], [redacted] $|AB|=4$, [redacted] $\frac{2\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{3\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|}=\frac{4\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$, [redacted] $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.

8. [redacted] $\triangle ABC$ [redacted], $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=7$, $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=6$, [redacted] $\triangle ABC$ [redacted].