第 34 讲
立体几何中的截面及空间轨迹问题

数学是研究客观世界的空间形式和数量关系的学科，而空间想象能力是数学要求的重要能力之一. 近几年，高考立体几何试题紧紧围绕空间想象能力和逻辑思维能力进行考查，以下是近三年考点分布情况：

考点	2020 年				2021 年			2022 年				合计
	Ⅰ卷	Ⅱ卷	Ⅲ卷	新高考	甲卷	乙卷	新高考	甲卷	乙卷	新高考 Ⅰ卷	新高考 Ⅱ卷	
三视图及展开图	理 16	理 7	理 8 文 9		理 6 文 7	文 16 理 16		理 4 文 4				3 年 10 考
空间几何体（球体）及计算	理 3 文 3 理 10 文 12	理 10 文 12	理 15 文 16		理 11 文 14		3		理 9 文 12	4 8	7 11	3 年 17 考
动态问题探究（截面问题）				16			12		理 7			3 年 3 考
位置关系的判断与证明	理 18 文 19	理 20 文 20	理 19 文 19	20	理 19 文 19	文 18	20	理 18 文 19	理 18 文 9		20	3 年 16 考
空间角的计算	理 18	理 20	理 19	4 20	理 19	理 5 文 10 理 18	20	理 7 理 18 文 9	文 18 理 18	9 19	20	3 年 18 考
空间距离或体积	文 19	文 20			文 19	理 18 文 18	20	文 19	文 18	19		3 年 9 考

根据近几年的考点分布来看，立体几何在高考层面考查的难度并不大，属于中档难度，极个别问题综合性强一些，但也是基本思想、方法的运用. 但在“强基”层面，还是有很多思维上的考查. 这类题目形式多样，多数是以空间图形的截面、折叠、展开为知识和能力的结合点，考查学生的空间想象能力、动手操作能力、探究能力和灵活运用所学知识解决实际问题的能力.

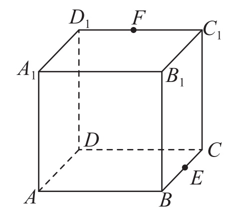
本讲针对几个重要考点进行梳理，比如平面化的方法有截面图、展开图等，对应的就会产生轨迹、解三角形、折叠方面的问题；再比如代数化的方法有向量法、函数法等，对应的就会产生建系、构造函数等问题.

34.1　截面问题

研究密钥

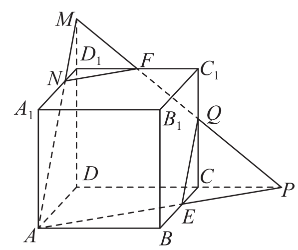
截面：一个平面与空间几何体相交所得的公共部分图形，包括边界及其内部.

截面问题是立体几何中的典型问题之一.空间几何体作为研究立体几何的重要载体，几乎包含了立体几何的所有研究对象，空间几何体截面问题的探究出现在高考命题中的次数也越来越多.截面对研究几何体有着重要的作用，如平行于底面的截面、过高线的截面、过侧棱的截面、过锥体顶点的截面、旋转体的轴截面、某直线的垂面等，这些截面都是常用的截面，它们集中反映了几何体的元素间的位置关系和数量关系.在动点、动直线，甚至是动平面问题的探究过程中，作出和研究这些截面，是把空间问题转化为平面几何问题的重要途径，也是立体几何知识的基础性与综合性的集中体现.



例 34.1 如图所示，在棱长为 4 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是 BC 和 C_1D_1 的中点，经过点 A，E，F 的平面把正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 截成两部分，则截面与 BCC_1B_1 的交线段长为________.

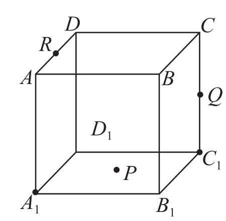
分析 A，E，F 三点确定一个平面，设为 α，且 $E\in\alpha$，$E\in$ 平面 BCC_1B_1，则平面 α 与平面 BCC_1B_1 相交，设交线为 l，通过延长线可得到完整的截面 α 和交线 l.



解析 如图所示，延长 AE 与 DC 的延长线交于点 P，连接 FP 交 CC_1 于点 Q，则 QE 是截面与侧面 BCC_1B_1 的交线段，$\triangle FC_1Q\backsim\triangle PCQ$，由比例知 $CE=2$，$QC=\frac{8}{3}$，$QE^2=4+\frac{64}{9}=\frac{100}{9}$，所以 $QE=\frac{10}{3}$.

评注

延长 QF 交 DD_1 的延长线于点 M，连接 MA 交 A_1D_1 于点 N，连接 NF，截面为五边形 $AEQFN$.可以用至少 3 种方法作此截面.



变式 如图所示，已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2$，P 为底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心，Q，R 分别为 CC_1，AD 的中点，求截面 PQR 与正方体各面的交线.

解析 作法如下：(1) 如图 1 所示，连接 PQ，RQ，PR，显然 $\triangle PQR$ 不是截面多边形.(截面是平面与几何体的公共部分图形，包含边界及其内部)

(2)取 D_1C_1 中点 M，连接 DM，易证 $DM/\!/PR$，取 DC 中点 N，连接 C_1N，可得 $DM/\!/C_1N$.

取 NC 中点 E，连接 QE，易知 $QE/\!/PR$. QE 是截面 PQR 与平面 DD_1C_1C 的交线.

(3)连接 RE，则 RE 为截面 PQR 与平面 $ABCD$ 的交线.($R,E\in$ 平面 $ABCD$，$R,E\in$ 截面 PQR)

(4)如图 2 所示，延长 EQ，交 D_1C_1 延长线于点 F，易知 $C_1F=\frac{1}{2}=CE$. 连接 FP 交 B_1C_1 于点 K，延长 FP 交 A_1D_1 于点 T，如图 3 所示. 在底面 $A_1B_1C_1D_1$ 中，因为边长为 2，$C_1F=\frac{1}{2}$，$C_1K/\!/MP/\!/D_1T$，$\triangle FC_1K\backsim\triangle FMP\backsim\triangle FD_1T$，由相似比易知 $C_1K=\frac{1}{3}$，$D_1T=\frac{5}{3}$. 故 TK 即为截面 PQR 与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的交线.

(5)连接 QK，TR，则 QK，TR 分别为截面 PQR 与侧面 BB_1C_1C 及侧面 AA_1D_1D 的交线.

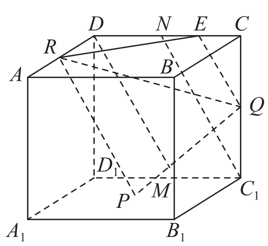


图 1

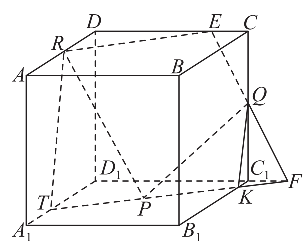


图 2

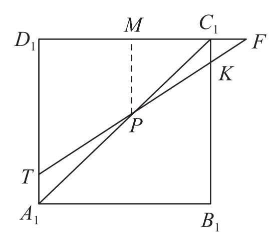
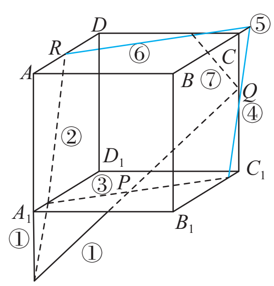
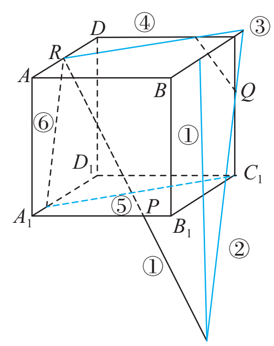


图 3

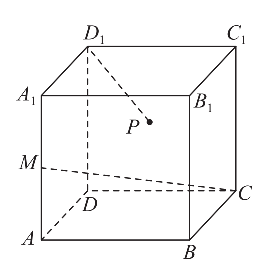
评注

该题还可以用至少 2 种方法作截面，如下图所示.



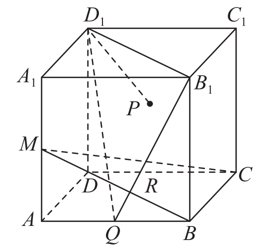


例 34.2 如图所示，正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，M 是棱 AA_1 的中点，点 P 在侧面 ABB_1A_1 内，若 D_1P 垂直于 CM，则△PBC 的面积的最小值为________.



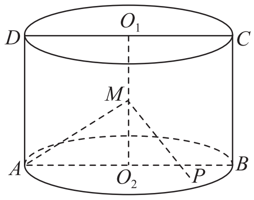
分析 因为 $D_1P\perp CM$，所以动点 P 在 CM 的垂面内，又因为 $P\in$ 平面 ABB_1A_1，所以点 P 在 CM 的垂面和平面 ABB_1A_1 的交线上，且 P 的运动轨迹为一条线段.

解析 如图所示，取 AB 中点 Q，连接 B_1Q，D_1Q，B_1D_1，B_1Q 与 BM 相交于点 R，易证



$B_1D_1\perp CM$，$B_1Q\perp CM$，则平面 $D_1B_1Q\perp CM$，又 $D_1P\perp CM$，所以 $D_1P\subset$平面 D_1B_1Q，且 $P\in$平面 ABB_1A_1，故$P\in B_1Q$.

$S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot d=d$，当 d 为 BC 与 B_1Q 的公垂线，即 $d=BR$ 时，$\triangle PBC$ 的面积最小. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BB_1Q$ 中，$d_{\min}=BR=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，故$\triangle PBC$ 的面积的最小值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

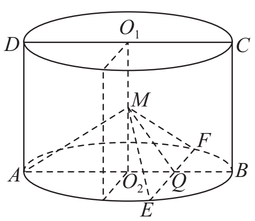


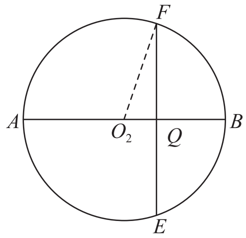
变式 如图所示，在圆柱的轴截面 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=2$，O_1，O_2 分别为圆柱上下底面的中心，M 为 O_1O_2 的中点，动点 P 在圆柱下底面内(包括圆周). 若 $AM\perp MP$，则点 P 形成的轨迹的长度为________ .

解析 在线段 O_2B 上取一点 Q，使得 $O_2Q=\frac{1}{4}O_2B$，则由边长关系可得$\triangle AMO_2\backsim\triangle MQO_2$，所以$\angle AMO_2=\angle MQO_2$，$\angle QMO_2=\angle MAO_2$，且$\angle AMQ=\angle AMO_2+\angle QMO_2=\angle AMO_2+\angle MAO_2=90^\circ$，即 $AM\perp MQ$.

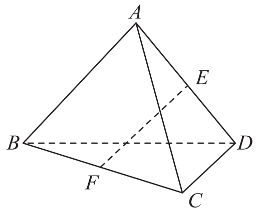
如图所示，过 Q 作 AB 的垂线，交$\odot O_2$ 于 E，F，则 $EF\perp AB$，$EF\perp MQ$，所以 $EF\perp$平面 AMQ，即 $EF\perp AM$，又因为 $AM\perp MQ$，所以 $AM\perp$平面 MEF.

故点 P 在底面的轨迹为线段 EF，$EF=2\sqrt{FO_2^2-QO_2^2}=2\sqrt{4-\frac{1}{4}}=\sqrt{15}$.



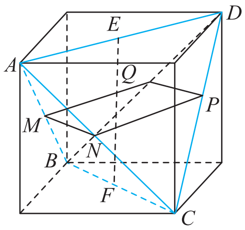


本题依然是对三垂线定理的应用，也有对三角形相似的考查. 在几何体中，对基本几何关系要熟悉.



例 34.3 如图所示，已知四面体 $A\text{-}BCD$ 为正四面体，$AB=1$，E，F 分别是 AD，BC 中点，若用一个与直线 EF 垂直，且与四面体的每一个面都相交的平面 α 去截该四面体，得到一个多边形截面，则该多边形截面面积的最大值为(　　).

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　D. 1



分析 借助正方体构造正四面体.

解析 如图所示,将正四面体嵌在正方体中,$EF\perp AD$,$EF\perp BC$.

设平面 α 与 AB,AC,CD,BD 分别交于点 M,N,P,Q,则 $\alpha/\!/AD$,$\alpha/\!/BC$. 因为平面 $ABC\cap\alpha=MN$,所以 $MN/\!/BC$. 同理可证 $NP/\!/AD$. 而 $BC\perp AD$,所以 $MN\perp NP$,四边形 $MNPQ$ 为矩形.

设 $MN=k,k\in(0,1)$,则 $NP=1-k$,$S=k(1-k)\leqslant\left[\dfrac{k+(1-k)}{2}\right]^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$. 当且仅当 $k=\dfrac{1}{2}$ 时等号成立,故选 A.

变式 在四面体 $ABCD$ 中,$AB=CD=2$,$AC=BD=\sqrt{5}$,$AD=BC=\sqrt{7}$. 若平面 α 同时与直线 AB、直线 CD 平行,且与四面体的每一个面都相交,由此得到一个多边形截面,则该多边形面积的最大值为(　　).

A. $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\dfrac{5\sqrt{3}}{8}$　　D. $\dfrac{7\sqrt{3}}{8}$

分析 借助长方体构造四面体.

解析 如图 1 所示,将四面体嵌入长方体中,设长方体的长、宽、高分别为 a,b,c,则 $\begin{cases}a^2+b^2=7\\b^2+c^2=4\\a^2+c^2=5\end{cases}$,解得 $\begin{cases}a=2\\b=\sqrt{3}\\c=1\end{cases}$.

设平面 α 与 AD,AC,BC,BD 分别交于点 M,N,P,Q,则 $MN/\!/PQ/\!/CD$,$NP/\!/MQ/\!/AB$.

设 $\dfrac{MN}{CD}=k,k\in(0,1)$,则 $\dfrac{NP}{AB}=1-k$,又 $AB=CD=2$,所以平行四边形 $MNPQ$ 对边分别为 $2k,2(1-k),k\in(0,1)$.

由 MN 与 NP 的夹角即是 CD 与 AB 的夹角且易知 AB 与 CD 的夹角 θ 为 $60°$. 如图 2 所示,则平行四边形 $MNPQ$ 的面积 $S=|MN||NP|\sin60°=2k\cdot2(1-k)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}k(1-k)\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,当且仅当 $k=\dfrac{1}{2}$ 时等号成立,故选 B.

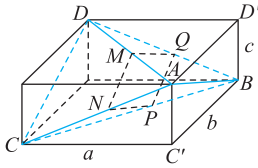


图 1

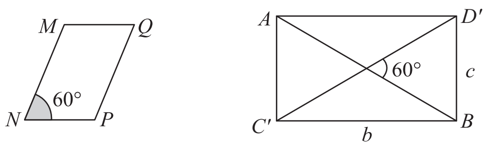


图 2

例 34.4 已知正方体的棱长为 1,每条棱所在直线与平面 α 所成的角都相等,则 α 截此正方体所得截面面积的最大值为(　　).

A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

分析 思路一：根据正方体的“对称性”，确定所求截面在平面 ACD_1 与平面 A_1C_1B 之间，利用截面在底面上的射影求截面的面积.

思路二：根据极限思想确定经过中心 O 时截面面积最大，此时截面为正六边形.

思路三：根据空间向量在立体几何中的应用，将线面角问题转化为直线与平面法线的夹角问题，即找平面的法线，使其与所有棱所在直线所成角都相等.

思路四：将截面进行延展，得到等边三角形 PQR，根据截面面积和等边三角形面积的比值求截面的面积.

解析 **解法一**：因为 $A_1B_1 /\!/ D_1C_1 /\!/ DC /\!/ AB$，$AA_1 /\!/ BB_1 /\!/ CC_1 /\!/ DD_1$，$A_1D_1 /\!/ B_1C_1 /\!/ BC /\!/ AD$，所以根据正方体的“对称性”可知每条棱所在直线与平面 α 所成角相等，等价于直线 DA，DC，DD_1 与平面 α 所成角相等.

根据上述可联想到正三棱锥 $D\text{-}ACD_1$，故平面 $\alpha /\!/$ 平面 ACD_1. 同理，平面 A_1C_1B 也符合题意，面积最大的截面一定在平面 ACD_1 与平面 A_1C_1B 之间.

如图 1 所示，设截面 α 与各棱交点分别为 G，H，M，N，E，F，则利用面积射影法可得二面角 $E\text{-}GH\text{-}D$ 的余弦值 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

过 E 作 $EE_1 \perp AD$，垂足为 E_1，过 N 作 $NN_1 \perp DC$，垂足为 N_1，截面 $GHMNEF$ 在底面 $ABCD$ 内的射影为 $GHCN_1E_1A$，如图 2 所示. 由射影面积法可知射影面积 S_0 与截面面积 S 的比值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $S=\sqrt{3}S_0$.

设 $BG=x$，则 $BG=BH=AE_1=CN_1=x$，$DE_1=DN_1=1-x$，所以 $S_0=1-S_{\triangle BGH}-S_{\triangle DE_1N_1}=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}(1-x)^2=-x^2+x+\frac{1}{2}=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$，当 $x=\frac{1}{2}$ 时，S_0 有最大值为 $\frac{3}{4}$，此时 $S_{\max}=\sqrt{3}S_0=\frac{3\sqrt{3}}{4}$. 故选 A.

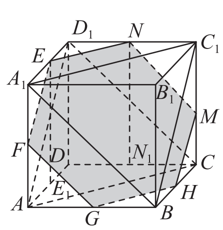


图 1

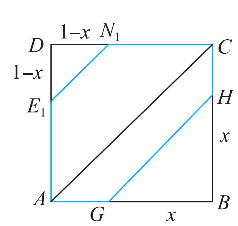


图 2

解法二：如图 3 所示，截面 α 只要与 $\triangle ACD_1$ 和 $\triangle A_1BC_1$ 所在平面平行就是符合题意的. 应当确定的是满足题意的平面 α 有无数个，不妨设平面 α 是由平面 ACD_1（或平面 A_1BC_1）沿正方体的体对角线 DB_1 平行移动而形成的，可以把过顶点 D 或 B_1 时的平面 α 理解成截面面积是 0

的极端特殊情形. 再利用正方体的对称性确定平面经过中心 O 时截面面积为最大，此时截面是由六条棱 D_1A_1，A_1A，AB，BC，CC_1，C_1D_1 的中点连线而成的正六边形 $EFGHMN$，其边长为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，此时截面面积为 $6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}$. 故选 A.

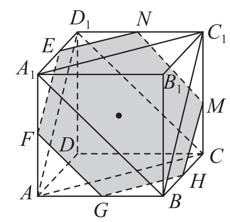


图 3

解法三：如图 4 所示，在空间直角坐标系 $D\text{-}xyz$ 中，正方体的体对角线 DB_1 所在直线和所有棱所在的直线夹角相等（正方体是非常特殊的几何体之一，且有一定的对称性，其中体对角线所在直线即为“对称轴”，且 $DB_1\perp$ 平面 ACD_1，$DB_1\perp$ 平面 A_1BC_1）. 利用数学运算的方法，即将问题转化为如图 5 所示的平面图形的面积计算.

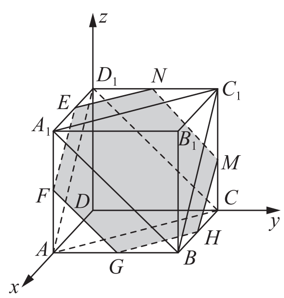


图 4

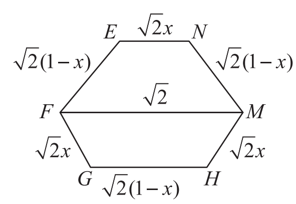


图 5

设 $CM=x$，则截面面积 $S=\frac{1}{2}(\sqrt{2}x+\sqrt{2})\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}(1-x)+\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}(1-x)+\sqrt{2}\right]\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{2}(-2x^2+2x+1)=-\sqrt{3}\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\right]$，$x\in(0,1)$.

所以当 $x=\frac{1}{2}$ 时，截面面积 S 取最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$. 故选 A.

解法四：利用正方体的对称性确定平面经过中心 O 时截面面积为最大，如图 6 所示，将截面进行延展，得到等边三角形 PQR，此时正六边形的顶点为正三角形边长的三等分点，所以截面面积 $S=\frac{2}{3}S_{\triangle PQR}=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}$. 故选 A.

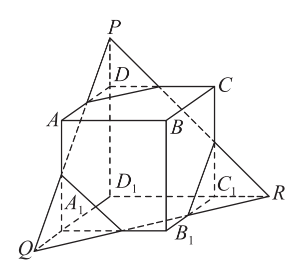


图 6

34.2　空间轨迹问题

研究密钥

空间轨迹问题，一般是指空间几何体表面或者内部动点的轨迹问题，多与截面相关. 包括用平面截多面体得交线段，也包括平面截旋转体得曲线. 如用平面截球面、用平面截圆锥（得圆锥曲线）等. 除了空间问题平面化、几何问题代数化，常常也和解三角形、解析几何问题综合.

例 34.5 (2020 新高考全国Ⅰ卷 16)已知直四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长均为 2，$\angle BAD=60^\circ$，以 D_1 为球心，$\sqrt{5}$为半径的球面与侧面 BCC_1B_1 的交线长为______.

分析 ▶▶ 将平面与球面的交线转化至平面内求解.

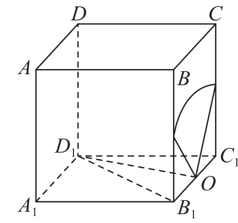


图 1

解析 ▶▶ 由球体的性质知侧面 BCC_1B_1 所在平面与球面的公共部分是小圆的一段圆弧，该截面小圆的圆心为 B_1C_1 的中点，如图 1 所示.

因为直四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 所有棱长为 2，$\angle BAD=60^\circ$，所以 $\triangle B_1C_1D_1$ 为等边三角形，则 $D_1O\perp B_1C_1$，$D_1O\perp$ 平面 BCC_1B_1.

易知 $D_1O=\sqrt{3}$，因为球的半径为$\sqrt{5}$，所以截面圆半径 $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{5-3}=\sqrt{2}$，故球面与平面 BCC_1B_1 的交线上的点即为平面 BCC_1B_1 内到 O 距离为$\sqrt{2}$的点.

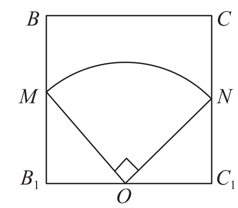
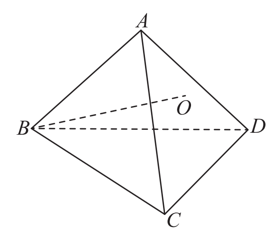


图 2

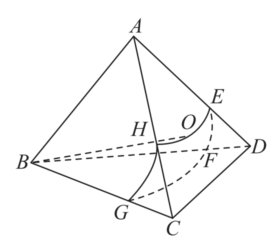
在正方形 BCC_1B_1 中，以 O 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径作弧，如图 2 所示，易知$\overset{\frown}{MN}$是$\frac{1}{4}$个圆，故$\overset{\frown}{MN}$的长为$\frac{1}{4}\times 2\pi r=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$，即球面与侧面 BCC_1B_1 的交线长为$\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

评注 ▶▶ 本题通过球面与平面交线长的计算，考查学生空间想象能力、逻辑推理能力及运算求解能力，考查核心是球体的截面性质.



变式 1 如图所示，在正三棱锥 $A\text{-}BCD$ 中，底面边长为$\sqrt{6}$，侧面均为等腰直角三角形，现该三棱锥的表面上有一动点 O，且 $OB=2$，则动点 O 在三棱锥表面所形成的轨迹曲线的长度为______.

解析 ▶▶ 如图所示，轨迹为曲线 $EFGH$，因为在正三棱锥 $A\text{-}BCD$ 中，底面边长为$\sqrt{6}$，侧面均为等腰直角三角形，故 $AB=\sqrt{3}$.

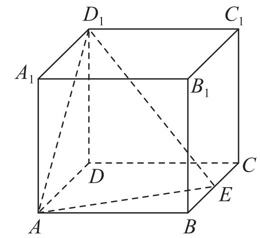


在$\triangle ABH$ 中，因为 $BH=2$，$AB=\sqrt{3}$，$\angle BAH=90^\circ$，所以$\angle ABH=\frac{\pi}{6}$，$AH=1$，$\angle CBH=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$，故$\overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{GH}=\frac{\pi}{12}\times 2=\frac{\pi}{6}$，又 $AH=AE=1$，$\angle CAD=\frac{\pi}{2}$，所以$\overset{\frown}{HE}=\frac{\pi}{2}$，$\overset{\frown}{GF}=\frac{\pi}{3}\times 2=\frac{2\pi}{3}$.

则点 O 的轨迹长度为 $2\times\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$.

变式 2 如图所示，在棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是棱 BC 的中点，F 是侧面 BCC_1B_1 上的动点，且 $A_1F /\!/$ 平面 AD_1E，则 A_1F 与平面 BCC_1B_1 所成角的正切值 t 构成

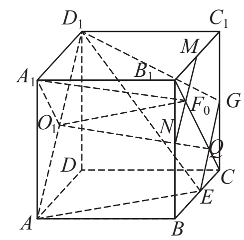
的集合是(　　).



A. $\left\{t \middle| \frac{2\sqrt{5}}{5} \leqslant t \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$　　B. $\{t \mid 2 \leqslant t < 2\sqrt{2}\}$

C. $\left\{t \middle| \frac{2\sqrt{5}}{5} \leqslant t \leqslant 2\sqrt{3}\right\}$　　D. $\{t \mid 2 \leqslant t \leqslant 2\sqrt{2}\}$

解析 ▶▶ 如图所示,取 CC_1 的中点 G,连接 EG,D_1G. 设 B_1C_1,B_1B,C_1C 的中点分别为 M,N,G,连接 MN,B_1C 且 MN 交 B_1C 于 F_0.

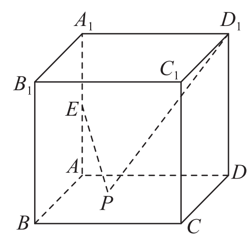


设 $B_1C \cap EG = Q$,侧面 ADD_1A_1 的中心为 O_1,连接 O_1Q,A_1F_0,A_1O_1,易知 $A_1O_1 \underline{\mathrel{/\!/}} F_0Q$,则四边形 $A_1O_1QF_0$ 为平行四边形,所以 $A_1F_0 \parallel O_1Q$,又 $O_1Q \subset$ 平面 $AEGD_1$,$A_1F_0 \not\subset$ 平面 $AEGD_1$,因此 $A_1F_0 \parallel$ 平面 $AEGD_1$.

又 $MN \parallel$ 平面 $AEGD_1$,$MN \cap A_1F_0 = F_0$,MN,$A_1F_0 \subset$ 平面 A_1MN,故平面 $A_1MN \parallel$ 平面 $AEGD_1$,则动点 F 的运动轨迹是线段 MN.

设 A_1F 与平面 BCC_1B_1 所成角的正切值为 t,则 $t = \frac{A_1B_1}{B_1F} = \frac{1}{B_1F}$,又 $B_1F \in \left[\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}\right]$,所以 $t \in [2, 2\sqrt{2}]$. 故选 D.

例 34.6 如图所示,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,E 是 AA_1 的中点,P 为底面 $ABCD$ 内动点,设 PD_1,PE 与底面 $ABCD$ 所成的角分别为 θ_1,θ_2(θ_1,θ_2 均不为 0),若 $\theta_1 = \theta_2$,则动点 P 的轨迹为(　　).

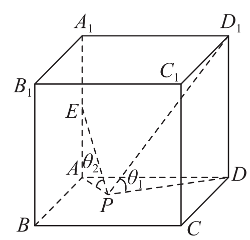


A. 直线的一部分　　B. 圆的一部分

C. 椭圆的一部分　　D. 抛物线的一部分

分析 ▶▶ 使用投影得到平面角,根据两角的正切值可得点 P 到点 A 和点 D 的距离成比例,故点 P 的轨迹为圆.

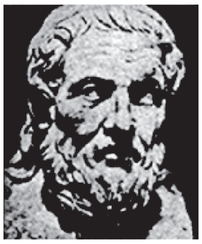
解析 ▶▶ 如图所示,连接 PD,PA,则 PD_1 与底面所成角的平面角 θ_1 即为 $\angle D_1PD$,PE 与底面所成角的平面角 θ_2 即为 $\angle EPA$.



不妨设正方体的棱长为 1,则 $\tan\theta_1 = \frac{DD_1}{PD}$,$\tan\theta_2 = \frac{AE}{PA}$,由 $\theta_1 = \theta_2$ 得 $PA = \frac{1}{2}PD$,故点 P 的轨迹为圆(阿波罗尼斯圆). 故选 B.

评注 ▶▶

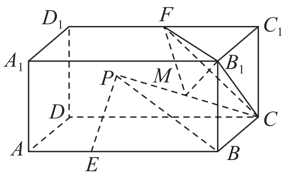
在本题中由于点 P 在一个平面上运动,且满足 $PA = \frac{1}{2}PD$,所以其轨迹为阿波罗尼斯圆. 阿波罗尼斯圆的概念可拓展到空间,即在空间中,动点 P 到两定点 A,B 的距离满足 $PA = \lambda PB$($\lambda > 0$,$\lambda \neq 1$),可以看作阿波罗尼斯球. 这便是阿波罗尼斯圆的三维空间版本.



阿波罗尼斯

变式 古希腊数学家阿波罗尼斯发现：平面上到两定点 A，B 距离之比为常数 $\lambda(\lambda>0$ 且 $\lambda\neq1)$ 的点的轨迹是一个圆心在直线 AB 上的圆，该圆简称阿氏圆. 根据以上信息，解决下面的问题：如图所示，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2AD=2AA_1=6$，点 E 在棱 AB 上，$BE=2AE$，动点 P 满足 $BP=\sqrt{3}PE$.

若点 P 在平面 $ABCD$ 内运动，则点 P 所形成的阿氏圆的半径为________；若点 P 在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 内部运动，F 为棱 C_1D_1 的中点，M 为 CP 的中点，则三棱锥 $M\text{-}B_1CF$ 的体积的最小值为________.



解析 ▶▶ 在平面 $ABCD$ 上建立平面直角坐标系（如图 1 所示），则 $B(2,0)$，$E(-2,0)$，假设 $P(x,y)$，由 $BP=\sqrt{3}PE$ 得 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{(x+2)^2+y^2}$，整理得 $(x+4)^2+y^2=12$，所以动点 P 的轨迹是以 A 为圆心，$2\sqrt{3}$ 为半径的阿氏圆.

同理，推广到空间中，如图 2 所示，动点 P 的轨迹是以 A 为球心，$2\sqrt{3}$ 为半径的阿氏球面，根据长方体的棱长易知该四棱柱是两个正方体的组合体，所以 $AF\perp$ 平面 CB_1F，此时点 P 到平面 B_1CF 的最小距离为 $h_A-2\sqrt{3}=3\sqrt{3}-2\sqrt{3}=\sqrt{3}$. 又 M 为 CP 的中点，所以点 M 到平面 B_1CF 的最短距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，从而 $(V_{M\text{-}B_1CF})_{\max}=\frac{1}{3}h_M\cdot S_{\triangle B_1CF}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times18\right)=\frac{9}{4}$.

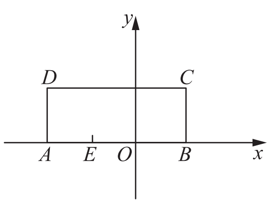


图 1

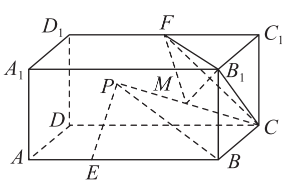
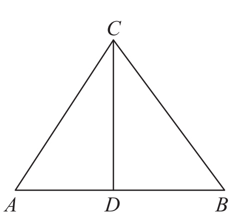
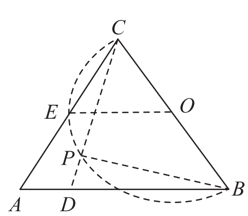


图 2

例 34.7 如图所示，$\triangle ABC$ 的边长都为 2，在边 AB 上任取一点 D，沿 CD 折起，使平面 $BCD\perp$ 平面 ACD. 在平面 BCD 内过点 B 作 $BP\perp$ 平面 ACD，垂足为 P，那么随着点 D 的变化，点 P 的轨迹长度为（　　）.

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. π





分析 ▶▶ 由垂足可以找到圆心，根据折叠的临界情况计算弧长.

解析 ▶▶ 由题意可得平面 $BCD\perp$ 平面 ACD. 因为 $BP\perp$ 平面 ACD，所以 $BP\perp CD$，即