

分数阶傅里叶变换

本章介绍一种傅里叶变换的广义形式——分数阶傅里叶变换(Fractional Fourier Transform, FRFT)。本章将讨论时频平面上的旋转表示,包括分数阶傅里叶变换的定义和性质、分数阶傅里叶变换与其他时频分析工具的关系、分数阶傅里叶域的不确定原理,最后介绍 Chirp 信号的时频特点和 Chirp 平稳的基本概念。

5.1 分数阶傅里叶变换基础

5.1.1 分数阶傅里叶变换的定义

分数阶傅里叶变换可以有若干种不同的定义方式,可以由其中任何一种定义导出其他的定义方式,它们都是彼此等价的^[1]。本节给出易于理解的基本定义。

首先回顾傅里叶变换的定义,采用对称形式描述为

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5-1)$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5-2)$$

或

$$X(f) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (5-3)$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (5-4)$$

其中, $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}^{-1}$ 表示傅里叶变换算子和傅里叶变换逆算子。注意式(5-1)和式(5-2)定义与通常定义的系数不同,这种对称形式便于引出算子的分数幂次形式。若 n 为整数, $\mathcal{F}^n$ 表示对信号 $x(t)$ 的 n 次傅里叶变换,则容易得出下列结论:

- ① 信号 $x(t)$ 的 1 阶傅里叶变换为其频谱 $X(\omega)$ 或 $X(f)$ 。
- ② 信号 $x(t)$ 的 2 阶傅里叶变换为时域翻转 $x(-t)$ 。
- ③ 信号 $x(t)$ 的 3 阶傅里叶变换为其频谱翻转 $X(-\omega)$ 或 $X(-f)$ 。

④ 信号 $x(t)$ 的 4 阶傅里叶变换为其本身 $x(t)$, 等价于 0 阶傅里叶变换。

在时频二维平面上, 1 阶傅里叶变换相当于将时间轴逆时针旋转 $\pi/2$, 2 阶傅里叶变换相当于将时间轴逆时针旋转 $2(\pi/2)$ 等。更一般地, n 阶傅里叶变换相当于将时间轴逆时针旋转 $n(\pi/2)$ 。若令 $\alpha = n(\pi/2)$, 并且使用旋转算子 $R^\alpha = R^{n \cdot \pi/2} = \mathcal{F}^n$ 表示 n 阶傅里叶变换, 则旋转因子具有以下形式。

① 零旋转: 零旋转算子为恒等算子 $R^0 = I$ 。

② 与傅里叶变换的等价性, 即 $R^{\pi/2} = \mathcal{F}$ 。

③ 旋转相加性: $R^{\alpha+\beta} = R^\alpha R^\beta$ 。

④ 2π 旋转: $R^{2\pi} = I$ 。

那么, 很自然地思考一个问题, 若 n 不限定为整数, 进行一般化地拓展, $\alpha = p(\pi/2)$, 会得到何种变换呢? 答案自然是分数阶傅里叶变换。

FRFT 基本定义: 函数 $x(t)$ 的 p 阶分数阶傅里叶变换是一个线性积分运算

$$X_p(u) = \mathcal{F}^p[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} K_p(u, t) x(t) dt \quad (5-5)$$

其中 $K_p(u, t)$ 称为分数阶傅里叶变换的核函数, 其定义为

$$K_p(t, u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - j \cot \alpha}{2\pi}} e^{j \frac{t^2 + u^2}{2} \cot \alpha - jtu \csc \alpha} & \alpha \neq n\pi \\ \delta(t - u) & \alpha = 2n\pi \\ \delta(t + u) & \alpha = (2n \pm 1)\pi \end{cases} \quad (5-6)$$

其中 n 是任意整数。如果 $p=1$, 即 $\alpha = \pi/2$, 此时式(5-6)为

$$K_1(t, u) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-jut} \quad (5-7)$$

比较式(5-1)和式(5-7), 可以看到分数阶傅里叶变换退化为角频率 ω 表达的对称型傅里叶变换。如果对式(5-6)进行变量替换, $u \leftarrow u/\sqrt{2\pi}$, $t \leftarrow t/\sqrt{2\pi}$, 可得

$$K_p(t, u) = \begin{cases} \sqrt{1 - j \cot \alpha} e^{j\pi(u^2 \cot \alpha - 2ut \csc \alpha + t^2 \cot \alpha)} & \alpha \neq n\pi \\ \delta(t - u) & \alpha = 2n\pi \\ \delta(t + u) & \alpha = (2n \pm 1)\pi \end{cases} \quad (5-8)$$

显然, 如果 $p=1$, 即 $\alpha = \pi/2$, 此时式(5-8)表达式为

$$K_1(t, u) = e^{-j2\pi ut} \quad (5-9)$$

比较式(5-3)和式(5-9), 可以看到此时分数阶傅里叶变换退化为频率表达 f 的傅里叶变换。因此, 式(5-3)和式(5-8)可以认为分别是 ω 和 f 对应的傅里叶变换的分数化推广(图 5-1)。

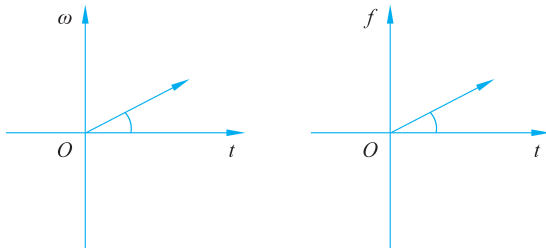


图 5-1 傅里叶变换算子幂次的分数化

$X_p(\cdot)$ 为信号 $x(t)$ 在 p 阶分数阶傅里叶域中的表示,为了区分这些不同域上的变量,有时候把每个域的变量写作 u_p ,于是 $X_p(u_p)$ 是在 p 阶域的表示, $X_0(u_0)$ 是在时域的表示, $X_1(u_1)$ 是在频域的表示。

5.1.2 分数阶傅里叶变换的基本性质

分数阶傅里叶变换的性质比较多^[1-4],下面列出了 FRFT 的一些基本性质。

性质 1 时间偏移的影响,若信号 $z(t) = x(t - t_0)$,则有

$$Z_p(u) = X_p(u - t_0 \cos \alpha) e^{j \frac{t_0^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha - j u t_0 \sin \alpha} \quad (5-10)$$

【证明】

$$\begin{aligned} Z_p(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_p(t, u) z(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A_p e^{j \frac{t^2 + u^2}{2} \cot \alpha - j t u \csc \alpha} x(t - t_0) dt \end{aligned}$$

其中, $A_p = \sqrt{\frac{1 - j \cot \alpha}{2\pi}}$, 并通过变量替换, 得到

$$\begin{aligned} Z_p(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} A_p e^{j \frac{(t+t_0)^2 + u^2}{2} \cot \alpha - j (t+t_0) u \csc \alpha} x(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A_p e^{j \frac{(t+t_0)^2 + (u-t_0 \cos \alpha + t_0 \cos \alpha)^2}{2} \cot \alpha - j (t+t_0) u \csc \alpha} x(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A_p e^{j \frac{t^2 + (u-t_0 \cos \alpha)^2}{2} \cot \alpha - j t u \csc \alpha + j \frac{t_0^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + 2 t t_0 \cos \alpha - 2 u t_0 \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha}} x(t) dt \\ &= X_p(u - t_0 \cos \alpha) e^{j \frac{t_0^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha - j u t_0 \sin \alpha} \end{aligned}$$

显然, 如果 $p=0$, 即 $\alpha=0$, 此时式(5-10)表达式为

$$Z_0(u) = X_0(u - t_0)$$

即原信号的时移。如果 $p=1$, 即 $\alpha=\pi/2$, 此时式(5-10)表达式为

$$Z_1(u) = X_1(u) e^{-j u t_0}$$

正是傅里叶变换的时移性质, 傅里叶域附加了一个与时延对应的相位。那么, 分数阶次下的作用效果可以推断是介于二者之间, 即搬移和附加相位同时存在。

这个性质可以看到由于时频平面 (t, ω) 的旋转, t_0 在 u 轴上和与之正交的方向上分别投影, 两个方向的分量是 $t_0 \cos \alpha$ 和 $t_0 \sin \alpha$, 分别对应着搬移 $X_p(u - t_0 \cos \alpha)$ 和附加相位 $e^{-j u t_0 \sin \alpha}$, 以及二者的耦合项 $e^{j \frac{t_0^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha}$ 。

如果是在时频平面 (t, f) 的旋转模式下, 则

$$Z_p(u) = X_p(u - t_0 \cos \alpha) e^{j \frac{\pi t_0^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha - j 2 \pi u t_0 \sin \alpha} \quad (5-11)$$

性质 2 频率偏移的影响, 若信号 $z(t) = x(t) e^{j \omega_0 t} = x(t) e^{j 2 \pi f_0 t}$, 则有

$$Z_p(u) = X_p(u - \omega_0 \sin \alpha) e^{-j \frac{\omega_0^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha + j u \omega_0 \cos \alpha} \quad (5-12)$$

【证明】

$$Z_p(u) = \int_{-\infty}^{\infty} K_p(t, u) z(t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} A_p e^{j \frac{t^2+u^2}{2} \cot \alpha - j t u \csc \alpha - j \omega_0 t} x(t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} A_p e^{j \frac{t^2 + [(u - \omega_0 \sin \alpha) + \omega_0 \sin \alpha]^2}{2} \cot \alpha - j t [(u - \omega_0 \sin \alpha) + \omega_0 \sin \alpha] \csc \alpha} x(t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} A_p e^{j \frac{t^2 + (u - \omega_0 \sin \alpha)^2}{2} \cot \alpha - j t (u - \omega_0 \sin \alpha) \csc \alpha} x(t) dt \cdot e^{j \frac{2(u - \omega_0 \sin \alpha) \omega_0 \sin \alpha + (\omega_0 \sin \alpha)^2}{2} \cot \alpha} \\
&= X_p(u - \omega_0 \sin \alpha) e^{-j \frac{\omega_0^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha + j u \omega_0 \cos \alpha}
\end{aligned}$$

显然,如果 $p=0$,即 $\alpha=0$,此时式(5-12)表达式为

$$Z_0(u) = X_0(u) e^{j u \omega_0}$$

也就是原信号附加了一个频率偏移相位。如果 $p=1$,即 $\alpha=\pi/2$,此时式(5-12)表达式为

$$Z_1(u) = X_1(u - \omega_0)$$

这正是傅里叶变换的频移性质,傅里叶域发生平移。那么,分数阶次下的作用效果可以推断是介于二者之间,即附加相位和偏移同时存在。这个性质的理解与性质1类似,频率偏移也等价于两个方向的分量。 ω_0 在 u 轴上和与之正交的方向上分别投影,两个方向的分量分别是 $\omega_0 \sin \alpha$ 和 $\omega_0 \cos \alpha$,分别对应着偏移 $X_p(u - \omega_0 \sin \alpha)$ 和附加相位 $e^{j u \omega_0 \cos \alpha}$,以及二者的耦合项 $e^{-j \frac{\omega_0^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha}$ 。

如果是在时频平面 (t, f) 的旋转模式下,则

$$Z_p(u) = X_p(u - f_0 \sin \alpha) e^{-j \pi f_0^2 \sin \alpha \cos \alpha + j 2 \pi u f_0 \cos \alpha} \quad (5-13)$$

性质3 线性组合性,若信号 $z(t) = ax(t) + by(t)$,则有

$$Z_p(u) = aX_p(u) + bY_p(u) \quad (5-14)$$

【证明】

$$\begin{aligned}
Z_p(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_p(t, u) z(t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} K_p(t, u) [ax(t) + by(t)] dt \\
&= a \int_{-\infty}^{\infty} K_p(t, u) x(t) dt + b \int_{-\infty}^{\infty} K_p(t, u) y(t) dt \\
&= aX_p(u) + bY_p(u)
\end{aligned}$$

这个性质表明了两个信号线性组合的合成信号的FRFT是这两个信号各自FRFT的线性组合。FRFT是线性变换,没有交叉项,是它的一个优点。

性质4 尺度特性,若信号 $z(t) = x(ct)$,则有

$$Z_p(u) = \sqrt{\frac{1 - j \cot \alpha}{c^2 - j \cot \alpha}} e^{j \frac{u^2}{2} \cot \alpha \left(1 - \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \alpha} \right)} X_q \left(u \frac{\sin \varphi}{c \sin \alpha} \right) \quad (5-15)$$

其中

$$\varphi = \arctan(c^2 \tan \alpha) = q \pi / 2 \quad (5-16)$$

【证明】

$$\begin{aligned}
Z_p(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_p(t, u) z(t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1 - j \cot \alpha}{2 \pi}} e^{j \frac{t^2 + u^2}{2} \cot \alpha - j t u \csc \alpha} x(ct) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{c} \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\frac{t^2+u^2}{2}\cot\alpha-j(ct)} \left(\frac{u}{c}\right) \frac{1}{\sin\alpha} x(ct) d(ct) \\
&= \frac{1}{c} \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\frac{(ct)^2+\frac{1}{c^2}\frac{\tan\varphi}{\tan\alpha}+u^2\frac{\tan\varphi}{\tan\alpha}} \cot\varphi-j(ct)} \left(u\frac{\sin\varphi}{c\sin\alpha}\right) \frac{1}{\sin\varphi} x(ct) d(ct)
\end{aligned}$$

令 $\tan\varphi=c^2\tan\alpha$, 则

$$\begin{aligned}
Z_p(u) &= \frac{1}{c} \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\frac{(ct)^2+u^2\frac{\tan\varphi}{\tan\alpha}} \cot\varphi-j(ct)} \left(u\frac{\sin\varphi}{c\sin\alpha}\right) \frac{1}{\sin\varphi} x(ct) d(ct) \\
&= \frac{1}{c} \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} e^{j\frac{u^2}{2}\cot\alpha} e^{-j\frac{u^2}{2}\left(\frac{\sin\varphi}{c\sin\alpha}\right)^2\cot\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\frac{(ct)^2+\left(u\frac{\sin\varphi}{c\sin\alpha}\right)^2}{2}\cot\varphi-j(ct)} \left(u\frac{\sin\varphi}{c\sin\alpha}\right) \frac{1}{\sin\varphi} x(ct) d(ct) \\
&= \frac{1}{c} \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} \left(\sqrt{\frac{1-j\cot\varphi}{2\pi}}\right)^{-1} e^{j\frac{u^2}{2}\cot\alpha} \left(1-\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\alpha}\right) \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1-j\cot\varphi}{2\pi}} e^{j\frac{t^2+\left(u\frac{\sin\varphi}{c\sin\alpha}\right)^2}{2}\cot\varphi-jt} \left(u\frac{\sin\varphi}{c\sin\alpha}\right) \csc\varphi x(t) dt \\
&= \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{c^2-j\cot\alpha}} e^{j\frac{u^2}{2}\cot\alpha} \left(1-\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\alpha}\right) X_q\left(u\frac{\sin\varphi}{c\sin\alpha}\right)
\end{aligned}$$

分数阶傅里叶变换的尺度特性形式上比较复杂。当 $p=1$, 即 $\alpha=\pi/2, \varphi=\pi/2$, 有 $Z_p(u)=(1/c)X_p(u/c)$, 即傅里叶变换的尺度特性。式(5-16)是一个重要的关系, 也就是旋转角度变化, 两个角度之间的关系为 $\tan\varphi=c^2\tan\alpha$ 。也就是时间轴的伸缩造成了在时频平面上旋转角度的变化, 从物理意义上也可以大致理解这个结论, 即 $\tan\varphi=f/t, \tan\alpha=f'/t'=(f/c)/(ct)=\tan\varphi/c^2$ 。

尺度特性的一个典型应用场景是在实际离散时间序列的处理中需要考虑采样间隔的影响。在傅里叶变换中的 DFT 结果的对应频率轴范围, 以数字角频率 Ω 度量为 $[0, 2\pi)$ 区间, 假设单位采样间隔, 以模拟角频率 ω 也为 $[0, 2\pi)$ 区间, 频率 f 为 $[0, 1)$ 区间。如果实际序列的采样间隔为 T_s , 则根据傅里叶变换的尺度缩放性质, 若 $x(t) \leftrightarrow X(f)$ 则 $x(ct) \leftrightarrow 1/cX(f/c)$, 可得对应的频率 f 的范围为 $[0, 1/T_s)$ 。

对于分数阶傅里叶变换应用而言, 离散计算过程往往是以归一化的量纲作为假设得到对应的阶次(旋转角度)信息, 量纲归一化技巧将时域和频域分别转换成无量纲的域, 具体方法是引入一个尺度因子 S , 并定义新的尺度化坐标 $x=t/S, y=f \cdot S$ 。若 $S=\sqrt{\Delta t/\Delta f}$, 则新的坐标系 (x, y) 实现了 $\Delta x=\Delta y=\sqrt{\Delta t\Delta f}$ 。根据 $\Delta t=T_s$ 和 $\Delta f=1/(NT_s)$, 得 $S=T_s\sqrt{N}$ 。根据分数阶傅里叶变换的尺度特性可知, $\tan\varphi=T_s^2N\tan\alpha$, 其中 α 是无量纲 (x, y) 坐标下的结果, 可以利用此关系得到与数据物理意义对应的 (t, f) 坐标下结果 φ 。

性质 5 帕塞瓦尔关系, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X_p(u)Y_p^*(u)du \quad (5-17)$$

帕塞瓦尔关系的直接结果是分数阶傅里叶变换的能量保持特性, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X_p(u)|^2 du \quad (5-18)$$

分数阶傅里叶变换可以被认为是函数从一种表达形式到另一种表达形式的变换, 且变换时内积和范数都不发生变化。帕塞瓦尔关系和能量保持特性也可以看作下列事实的结

果: 分数阶傅里叶变换理解为信号的正交基分解, 分数阶傅里叶变换的基函数是正交基函数的集合。该结论可以根据分数阶傅里叶变换的反变换得到, 具体而言, 从时频平面旋转的角度很容易确定对 $X_p(u)$ 进行阶次为 $-p$ 的分数阶傅里叶变换可以得到 $x(t)$, 也就是

$$\begin{aligned} X_p(u) &= \mathcal{F}^p[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} K_p(t, u) x(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K_{-p}^*(t, u) x(t) dt = \langle x(t), K_{-p}(t, u) \rangle \end{aligned} \quad (5-19)$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-p}[X_p(u)] = \int_{-\infty}^{\infty} K_{-p}(t, u) X_p(u) du \quad (5-20)$$

式(5-20)和式(5-19)表明 $x(t)$ 在基函数 $K_{-p}(u, t)$ 上分解, 分解系数为 $x(t)$ 在基函数方向的投影, 这是在正交基函数上进行信号表示的特点。分数阶傅里叶变换基函数表达式为

$$K_{-p}(t, u) = \sqrt{\frac{1 - j \cot \alpha}{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \cot \alpha t^2 + j \csc \alpha t u - \frac{1}{2} \cot \alpha u^2} \quad (5-21)$$

或

$$K_{-p}(t, u) = \sqrt{1 - j \cot \alpha} e^{-j \pi \cot \alpha t^2 + j 2 \pi \csc \alpha t u - j \pi \cot \alpha u^2} \quad (5-22)$$

式(5-21)和式(5-22)表明分数阶傅里叶变换的基函数是时间 t 的二次多项式表达式。这种基函数意味着分数阶傅里叶变换适合分析二次相位信号, 也就是线性调频信号。

分数阶傅里叶变换的性质与傅里叶变换相对应的基本性质具有一定的类似性和差异性。此外, 分数阶傅里叶变换的一个十分重要的性质是阶数可加性(也称为旋转可加性, 如图 5-2 所示), 可以表示为

$$\mathcal{F}^{p_1}[\mathcal{F}^{p_2}[x(t)]] = \mathcal{F}^{p_1+p_2}[x(t)] = \mathcal{F}^{p_2}[\mathcal{F}^{p_1}[x(t)]] \quad (5-23)$$

根据旋转叠加性质, 对信号进行阶次 p 的分数阶傅里叶变换, $p = p' \pm 1$, 或者 $\alpha = \alpha' \pm \pi/2$, 则等价于对信号阶次 p' 的分数阶傅里叶变换叠加傅里叶变换或傅里叶反变换。这种等价性对于理解后文分析线性调频信号处理有所帮助。

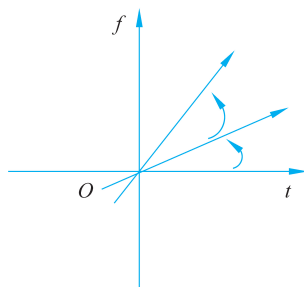


图 5-2 分数阶傅里叶变换的旋转可加性示意图

5.1.3 分数阶傅里叶变换的计算

为了便于计算机计算, 需要讨论分数阶傅里叶变换的离散计算方法。离散分数阶傅里叶变换(Discrete Fractional Fourier Transform, DFRFT)研究具有重要意义, 近年来国内外学者提出了多种 DFRFT 的定义及快速算法。H M Ozaktas^[5]和 S.C.Pei^[6]的采样型算法目前使用最普遍, 本节仅简要介绍 Ozaktas 采样型 DFRFT 的计算方法。

Ozaktas 提出根据连续 FRFT 的积分定义式, 将 FRFT 的复杂积分变换分解成若干简单的计算步骤, 然后离散化处理。首先, 分数阶傅里叶变换(核函数为式(5-8)所示)重写为

$$X_p(u) = A_p \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\pi(u^2 \cot \alpha - 2ut \csc \alpha + t^2 \cot \alpha)} x(t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= A_p \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\pi(u^2 \csc\alpha - 2ut \csc\alpha + t^2 \csc\alpha)} e^{j\pi u^2 (\cot\alpha - \csc\alpha)} e^{j\pi t^2 (\cot\alpha - \csc\alpha)} x(t) dt \\
&= e^{-j\pi u^2 \tan(\frac{\alpha}{2})} \left\{ A_p \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\pi \csc\alpha (u-t)^2} [e^{-j\pi t^2 \tan(\frac{\alpha}{2})} x(t)] dt \right\} \quad (5-24)
\end{aligned}$$

其中 $A_p = \sqrt{1 - j \cot\alpha}$, $\alpha = \frac{p\pi}{2}$ 。假定阶次 $p \in [-1, 1]$, 可以分解为如下三步:

$$g(t) = e^{-j\pi t^2 \tan(\frac{\alpha}{2})} x(t) \quad (5-25)$$

$$g'(u) = A_p \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\pi \beta (u-t)^2} g(t) dt \quad (5-26)$$

$$X_p(u) = e^{-j\pi u^2 \tan(\frac{\alpha}{2})} g'(u) \quad (5-27)$$

其中 $\beta = \csc\alpha$ 。对以上的分解步骤进行离散化处理即可实现 FRFT 的离散计算, 具体细节可参见文献^[5], 函数 `frft.m` 可通过网址^[7]下载。这里仅强调两点: ①式(5-26)经离散化得到一个离散卷积的表达式, 这一离散卷积可以利用 FFT 快速计算; ②信号 $x(t)$ 和调制信号 $g(t)$ 的带宽可能不同, 离散序列 $x(n)$ 的采样间隔未必能够满足 $g(t)$ 的采样定理条件, 因此式(5-25)对应的离散化步骤有插值操作。

5.2 分数阶傅里叶变换与时频变换的关系

5.2.1 分数阶傅里叶变换与 Wigner-Ville 分布

根据分数阶傅里叶变换的基本定义可以看到, 不同于前文讨论的二维分布, FRFT 是带参数的整体变换, 也就是信号 $x(t)$ 可以得到 $X_{p_i}(u)$, 其中 p_i 取值有多个。如果使用阶次 p 分数阶变换轴(u 轴)及其正交的阶次 $p+1$ 分数阶变换轴(v 轴)构成一个新的坐标系, 可以理解为 (t, f) 坐标的一个对应角度的旋转, 如图 5-3 所示。

信号 $x(t)$ 的 p 阶分数阶傅里叶变换 $\mathcal{F}^p[x(t)] = X_p(u)$ 的 Wigner-Ville 分布 $W_{X_p}(u, v)$ 相当于信号的 Wigner-Ville 分布 $W_x(t, f)$ 分布在时间-频率平面上旋转角度 $\alpha = p\pi/2$, 即有

$$W_{X_p}(u, v) = W_x(u \cos\alpha - v \sin\alpha, u \sin\alpha + v \cos\alpha) \quad (5-28)$$

其中

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ f \end{bmatrix} \quad \left(\begin{bmatrix} t \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right)$$

【证明】

对于信号 $x(t)$, 其 WVD 为

$$\begin{aligned}
W_x(t, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\
&= 2 \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau) x^*(t - \tau) e^{-j4\pi f\tau} d\tau
\end{aligned}$$

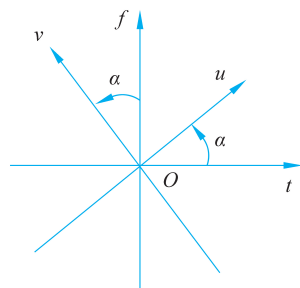


图 5-3 (t, f) 平面旋转 α 角到 (u, v) 平面

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_{-\infty}^{\infty} x[t + (\tau - t)] x^*[t - (\tau - t)] e^{-j4\pi f(\tau - t)} d\tau \\
&= 2e^{j4\pi ft} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) x^*(2t - \tau) e^{-j4\pi f\tau} d\tau
\end{aligned}$$

根据 FRFT 的时移和频域性质得到

$$\mathcal{F}^p[x(2t - \tau)] = X_p(-u + 2t \cos \alpha) e^{j4\pi t^2 \sin \alpha \cos \alpha - j4\pi u t \sin \alpha}$$

$$\mathcal{F}^p[x(\tau) e^{-j4\pi f\tau}] = X_p(u + 2f \sin \alpha) e^{-j4\pi f^2 \sin \alpha \cos \alpha - j4\pi u f \cos \alpha}$$

于是根据帕塞瓦尔关系得到

$$\begin{aligned}
W_x(t, f) &= 2e^{j4\pi ft} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j4\pi f\tau} x^*(2t - \tau) d\tau \\
&= 2e^{j4\pi ft} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^p[x(\tau) e^{-j4\pi f\tau}] \mathcal{F}^p[x(2t - \tau)]^* du' \\
&= 2e^{j4\pi ft} \int_{-\infty}^{\infty} X_p(u' + 2f \sin \alpha) X_p^*(-u' + 2t \cos \alpha) e^{-j4\pi(t^2 + f^2) \sin \alpha \cos \alpha + j4\pi u'(t \sin \alpha - f \cos \alpha)} du'
\end{aligned}$$

作变量替换 $u' + 2f \sin \alpha = y$, 则 $-u' + 2t \cos \alpha = 2t \cos \alpha + 2f \sin \alpha - y$, 并且令

$$\begin{cases} u = t \cos \alpha + f \sin \alpha \\ v = -t \sin \alpha + f \cos \alpha \end{cases}, \begin{cases} t = u \cos \alpha - v \sin \alpha \\ f = u \sin \alpha + v \cos \alpha \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}
W_x(t, f) &= 2e^{j4\pi uv} \int_{-\infty}^{\infty} X_p(y) X_p^*(2u - y) e^{-j4\pi vy} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} X_p\left(u + \frac{y}{2}\right) X_p^*\left(u - \frac{y}{2}\right) e^{-j2\pi vy} dy
\end{aligned}$$

也就是 $W_x(t, f) = W_{X_p}(u, v)$ 得证。根据 WVD 的频率边缘特性, $W_{X_p}(u, v)$ 在 u 轴的投影给出 $X_p(u)$ 的幅值的平方 $|X_p(u)|^2$ 。由于模糊函数 AF 与 WVD 是二维傅里叶变换的关系, 可以直观推断: 信号分数阶傅里叶变换的模糊函数等于原信号模糊函数的旋转形式。

5.2.2 分数阶傅里叶变换与短时傅里叶变换

短时傅里叶变换是一个重要的时频分析工具, 信号 $x(t)$ 的 p 阶分数阶傅里叶变换 $\mathcal{F}^p[x(t)] = X_p(u)$ 与信号的修正短时傅里叶变换 $\text{MSTFT}_x(t, f)$ 之间存在如下关系

$$\text{MSTFT}_{X_p}(u, v) = \text{MSTFT}_x(u \cos \alpha - v \sin \alpha, u \sin \alpha + v \cos \alpha) \quad (5-29)$$

其中

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ f \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} t \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

【证明】

信号 $x(t)$ 的短时傅里叶变换为

$$\text{STFT}_x(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) g^*(\tau - t) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

其中 $g(t)$ 为窗函数。由于 $x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} \leftrightarrow X(v + f)$, $g(\tau - t) \leftrightarrow G(v) e^{-j2\pi vt}$, 利用帕塞瓦尔关系式得到

$$\text{STFT}_x(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(v + f) G^*(v) e^{j2\pi vt} dv$$

$$= e^{-j2\pi ft} \int_{-\infty}^{\infty} X(v) G^*(v-f) e^{j2\pi vt} dv$$

为了便于时频平面的旋转,对 STFT 进行对称性修正,定义修正的 STFT 为

$$\begin{aligned} \text{MSTFT}_x(t, f) &= e^{j\pi ft} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) g^*(\tau-t) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= e^{-j\pi ft} \int_{-\infty}^{\infty} X(v) G^*(v-f) e^{j2\pi vt} dv \end{aligned}$$

由于 $\mathcal{F}^p[x(t)] = X_p(u)$, 得 $x(t) = \mathcal{F}^{-p}[X_p(u)]$, 于是

$$x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X_p(u') K_{-p}(\tau, u') du'$$

那么

$$\begin{aligned} \text{MSTFT}_x(t, f) &= e^{j\pi ft} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) g^*(\tau-t) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= e^{j\pi ft} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} X_p(u') K_{-p}(\tau, u') du' \right] g^*(\tau-t) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= e^{j\pi ft} \int_{-\infty}^{\infty} X_p(u') \left[\int_{-\infty}^{\infty} K_{-p}(\tau, u') g^*(\tau-t) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right] du' \end{aligned}$$

由于 $K_{-p}(\tau, u') = K_p^*(\tau, u')$, 那么

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} K_{-p}(\tau, u') g^*(\tau-t) e^{-j2\pi f\tau} d\tau &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} K_p(\tau, u') g(\tau-t) e^{j2\pi f\tau} d\tau \right]^* \\ &= \mathcal{F}^p[g(\tau-t) e^{j2\pi f\tau}] \end{aligned}$$

根据 FRFT 的时移和频域性质得到

$$\mathcal{F}^p[g(\tau-t) e^{j2\pi f\tau}] = G_p(u' - t \cos \alpha - f \sin \alpha) e^{j\pi(t^2 - f^2) \sin \alpha \cos \alpha + j2\pi u'(-t \sin \alpha + f \cos \alpha) + 2\pi f t \sin^2 \alpha}$$

作变量替换 $u' = y$, 则 $u' - t \cos \alpha - f \sin \alpha = y - u$, 并且令

$$\begin{cases} u = t \cos \alpha + f \sin \alpha \\ v = -t \sin \alpha + f \cos \alpha \end{cases}, \begin{cases} t = u \cos \alpha - v \sin \alpha \\ f = u \sin \alpha + v \cos \alpha \end{cases}$$

得到

$$\text{MSTFT}_x(t, f) = e^{j\pi uv} \int_{-\infty}^{\infty} X_p(y) G_p^*(y-u) e^{-j2\pi yv} dy$$

$\text{MSTFT}_x(t, f) = \text{MSTFT}_{X_p}(u, v)$ 得证。这再一次说明分数阶傅里叶变换作为一种旋转算子的观点。

5.2.3 分数傅里叶域的不确定原理

对比傅里叶变换和分数阶傅里叶变换定义,可以发现分数阶傅里叶变换实际上的另一种分解方法。具体为

① 与线性调频信号 $e^{j\pi \cot \alpha t^2}$ 相乘,即

$$z(t) = e^{j\pi \cot \alpha t^2} x(t)$$

② 傅里叶变换 $Z(f)$, 并进行尺度缩放 $Z(\csc \alpha f)$, 幅度系数 $\sqrt{1-j \cot \alpha}$ 相乘(有限支集, 能量不变), 即

$$Z(\csc \alpha f) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{-j2\pi \csc \alpha f t} dt$$

$$= \sqrt{1 - j \cot \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi \csc \alpha f} e^{j\pi \cot \alpha t^2} dt$$

③ 与另一个线性调频信号 $e^{j\pi \cot \alpha f^2}$ 相乘, 得到

$$e^{j\pi \cot \alpha f^2} Z(\csc \alpha f) = \sqrt{1 - j \cot \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\pi(f^2 \cot \alpha - 2ft \csc \alpha + t^2 \cot \alpha)} dt$$

FRFT 结果的幅度信息由步骤①和②决定, 步骤③仅影响 FRFT 的相位信息。用上述分数阶傅里叶变换的三步分解法以及第 1 章所介绍的时频域不确定性准则, 可以得到两个不同阶数分数阶傅里叶域间的不确定性原理为

$$\Delta u_{p_1}^2 \Delta u_{p_2}^2 \geq \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (5-30)$$

若 $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2$, 即 $p_1 = p, p_2 = p_1 + 1$, 对应的两个轴 u_p 和 u_{p+1} , 则得到

$$\Delta u_p \Delta u_{p+1} \geq \frac{1}{4\pi} \quad (5-31)$$

式(5-31)是分数阶傅里叶域不确定原理退化为与时频分析同样的情况, 物理意义可以解释为: 将 u_p 理解为时域, u_{p+1} 则为变换信号 X_p 对应频谱 $\mathcal{F}[X_p]$ 所在域。

如果 $p_1 = 0, p_2 = p$, 则得到

$$\Delta t \Delta u_p \geq \frac{1}{4\pi} |\sin \alpha| \quad (5-32)$$

式(5-32)是时域-分数阶频域($t-u_p$)的联合约束, 是与变换阶次有关的量。信号经过步骤①是常规不确定原理适用范围内时间信号 $z(t)$, 步骤②是缩放傅里叶变换, 频域的缩放 $Z(f/\sin \alpha)$ 造成了带宽大小发生相应的改变, $\Delta u_p = \Delta f \sin \alpha$ 。

5.3 Chirp 信号与 Chirp 平稳

5.3.1 Chirp 信号的时频特点

线性调频信号指持续期间频率连续线性变化的信号, 也称为 Chirp 信号, 其基本的想法是在持续期间 T 内线性扫过一个带宽为 B 的频带, 其表达式可以写为

$$x(t) = u(t) e^{j2\pi f_c t} \quad (5-33)$$

其中, f_c 是中心频率, T 是信号持续时间, 复包络 $u(t)$ 的表达式为

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{j\pi k t^2} \quad (5-34)$$

其中, $k = B/T$, 图 5-4 所示为线性调频信号(基带)的波形, 从中可见信号的变化快慢随时间发生变化。瞬时频率 $f(t)$ 根据对相位求导可得

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d(\pi k t^2)}{dt} = k t \quad (5-35)$$

瞬时频率是时间的线性函数, k 的单位是 Hz/s , 它表示调频斜率。 k 是正值表示正调频, 频率由低变高; k 是负值表示负调频, 频率由高变低。

线性调频信号的频谱由信号的复包络决定, 采用相位驻留原理(Principle of Stationary Phase, PSP)可以得到非常有用且更为简便的近似表达, 可以得到