第5章 离散时间信号与系统的时域分析

5.1 本章学习目标

- 掌握序列的描述方法及常用序列的描述与特性；
- 掌握序列的基本运算；
- 掌握离散时间系统的描述方法；
- 理解离散时间系统的时域模拟；
- 掌握零输入响应的求解方法；
- 掌握单位样值响应的求解方法；
- 掌握卷积和的计算方法；
- 掌握利用卷积和求解零状态响应的方法。

5.2 知识要点

5.2.1 离散时间信号

1. 定义

离散时间信号是只在一系列离散的时间点上有定义，而在其他时间上无定义的信号。注意将离散时间信号与模拟信号、数字信号进行对比，理清模拟信号经过抽样、量化后转变为数字信号的转换关系。

2. 表示方法

常用的方法有：解析式、波形和数组。要求能够灵活实现各种表示方法之间的转换。

3. 典型序列

1）单位样值序列

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases} \tag{5-1}$$

$\delta(n)$的波形如图 5-1 所示。

2）单位阶跃序列

$$u(n)=\begin{cases}1, & n\geqslant 0\\ 0 & n<0\end{cases} \tag{5-2}$$

$u(n)$的波形如图 5-2 所示。

观察 $u(n)$和 $\delta(n)$的波形，两者存在如下关系：

$$u(n)=\sum_{m=0}^{+\infty}\delta(n-m) \tag{5-3}$$

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1) \tag{5-4}$$

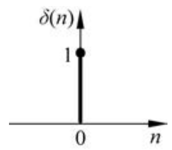


图 5-1　单位样值序列

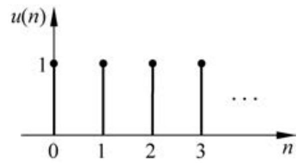


图 5-2　单位阶跃序列

3）单位矩形序列

$$R_N(n)=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{5-5}$$

该序列可通过单位样值序列和单位阶跃序列来描述，即

$$R_N(n)=\sum_{m=0}^{N-1}\delta(n-m)=u(n)-u(n-N) \tag{5-6}$$

4）单边实指数序列

$$f(n)=a^n u(n) \tag{5-7}$$

指数序列的变化规律由底数 a 决定。波形分别如图 5-3(a)～图 5-3(d)所示。

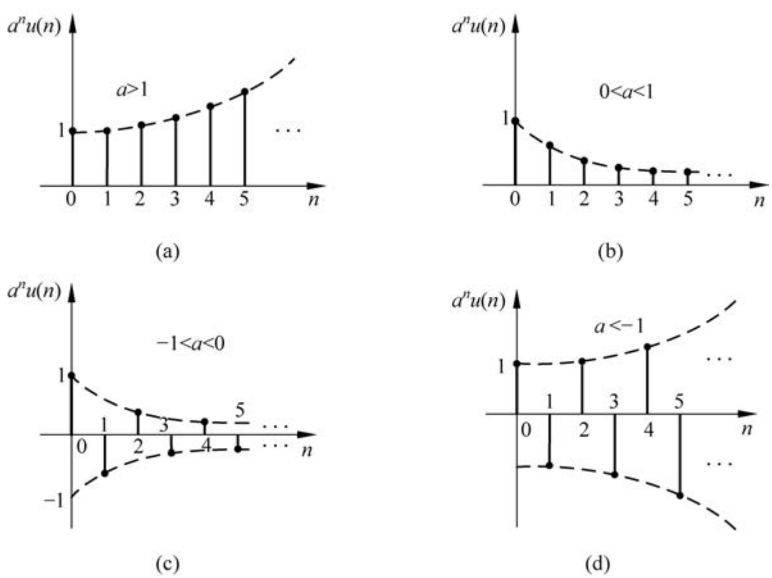


图 5-3　单边实指数序列

5）正弦序列

$$f(n)=A\sin(\Omega_0 n+\theta) \tag{5-8}$$

正弦序列的包络是连续的正弦信号，而连续的正弦信号是典型的周期信号。但正弦序列不一定为周期序列，若正弦序列为周期序列，则满足

$$\sin(\Omega_0 n)=\sin[\Omega_0(n+N)]=\sin(\Omega_0 n+\Omega_0 N) \tag{5-9}$$

判断正弦序列是否为周期序列的条件为

（1）若$\frac{2\pi}{\Omega_0}$为有理数，则可写为$\frac{2\pi}{\Omega_0}=\frac{N}{k}$，此时以$\Omega_0$为角频率的正弦序列为周期序列，周期为$N=\frac{2\pi}{\Omega_0}k$。

（2）若$\frac{2\pi}{\Omega_0}$为无理数，则无法找到一个合适的k使得$\frac{2\pi}{\Omega_0}k$为整数，故正弦序列为非周期序列。

6）任意序列

任意序列可以表示为

$$e(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e(m)\delta(n-m) \tag{5-10}$$

对于典型序列，重点掌握单位样值序列、单位阶跃序列和指数序列的描述与特性。单位样值序列与单位冲激信号类似，可作为任意信号在时域分解的基本单元。单位阶跃序列与连续的阶跃信号类似，具有描述任意信号存在范围的作用。指数序列在经济学、统计学及生物学等各领域具有广泛的应用。离散时间信号可参照连续时间信号来学习。

4. 序列的运算与变换

1）相加

$$y(n)=f_1(n)+f_2(n) \tag{5-11}$$

2）相乘

$$y(n)=f_1(n)\cdot f_2(n) \tag{5-12}$$

3）反褶

$$y(n)=f(-n) \tag{5-13}$$

4）移位

序列移位有左移和右移两种情况。设$m>0$，则序列右移m个单位可表示为

$$y(n)=f(n-m) \tag{5-14}$$

类似地，序列左移m个单位可表示为

$$y(n)=f(n+m) \tag{5-15}$$

5）尺度变换

序列的尺度变换包含压缩或扩展两种形式。序列压缩可表示为

$$y(n)=f(an) \tag{5-16}$$

此时将原序列每隔$a-1$个点取值并将取出的值重新排列。

序列扩展表示为

$$y(n)=f(n/a) \tag{5-17}$$

扩展序列是将原序列相邻两点间插入$a-1$个零点值并重新排列得到。

6）差分

差分运算包含前向差分和后向差分两种形式。

前向差分记为

$$\Delta x(n)=x(n+1)-x(n) \tag{5-18}$$

后向差分记为

$$\nabla x(n)=x(n)-x(n-1) \tag{5-19}$$

序列的运算与变换是序列时域分析中的难点问题。特别是针对自变量的移位、反褶和尺度变换。当涉及多种运算和变换的组合时,需要按照运算方法分步骤地实现每种运算和变换,运算次序不会影响最终的运算结果。同时也要注意离散时间信号的自变量运算与连续时间信号的自变量运算存在两点差异:一是离散时间信号的位移量和尺度变换的系数都必须是整数,这就影响了自变量复合运算时的运算次序。如已知原序列 $f(n)$,要绘制 $f(2n+1)$的波形时,此时的运算次序必须是先左移再压缩,若要先压缩再左移,则无法保证位移量为正整数。二是离散时间信号的尺度变换方法与连续时间信号的尺度变换方法不同,离散时间信号的尺度变换是通过内插和抽取实现序列的扩展与压缩。

在连续时间信号的运算中,微分和积分运算是重难点问题。而在离散时间信号的运算中不存在微分和积分运算,取而代之的是差分运算。差分运算的作用和地位与连续时间信号运算中的微分和积分是一致的。

5.2.2 离散时间系统

1. 定义

输入、输出信号均为离散时间信号的系统为离散时间系统。

2. 模型

系统模型包括数学模型和系统模拟图两种形式。

1) 数学模型——差分方程

差分方程是由未知序列及其移位序列和激励及其移位序列所组成的方程。差分方程分为前向差分方程和后向差分方程两种,当方程左侧的移位序列是左移序列时,方程为前向方程,当方程左侧的移位序列是右移序列时,方程为后向方程。不论是前向方程还是后向方程,方程的阶次都由未知序列以及移位序列中序号最大值与最小值的差决定。

2) 系统模拟图

用加法器、数乘器及移位器这三种运算单元的组合表示系统模拟图。

(1) 基本运算单元。

① 加法器。加法器如图 5-4(a)和图 5-4(b)所示,用表达式描述为 $r(n)=e_1(n)\pm e_2(n)$。

② 数乘器。数乘器如图 5-5(a)和图 5-5(b)所示,用表达式描述为 $r(n)=ae(n)$。

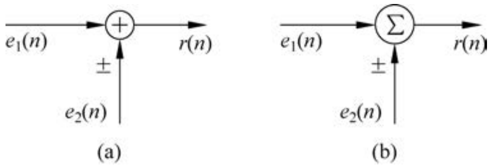


图 5-4　加法器

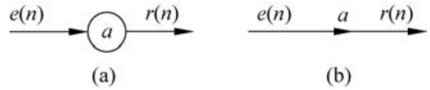


图 5-5　数乘器

③ 移位器。移位器如图 5-6(a)和图 5-6(b)所示。

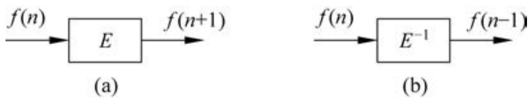


图 5-6　移位器

(2) 系统模拟图。

根据差分方程可以画出系统模拟图。若已知系统差分方程为

$$r(n)+2r(n-1)+r(n-2)=e(n)+3e(n-1) \tag{5-20}$$

将该方程改写为

$$r(n)=-2r(n-1)-r(n-2)+e(n)+3e(n-1) \tag{5-21}$$

根据式(5-21),可将 $-2r(n-1)$、$-r(n-2)$、$e(n)$ 和 $3e(n-1)$ 相加得到输出 $r(n)$,故该系统模拟图如图 5-7 所示。

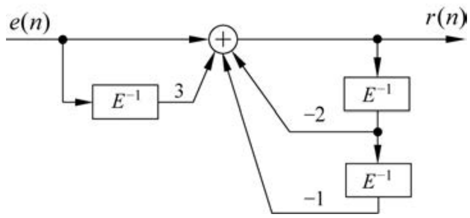


图 5-7　系统模拟图

反之,若已知系统模拟图如图 5-7 所示,则可以围绕加法器列写系统差分方程。系统模拟图与差分方程这两种模型可以相互转换。系统差分方程是进行系统分析的基础,系统模拟图则可以为系统设计与实现提供基础。

3. 线性时不变系统特性

系统线性、时不变性的描述方法从输入、输出关系来描述。

1) 线性

线性特性包括叠加性和齐次性(或比例性)。满足线性的系统称为线性系统,否则称为非线性系统。线性可描述为

$$k_1e_1(n)+k_2e_2(n)\rightarrow k_1r_1(n)+k_2r_2(n) \tag{5-22}$$

2）时不变性

时不变性是指系统特性不随时间的变化而变化。若已知某系统的输入为 $e(n)$，产生的响应为 $r(n)$，即

$$e(n) \rightarrow r(n)$$

则时不变性可描述为

$$e(n-m) \rightarrow r(n-m) \tag{5-23}$$

线性、时不变性的判断关键是要抓住输入、输出的关系以及系统的作用，再利用线性、时不变性的定义进行判断。该方法与连续时间系统线性、时不变性的判断方法类似。本课程中分析的对象为线性时不变系统。利用系统的线性时不变性可以简化系统的分析过程。

5.2.3 系统响应的时域求解

线性时不变离散时间系统的数学模型一般可写为

$$\sum_{k=0}^{N} a_k r(n-k) = \sum_{m=0}^{M} b_m e(n-m) \tag{5-24}$$

该差分方程的求解方法有以下几种方法。

1. 迭代法

将系统差分方程改写为

$$r(n) = \frac{1}{a_0}\left[\sum_{m=0}^{M} b_m e(n-m) - \sum_{k=1}^{N} a_k r(n-k)\right] \tag{5-25}$$

从式(5-25)可以看出，输出 $r(n)$ 由输入及之前的输出 $r(n-1),r(n-2),\cdots,r(n-N)$ 迭代求出。迭代法是差分方程最原始的求解方法，适合于计算机求解，简单有效，但不易得到解析解。

2. 时域经典法

$$r(n) = r_{\mathrm{h}}(n) + r_{\mathrm{p}}(n)$$

式中，$r_{\mathrm{h}}(n)$ 为齐次解又称为自由响应，$r_{\mathrm{p}}(n)$ 为特解，又称为强迫响应。

齐次解的求解首先列写齐次差分方程的特征方程，求出特征根表示为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$。

(1) 当特征根为单根，齐次解的形式为

$$r_{\mathrm{h}}(n) = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \cdots + c_{N-1}\lambda_{N-1}^n + c_N\lambda_N^n \tag{5-26}$$

(2) 当特征根为重根，且 λ_1 为 K 次重根，其余 $N-K$ 个均为实数单根，齐次解的形式为

$$r_{\mathrm{h}}(n) = (c_1 + c_2 n + \cdots + c_K n^{K-1})\lambda_1^n + \sum_{i=K+1}^{N} c_i\lambda_i^n \tag{5-27}$$

式(5-26)和式(5-27)中的 $c_1,c_2,\cdots,c_{N-1},c_N$ 为待定系数，均由边界条件 $r(0)$，$r(1),r(2),\cdots,r(N)$ 决定。

特解是满足非齐次差分方程的一个解，求解过程是先将输入序列 $e(n)$ 代入方程右

侧，化为最简形式的自由项，根据方程右侧自由项的具体形式在表 5-1 中选择含有待定系数的特解形式，再将此特解代入非齐次方程，通过匹配方程左右两侧求出待定系数，最终求得方程的特解 $r_p(n)$。

表 5-1　自由项与特解形式的对应关系

自　由　项	特 解 形 式
K(常数)	C(常数)
n	C_1+C_2n
n^m	$C_1n^m+C_2n^{m-1}+\cdots+C_mn+C_{m+1}$
$\sin\Omega n$(或 $\cos\Omega n$)	$C_1\sin\Omega n+C_2\cos\Omega n$
a^n	Ca^n(a 不是特征根)
a^n	$(C_1n+C_2)a^n$(a 是特征根的单根形式)
a^n	$(C_1n^r+C_2n^{r-1}+\cdots+C_rn+C_{r+1})a^n$($a$ 是特征根的 r 重根形式)

3. 零输入响应和零状态响应

$$r(n)=r_{zi}(n)+r_{zs}(n)$$

式中，$r_{zi}(n)$为零输入响应，$r_{zs}(n)$为零状态响应。

零输入响应是指当输入为零时，仅由系统起始状态 $r(-1),r(-2),\cdots,r(-N)$所产生的响应。

$$r_{zi}(n)=\sum_{k=1}^{n}c_{zik}\lambda_k^n \tag{5-28}$$

式中，c_{zik} 为待定系数，由 $r_{zi}(0),r_{zi}(1),r_{zi}(2),\cdots,r_{zi}(N-1)$确定。

零状态响应是指当系统的起始状态 $r(-1)=r(-2)=\cdots=r(-N)=0$ 时，仅由输入信号 $e(n)$所产生的响应。零状态响应包含齐次解和特解，求解相对复杂，重点需要掌握卷积和的方法求解零状态响应，即先求出系统的单位样值响应，再利用激励和单位样值响应的卷积和求一般激励作用下的零状态响应。

5.2.4　单位样值响应

1. 定义

单位样值响应是单位样值序列 $\delta(n)$作用于系统所引起的零状态响应。单位样值响应的求解方法包括初始条件等效法及传输算子法等。

2. 求解方法

1) 初始条件等效法

由于单位样值序列 $\delta(n)$只在 $n=0$ 时取值为 1，因而当 $n>0$ 时，$\delta(n)$的函数值为 0，单位样值响应的数学模型简化为齐次差分方程，求解过程与零输入响应的求解类似，最后利用初始条件 $h(0),h(1),\cdots,h(N-1)$确定齐次解的系数。

2）传输算子法

利用移位算子描述差分方程，当激励为 $\delta(n)$时，系统模型为

$$\sum_{k=0}^{N} a_k E^{-k} h(n) = \sum_{m=0}^{M} b_m E^{-m} \delta(n)$$

故单位样值响应为

$$h(n) = \frac{b_0 + b_1 E^{-1} + \cdots + b_M E^{-M}}{a_0 + a_1 E^{-1} + \cdots + a_N E^{-N}} \delta(n) = H(E)\delta(n) \tag{5-29}$$

式中，$H(E) = \frac{b_0 + b_1 E^{-1} + \cdots + b_M E^{-M}}{a_0 + a_1 E^{-1} + \cdots + a_N E^{-N}}$称为传输算子。将传输算子进行部分分式展开后，再利用表 5-2 中一阶或二阶等常见传输算子与单位样值响应的对应关系，可直接根据传输算子的形式写出单位样值响应，再对一阶或二阶单位样值响应进行简单相加便可以求出高阶系统的单位样值响应。

表 5-2　传输算子 $H(E)$与 $h(n)$对照表

传输算子 $H(E)$	$h(n)$
K	$K\delta(n)$
KE^{-m}	$K\delta(n-m)$
$\frac{E^{-1}}{1-aE^{-1}} = \frac{1}{E-a}$	$a^{n-1}u(n-1)$
$\frac{1}{1-aE^{-1}} = \frac{E}{E-a}$	$a^n u(n)$
$\frac{1}{(1-aE^{-1})^2} = \frac{E^2}{(E-a)^2}$	$(n+1)a^n u(n)$

在利用初始条件等效法求单位样值响应的过程中关键是根据系统的零状态条件递推出单位样值序列作用在系统上的等效初始条件。在初始条件等效法的基础上，还可以利用传输算子总结算子与单位样值响应的对应关系，从而简化单位样值响应的求解过程。单位样值响应是求解任意激励作用下零状态响应的基础。

3．系统因果性、稳定性

由于在系统模型已知的情况下就可以求出唯一对应的单位样值响应，因而可以借助单位样值响应对系统的因果性和稳定性进行描述。

1）因果性

若系统在任意时刻 $n=n_0$ 所产生的输出，仅取决于 $n \leqslant n_0$ 时的输入，而与 $n > n_0$ 时刻的输入无关，该系统称为因果系统，不满足则为非因果系统。

离散时间系统满足因果性的充分必要条件是

$$h(n)=0, \quad n<0 \tag{5-30}$$

2）稳定性

有界的输入产生有界的输出的系统是稳定系统，不满足则为不稳定系统。

对于离散时间系统，稳定性的充分必要条件是系统的单位样值响应满足绝对可和，即

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| \leqslant M, \quad M \text{为有界正值} \tag{5-31}$$

系统的特性分析是系统分析的重要任务，在时域中是利用了单位样值响应对特性进行判断。后续还可以将单位样值响应变换到 z 域，得到系统因果性、稳定性更简便的判断方法。

5.2.5 零状态响应的卷积法

在典型序列的分析中可知任意序列可分解为不同时刻、不同幅度的单位样值序列之和。因而求任意序列通过系统所产生的零状态响应，可以先求出各单位样值序列所产生的响应，然后利用系统的线性时不变特性，求出最终的零状态响应，即激励 $e(n)$ 作用于系统时，产生的零状态响应为

$$e(n) \rightarrow r_{zs}(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e(m)h(n-m) \tag{5-32}$$

式中，激励与单位样值响应之间的运算称为卷积和。

1. 卷积和的定义

任意序列 $f_1(n)$ 和 $f_2(n)$ 的卷积和定义为

$$y(n) = f_1(n) * f_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_1(m) f_2(n-m) \tag{5-33}$$

利用卷积定义，可得零状态响应的卷积法为

$$r_{zs}(n) = e(n) * h(n) \tag{5-34}$$

2. 卷积和的计算方法

1）图解法

图解过程包含反褶、时移、相乘与求和四步，这与卷积积分的图解过程类似，区别仅仅是最后一步求和与积分不同。掌握了卷积的图解法可以更深刻地理解卷积的过程。图解法形象直观易于理解，但操作过程相对复杂。

2）解析式法

在已知两序列解析式的情况下，可直接将序列的解析式代入卷积的定义进行计算。该方法适用于序列方便用解析式表示的情况。

3）对位相乘法

对位相乘法巧妙地将图解法中的反褶与移位表示为对位排列，采用不进位相乘、相加运算，可以较快求出卷积结果。该方法适用于两个有限长序列的卷积计算。

3. 卷积和的性质

1）移序

若有 $f(n)=f_1(n)*f_2(n)$，则有

$$f(n)=f_1(n-m)*f_2(n+m) \tag{5-35}$$

$$f(n+m)=f_1(n)*f_2(n+m)=f_1(n+m)*f_2(n) \tag{5-36}$$

$$f(n-m)=f_1(n)*f_2(n-m)=f_1(n-m)*f_2(n) \tag{5-37}$$

2）交换律

$$f_1(n)*f_2(n)=f_2(n)*f_1(n) \tag{5-38}$$

在计算卷积时可利用交换律将复杂的序列自变量替换为 m，形式相对简单的序列自变量替换为 $n-m$，如此可以一定程度地减少运算量和计算复杂度。

3）结合律

$$f_1(n)*f_2(n)*f_3(n)=f_1(n)*[f_2(n)*f_3(n)] \tag{5-39}$$

结合律的物理意义在于对若干级联系统组成的复合系统，可将其等效为一个系统，该系统的单位样值响应等于所有级联子系统单位样值响应的卷积，如图 5-8 所示。

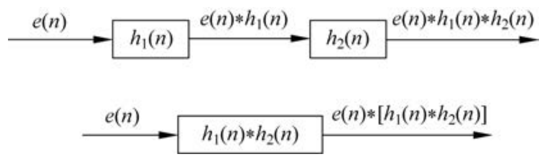


图 5-8　级联系统框图

4）分配律

$$f_1(n)*[f_2(n)+f_3(n)]=f_1(n)*f_2(n)+f_1(n)*f_3(n) \tag{5-40}$$

分配律的物理意义在于，由若干 LTI 系统并联构成的复合系统，可以等价为一个系统，该系统的单位样值响应等于所有并联子系统单位样值响应之和，如图 5-9 所示。

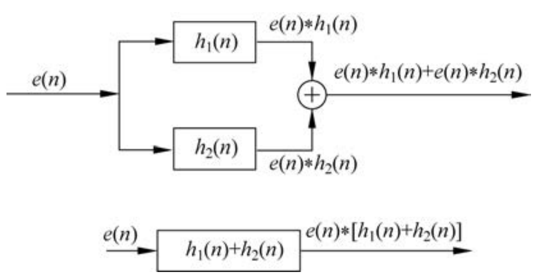


图 5-9　并联系统框图

系统分析的任务之一就是在已知系统模型的条件下求解系统的响应。系统模型的建立是分析系统的首要任务，也是系统分析中的重点内容。离散时间系统的数学模型为差分方程，差分方程的建立需根据实际系统的具体物理特性进行列写。在建立系统模型后，重点掌握双零法求解响应，其中零状态响应的求解是离散时间系统响应求解中的最

核心任务，也是本章的重难点内容。卷积是求解系统零状态响应的重要工具，要实现卷积的计算，需熟练掌握卷积的定义及性质，根据被卷积序列的特点灵活选择计算方法进行求解。

5.3 习题详解

5-1 试画出下列序列的图形。

(1) $f_1(n)=n+1,-3<n<2$

(2) $f_2(n)=(-1)^n,-2<n<4$

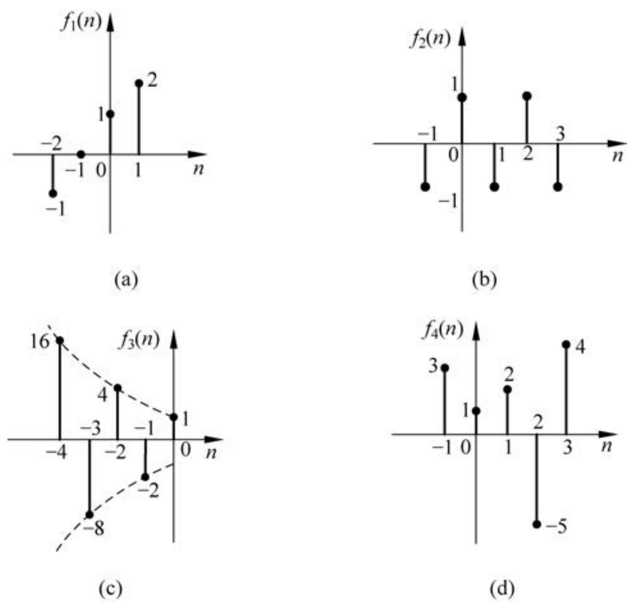
(3) $f_3(n)=\begin{cases}0, & n>0\\ \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n, & n\leqslant 0\end{cases}$

(4) $f_4(n)=\{3,\underset{\uparrow}{1},2,-5,4\}$,

【知识点】 序列的表示方法。

【方法点拨】 根据表达式及典型序列的波形进行逐点绘制。

【解答过程】 各序列的图形如题解 5-1 图所示。



题解 5-1 图

5-2 试画出下列序列的图形。

(1) $f_1(n)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}u(n)$

(2) $f_2(n)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n[\delta(n+1)-\delta(n)+\delta(n-1)]$

(3) $f_3(n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}[u(n)-u(n-3)]$

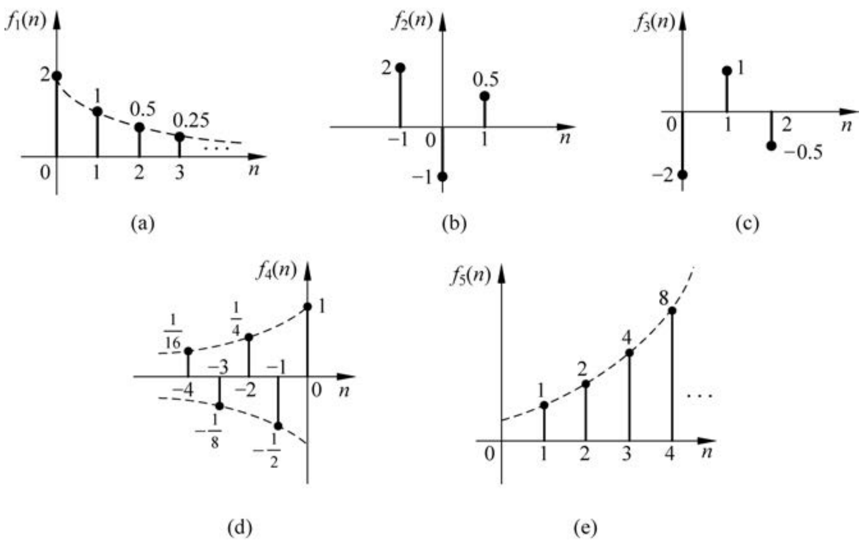
(4) $f_4(n)=(-2)^n u(-n)$

(5) $f_5(n)=2^{n-1}u(n-1)$

【知识点】 序列的表示方法。

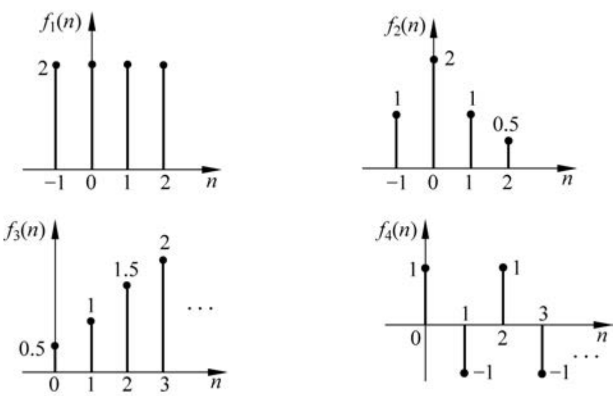
【方法点拨】 利用典型序列的波形，结合序列运算的方法进行图形绘制。

【解答过程】 各序列的图形如题解 5-2 图所示。



题解 5-2 图

5-3 写出题 5-3 图所示各序列的表达式。



题 5-3 图

【知识点】 序列的表示方法。

【方法点拨】 利用典型序列的表达式及任意序列分解为单位样值序列的方法列写各序列的表达式。

【解答过程】 由 $f_1(n)$ 的波形可知该序列的存在范围是 -1 到 2 点，函数值均为 2，利用单位阶跃序列可写出该序列的表达式为 $f_1(n)=2[u(n+1)-u(n-3)]$。

若将 $f_1(n)$ 中的各点单独表示，又可将该序列写为

$$f_1(n)=2[\delta(n+1)+\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)]$$

同理，$f_2(n)=\delta(n+1)+2\delta(n)+\delta(n-1)+0.5\delta(n-2)$。

观察 $f_3(n)$ 的取值范围及函数值的变化规律可以写出 $f_3(n)=0.5(n+1)u(n)$。

根据 $f_4(n)$ 函数的变化规律可以写出 $f_4(n)=(-1)^n u(n)$。

5-4 设序列 $f(n)=\{2,\underset{\uparrow}{5},3,1,-1\}$，请画出下列各序列的波形图。

(1) $f_1(n)=f(n+2)$

(2) $f_2(n)=f(-n+1)$

(3) $f_3(n)=f(n+2)+f(n-2)$

(4) $f_4(n)=f(1-n)+f(n+1)$

(5) $f_5(n)=f(n)\cdot f(1-n)$

(6) $f_6(n)=f(2n)$

(7) $f_7(n)=f\left(\dfrac{n}{2}\right)$

(8) $f_8(n)=f(2n)\cdot f(1-n)$

【知识点】 序列的运算与变换。

【方法点拨】 绘制出原序列的波形，根据序列运算和变换的方法绘制运算或变换后的波形。

【解答过程】 根据原序列的数组表示，可绘制出原序列的波形如题解 5-4 图(a)所示。

(1) 将原序列左移 2 个单位，可得 $f_1(n)$ 的波形如题解 5-4 图(b)所示。

(2) 将原序列反褶再右移 1 个单位可得 $f_2(n)$ 的波形如题解 5-4 图(c)所示。或者将原序列先左移 1 个单位再反褶，可同样得到如题解 5-4 图(c)所示结果。

(3) 将原序列分别向左、向右移 2 个单位，再进行对位相加，可得 $f_3(n)$ 波形如题解 5-4 图(d)所示。

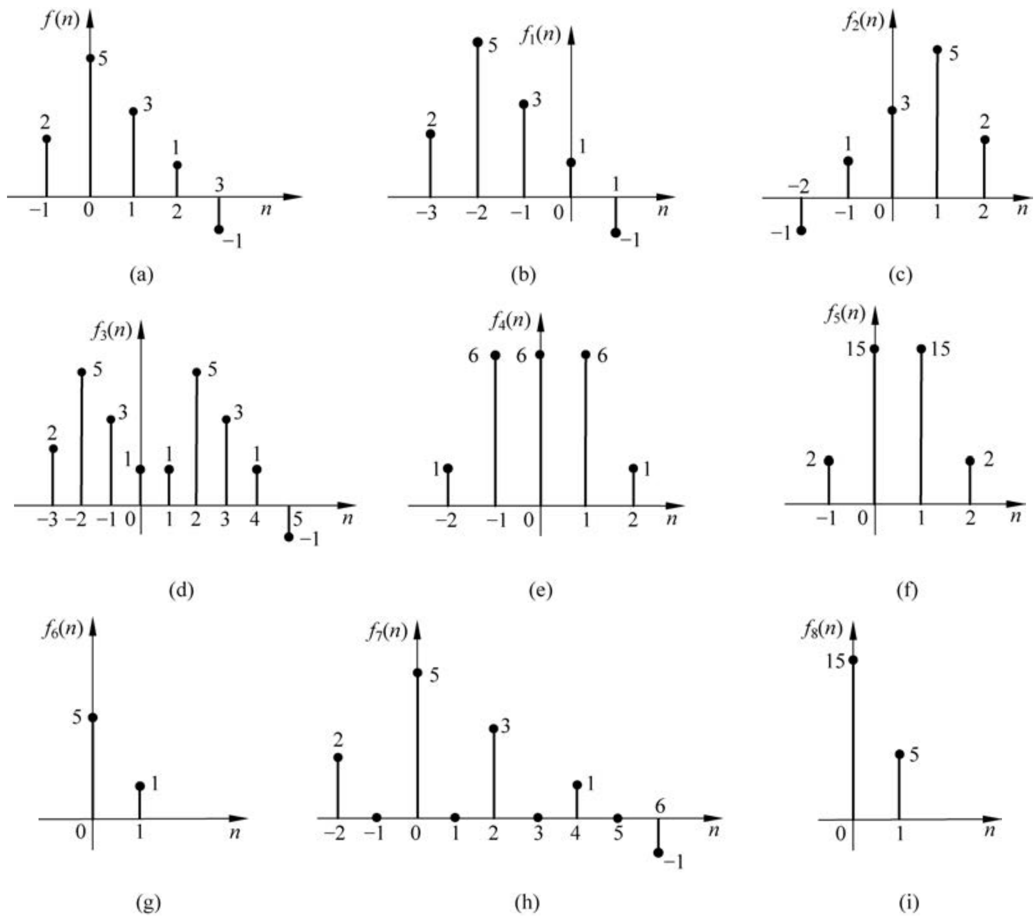
(4) 将原序列向左移 1 个单位，再与 $f_2(n)$ 进行对位相加，可得 $f_4(n)$ 波形如题解 5-4 图(e)所示。

(5) 将原序列与 $f_2(n)$ 进行对位相乘，可得 $f_5(n)$ 波形如题解 5-4 图(f)所示。

(6) 将原序列从原点开始每隔 1 点取 1 个值再进行重新排序，可得 $f_6(n)$ 波形如题解 5-4 图(g)所示。

(7) 将原序列从原点开始每相邻两点间插入 1 个零点值再进行重新排序，可得 $f_7(n)$ 波形如题解 5-4 图(h)所示。

(8) 将 $f_6(n)$ 与 $f_2(n)$ 进行对位相乘，可得 $f_8(n)$ 波形如题解 5-4 图(i)所示。



题解 5-4 图

5-5 请绘出下列序列的图形。

(1) $f_1(n)=\cos\dfrac{n\pi}{2}[u(n)-u(n-8)]$

(2) $f_2(n)=(-1)^n u(2n)$

(3) $f_3(n)=(n-1)u(n)$

(4) $f_4(n)=nu(n-1)$

(5) $f_5(n)=n[\delta(n+1)+\delta(n)+\delta(n-3)]$

(6) $f_6(n)=R_4(n+3)$

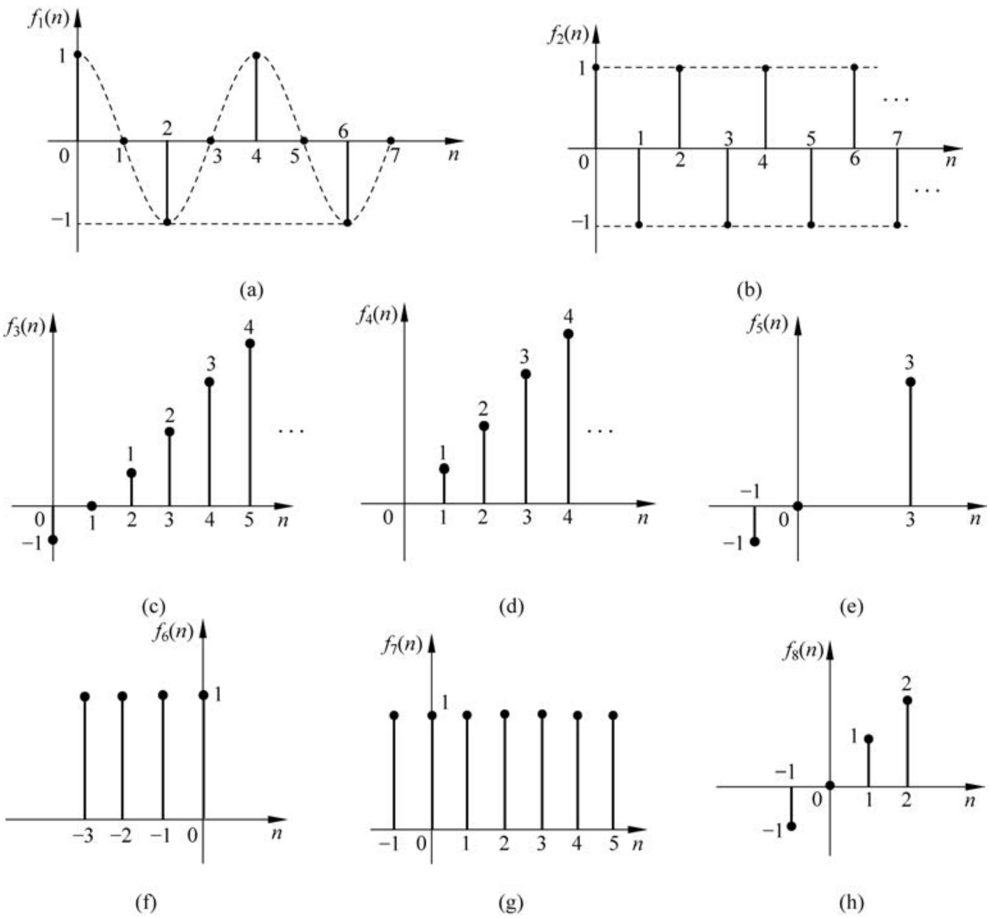
(7) $f_7(n)=u(-n+5)-u(-n-2)$

(8) $f_8(n)=nR_4(n+1)$

【知识点】 典型序列的波形表示及序列的运算。

【方法点拨】 利用典型序列的波形,结合序列运算的方法进行图形绘制。

【解答过程】 各序列的图形如题解 5-5 图(a)～题解 5-5 图(h)所示。



题解 5-5 图

5-6 判断下列各序列是否是周期序列。若是，请求出其周期 N。

(1) $f_1(n)=\sin\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$

(2) $f_2(n)=\cos n$

(3) $f_3(n)=e^{j\left(\frac{\pi}{4}n+\frac{\pi}{3}\right)}$

(4) $f_4(n)=\cos\left(\frac{4}{3}\pi n\right)+\cos\left(\frac{1}{7}n\right)$

(5) $f_4(n)=\cos\left(\frac{4}{3}\pi n\right)-\sin\left(\frac{4}{5}\pi n\right)$

【知识点】 周期序列的判断。

【方法点拨】 从周期序列的定义出发，总结周期序列数字角频率满足的条件。只有当数字角频率为有理数时，序列为周期序列。

【解答过程】

(1) 序列的数字角频率 $\Omega_0=\frac{\pi}{2}$，$\frac{2\pi}{\Omega_0}=\frac{2\pi}{\pi/2}=4$，所以该序列的周期 $N=4$。

(2) 序列的数字角频率 $\Omega_0=1$，$\dfrac{2\pi}{\Omega_0}=\dfrac{2\pi}{1}=2\pi$ 为无理数，所以该序列不是周期序列。

(3) $f_3(n)=e^{j\left(\frac{\pi}{4}n+\frac{\pi}{3}\right)}=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}n+\dfrac{\pi}{3}\right)+j\sin\left(\dfrac{\pi}{4}n+\dfrac{\pi}{3}\right)$，实、虚部的数字角频率 $\Omega_0=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{2\pi}{\Omega_0}=\dfrac{2\pi}{\pi/4}=8$，所以该序列的周期 $N=8$。

(4) $\cos\dfrac{4\pi}{3}n$ 的数字角频率 $\Omega_0=\dfrac{4\pi}{3}$，$\dfrac{2\pi}{\Omega_0}=\dfrac{2\pi}{4\pi/3}=\dfrac{3}{2}$，所以该序列的周期 $N_1=3$。$\cos\left(\dfrac{1}{7}n\right)$的数字角频率 $\Omega_0=\dfrac{1}{7}$，$\dfrac{2\pi}{\Omega_0}=\dfrac{2\pi}{1/7}=14\pi$，所以该序列不是周期序列。因而 $\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}n\right)+\cos\left(\dfrac{1}{7}n\right)$不是周期序列。

(5) $\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}n\right)$的数字角频率 $\Omega_0=\dfrac{4\pi}{3}$，$\dfrac{2\pi}{\Omega_0}=\dfrac{2\pi}{4\pi/3}=\dfrac{3}{2}$，所以该序列的周期 $N_1=3$；

$\sin\left(\dfrac{4\pi}{5}n\right)$的数字角频率 $\Omega_0=\dfrac{4\pi}{5}$，$\dfrac{2\pi}{\Omega_0}=\dfrac{2\pi}{4\pi/5}=\dfrac{5}{2}$，所以该序列的周期 $N_2=5$；

因而 $\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}n\right)-\sin\left(\dfrac{4\pi}{5}n\right)$的周期为上述两个序列周期的最小公倍数，即 $N=15$。

5-7 试绘出下列离散时间系统的系统框图。

(1) $r(n)=e(n)+e(n-2)$；

(2) $r(n)+3r(n-1)+2r(n-2)=e(n)+e(n-1)$。

【知识点】 系统框图的绘制。

【方法点拨】 在输入、输出已知的情况下，利用数乘器和延时器描绘出差分方程中除了输入、输出外的其他各信号，最后利用加法器将各信号有效地连接在一起。

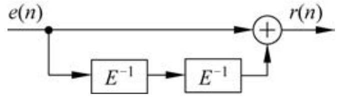
【解答过程】

(1) 由差分方程可知，输出 $r(n)$等于输入 $e(n)$和 $e(n-2)$相加。$e(n-2)$可由 $e(n)$经过两次延时器得到。因而系统框图如题解 5-7 图(a)所示。

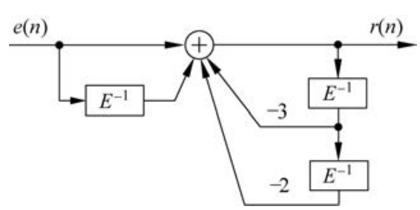
(2) 将差分方程改写为

$$r(n)=-3r(n-1)-2r(n-2)+e(n)+e(n-1)$$

由上式可得，输出 $r(n)$是由$-3r(n-1)$、$-2r(n-2)$、$e(n)$和 $e(n-1)$相加得到。其中$-3r(n-1)$可由 $r(n)$右移一位再乘以-3 得到，该过程可以利用数乘器和延时器实现。$-2r(n-2)$可在 $r(n-1)$的基础上再右移一位得到。故该系统框图如题解 5-7 图(b)所示。



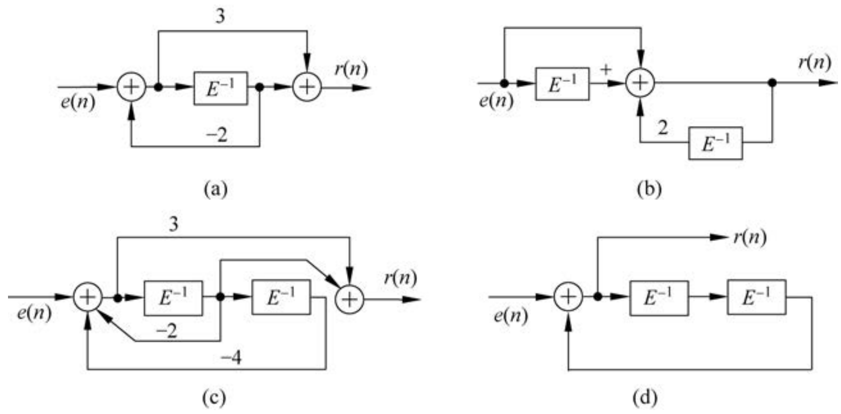
(a)



(b)

题解 5-7 图

5-8 试写出题 5-8 图所示各系统的差分方程，并指出系统的阶次。



题 5-8 图

【知识点】 系统数学模型的列写。

【方法点拨】 围绕加法器，分别表示出各输入及输出序列的表达式，对输入进行相加等于输出便可以得出系统数学方程。

【解答过程】

(a) 设系统框图中左边加法器的输出为 $x(n)$，由左边加法器可得

$$x(n)=e(n)-2E^{-1}x(n) \qquad ①$$

由右边加法器可得

$$r(n)=3x(n)+E^{-1}x(n) \qquad ②$$

将式①、式②联立，消去 $x(n)$ 得

$$r(n)=\frac{3+E^{-1}}{1+2E^{-1}}e(n)$$

整理可得 $$(1+2E^{-1})r(n)=(3+E^{-1})e(n)$$

即 $$r(n)+2r(n-1)=3e(n)+e(n-1)$$

该方程为一阶方程。

(b) 由系统框图中加法器可得 $r(n)=e(n)+E^{-1}e(n)+2E^{-1}r(n)$

整理可得 $$r(n)-2r(n-1)=e(n)+e(n-1)$$

该方程为一阶差分方程。

(c) 设系统框图中左边加法器的输出为 $x(n)$，由左边加法器可得

$$x(n)=e(n)-2E^{-1}x(n)-4E^{-2}x(n) \qquad ①$$

由右边加法器可得

$$r(n)=3x(n)+E^{-1}x(n) \qquad ②$$

将式①、式②联立，消去 $x(n)$ 得 $r(n)=\dfrac{3+E^{-1}}{1+2E^{-1}+4E^{-2}}e(n)$

整理可得 $$(1+2E^{-1}+4E^{-2})r(n)=(3+E^{-1})e(n)$$

即 $$r(n)+2r(n-1)+4r(n-2)=3e(n)+e(n-1)$$

该方程为二阶方程。

(d) 由系统框图中加法器可得 $r(n)=e(n)+E^{-2}r(n)$

整理可得 $$r(n)-r(n-2)=e(n)$$

该方程为二阶差分方程。

5-9 对于下列系统,试判断系统是否具有线性和时不变性。

(1) $r(n)=e(n-n_0)$

(2) $r(n)=2e(n)+1$

(3) $r(n)=[e(n)]^2$

(4) $r(n)=\sum\limits_{m=-\infty}^{n}e(m)$

(5) $r(n)=\mathrm{e}^{e(n)}$

(6) $r(n)=e(n)\sin\left(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}\right)$

【知识点】 系统线性、时不变性的判断。

【方法点拨】 抓住系统的输入、输出关系,得到系统作用,利用线性时不变的定义,依次判断系统是否满足叠加性和齐次性,以及当激励延时 m 个单位,响应是否也对应延时 m 个单位。

【解答过程】

(1) 设 $e_1(n)\to r_1(n)$,即 $r_1(n)=e_1(n-n_0)$

$e_2(n)\to r_2(n)$,即 $r_2(n)=e_2(n-n_0)$

当 $e(n)=k_1e_1(n)+k_2e_2(n)$时,有

$$r(n)=k_1e_1(n-n_0)+k_2e_2(n-n_0)=k_1r_1(n)+k_2r_2(n)$$

故该系统具有线性。

当 $e(n-m)$输入该系统时,有 $e(n-m)\to e(n-m-n_0)$

而 $r(n-m)=e(n-n_0-m)$

即 $e(n-m)\to r(n-m)$

所以该系统具有时不变性。

(2) 设 $e_1(n)\to r_1(n)$,即 $r_1(n)=2e_1(n)+1$

$e_2(n)\to r_2(n)$,即 $r_2(n)=2e_2(n)+1$

当 $e(n)=k_1e_1(n)+k_2e_2(n)$时,有

$$r(n)=2[k_1e_1(n)+k_2e_2(n)]+1\neq k_1r_1(n)+k_2r_2(n)$$

故该系统具有非线性。

当 $e(n-m)$输入该系统时,有 $e(n-m)\to 2e(n-m)+1$

而 $r(n-m)=2e(n-m)+1$

即 $e(n-m)\to r(n-m)$

所以该系统具有时不变性。

(3) 设 $e_1(n)\rightarrow r_1(n)$,即 $r_1(n)=[e_1(n)]^2$

$e_2(n)\rightarrow r_2(n)$,即 $r_2(n)=[e_2(n)]^2$

当 $e(n)=k_1e_1(n)+k_2e_2(n)$时,有

$$r(n)=[k_1e_1(n)+k_2e_2(n)]^2\neq k_1r_1(n)+k_2r_2(n)=k_1[e_1(n)]^2+k_2[e_2(n)]^2$$

故该系统具有非线性。

当 $e(n-m)$输入该系统时,有 $e(n-m)\rightarrow[e(n-m)]^2$

而 $r(n-m)=[e(n-m)]^2$

即 $e(n-m)\rightarrow r(n-m)$

所以该系统具有时不变性。

(4) 设 $e_1(n)\rightarrow r_1(n)$,即 $r_1(n)=\sum\limits_{m=-\infty}^{n}e_1(m)$

$e_2(n)\rightarrow r_2(n)$,即 $r_2(n)=\sum\limits_{m=-\infty}^{n}e_2(m)$

当 $e(n)=k_1e_1(n)+k_2e_2(n)$时,有

$$\begin{aligned}r(n)&=\sum_{m=-\infty}^{n}[k_1e_1(m)+k_2e_2(m)]\\&=k_1\sum_{m=-\infty}^{n}e_1(m)+k_2\sum_{m=-\infty}^{n}e_2(m)=k_1r_1(n)+k_2r_2(n)\end{aligned}$$

故该系统具有线性。

当 $e(n-n_0)$输入该系统时,有

$$e(n-n_0)\rightarrow\sum_{m=-\infty}^{n}e(m-n_0)\xlongequal{m-n_0=k}\sum_{k=-\infty}^{n-n_0}e(k)$$

而 $r(n-n_0)=\sum\limits_{m=-\infty}^{n-n_0}e(m)$

即 $e(n-m)\rightarrow r(n-m)$

所以该系统具有时不变性。

(5) 设 $e_1(n)\rightarrow r_1(n)$,即 $r_1(n)=\mathrm{e}^{e_1(n)}$

$e_2(n)\rightarrow r_2(n)$,即 $r_2(n)=\mathrm{e}^{e_2(n)}$

当 $e(n)=k_1e_1(n)+k_2e_2(n)$时,有

$$r(n)=\mathrm{e}^{k_1e_1(n)+k_2e_2(n)}=\mathrm{e}^{k_1e_1(n)}\cdot\mathrm{e}^{k_2e_2(n)}\neq k_1r_1(n)+k_2r_2(n)=k_1\mathrm{e}^{e_1(n)}+k_2\mathrm{e}^{e_2(n)}$$

故该系统具有非线性。

当 $e(n-m)$输入该系统时,有 $e(n-m)\rightarrow\mathrm{e}^{e(n-m)}$

而 $r(n-m)=\mathrm{e}^{e(n-m)}$

即 $e(n-m)\rightarrow r(n-m)$

所以该系统具有时不变性。

(6) 设 $e_1(n)\rightarrow r_1(n)$,即 $r_1(n)=e_1(n)\sin\left(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}\right)$

$e_2(n) \to r_2(n)$，即 $r_2(n)=e_2(n)\sin\left(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}\right)$

当 $e(n)=k_1e_1(n)+k_2e_2(n)$ 时，有

$$r(n)=[k_1e_1(n)+k_2e_2(n)]\sin\left(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=k_1e_1(n)\sin\left(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}\right)+k_2e_2(n)\sin\left(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}\right)=k_1r_1(n)+k_2r_2(n)$$

故该系统具有线性。

当 $e(n-m)$ 输入该系统时，有 $e(n-m)\to e(n-m)\sin\left(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}\right)$

而 $r(n-m)=e(n-m)\sin\left[\frac{\pi}{3}(n-m)+\frac{\pi}{6}\right]$

即 $e(n-m)\not\to r(n-m)$

所以该系统具有时变性。

5-10 某人向银行贷款20万，采取逐月计息偿还方式。从贷款后第一个月开始每月定时定额还款，每月固定还款金额0.4万元，贷款年利率为6%，月息 $\beta=6\%/12=0.5\%$。设第 n 个月的欠款额为 $y(n)$，试写出 $y(n)$ 满足的方程。

【知识点】 离散时间系统数学模型的建立。

【方法点拨】 根据前后两月欠款额的变化关系列写数学模型。

【解答过程】 设第 $n-1$ 个月的欠款额为 $r(n-1)$，第 n 个月的欠款额是由上一个月的本息和减去每月的固定还款金额，即 $r(n)=r(n-1)(1+\beta)-0.4u(n-1)$

整理可得 $r(n)-(1+\beta)r(n-1)=-0.4u(n-1)$

5-11 同一平面上有 n 条直线，均两两相交，但没有三条或三条以上直线交于同一点。问满足这一条件的 n 条直线能把平面分成多少块？

【知识点】 离散时间系统数学模型的建立。

【方法点拨】 根据具体系统的物理特性列写数学模型。

【解答过程】 根据题意，设 $n-1$ 条直线把平面划分为 $y(n-1)$ 块。

当再画上第 n 条直线后，该直线与已有的 $n-1$ 条直线两两相交，形成 $n-1$ 个新交点。

则这些新交点将第 n 条直线划为 n 段，每一段对应增加一块平面，即

$$y(n)-y(n-1)=n$$

利用经典法可得齐次解为 $y_h(n)=C_1$

设特解为 $y_p(n)=C_2n+C_3n^2$，代入原方程可得特解为 $y_p(n)=0.5n+0.5n^2$

因而完全解为 $y(n)=0.5n+0.5n^2+C_1$

由于 $y(0)=1$ 可求得 $C_1=1$

所以 $y(n)=0.5n^2+0.5n+1$

5-12 已知系统差分方程及边界条件，求 $n\geqslant 0$ 时系统零输入响应。

(1) $r(n)-\frac{1}{3}r(n-1)=0, r(0)=1$

(2) $r(n)-2r(n-1)=0, r(0)=\frac{1}{2}$

(3) $r(n)+3r(n-1)+2r(n-2)=0, r(-1)=1, r(-2)=1$

(4) $r(n)+2r(n-1)+r(n-2)=0, r(-1)=r(-2)=2$

(5) $r(n)+r(n-2)=0, r(0)=1, r(1)=3$

【知识点】 零输入响应的求解。

【方法点拨】 从零输入响应的数学模型出发,求解齐次方程,得到齐次解的形式,将零输入响应的初始条件代入形式解中确定待定系数,最终求得零输入响应。

【解答过程】

(1) 该齐次方程对应的特征方程为 $\lambda-\frac{1}{3}=0$,特征根为 $\lambda=\frac{1}{3}$

零输入响应为 $r_{zi}(n)=k\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n, n\geqslant 0$

将 $r(0)=1$ 代入上式得 $k=1$

所以零输入响应为 $r_{zi}(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$

(2) 该齐次方程对应的特征方程为 $\lambda-2=0$,特征根为 $\lambda=2$

零输入响应为 $r_{zi}(n)=k\cdot 2^n, n\geqslant 0$

将 $r(0)=\frac{1}{2}$ 代入上式得 $k=\frac{1}{2}$

所以零输入响应为 $r_{zi}(n)=\frac{1}{2}\cdot 2^n u(n)$

(3) 该齐次方程对应的特征方程为 $\lambda^2+3\lambda+2=0$,特征根为 $\lambda_1=-1, \lambda_2=-2$

零输入响应为 $r_{zi}(n)=k_1\cdot(-1)^n+k_2\cdot(-2)^n, n\geqslant 0$

将 $r(-1)=1, r(-2)=1$ 代入方程得 $r(0)=-5$

将 $r(0)=-5, r(-1)=1$ 代入方程得 $r(1)=13$

将 $r(0)=-5, r(1)=13$ 代入零输入响应的表达式得 $\begin{cases}k_1+k_2=-5\\-k_1-2k_2=13\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k_1=3\\k_2=-8\end{cases}$

所以零输入响应为 $r_{zi}(n)=[3\cdot(-1)^n-8\cdot(-2)^n]u(n)$

(4) 该齐次方程对应的特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+1=0$,特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$

零输入响应为 $r_{zi}(n)=(k_1 n+k_2)\cdot(-1)^n, n\geqslant 0$

利用 $r(-1)=r(-2)=2$ 求得 $r(0)=-2r(-1)-r(-2)=-6$

$r(1)=-2r(0)-r(-1)=10$

将 $r(0)=-6$，$r(1)=10$ 代入零输入响应的表达式得 $\begin{cases}k_2=-6\\-k_1-k_2=10\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k_1=-4\\k_2=-6\end{cases}$

所以零输入响应为 $r_{zi}(n)=(-4n-6)\cdot(-1)^n u(n)$

(5) 该齐次方程对应的特征方程为 $\lambda^2+1=0$，特征根为 $\lambda_1=\mathrm{j}$，$\lambda_2=-\mathrm{j}$

零输入响应为 $r_{zi}(n)=k_1\mathrm{j}^n+k_2(-\mathrm{j})^n$，$n\geqslant 0$

将 $r(0)=1$，$r(1)=3$ 代入零输入响应的表达式得 $\begin{cases}k_1+k_2=1\\k_1-k_2=-3\mathrm{j}\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k_1=\dfrac{1-3\mathrm{j}}{2}\\k_2=\dfrac{1+3\mathrm{j}}{2}\end{cases}$

所以零输入响应为

$$\begin{aligned}
r_{zi}(n)&=\left[\frac{1-3\mathrm{j}}{2}\mathrm{j}^n+\frac{1+3\mathrm{j}}{2}(-\mathrm{j})^n\right]u(n)\\
&=\left\{\frac{1}{2}[\mathrm{j}^n+(-\mathrm{j})^n]+\frac{3\mathrm{j}}{2}[(-\mathrm{j})^n-\mathrm{j}^n]\right\}u(n)\\
&=\left\{\frac{1}{2}\left[(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}})^n+(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}})^n\right]+\frac{3\mathrm{j}}{2}\left[(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}})^n-(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}})^n\right]\right\}u(n)\\
&=\left[\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi n}{2}+\mathrm{j}\sin\frac{\pi n}{2}+\cos\frac{\pi n}{2}-\mathrm{j}\sin\frac{\pi n}{2}\right)+\right.\\
&\qquad\left.\frac{3\mathrm{j}}{2}\left(\cos\frac{\pi n}{2}-\mathrm{j}\sin\frac{\pi n}{2}-\cos\frac{\pi n}{2}-\mathrm{j}\sin\frac{\pi n}{2}\right)\right]u(n)\\
&=\left(\cos\frac{\pi n}{2}+3\sin\frac{\pi n}{2}\right)u(n)
\end{aligned}$$

5-13 已知 $r(n)-r(n-1)=n$，$r(-1)=1$，求 $n\geqslant 0$ 时系统输出 $r(n)$。

【知识点】 差分方程的迭代法或时域经典法求解。

【方法点拨】 迭代法是利用已知的边界条件代入方程中迭代出方程在大于或等于 0 的区间内各时间点的输出值的方法。时域经典法的求解过程是首先求出齐次解，然后解出特解，将齐次解与特解相加得到全响应，最后利用初始条件确定齐次解中的待定系数，最终确定全响应。

【解答过程】 将差分方程改写为 $r(n)=r(n-1)+n$

令 $n=0$ 可得 $r(0)=r(-1)+0=1$

令 $n\geqslant 1$ 依次可得 $r(1)=r(0)+1=2$

$r(2)=r(1)+2=4$

$r(3)=r(2)+3=7$

$$r(4)=r(3)+4=11$$

$$\vdots$$

$$r(n)=\frac{n^2+n+2}{2},n\geqslant 0$$

另解：解齐次方程可得齐次解为 $r_h(n)=k\cdot 1^n=k$

设特解为 $r_p(n)=C_1n^2+C_2n$

将 $r_p(n)$代入原方程得

$$C_1n^2+C_2n-C_1(n-1)^2-C_2(n-1)=n$$

令左右两边相等可得 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$

因此全响应 $r(n)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+k$

将 $r(-1)=1$ 代入方程迭代可得 $r(0)=1$

将 $r(0)=1$ 代入全响应的表达式解得 $k=1$

因此 $r(n)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1,n\geqslant 0$

5-14 已知 $r(n)+3r(n-1)+2r(n-2)=u(n)$，$r(-1)=r(-2)=1$，求 $n\geqslant 0$ 时系统输出 $r(n)$。

【知识点】 差分方程的时域经典法求解。

【方法点拨】 时域经典法的求解过程是首先求出齐次解，然后解出特解，将齐次解与特解相加得到全响应，最后利用初始条件确定齐次解中的待定系数，最终确定全响应。

【解答过程】 列写齐次差分方程对应的特征方程为 $\lambda^2+3\lambda+2=0$

解得特征根为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$

方程的齐次解为 $r_h(n)=k_1(-1)^n+k_2(-2)^n$

由方程右侧形式可设特解为 $r_p(n)=k$

将 $r_p(n)$代入原方程得 $6k=1$

解得 $k=\frac{1}{6}$

因此全响应 $r(n)=k_1(-1)^n+k_2(-2)^n+\frac{1}{6}$

将 $r(-1)=r(-2)=1$ 代入方程迭代出 $r(0)=-4,r(1)=11$

将 $r(0)=-4,r(1)=11$ 代入全响应的表达式得$\begin{cases}k_1+k_2=-\frac{25}{6}\\ -k_1-2k_2=\frac{65}{6}\end{cases}$

解得$\begin{cases}k_1=\frac{5}{2}\\ k_2=-\frac{20}{3}\end{cases}$

因而 $r(n)=\frac{5}{2}\cdot(-1)^n-\frac{20}{3}\cdot(-2)^n+\frac{1}{6},n\geqslant 0$

5-15 求下列各离散时间系统的单位样值响应 $h(n)$。

(1) $r(n)-2r(n-1)=2e(n)$

(2) $r(n)-0.5r(n-1)+0.06r(n-2)=e(n-1)$

(3) $r(n)+3r(n-1)+2r(n-2)=e(n)-e(n-1)$

(4) $r(n)+\frac{1}{4}r(n-1)-\frac{1}{8}r(n-2)=e(n)$

(5) $r(n)=e(n)-e(n-1)-2e(n-3)+e(n-4)$

【知识点】 单位样值响应的求解。

【方法点拨】 利用初始条件等效法或传输算子法进行求解。

【解答过程】

(1) 求解单位样值响应的数学模型为 $h(n)-2h(n-1)=2\delta(n)$

当 $n>0$ 时,单位样值响应的数学模型转换为 $h(n)-2h(n-1)=0$

利用齐次差分方程的求解方法,可得 $h(n)=k2^n$

由单位样值响应的定义可知 $h(-1)=0$,将其代入单位样值响应的数学模型,可得

$$h(0)=2h(-1)+2\delta(0)=2$$

将 $h(0)=2$ 代入 $h(n)=k2^n$,可得 $k=2$

系统的单位样值响应为 $h(n)=2^{n+1}u(n)$

另解:用移位算子表示单位样值响应的数学模型可得

$$(1-2E^{-1})h(n)=2\delta(n)$$

$$h(n)=\frac{2}{1-2E^{-1}}\delta(n)$$

根据表 5-2 所示关系,得 $h(n)=2^{n+1}\ u(n)$

(2) 求解单位样值响应的数学模型为 $h(n)-0.5h(n-1)+0.06h(n-2)=\delta(n-1)$

当 $n>1$ 时,单位样值响应的数学模型转化为 $h(n)-0.5h(n-1)+0.06h(n-2)=0$

利用齐次差分方程的求解方法,可得 $h(n)=k_1(0.2)^n+k_2(0.3)^n$

由单位样值响应的定义可知 $h(0)=h(-1)=0$,将其代入单位样值响应的数学模型,可得

$$h(1)=0.5h(0)-0.06h(-1)+\delta(0)=1$$

$$h(2)=0.5h(1)-0.06h(0)+\delta(1)=0.5$$

将 $h(1)=1,h(2)=0.5$ 代入 $h(n)=k_1(0.2)^n+k_2(0.3)^n$,可得

$$\begin{cases}0.2k_1+0.3k_2=1\\0.04k_1+0.09k_2=0.5\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}k_1=-10\\k_2=10\end{cases}$$

系统的单位样值响应为 $h(n)=10[(0.3)^n-(0.2)^n]u(n)$

另解：用移位算子表示单位样值响应的数学模型可得

$$(1-0.5E^{-1}+0.06E^{-2})h(n)=E^{-1}\delta(n)$$

$$h(n)=\frac{E^{-1}}{1-0.5E^{-1}+0.06E^{-2}}\delta(n)=\frac{-10}{1-0.2E^{-1}}\delta(n)+\frac{10}{1-0.3E^{-1}}\delta(n)$$

根据表 5-2 所示关系，得 $h(n)=10[(0.3)^n-(0.2)^n]u(n)$

(3) 求解单位样值响应的数学模型为 $h(n)+3h(n-1)+2h(n-2)=\delta(n)-\delta(n-1)$

当 $n>1$ 时，单位样值响应的数学模型转化为 $h(n)+3h(n-1)+2h(n-2)=0$

利用齐次差分方程的求解方法，可得 $h(n)=k_1(-1)^n+k_2(-2)^n$

由单位样值响应的定义可知 $h(-1)=h(-2)=0$，将其代入单位样值响应的数学模型，可得

$$h(0)=-3h(-1)-2h(-2)+\delta(0)-\delta(-1)=1$$

$$h(1)=-3h(0)-2h(-1)+\delta(1)-\delta(0)=-4$$

将 $h(0)=1, h(1)=-4$ 代入 $h(n)=k_1(-1)^n+k_2(-2)^n$，可得

$$\begin{cases}k_1+k_2=1\\-k_1-2k_2=-4\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}k_1=-2\\k_2=3\end{cases}$$

系统的单位样值响应为 $h(n)=[3(-2)^n-2(-1)^n]u(n)$

另解：用移位算子表示单位样值响应的数学模型可得

$$(1+3E^{-1}+2E^{-2})h(n)=(1-E^{-1})\delta(n)$$

$$h(n)=\frac{1-E^{-1}}{1+3E^{-1}+2E^{-2}}\delta(n)=\frac{-2}{1+E^{-1}}\delta(n)+\frac{3}{1+2E^{-1}}\delta(n)$$

根据表 5-2 所示关系，得 $h(n)=[3(-2)^n-2(-1)^n]u(n)$

(4) 用移位算子表示单位样值响应的数学模型可得

$$\left(1+\frac{1}{4}E^{-1}-\frac{1}{8}E^{-2}\right)h(n)=\delta(n)$$

$$h(n)=\frac{1}{1+\frac{1}{4}E^{-1}-\frac{1}{8}E^{-2}}\delta(n)=\frac{2/3}{1+\frac{1}{2}E^{-1}}\delta(n)+\frac{1/3}{1-\frac{1}{4}E^{-1}}\delta(n)$$

根据表 5-2 所示关系，得 $h(n)=\left[\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$

(5) 当激励 $e(n)=\delta(n)$ 时，对应的响应为单位样值响应，因而

$$h(n)=\delta(n)-\delta(n-1)-2\delta(n-3)+\delta(n-4)$$

5-16 已知下列 LTI 离散时间系统的单位样值响应 $h(n)$，试判断系统的因果性和稳定性，并简要说明理由。

(1) $h(n)=(0.2)^n u(n)$

(2) $h(n)=\delta(n-1)$

(3) $h(n)=nu(n)$

(4) $h(n)=2^n R_5(n)$

(5) $h(n)=3^n u(-n)$

(6) $h(n)=\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]u(n)$

【知识点】 系统因果性和稳定性的判断。

【方法点拨】 单位样值响应具有因果性是判断系统因果性的充要条件。单位样值响应绝对可和是系统稳定的充要条件。

【解答过程】

(1) 由于 $n<0$ 时,$h(n)=0$,所以系统因果。又因为 $\sum_{n=0}^{+\infty}|h(n)|<\infty$,所以系统稳定。

(2) 由于 $n<0$ 时,$h(n)=0$,所以系统因果。又因为 $\sum_{n=0}^{+\infty}|h(n)|<\infty$,所以系统稳定。

(3) 由于 $n<0$ 时,$h(n)=0$,所以系统因果。又因为 $\sum_{n=0}^{+\infty}|h(n)|\to\infty$,所以系统不稳定。

(4) 由于 $n<0$ 时,$h(n)=0$,所以系统因果。又因为 $\sum_{n=0}^{+\infty}|h(n)|<\infty$,所以系统稳定。

(5) 由于 $n<0$ 时,$h(n)\neq 0$,所以系统非因果。又因为 $\sum_{n=0}^{+\infty}|h(n)|<\infty$,所以系统稳定。

(6) 由于 $n<0$ 时,$h(n)=0$,所以系统因果。又因为 $\sum_{n=0}^{+\infty}|h(n)|<\infty$,所以系统稳定。

5-17 已知某 LTI 离散时间系统的阶跃响应为 $g(n)=[(-2)^n+1]u(n)$,求该系统的单位样值响应 $h(n)$。

【知识点】 LTI 系统单位阶跃响应与单位样值响应的关系。

【方法点拨】 利用 LTI 系统的特性,当输入线性变化时,输出对应线性变化。当输入延时,输出对应发生延时。抓住阶跃响应和样值响应中激励信号的关系,可对应转换出阶跃响应与样值响应之间的关系。

【解答过程】 已知 $u(n)\to g(n)=[(-2)^n+1]u(n)$

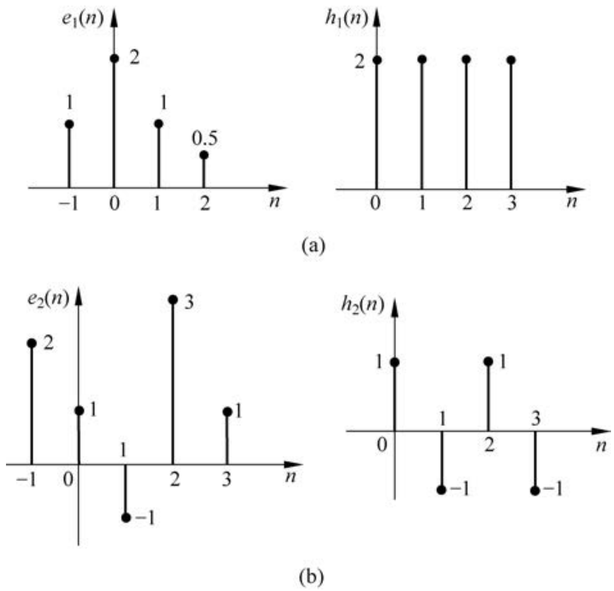
又因为 $\delta(n)=u(n)-u(n-1)$

根据系统的时不变性，$u(n-1) \rightarrow g(n-1)=[(-2)^{n-1}+1]u(n-1)$

根据系统的线性可得

$$
\begin{aligned}
\delta(n)=u(n)-u(n-1) &\rightarrow g(n)-g(n-1) \\
&=[(-2)^n+1]u(n)-[(-2)^{n-1}+1]u(n-1) \\
&=\frac{3}{2}(-2)^n u(n)+\frac{1}{2}\delta(n)
\end{aligned}
$$

5-18 已知某 LTI 离散时间系统的单位样值响应和激励分别如题 5-18 图所示，画出系统响应 $r(n)$ 的波形。



题 5-18 图

【知识点】 零状态响应的卷积分析法。

【方法点拨】 零状态响应等于激励与单位样值响应的卷积。针对两个有限长序列的卷积可采用对位相乘法进行求解。

【解答过程】

(a) 将两个序列以右对齐排列，对位相乘过程如下：

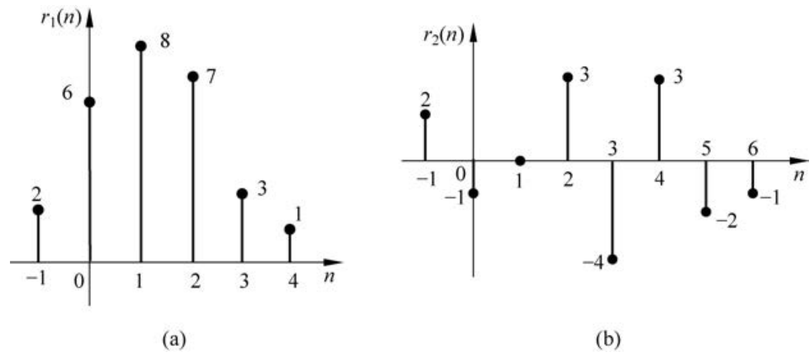
$$
\begin{array}{cccccc}
 & & 1 & 2 & 1 & 0.5 \\
 & & 2 & 2 & 2 & 2 \\
\hline
 & & 2 & 4 & 2 & 1 \\
 & 2 & 4 & 2 & 1 & \\
2 & 4 & 2 & 1 & & \\
\hline
2 & 6 & 8 & 7 & 3 & 1
\end{array}
$$

即系统响应 $r(n)=\{2,\underset{\uparrow}{6},8,7,3,1\}$，波形如题解 5-18 图(a)所示。

(b) 将两个序列以右对齐排列,对位相乘过程如下:

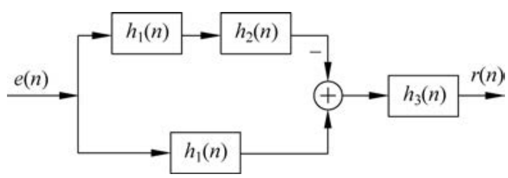
$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
 & & & 2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\
 & & & & 1 & -1 & 1 & -1 \\
\hline
 & & & -2 & -1 & 1 & -3 & -1 \\
 & & 2 & 1 & -1 & 3 & 1 & \\
 & -2 & -1 & 1 & -3 & -1 & & \\
2 & 1 & -1 & 3 & 1 & & & \\
\hline
2 & -1 & 0 & 3 & -4 & 3 & -2 & -1
\end{array}
$$

即系统响应 $r(n)=\{2,\underset{\uparrow}{-1},0,3,-4,3,-2,-1\}$,波形如题解 5-18 图(b)所示。



题解 5-18 图

5-19 已知某 LTI 离散时间系统的系统框图如题 5-19 图所示,各子系统分别为 $h_1(n)=u(n)$,$h_2(n)=\delta(n-2)$,$h_3(n)=u(n-1)$,求该系统的单位样值响应。



题 5-19 图

【知识点】 卷积的性质。

【方法点拨】 利用卷积的结合律可得级联系统的单位样值响应等于各级联子系统单位样值响应的卷积,利用卷积的分配律可得并联系统的单位样值响应等于各并联子系统单位样值响应的求和。

【解答过程】 由系统框图可得系统单位样值响应为

$$
\begin{aligned}
h(n) &= [h_1(n)-h_1(n)*h_2(n)]*h_3(n) \\
&= [u(n)-u(n)*\delta(n-2)]*u(n-1) \\
&= [u(n)-u(n-2)]*u(n-1)
\end{aligned}
$$

$$=[\delta(n)+\delta(n-1)]*u(n-1)$$
$$=u(n-1)+u(n-2)$$

5-20 已知系统差分方程为 $r(n)=e(n)-2e(n-1)-e(n-2)$，激励 $e(n)=u(n)-u(n-2)$。

求：(1)系统单位样值响应 $h(n)$；

(2) $n\geqslant 0$ 时零状态响应 $r(n)$。

【知识点】 单位样值响应及零状态响应的求解。

【方法点拨】 从单位样值响应的定义出发求解单位样值响应。零状态响应的求解采用卷积法。

【解答过程】

(1) 当激励 $e(n)=\delta(n)$时，对应的响应为单位样值响应，因而

$$h(n)=\delta(n)-2\delta(n-1)-\delta(n-2)$$

(2) 零状态响应

$$r(n)=e(n)*h(n)$$
$$=[\delta(n)+\delta(n-1)]*[\delta(n)-2\delta(n-1)-\delta(n-2)]$$
$$=\delta(n)-\delta(n-1)-3\delta(n-2)-\delta(n-3)$$

5-21 求下列 LTI 离散时间系统的零输入响应 $r_{zi}(n)$、零状态响应 $r_{zs}(n)$及全响应 $r(n)$。

(1) $r(n)+\frac{1}{3}r(n-1)=e(n), r(-1)=-1, e(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$；

(2) $r(n)-\frac{5}{6}r(n-1)+\frac{1}{6}r(n-2)=e(n)-e(n-1), r(-1)=0, r(-2)=1, e(n)=u(n)$。

【知识点】 双零法求解系统响应。

【方法点拨】 零输入响应的求解过程是求解齐次解的过程。零状态响应的求解采用卷积分析法。全响应等于零输入响应与零状态响应的和。

【解答过程】

(1) 零输入响应的数学模型为 $r(n)+\frac{1}{3}r(n-1)=0$

解该齐次方程可得零输入响应为 $r_{zi}(n)=k\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n, n\geqslant 0$

将 $r(-1)=-1$ 代入零输入响应的模型得 $r_{zi}(0)=\frac{1}{3}$

将 $r_{zi}(0)=\frac{1}{3}$代入 $r_{zi}(n)=k\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ 解得 $k=\frac{1}{3}$

所以零输入响应为 $r_{zi}(n)=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n, n\geqslant 0$

单位样值响应的数学模型为 $h(n)+\frac{1}{3}h(n-1)=\delta(n)$

用移位算子表示单位样值响应的数学模型可得

$$\left(1+\frac{1}{3}E^{-1}\right)h(n)=\delta(n)$$

$$h(n)=\frac{1}{1+\frac{1}{3}E^{-1}}\delta(n)=\left(-\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

零状态响应为

$$r_{zs}(n)=e(n)*h(n)=\left(-\frac{1}{3}\right)^n u(n)*\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$=\left[\sum_{m=0}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^m\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}\right]u(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[\sum_{m=0}^{n}\left(-\frac{2}{3}\right)^m\right]u(n)$$

$$=\left[\frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]u(n)$$

全响应为 $r(n)=r_{zi}(n)+r_{zs}(n)=\left[\frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{11}{15}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]u(n)$

(2) 零输入响应的数学模型为 $r(n)-\frac{5}{6}r(n-1)+\frac{1}{6}r(n-2)=0$

解该齐次方程可得零输入响应为 $r_{zi}(n)=k_1\left(\frac{1}{3}\right)^n+k_2\left(\frac{1}{2}\right)^n,n\geqslant 0$

将 $r(-1)=0,r(-2)=1$ 代入零输入响应的模型得 $r_{zi}(0)=-\frac{1}{6},r_{zi}(1)=-\frac{5}{36}$

将 $r_{zi}(0)=-\frac{1}{6},r_{zi}(1)=-\frac{5}{36}$代入 $r_{zi}(n)=k_1\left(\frac{1}{3}\right)^n+k_2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 得

$$\begin{cases}k_1+k_2=-\frac{1}{6}\\ \frac{1}{3}k_1+\frac{1}{2}k_2=-\frac{5}{36}\end{cases}\quad 解得\begin{cases}k_1=\frac{1}{3}\\ k_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

所以零输入响应为 $r_{zi}(n)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n,n\geqslant 0$

单位样值响应的数学模型为 $h(n)-\frac{5}{6}h(n-1)+\frac{1}{6}h(n-2)=\delta(n)-\delta(n-1)$

用移位算子表示单位样值响应的数学模型可得

$$\left(1-\frac{5}{6}E^{-1}+\frac{1}{6}E^{-2}\right)h(n)=(1-E^{-1})\delta(n)$$

$$h(n)=\frac{1-E^{-1}}{1-\frac{5}{6}E^{-1}+\frac{1}{6}E^{-2}}\delta(n)=\frac{4}{1-\frac{1}{3}E^{-1}}\delta(n)-\frac{3}{1-\frac{1}{2}E^{-1}}\delta(n)$$

$$=\left[4\left(\frac{1}{3}\right)^n-3\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n)$$

零状态响应为

$$r_{zs}(n)=e(n)*h(n)=\left[4\left(\frac{1}{3}\right)^n-3\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n)*u(n)$$

$$=\left\{\sum_{m=0}^{n}\left[4\left(\frac{1}{3}\right)^m-3\left(\frac{1}{2}\right)^m\right]\right\}u(n)=\left[4\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}-3\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right]u(n)$$

$$=\left[3\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u(n)$$

全响应为 $r(n)=r_{zi}(n)+r_{zs}(n)=\left[\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u(n)$

5-22 已知描述某 LTI 离散时间系统的差分方程为

$$r(n)+5r(n-1)+6r(n-2)=e(n)-e(n-1)$$

(1) 求系统的单位样值响应；

(2) 判断系统稳定性；

(3) 请画出该系统模拟图。

【知识点】 单位样值响应的求解；系统稳定性的判断以及系统模拟图绘制。

【方法点拨】 利用传输算子法求单位样值响应比较简便。根据已知的单位样值响应是否满足绝对可和可判断系统稳定性。利用加法器将输入、输出序列以及输入、输出的移位序列进行有效组合实现系统模拟。

【解答过程】

(1) 用移位算子表示单位样值响应的数学模型可得

$$h(n)=\frac{1-E^{-1}}{1+5E^{-1}+6E^{-2}}\delta(n)=\frac{-3}{1+2E^{-1}}\delta(n)+\frac{4}{1+3E^{-1}}\delta(n)$$

所以单位样值响应为

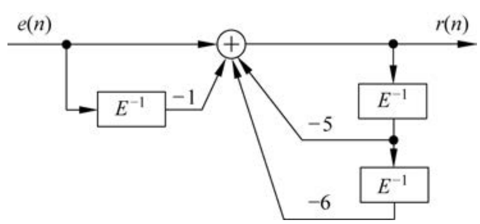
$$h(n)=[4(-3)^n-3(-2)^n]u(n)$$

(2) 由于 $\sum_{n=0}^{+\infty}|h(n)|\to\infty$，则该系统不稳定。

(3) 将系统差分方程改写为

$$r(n)=-5r(n-1)-6r(n-2)+e(n)-e(n-1)$$

根据上式可画出系统的模拟图如题解 5-22 图所示。



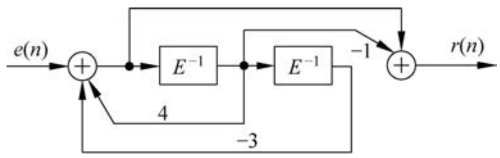
题解 5-22 图

5-23 某离散时间系统的模拟图如题 5-23 图所示。

（1）请写出系统的差分方程；

（2）求 $h(n)$；

（3）若激励 $e(n)=u(n)$，$r(-1)=0$，$r(-2)=1$，求响应 $r(n)$。



题 5-23 图

【知识点】 由系统框图列写系统差分方程；系统单位样值响应的求解；系统全响应的求解。

【方法点拨】 抓住加法器，消去中间变量，得到输入、输出以及输入、输出的移位序列所组成的方程。利用传输算子法求单位样值响应。利用双零法求系统的全响应。

【解答过程】

（1）设系统框图中左边加法器的输出为 $x(n)$，由左边加法器可得

$$x(n)=e(n)+4E^{-1}x(n)-3E^{-2}x(n) \quad ①$$

由右边加法器可得 $$r(n)=x(n)-E^{-1}x(n) \quad ②$$

将式①、式②联立，消去 $x(n)$ 得 $r(n)=\dfrac{1-E^{-1}}{1-4E^{-1}+3E^{-2}}e(n)$

整理可得 $$(1-4E^{-1}+3E^{-2})r(n)=(1-E^{-1})e(n)$$

即 $$r(n)-4r(n-1)+3r(n-2)=e(n)-e(n-1)$$

（2）用移位算子表示单位样值响应的数学模型可得

$$h(n)=\frac{1-E^{-1}}{1-4E^{-1}+3E^{-2}}\delta(n)=\frac{1}{1-3E^{-1}}\delta(n)$$

所以单位样值响应为 $h(n)=3^n u(n)$

（3）零输入响应的数学模型为 $r(n)-4r(n-1)+3r(n-2)=0$

解该齐次方程可得零输入响应为 $r_{zi}(n)=k_1+k_2 3^n$，$n\geqslant 0$

将 $r(-1)=0$，$r(-2)=1$ 代入零输入响应的模型得 $r_{zi}(0)=-3$，$r_{zi}(1)=-12$

将 $r_{zi}(0)=-3$，$r_{zi}(1)=-12$ 代入 $r_{zi}(n)=k_1+k_2 3^n$ 得

$$\begin{cases}k_1+k_2=-3\\k_1+3k_2=-12\end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases}k_1=\dfrac{3}{2}\\k_2=-\dfrac{9}{2}\end{cases}$$

所以零输入响应为 $r_{zi}(n)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{9}{2}\cdot 3^n$，$n\geqslant 0$

由题(2)可知单位样值响应为 $h(n)=3^n u(n)$

零状态响应为

$$r_{zs}(n)=e(n)*h(n)=3^n u(n)*u(n)$$

$$=\left(\sum_{m=0}^{n}3^m\right)u(n)=\frac{1-3^{n+1}}{1-3}u(n)=\left(\frac{3}{2}\cdot 3^n-\frac{1}{2}\right)u(n)$$

全响应为 $r(n)=r_{zi}(n)+r_{zs}(n)=(1-3\cdot 3^n)u(n)$

5-24 已知二阶 LTI 离散时间系统的单位样值响应为

$$h(n)=(1+2\cdot 3^n)u(n)$$

(1) 请写出该系统的差分方程;

(2) 判断系统的因果性、稳定性;

(3) 若激励为 $e(n)=u(n)-u(n-2)$,求系统的零状态响应 $r(n)$。

【知识点】 单位样值响应的传输算子法求解;系统的因果性、稳定性;零状态响应求解。

【方法点拨】 利用传输算子法求单位样值响应,进行逆向推导求得系统的差分方程,根据单位样值响应对系统的因果性、稳定性进行判断,最后利用卷积分析法求零状态响应。

【解答过程】

(1) 已知 $h(n)=(1+2\cdot 3^n)u(n)$,根据传输算子法可得传输算子为

$$H(E)=\frac{1}{1-E^{-1}}+\frac{2}{1-3E^{-1}}=\frac{3-5E^{-1}}{1-4E^{-1}+3E^{-2}}$$

因而系统的差分方程为 $r(n)-4r(n-1)+3r(n-2)=3e(n)-5e(n-1)$

(2) 由于 $n<0$ 时,$h(n)=0$,所以系统因果。又因为 $\sum_{n=0}^{+\infty}|h(n)|\to\infty$,所以系统不稳定。

(3) 零状态响应为

$$r_{zs}(n)=e(n)*h(n)=[u(n)-u(n-2)]*h(n)=[\delta(n)+\delta(n-1)]*h(n)$$
$$=(1+2\cdot 3^n)u(n)+(1+2\cdot 3^{n-1})u(n-1)$$

5.4 阶段测试

1. 选择题

(1) 下列四个等式中正确的为(　　)。

A. $u(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta(n-m)$　　B. $\delta(n)=u(-n)-u(-n-1)$

C. $u(-n)=\sum_{m=-\infty}^{0}\delta(n+m)$　　D. $\delta(n)=u(-n)-u(-n+1)$

(2) 判断下列四个信号中,与 $f(n)=\sum_{m=-1}^{1}\delta(n-m)$ 相同的信号是(　　)。

A. $f(n)=u(1-n)-u(-2-n)$　　B. $f(n)=u(n+1)-u(n-1)$

C. $f(n)=u(n+1)-u(n-2)$　　D. $f(n)=u(-n+2)-u(-n-1)$

(3) 判断序列 $f(n)=2\sin\left(\frac{3\pi}{5}+\frac{\pi}{4}\right)u(n)$的特性为(　　)。

A. 双边、周期序列　　B. 双边、非周期序列

C. 右边、周期序列　　D. 右边、非周期序列

(4) 系统 $r(n)=\sum_{m=0}^{+\infty}e(n-m)$ 的单位样值响应为(　　)。

A. $u(n)$　　B. $\delta(n)$　　C. $a^n u(n)$　　D. 不存在

(5) 离散时间系统的单位阶跃响应为 $g(n)=4^n u(n)$,则系统的单位样值响应为(　　)。

A. $4^n u(n-1)$　　B. $4^{n-1}u(n-1)$

C. $n\cdot 4^n u(n)$　　D. $\frac{3}{4}\cdot 4^n u(n)+\frac{1}{4}\delta(n)$

(6) 序列卷积和 $u(n)*u(n-2)=$(　　)。

A. $nu(n)$　　B. $(n-2)u(n-2)$

C. $(n-1)u(n-2)$　　D. $(n-2)u(n-1)$

2. 填空题

(1) 计算 $\sum_{m=-\infty}^{+\infty}2^m\delta(m-3)=$________。

(2) 序列 $f(n)$如图 5A-1 所示,用$\delta(n)$的加权与延时的线性组合表示为________。

(3) 已知序列 $f_1(n)$是 4 点序列,序列 $f_2(n)$是 4 点序列,则卷积和 $y(n)=f_1(n)*f_2(n)$是________点序列。

(4) 已知序列 $f_1(n)$和 $f_2(n)$的波形如图 5A-2(a)、图 5A-2(b)所示,设卷积和 $y(n)=f_1(n)*f_2(n)$,则 $y(2)=$________。

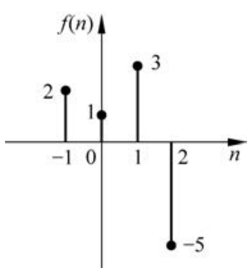


图 5A-1

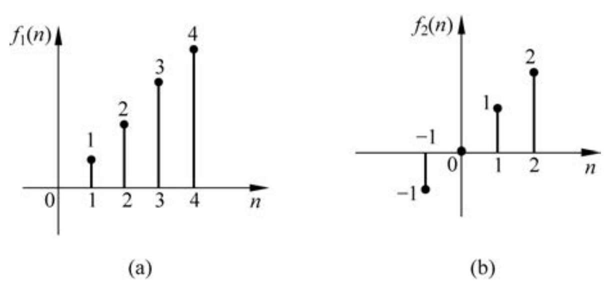


图 5A-2

(5) 已知某系统的输入输出关系为 $r(n)=3ne(n)+\ln 2$,其中 $r(n)$为输出,$e(n)$为输入,则从线性、时不变角度判断该系统的特性为________。

(6) 已知某 LTI 离散时间系统单位样值响应 $h(n)=0.3^n u(n)$,从因果性和稳定性的角度判断该系统的特性为________。

3. 计算与画图题

(1) 设已知序列 $f(n)=\begin{cases}n+1, & -2\leqslant n\leqslant 2\\ 0, & n<-2 \text{ 或 } n>2\end{cases}$,画出下列序列的波形。

① $f(1-n)$；② $f(n)f(1-n)$；③ $f(n)*\delta(n-1)$。

(2) 已知某系统的差分方程为 $r(n)-7r(n-1)+12r(n-2)=e(n)$，且 $r(-1)=\frac{1}{6}$，$r(-2)=\frac{7}{72}$，求 $n\geqslant 0$ 时系统的零输入响应。

(3) 已知某系统模拟图如图 5A-3 所示，求系统的单位样值响应。

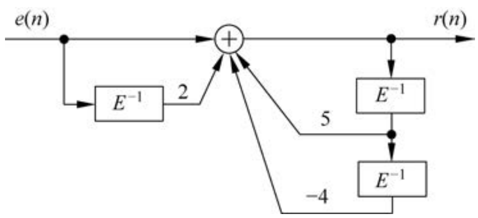


图 5A-3

(4) 已知某系统的差分方程为 $r(n)-0.9r(n-1)+0.2r(n-2)=e(n)$，若输入为 $e(n)=(0.2)^n u(n)$，初始条件 $r(-1)=11$，$r(-2)=24.5$ 时，求系统的全响应并画出系统的时域模拟图。

(5) 已知某系统的框图如图 5A-4 所示，其中 $h_1(n)=\delta(n)$，$h_2(n)=\delta(n-2)$，$h_3(n)=3\delta(n-1)$，当输入 $e(n)=u(n)$时，求系统的零状态响应。

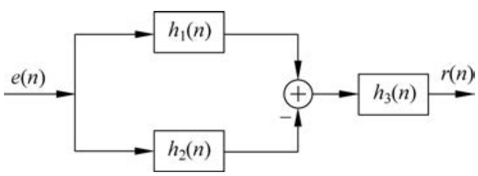


图 5A-4

(6) 已知某 LTI 离散时间系统，当输入 $e(n)=u(n)-u(n-3)$时产生的零状态响应为 $r(n)=\{\underset{\uparrow}{1},3,6,5,3\}$，求该系统的单位样值响应。