

第3章

级数展开

3.1 级数收敛性

1. 级数

由复数序列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的部分和构成一个新序列 $\left\{s_n = \sum_{k=1}^n a_k\right\}$, 称无穷和

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + \cdots$$

为级数(series). 如果部分序列和具有有限的极限 s ,

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s,$$

则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛(convergent), 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = s.$$

序列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的极限 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \rightarrow 0$ 是级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛的必要条件, 但不是充分条件, 例如调和级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k} + \cdots$$

是发散的. 部分和在两个值之间振荡的级数也不收敛, 例如

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^k + \cdots$$

柯西收敛判据 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛的充分必要条件是 $\lim_{m, n \rightarrow \infty} |s_m - s_n| \rightarrow 0$, 即对于任意

的正数 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得当 $k > N$ 时, $\left| \sum_{k=N+1}^{N+p} a_k \right| < \epsilon$, 其中 p 为任意正整数.

由于复数由实部和虚部构成, 故复级数收敛的充分必要条件是其实部和虚部构成的级数均收敛.

2. 函数项级数

如果序列的每一项是复变函数 $\{w_k(z)\}$, 则称无穷求和表达式

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k(z) = w_1(z) + w_2(z) + \cdots + w_k(z) + \cdots$$

为函数项级数. 函数项级数的收敛性同样由柯西判据确定, 即对于任意小的正数 $\epsilon > 0$, 必存

在正整数 N , 使得当 $k > N$ 时, 有 $\left| \sum_{k=N+1}^{N+p} w_k(z) \right| < \epsilon$, 其中 p 为任意正整数.

由于每一项都是函数, 函数项级数在不同 z 的收敛性可能会不一样, 这就有收敛域问题. 另外, 级数在各点收敛的快慢也可能不一样, 它们会影响级数的解析性质, 必须进一步加以澄清. 下面是几个相关概念.

(1) 绝对收敛 (absolute convergence).

在函数项级数中, 如果由各项的模构成的级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} |w_k(z)| = |w_1(z)| + |w_2(z)| + \cdots + |w_k(z)| + \cdots$$

在 z 点收敛, 则称该函数项级数在 z 点绝对收敛.

(2) 一致收敛 (uniform convergence).

函数项级数的各项是 z 的函数, 如果级数在闭区域 $\bar{B}$ 的任意点都收敛, 则称级数在区域 B 内收敛. 如果上述柯西判据中的正整数 N 与 z 无关, 则该复函数项级数在 B 域上一致收敛.

(3) 绝对一致收敛.

如果对于某个区域 B 上的所有各点, 由各函数项的模构成的级数都一致收敛, 则称函数项级数绝对一致收敛.

一致收敛是指可以找到一个与 z 无关正整数 N , 使得无穷级数的尾巴可以忽略不计,

即 $\left| \sum_{k=N+1}^{\infty} w_k(z) \right| < \epsilon$. 关于函数项级数的一致收敛性, 有以下判别法.

魏尔斯特拉斯 M-Test 判别法 令 $\{M_k\}$ 为正实数序列, 且级数 $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ 收敛, 如果对于

区域 $\bar{B}$ 内所有 z 均满足 $|w_k(z)| \leq M_k$, 则函数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k(z)$ 在区域 B 一致收敛.

例 3.1 设 $x \in \mathbb{R}$, 证明下列级数绝对收敛, 但不一致收敛:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}.$$

证明 当 $x=0$ 时, $f(0)=0$; 当 $x \neq 0$ 时, 这是一个几何级数, 直接计算得

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k} = 1,$$

所以级数在 $-\infty < x < \infty$ 收敛且绝对收敛. 再考虑从第 $N+1$ 项开始的级数和,

$$\left| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k} \right| = \left| \frac{1}{(1+x^2)^N} \right| < \epsilon,$$

可知对于小的正数 ϵ , 整数 N 必依赖于 x 的值, 所以级数非一致收敛.

值得注意的是, 本例中的函数项是连续函数, 但级数 $f(x)$ 不是连续函数.

3. 解析性

设函数序列 $\{w_k(z)\}$ 的每一项在区域 B 内解析, 则有以下定理.

(1) **导数定理** 如果函数级数 $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(z)$ 在区域 B 一致收敛, 则 $f(z)$ 在 B 内解析, 且 $f(z)$ 的导数等于级数项函数导数之和, 即

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k^{(n)}(z).$$

(2) **积分定理** 设 Γ 为区域 B 内分段光滑的路径, 如果函数级数 $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(z)$ 在 B 内一致收敛, 则 $f(z)$ 的路径积分等于级数项函数的路径积分之和, 即

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Gamma} w_k(z) dz.$$

这两个定理表明, 如果级数在某个区域内一致收敛, 则在该区域内级数的导数或积分可以与求和交换次序.

4. 幂级数

形如 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ 的级数称为以 z_0 为中心的幂级数, 其中 a_k 是复常数. 若存在正数 R , 使得当 $|z - z_0| < R$ 时幂级数收敛, 而当 $|z - z_0| > R$ 时级数发散, 则称 $|z - z_0| < R$ 为收敛圆, 称 R 为级数的收敛半径. 可以根据以下几种方法判定幂级数的收敛圆及收敛半径.

(1) 比值判别法.

如果幂级数的相邻两项之比满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}| |z - z_0|^{k+1}}{|a_k| |z - z_0|^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} |z - z_0| < 1,$$

则级数收敛, 收敛半径为

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|.$$

比值判别法也称作达朗贝尔判别法.

(2) 根式判别法.

如果幂级数项满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k| |z - z_0|^k} < 1,$$

则级数收敛, 收敛半径为

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}.$$

根式判别法也称作柯西判别法.

例 3.2 求级数的收敛半径:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}.$$

解 由比值判别法,有

$$\frac{|(-1)^{k+1} z^{2(k+1)}|}{|(-1)^k z^{2k}|} < 1,$$

所以收敛半径 $R=1$.

本题的级数是几何级数,其和可以直接求出来,即

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k} = 1 - z^2 + z^4 - \cdots = \frac{1}{1+z^2}.$$

该解析表达式表明,函数除了在 $z = \pm i$ 处有奇异性,在全平面上解析.级数的收敛半径恰好是从原点开始扩张的圆,当圆周达到奇点时的圆半径.

问题 当 $|z - z_0| < R$ 时,级数在圆周内收敛;那么在圆周 $|z - z_0| = R$ 上级数是否收敛呢?这由下述高斯判别法确定.

(3) 高斯判别法.

如果幂级数相邻两项之比的极限为 $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{w_{k+1}}{w_k} \right| = 1$,将前后项之比表示为

$$\left| \frac{w_k}{w_{k+1}} \right| = 1 + \frac{\lambda}{k} + \frac{\omega_k}{k^\rho},$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时,如果 $\lambda > 1$ 则级数收敛;如果 $\lambda \leq 1$ 则级数发散.具体证明可参考梁昆森《数学物理方法》第四版附录,此处略.

例 3.3 研究勒让德级数的收敛性:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k},$$

其中,系数满足递推关系

$$a_{2k+2} = \frac{(2k-l)(2k+l+1)}{(2k+2)(2k+1)} a_{2k}, \quad a_0 = 1.$$

解 由比值判别法,级数的收敛半径为

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2k}}{a_{2k+2}} \right|^{1/2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(2k+2)(2k+1)}{(2k-l)(2k+l+1)} \right|^{1/2} = 1,$$

即级数 $|x| < 1$ 时收敛.现在考察级数在 $|x| = 1$ 是否收敛,由于

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2k}}{a_{2k+2}} \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(2k+2)(2k+1)}{(2k-l)(2k+l+1)} \right| = \frac{4k^2 + 6k + 2}{4k^2 + 2k - l(l+1)} \\ &= 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} \frac{l(l+1)(l+1/k)}{4 + 2/k - l(l+1)/k^2}, \end{aligned}$$

可见 $\lambda = 1$,由高斯判别法知,勒让德级数在 $x = \pm 1$ 发散,于是勒让德级数的收敛域为

$x \in (-1, +1)$.

幂级数的解析性也与级数的一致收敛性相关,其判别依据如下所述.

阿贝尔定理 如果幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ 在 $z = z_1$ 点收敛,则必在 $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ 的圆内收敛,且在 $|z - z_0| \leq \delta$ ($\delta < |z_1 - z_0|$) 的闭圆内一致收敛.

证明 由于幂级数在 $z = z_1$ 点收敛,所以

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}| |z_1 - z_0|^{k+1}}{|a_k| |z_1 - z_0|^k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} |z_1 - z_0| < 1 \\ \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} &< \frac{1}{|z_1 - z_0|}. \end{aligned}$$

根据比值判别法

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}| |z - z_0|^{k+1}}{|a_k| |z - z_0|^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} |z - z_0| < \frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|} < 1,$$

所以幂级数在区域 $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ 内收敛. 另外,对于收敛域 $|z - z_0| \leq \delta$ 内的任意点 z ,由于 $|a_k (z - z_0)^k| \leq a_k R^k = M_k$,级数 $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ 收敛且与 z 无关,由魏尔斯特拉斯 M-Test 判别法可知,幂级数在闭区域 $|z - z_0| \leq \delta$ 内一致收敛.

推论 如果幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ 在 $z = z_1$ 点发散,则必在 $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$ 处处发散.

由阿贝尔定理可知,幂级数在收敛圆 $|z - z_0| < R$ 的内部是解析函数,在收敛圆内不可能出现奇点,即收敛圆是单连通域. 在收敛圆以外的任意点,幂级数都是发散的.

笔记

牛顿和莱布尼兹创立的微积分是建立在直觉之上的,要为其找到一个坚实的基础,需要对实数、函数与极限等基本概念给出明确的定义,这一过程导致了长达 200 年的数学分析演化史.

从牛顿时代以来人们就谈论极限的思想,到 18 世纪末,拉克鲁瓦(S. F. Lacroix)摒弃传统的几何切线法,最早采用极限来定义导数.柯西是第一个将函数逼近某个特殊值的模糊观念转化为严格数学术语的人,他采用 δ - ϵ 不等式的语言表述极限概念,定义了函数的连续性和无穷级数的收敛性,并给出当今数学教科书里通行的导数定义——在此之前拉格朗日的导数定义是基于一个颇有疑问的假设:所有函数都可以表示为幂级数形式.

关于积分,早期流行的做法是将其视作求导的逆运算,柯西率先将积分定义为无穷求和的极限,由此开辟一片广阔的天地.1840 年,柯西将他的积分定义推广到复变函数,引入路径积分并得到一系列重要结果,包括柯西定理和留数概念等.然而柯西的结论之一“连续函数的无穷序列极限必定是连续函数”却是错误的,14.2 节将给出一个反例.魏尔斯特拉斯研究了如何保证函数项级数在某个区域的解析性问题,强调函数项级数的一致收敛性.这个思想最早被斯托克斯(Stokes)和赛德尔(Seidel)注意到,但一度被柯西曲解,比如柯西认为由连续函数构成的收敛级数必定是连续函数,本节例 3.1 即一个反例,阿贝尔也曾举出一个反例:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots$$

该级数的每一项都是连续可导函数,但级数函数在 $x=(2n+1)\pi (n\in\mathbb{Z})$ 处不连续,因而也不可导.

解析性定理表明,对于一致收敛的级数,其导数或积分与级数求和可以交换次序.非一致收敛的级数在相应区域 B 内可能会出现奇异性,导数或积分与级数求和不能交换次序.例如泰勒级数展开

$$e^{-x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k = 1 - \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

等式右边的级数绝对收敛,收敛半径为 $R=\infty$,但这并不意味着下式成立:

$$\int_0^a e^{-x} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^a \frac{(-1)^k}{k!} x^k dx.$$

当积分限 a 为有限值时等式是成立的;但由于 $z=\infty$ 是函数 $f(z)=e^{-z}$ 的奇点,当 $a\rightarrow\infty$ 时,求和号里的每一项积分均发散.事实上,柯西判据中的正整数 N 与 x 有关,

$$\left| \sum_{k=N+1}^{N+p} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \right| < \varepsilon,$$

级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$ 在 $[0, \infty)$ 不一致收敛,所以积分与求和不能交换次序.

习 题

[1] 证明调和级数发散:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

提示: 考虑 $\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$.

[2] 在什么区域内下列幂级数一致收敛:

$$(a) \sum_{k=0}^{\infty} z^k; \quad (b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k}; \quad (c) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}.$$

提示: 如果级数在 $|z|<1$ 一致收敛,则它在 $|z|=1$ 收敛.

答案: (a) $|z| \leq \delta < 1$; (b) $|z| \leq \delta < 1$; (c) $|z| < 1$.

[3] 如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 均绝对收敛,证明在实数域 $-\infty < x < \infty$ 内下列级数一致收敛:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

[4] 求幂级数的收敛域:

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} z^k; \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} k^{\ln k} z^k; \quad (c) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (z^2 + 2z + 2)^k; \quad (d) \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \sin \frac{z}{3^k}.$$

答案: (a) $R=e$; (b) $R=1$; (c) $|z^2+2z+2|<1$; (d) $R=\infty$.

[5] 证明:

$$\ln(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \cdots \quad (|z| < 1).$$

[6] 求级数和:

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} k z^k \quad (|z| < 1); \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 z^k \quad (|z| < 1).$$

答案:

$$(a) \frac{z}{(1-z)^2}; \quad (b) \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}.$$

3.2 泰勒展开

1. 泰勒定理

设函数 $f(z)$ 在以 z_0 为圆心、半径为 R 的区域内解析, 则对于圆内任一点 z , 函数 $f(z)$ 可展开成幂级数形式:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad (3.2.1)$$

其中, 系数

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0). \quad (3.2.2)$$

证明 如图 3.1 所示, 取半径 $R' < R$ 的圆 $C_{R'}$. 根据柯西积分公式, $C_{R'}$ 内任一点 z 的函数值为

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

由于在 $C_{R'}$ 圆内 $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$, 按照几何级数展开有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}. \end{aligned}$$

根据阿贝尔定理, 该几何级数在闭区域 $C_{R'}$ 内一致收敛, 于是

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

由于被积函数在闭区域 $C_{R'}$ 内解析, 积分回路 $C_{R'}$ 可连续变形为区域内的任意回路 C , 所以展开系数为

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0).$$

将解析函数表示成正幂级数的形式称为函数的泰勒级数展开.

2. 唯一性定理

函数 $f(z)$ 在 B 内解析的充分必要条件是, $f(z)$ 在 B 内任一点的邻域内可展开成唯一

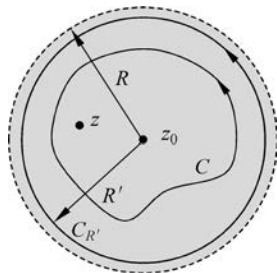


图 3.1

的泰勒级数.

证明 假设解析函数 $f(z)$ 在 z_0 还可以展开成另一种不同的泰勒级数

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k,$$

则有

$$\begin{aligned} & b_0 + b_1(z - z_0)^1 + b_2(z - z_0)^2 + \cdots + b_k(z - z_0)^k + \cdots \\ &= f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0)^1 + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k + \cdots \end{aligned}$$

由于级数的每一项在 B 内解析,且在 $|z - z_0| < R$ 内一致收敛,可将上式逐项求导,然后取 $z = z_0$,必有

$$b_0 = f(z_0), \quad b_1 = \frac{f'(z_0)}{1!}, \quad b_2 = \frac{f''(z_0)}{2!}, \quad \cdots, \quad b_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad \cdots$$

例 3.4 求函数 $f(z) = \sin z$ 在 $z_0 = 0$ 点的泰勒展开.

解 根据泰勒展开公式,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1} + \cdots$$

可见它具有与实变函数完全一样的形式.

例 3.5 证明欧拉公式:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

解 考虑泰勒级数展开

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots$$

令 $z = i\theta$, 有

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \left[1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \cdots \right] + i \left[\frac{1}{1!}\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \cdots \right] \\ &= \cos\theta + i\sin\theta. \end{aligned}$$

例 3.6 求函数 $f(z) = \ln z$ 在 $z = 1$ 点的泰勒级数展开.

解 $f(z) = \ln z$ 是多值函数,需选取其中一个分支进行泰勒展开,由于

$$\begin{aligned} f(1) &= 2k\pi i, & f'(1) &= 1, & f''(1) &= -1!, \\ f^{(3)}(1) &= 2!, & f^{(4)}(1) &= -3!, & \cdots \end{aligned}$$

所以

$$\ln z = 2k\pi i + (z - 1) - \frac{1}{2}(z - 1)^2 + \frac{1}{3}(z - 1)^3 - \frac{1}{4}(z - 1)^4 + \cdots$$

其中, $|z - 1| < 1, k \in \mathbb{Z}$.

3. 解析函数的零点

如果函数 $f(z)$ 在 z_0 的邻域内解析,且 $f(z_0) = 0$,则称 $z = z_0$ 为 $f(z)$ 的零点. 由于泰勒展开

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

若 $z = z_0$ 为零点, 且

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0,$$

则称 z_0 为 $f(z)$ 的 n 阶零点.

零点孤立性定理 设 $f(z)$ 在包含 $z = z_0$ 的区域内解析且不恒为零, 若 $f(z_0) = 0$, 则必能找到有限圆域 $|z - z_0| < \rho$, 在其内 $f(z)$ 没有其他零点.

证明 设 $z = z_0$ 是 $f(z)$ 的 n 阶零点, 必有

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z),$$

其中, $g(z)$ 在 $z = z_0$ 的邻域内解析, 且 $g(z_0) \neq 0$. 由于 $g(z)$ 在 $z = z_0$ 连续, 故存在圆域 $|z - z_0| < \rho$, 其中 $g(z)$ 恒不为零, 即 $f(z)$ 在 z_0 的邻域内没有其他零点.

由零点孤立性定理可得到如下推论.

推论 1 如果解析函数的零点是孤立的, 则此函数恒为零.

推论 2 设 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 都在区域 B 内解析, 且在 B 内的某一段连续弧线或者某个子区域 $D \subset B$ 内相等, 则在 B 内必有 $f_1(z) = f_2(z)$.

解析函数的零点是其实部和虚部同时为零的点, 其实部和虚部为零时分别画出一条曲线, 它们的交点即复变函数的零点. 图 3.2(a) 描绘了函数

$$f(z) = (z^2 + 1)(z - 3 - i)^3$$

的实部和虚部零线, 其中 $z = \pm i$ 和 $z = 3 + i$ 分别为一阶和三阶零点. 零点同时是其相位或辐角的奇异点(无定义), 当 z 绕零点一周时, 函数的相位增加 $2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$), 如图 3.2(b) 所示, 其中 n 为零点的阶数, 称作绕数(winding number). 在超导或超流体中, 宏观波函数的零点对应于一个量子化的涡旋.

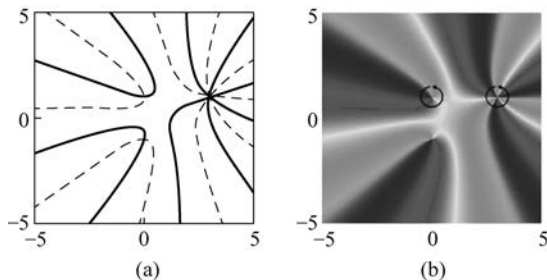


图 3.2

注记

如果函数 $f(z)$ 在 z_0 的邻域内解析, 且 $f'(z_0) = 0, f''(z_0) \neq 0$, 将其作泰勒级数展开并保留至二阶项:

$$f(z) \approx f(z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0) (z - z_0)^2.$$

当 $z \rightarrow z_0$ 时, 令 $z - z_0 = r e^{i\theta}$, $f''(z_0) = r_0 e^{2i\alpha}$. 为简明起见, 略去常数 $f(z_0)$, 有

$$f(z) \sim \frac{1}{2} r_0 r^2 e^{i(2\theta + 2\alpha)} = \frac{1}{2} r_0 r^2 [\cos 2(\theta + \alpha) + i \sin 2(\theta + \alpha)],$$

其实部和虚部分别为

$$u(r, \theta) \sim \frac{1}{2} r_0 r^2 \cos 2(\theta + \alpha), \quad v(r, \theta) \sim \frac{1}{2} r_0 r^2 \sin 2(\theta + \alpha).$$

当 $\theta = -\alpha$ 时, $u(r, \theta)$ 为开口向上的抛物线; 而当 $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ 时, $u(r, \theta)$ 为开口向下的抛物线, 因此, $z = z_0$ 是实部函数 $u(r, \theta)$ 的鞍点. 同理, 它也是虚部函数 $v(r, \theta)$ 的鞍点. 区别在于, 马鞍型的 $u(r, \theta)$ 曲面与 $v(r, \theta)$ 曲面相对旋转了 $\pi/4$.

所以实变函数一阶导数的零点对应于函数的极值点, 而复变函数一阶导数的零点对应于其实部和虚部二元函数的共同鞍点.

习 题

[1] 在 $z=0$ 点将函数展开为泰勒级数:

(a) $\tan z$; (b) $\frac{1}{1-3z+2z^2}$.

[2] 在 $z=i$ 点将函数展开为泰勒级数:

(a) $\sqrt[3]{z}$; (b) $\ln z$.

[3] 求多值函数在 $z=0$ 点的泰勒级数展开:

$$f(z) = (1+z)^m \quad (m \notin \mathbb{Z}).$$

[4] 如果解析函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在 $z=z_0$ 皆为一阶零点, 即比值

$$\left. \frac{f(z)}{g(z)} \right|_{z=z_0} = \frac{0}{0},$$

证明洛必达法则(L' Hopital rule):

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

[5] 运用泰勒定理证明刘维尔定理.

[6] 运用泰勒定理证明最大模定理.

提示: 用反证法, 假设 $|f(z_0)|$ 最大, 对以 z_0 为圆心的圆周积分.

3.3 洛朗展开

当 $f(z)$ 在圆 $|z-z_0| < R$ 内解析, 泰勒定理表明, $f(z)$ 必可展开成正幂级数, 那么是否可以有收敛的负幂项级数? 其收敛性又如何呢? 这就是下面要讨论的双边幂级数.

1. 双边幂级数

形如

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = \cdots + a_{-k} (z-z_0)^{-k} + \cdots + a_{-1} (z-z_0)^{-1} + a_0 + a_1 (z-z_0) + a_2 (z-z_0)^2 + \cdots + a_k (z-z_0)^k + \cdots$$