



现代控制技术

在经典控制理论中,用传递函数模型设计和分析单输入单输出系统,但传递函数模型只能反映出系统的输出变量与输入变量之间的关系,而不能了解到系统内部的变化情况。在现代控制理论中,用状态空间模型来设计和分析多输入多输出系统,便于计算机求解,同时也为多变量系统的分析研究提供了有力的工具。

5.1 采用状态空间的输出反馈设计法

设线性定常系统被控对象的连续状态空间方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t)|_{t=t_0} = \mathbf{x}(t_0) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (5-1)$$

其中, $\mathbf{x}(t)$ 是 n 维状态向量, $\mathbf{u}(t)$ 是 r 维控制向量, $\mathbf{y}(t)$ 是 m 维输出向量, \mathbf{A} 是 $n \times n$ 维状态矩阵, \mathbf{B} 是 $n \times r$ 维控制矩阵, \mathbf{C} 是 $n \times m$ 维输出矩阵。采用状态空间的输出反馈设计法的目的是: 利用状态空间表达式设计出数字控制器 $D(z)$, 使得多变量计算机控制系统满足所需要的性能指标, 即在控制器 $D(z)$ 的作用下, 对系统输出的 $\mathbf{y}(t)$ 经过 N 次采样 (N 拍) 后, 跟踪参考输入函数 $\mathbf{r}(t)$ 的瞬变响应时间为最小。设具有输出反馈的多变量计算机控制系统的闭环结构如图 5-1 所示。

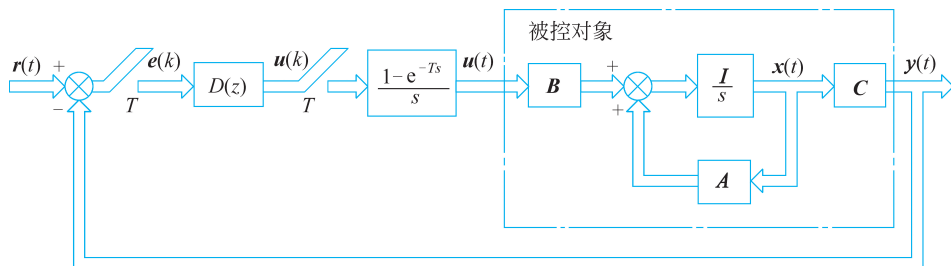


图 5-1 具有输出反馈的多变量计算机控制系统的闭环结构

假设参考输入函数 $\mathbf{r}(t)$ 是 m 维阶跃函数向量, 即

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 \cdot 1(t) = [r_{01} \ r_{02} \ \cdots \ r_{0m}]^T \cdot 1(t) \quad (5-2)$$

先找出在 $D(z)$ 的作用下输出是最少的 N 拍时跟踪参考输入的条件。设计时,应首先把被控对象离散化,用离散状态空间方程表示被控对象。

5.1.1 连续状态空间方程的离散化

在 $\mathbf{u}(t)$ 的作用下,式(5-1)的解为

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (5-3)$$

其中, $e^{A(t-t_0)}$ 是被控对象的状态转移矩阵, $\mathbf{x}(t_0)$ 是初始状态向量。若已知被控对象的前面有一个零阶保持器,即

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(k), kT \leq t < (k+1)T \quad (5-4)$$

其中, T 为采样周期。现在要求将连续被控对象模型连同零阶保持器一起进行离散化。

在式(5-3)中,若令 $t_0 = kT, t = (k+1)T$,同时考虑到零阶保持器的作用,则式(5-3)变为

$$\mathbf{x}(k+1) = e^{AT} \mathbf{x}(k) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A(kT+T-\tau)} d\tau \mathbf{B} \mathbf{u}(k) \quad (5-5)$$

若令 $t = kT + T - \tau$,则式(5-5)可进一步化为离散状态空间方程:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F} \mathbf{x}(k) + \mathbf{G} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (5-6)$$

$$\mathbf{F} = e^{AT}, \quad \mathbf{G} = \int_0^T e^{A\tau} d\tau \mathbf{B} \quad (5-7)$$

式(5-6)便是式(5-1)的等效离散状态空间方程。可见,离散化的关键是式(5-7)中矩阵指数及其积分的计算。

5.1.2 最少拍无纹波系统的跟踪条件

由式(5-1)中的系统输出方程可知, $\mathbf{y}(t)$ 要以最少的 N 拍跟踪参考输入 $\mathbf{r}(t)$, 必须满足以下条件:

$$\mathbf{y}(N) = \mathbf{C} \mathbf{x}(N) = \mathbf{r}_0 \quad (5-8)$$

仅按式(5-8)设计的系统将是纹波系统。为设计无纹波系统,还必须满足以下条件:

$$\dot{\mathbf{x}}(N) = 0 \quad (5-9)$$

这是因为,在 $NT \leq t \leq (N+1)T$ 的间隔内,控制信号 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(N)$ 为常向量,由式(5-1)知,当 $\dot{\mathbf{x}}(N) = 0$ 时,则在 $NT \leq t \leq (N+1)T$ 的间隔内 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(N)$, 而且不改变。也就是说,若使 $t \geq NT$ 时的控制信号满足

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(N) \quad (t \geq NT) \quad (5-10)$$

此时, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(N)$ 且不改变,则使式(5-8)在 $t \geq NT$ 时始终满足

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(N) = \mathbf{r}_0 \quad (t \geq NT) \quad (5-11)$$

下面讨论系统的输出跟踪参考输入所用最少拍数 N 的确定方法。式(5-8)确定的跟踪条件为 m 个,式(5-9)确定的附加跟踪条件为 n 个,为满足式(5-8)和式(5-9)组成的 $m+n$ 个跟踪条件, $N+1$ 个 r 维控制向量 $[\mathbf{u}(0) \mathbf{u}(1) \cdots \mathbf{u}(N-1) \mathbf{u}(N)]$ 必须至少

提供 $m+n$ 个控制参数,即

$$(N+1)r \geq (m+n) \quad (5-12)$$

最少拍数 N 应取满足式(5-12)的最小整数。

5.1.3 输出反馈设计法的设计步骤

1. 将连续状态空间方程离散化

对于由式(5-1)给出的被控对象的连续状态空间方程,用采样周期 T 对其进行离散化,通过计算式(5-7),可求得离散状态方程为式(5-6)。

2. 求满足跟踪条件[式(5-8)]和附加条件[式(5-9)]的 $U(z)$

被控对象的离散状态空间方程[式(5-6)]的解为

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{F}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{F}^{k-j-1} \mathbf{G} \mathbf{u}(j) \quad (5-13)$$

被控对象在 N 步控制信号 $[\mathbf{u}(0) \ \mathbf{u}(1) \ \cdots \ \mathbf{u}(N-1)]$ 作用下的状态为

$$\mathbf{x}(N) = \mathbf{F}^N \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{F}^{N-j-1} \mathbf{G} \mathbf{u}(j) \quad (5-14)$$

假定系统的初始条件 $\mathbf{x}(0)=0$,则有

$$\mathbf{x}(N) = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{F}^{N-j-1} \mathbf{G} \mathbf{u}(j) \quad (5-15)$$

根据式(5-8),有

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{y}(N) = \mathbf{C} \mathbf{x}(N) = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{C} \mathbf{F}^{N-j-1} \mathbf{G} \mathbf{u}(j) \quad (5-16)$$

用分块矩阵形式表示,得到

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{C} \mathbf{F}^{N-j-1} \mathbf{G} \mathbf{u}(j) \\ &= [\mathbf{C} \mathbf{F}^{N-1} \mathbf{G} \mid \mathbf{C} \mathbf{F}^{N-2} \mathbf{G} \mid \cdots \mid \mathbf{C} \mathbf{F} \mathbf{G} \mid \mathbf{C} \mathbf{G}] \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{u}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(N-2) \\ \mathbf{u}(N-1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5-17)$$

再由式(5-9)和式(5-1)知,有

$$\dot{\mathbf{x}}(N) = \mathbf{A} \mathbf{x}(N) + \mathbf{B} \mathbf{u}(N) = 0 \quad (5-18)$$

将式(5-4)代入式(5-18),得

$$\sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{A} \mathbf{F}^{N-j-1} \mathbf{G} \mathbf{u}(j) + \mathbf{B} \mathbf{u}(N) = 0 \quad (5-19)$$

或

$$[\mathbf{A}\mathbf{F}^{N-1}\mathbf{G} \mid \mathbf{A}\mathbf{F}^{N-2}\mathbf{G} \mid \cdots \mid \mathbf{A}\mathbf{G} \mid \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{u}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(N-1) \\ \mathbf{u}(N) \end{bmatrix} = 0 \quad (5-20)$$

由式(5-17)和式(5-20)可以组成确定 $N+1$ 个控制序列 $[\mathbf{u}(0) \ \mathbf{u}(1) \ \cdots \ \mathbf{u}(N-1) \ \mathbf{u}(N)]$ 的统一方程组:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{F}^{N-1}\mathbf{G} & \vdots & \mathbf{C}\mathbf{F}^{N-2}\mathbf{G} & \vdots & \cdots & \vdots & \mathbf{C}\mathbf{G} & \vdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}\mathbf{F}^{N-1}\mathbf{G} & \vdots & \mathbf{A}\mathbf{F}^{N-2}\mathbf{G} & \vdots & \cdots & \vdots & \mathbf{A}\mathbf{G} & \vdots & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{u}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(N-1) \\ \mathbf{u}(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-21)$$

若式(5-21)的方程有解,并设解为

$$\mathbf{u}(j) = \mathbf{P}(j) \mathbf{r}_0 \quad (j = 0, 1, 2, \cdots, N) \quad (5-22)$$

当 $k=N$ 时,控制信号 $\mathbf{u}(k)$ 应满足

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(N) = \mathbf{P}(N) \mathbf{r}_0 \quad (k \geq N) \quad (5-23)$$

这样就由跟踪条件求得了控制序列 $\{\mathbf{y}(k)\}$, 其 z 变换为

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{u}(k) z^{-k} = \left[\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{P}(k) z^{-k} + \mathbf{P}(N) \sum_{k=N}^{\infty} z^{-k} \right] \mathbf{r}_0 \\ &= \left[\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{P}(k) z^{-k} + \frac{\mathbf{P}(N) z^{-N}}{1 - z^{-1}} \right] \mathbf{r}_0 \end{aligned} \quad (5-24)$$

3. 求误差序列 $\{e(k)\}$ 的 z 变换 $E(z)$

误差向量为

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{r}(k) - \mathbf{y}(k) = \mathbf{r}_0 - \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (5-25)$$

假定 $\mathbf{x}(0) = 0$, 将式(5-3)代入式(5-25), 得

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{r}_0 - \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{F}^{(k-j-1)} \mathbf{G}\mathbf{u}(j) \quad (5-26)$$

再将式(5-22)代入式(5-26), 得

$$\mathbf{e}(k) = \left[\mathbf{I} - \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{F}^{(k-j-1)} \mathbf{G}\mathbf{P}(j) \right] \mathbf{r}_0 \quad (5-27)$$

误差序列 $\{e(k)\}$ 的 z 变换为

$$\mathbf{E}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{e}(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{e}(k) z^{-k} + \sum_{k=N}^{\infty} \mathbf{e}(k) z^{-k} \quad (5-28)$$

其中 $\sum_{k=N}^{\infty} \mathbf{e}(k) z^{-k} = 0$, 因为满足跟踪条件[式(5-8)]和附加条件[式(5-9)], 即当 $k \geq N$ 时误差信号应消失, 所以

$$\mathbf{E}(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{e}(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\mathbf{I} - \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{C} \mathbf{F}^{(k-j-1)} \mathbf{G} \mathbf{P}(j) \right] \mathbf{r}_0 z^{-k} \quad (5-29)$$

4. 求控制器的脉冲传递函数 $D(z)$

根据式(5-24)和式(5-29)可求得 $D(z)$ 为

$$\mathbf{D}(z) = \frac{\mathbf{U}(z)}{\mathbf{E}(z)} \quad (5-30)$$

【例 5-1】 设二阶单输入单输出系统的状态空间方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (5-31)$$

其中, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = [0 \quad 1]$, 采样周期 $T = 1\text{s}$ 。设计最少拍无纹波控制器 $\mathbf{D}(z)$ 。

【解】 $\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T} = \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 1 - e^{-1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.368 & 0 \\ 0.632 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 - e^{-1} \\ e^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.632 \\ 0.368 \end{bmatrix}$,

离散状态方程为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F} \mathbf{x}(k) + \mathbf{G} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (5-32)$$

要设计无纹波控制系统, 跟踪条件应满足

$$(N+1)r \geq (m+n) \quad (5-33)$$

而 $n=2, r=2, m=2$, 因此取 $N=2$ 即可满足式(5-33)的条件。

由式(5-21)可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \mathbf{F} \mathbf{G} & \mathbf{C} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} \mathbf{F} \mathbf{G} & \mathbf{A} \mathbf{G} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{u}(1) \\ \mathbf{u}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-34)$$

即

$$\begin{bmatrix} 0.768 & 0.368 & 0 \\ -0.232 & -0.632 & 1 \\ 0.232 & 0.632 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{u}(1) \\ \mathbf{u}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-35)$$

进一步得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{u}(1) \\ \mathbf{u}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(0) \\ \mathbf{P}(1) \\ \mathbf{P}(2) \end{bmatrix} \mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} 1.58 \\ -1.58 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{r}_0 \quad (5-36)$$

$$\mathbf{P}(0) = 1.58, \quad \mathbf{P}(1) = -1.58, \quad \mathbf{P}(2) = 0 \quad (5-37)$$

由式(5-24)和 $N=2$ 知

$$\begin{aligned}
 U(z) &= \left[\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{P}(k) z^{-k} + \frac{\mathbf{P}(N) z^{-N}}{1-z^{-1}} \right] \mathbf{r}_0 = \left[\mathbf{P}(0) + \mathbf{P}(1) z^{-1} + \frac{\mathbf{P}(2) z^{-2}}{1-z^{-1}} \right] \mathbf{r}_0 \\
 &= (1.58 - 1.58z^{-1}) \mathbf{r}_0
 \end{aligned} \tag{5-38}$$

由式(5-29)和 $N=2$ 知

$$\begin{aligned}
 E(z) &= \sum_{k=0}^{N-1} \left[\mathbf{I} - \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{F}^{(k-j-1)} \mathbf{G}\mathbf{P}(j) \right] \mathbf{r}_0 z^{-k} = \{ \mathbf{I} + [\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{P}(0)] z^{-1} \} \mathbf{r}_0 \\
 &= (1 + 0.418z^{-1}) \mathbf{r}_0
 \end{aligned} \tag{5-39}$$

所以数字控制器 $\mathbf{D}(z)$ 为

$$\mathbf{D}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{1.58 - 1.58z^{-1}}{1 + 0.418z^{-1}} \tag{5-40}$$

5.2 采用状态空间的极点配置设计法

在计算机控制系统中,除了使用输出反馈控制外,还较多地使用状态反馈控制,因为由状态输入就可以完全地确定系统的未来行为。图 5-2 给出了计算机控制系统的典型结构。在 5.1.1 节中已经讨论了连续的被控对象同零阶保持器一起进行离散化的问题,同时本节忽略数字控制器的量化效应,则图 5-2 可以简化为如图 5-3 所示的离散控制系统。

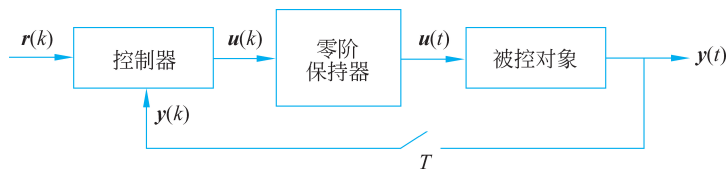


图 5-2 计算机控制系统的典型结构

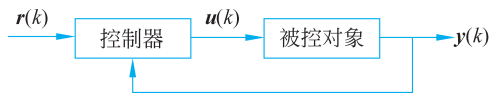


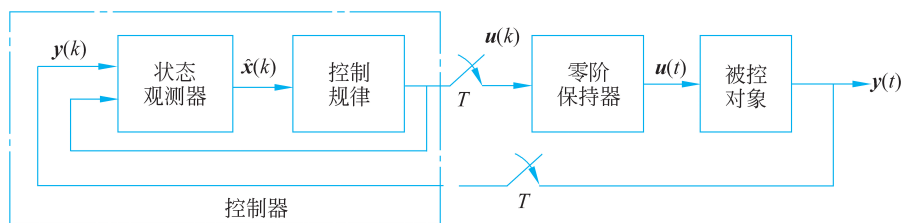
图 5-3 简化的离散控制系统结构

下面按离散控制系统的情况讨论控制器的设计。本节讨论利用状态反馈的极点配置方法设计控制规律,首先讨论调节系统($\mathbf{r}(k)=0$)的情况,然后讨论跟踪系统,即如何引入外界参考输入 $\mathbf{r}(k)$ 。

按极点配置设计的控制器通常由两部分组成:一部分是状态观测器,它根据量测到的输出量 $\mathbf{y}(k)$ 重构出全部状态 $\hat{\mathbf{x}}(k)$,另一部分是控制规律,它直接反馈重构的全部状态。图 5-4 给出了调节系统($\mathbf{r}(k)=0$)的情况。

5.2.1 按极点配置设计控制规律

为了按极点配置设计控制规律,暂设控制规律反馈的是实际对象的全部状态,而不

图 5-4 调节系统($r(k)=0$)的情况

是重构的状态,如图 5-5 所示。

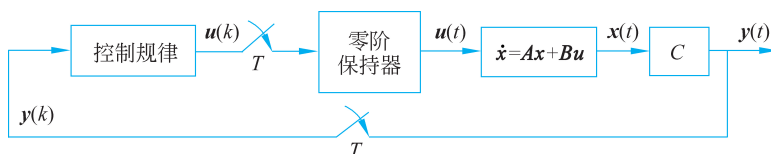


图 5-5 按极点配置设计控制规律的系统结构

设被控对象的连续状态空间方程为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \end{cases} \quad (5-41)$$

由 5.1.1 节知,相应的离散状态空间方程为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{G}\boldsymbol{u}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) \end{cases} \quad (5-42)$$

且

$$\begin{cases} \boldsymbol{F} = e^{\boldsymbol{A}T} \\ \boldsymbol{G} = \int_0^T e^{\boldsymbol{A}\tau} \boldsymbol{B} \, d\tau \end{cases} \quad (5-43)$$

其中, T 为采样周期。若图 5-5 中的控制规律为线性状态反馈,即

$$\boldsymbol{u}(k) = -\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}(k) \quad (5-44)$$

则要设计出反馈控制规律 \boldsymbol{L} , 以使闭环系统具有所需要的极点配置。

将式(5-44)代入式(5-42),得到闭环系统的状态空间方程:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{L})\boldsymbol{x}(k) \quad (5-45)$$

显然,闭环系统的特征方程为

$$|z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{L}| = 0 \quad (5-46)$$

设闭环系统的极点为 $z_i (i=1, 2, \dots, n)$, 则很容易求得要求的闭环系统特征方程:

$$\begin{aligned} \beta(z) &= (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n) \\ &= z^n + \beta_1 z^{n-1} + \cdots + \beta_n = 0 \end{aligned} \quad (5-47)$$

由式(5-46)和式(5-47)可知,反馈控制规律 \boldsymbol{L} 应满足如下方程:

$$|z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{L}| = \beta(z) \quad (5-48)$$

若将式(5-48)的行列式展开,并比较两边 z 的同次幂的系数,则一共可得到 n 个代数方

程。对于单输入的情况, \mathbf{L} 中未知元素的个数与方程的个数相等, 因此一般情况下可获得 \mathbf{L} 的唯一解。而对于多输入的情况, 仅根据式(5-48)并不能完全确定 \mathbf{L} , 设计计算比较复杂, 这时需附加其他的限制条件才能完全确定 \mathbf{L} 。本节只讨论单输入的情况。

可以证明, 对于任意的极点配置, \mathbf{L} 具有唯一解的充分必要条件是可控对象完全可控(controllable), 即

$$\text{rank} [\mathbf{G} \ \mathbf{F}\mathbf{G} \ \cdots \ \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{G}] = n \quad (5-49)$$

这个结论的物理意义也是很明显的, 只有当系统的所有状态都是可控的, 才能通过适当的状态反馈控制, 使得闭环系统的极点配置在任意指定的位置。

由于人们对于 s 平面中的极点分布与系统性能的关系比较熟悉, 因此可首先根据相应连续系统性能指标的要求给定 s 平面中的极点, 然后再根据 $z_i = e^{s_i T}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 的关系求得 z 平面中的极点分布, 其中 T 为采样周期。

【例 5-2】 被控对象的传递函数 $G(s) = \frac{1}{s^2}$, 采样周期 $T = 0.1\text{s}$, 采用零阶保持器。现要求闭环系统的动态响应相当于阻尼系数为 $\xi = 0.5$ 、无阻尼自然振荡频率 $\omega_n = 3.6$ 的二阶连续系统, 用极点配置方法设计状态反馈控制规律 \mathbf{L} , 并求 $\mathbf{u}(k)$ 。

【解】 被控对象的微分方程为 $\ddot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{u}(t)$, 定义两个状态变量, 分别为 $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{y}(t)$, $\mathbf{x}_2(t) = \dot{\mathbf{x}}_1(t) = \dot{\mathbf{y}}(t)$, 得到 $\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{x}_2(t)$, $\dot{\mathbf{x}}_2(t) = \ddot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{u}(t)$, 故有

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (5-50)$$

$$\mathbf{y}(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} \quad (5-51)$$

对应的离散状态空间方程为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = [1 \ 0] \mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (5-52)$$

代入 $T = 0.1\text{s}$ 得

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = [1 \ 0] \mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (5-53)$$

且

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (5-54)$$

$$[\mathbf{G} \ \mathbf{F}\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 0.005 & 0.015 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \quad (5-55)$$

因为 $\begin{vmatrix} 0.005 & 0.015 \\ 0.1 & 0.1 \end{vmatrix} \neq 0$, 所以系统可控。

根据要求, 求得 s 平面上两个期望的极点:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\sqrt{1-\xi^2}\omega_n = -1.8 \pm j3.12 \quad (5-56)$$

利用 $z = e^{sT}$ 的关系,可求得 z 平面上的两个期望的极点:

$$z_{1,2} = 0.835e^{\pm j0.312} \quad (5-57)$$

于是得到期望的闭环系统特征方程:

$$\beta(z) = (z - z_1)(z - z_2) = z^2 - 1.6z + 0.7 \quad (5-58)$$

若状态反馈控制规律为

$$\mathbf{L} = [L_1 \quad L_2] \quad (5-59)$$

则闭环系统的特征方程为

$$\begin{aligned} |z\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{GL}| &= \left| \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.1 \end{bmatrix} [L_1 \quad L_2] \right| \\ &= z^2 + (0.1L_2 + 0.005L_1 - 2)z + 0.005L_1 - 0.1L_2 + 1 \end{aligned} \quad (5-60)$$

比较式(5-58)和式(5-59),可得

$$\begin{cases} 0.1L_2 + 0.005L_1 - 2 = -1.6 \\ 0.005L_1 - 0.1L_2 + 1 = 0.7 \end{cases} \quad (5-61)$$

求解式(5-61),得 $L_1 = 10, L_2 = 3.5$, 即 $\mathbf{L} = [10 \quad 3.5]$

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{L}\mathbf{x}(k) = -[10 \quad 3.5]\mathbf{x}(k) \quad (5-62)$$

5.2.2 按极点配置设计状态观测器

前面在讨论按极点配置设计控制规律时,假定全部状态均可直接用于反馈,实际上,这难以做到,因为有些状态无法量测。因此必须设计状态观测器,根据其量测的输出 $\mathbf{y}(k)$ 和 $\mathbf{u}(k)$ 重构全部状态。因而实际反馈的是重构状态 $\hat{\mathbf{x}}(k)$, 而不是真实的状态 $\mathbf{x}(k)$, 即 $\mathbf{u}(k) = -\mathbf{L}\hat{\mathbf{x}}(k)$, 如图 5-2 所示。常用的状态观测器有 3 种: 预报观测器、现时观测器和降阶观测器。

1. 预报观测器

常用的观测器方程为

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}[y(k) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k)] \quad (5-63)$$

其中, $\hat{\mathbf{x}}$ 是 \mathbf{x} 的状态重构, \mathbf{K} 为观测器的增益矩阵。由于 $k+1$ 时刻的状态重构只用到了 kT 时刻的量测量 $y(k)$, 因此称式(5-63)为预报观测器, 其结构如图 5-6 所示。

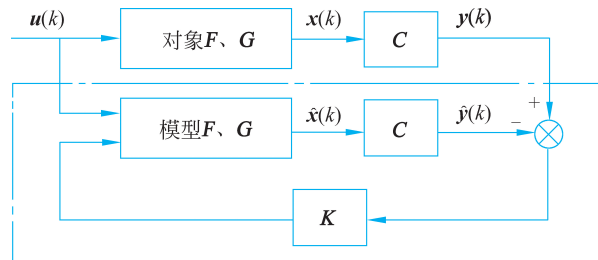


图 5-6 预报观测器的结构

设计观测器的关键在于如何合理地选择观测器的增益矩阵 \mathbf{K} 。定义状态重构误差为

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \quad (5-64)$$

则

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}(k+1) \\ &= \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k) - \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{G}\mathbf{u}(k) - \mathbf{K}[\mathbf{C}\mathbf{x}(k) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k)] \\ &= [\mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{C}][\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)] = [\mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{C}]\bar{\mathbf{x}}(k) \end{aligned} \quad (5-65)$$

因此,如果选择 \mathbf{K} 使式(5-65)渐近稳定,那么重构误差必定会收敛到 0,即使式(5-22)是不稳定的,在重构中引入观测量反馈,也能使误差趋于 0。式(5-65)称为观测器的误差动态方程,该式表明,可以通过选择 \mathbf{K} 使状态重构误差动态方程的极点配置在期望的位置上。

如果出现观测器期望的极点 $Z_i (i=1, 2, \dots, n)$,那么观测器期望的特征方程为

$$\alpha(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_n = 0 \quad (5-66)$$

由式(5-65)可得观测器的特征方程(即状态重构误差的特征方程):

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{K}\mathbf{C}| = 0 \quad (5-67)$$

为了获得期望的状态重构性能,由式(5-66)和式(5-67)可得

$$\alpha(z) = |z\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{K}\mathbf{C}| \quad (5-68)$$

对于单输入单输出系统,通过比较式(5-68)两边 z 的同次幂的系数,可求得 \mathbf{K} 中的 n 个未知数。对于任意的极点配置, \mathbf{K} 具有唯一解的充分必要条件是系统完全可观(observable),即

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{F} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{F}^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (5-69)$$

2. 现时观测器

采用预报观测器时,当前时刻(现时)的状态重构 $\hat{\mathbf{x}}(k)$ 只用了前一时刻的输出量 $\mathbf{y}(k-1)$,使得现时的控制信号 $\mathbf{u}(k)$ 中也包含了前一时刻的输出量。当采样周期较长时,这种控制方式将影响系统的性能。为此,可采用如下的观测器方程:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{\mathbf{x}}(k+1) + \mathbf{K}[\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}(k+1)] \end{cases} \quad (5-70)$$

由于 $(k+1)T$ 时刻的状态重构 $\hat{\mathbf{x}}(k+1)$ 用到了当前时刻的量测量 $\mathbf{y}(k+1)$,因此称式(5-70)为现时观测器。

由式(5-42)和式(5-70)可得状态重构误差:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}(k+1) \\ &= [\mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k)] - \{\bar{\mathbf{x}}(k+1) + \mathbf{K}[\mathbf{C}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}(k+1)]\} \\ &= [\mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{F}]\bar{\mathbf{x}}(k) \end{aligned} \quad (5-71)$$