第一部分

优　化

决策是人类社会实践活动中一个极为重要的环节,包括:个人层面决策,如填报高考志愿、购买产品、选择出行方式等;商业层面决策,如决定生产何种产品、如何定价、如何安排生产计划等。如何科学合理地开展决策是学界和业界共同关注的焦点,定量决策模型能够很好地协助处理这些决策问题。

决策模型有不同的形式。一种是描述性的(descriptive)模型,它们仅仅描述关系和提供评估信息。描述模型自身并不包含任何决策变量,主要用于解释系统的行为,预测未来事件对计划过程的影响,帮助管理者做出决策。另一种是规定性的(prescriptive)模型,称为优化模型,试图获得一项最优策略,即为了取得最大或最小目标值,决策者应当采取的最佳解决方案。

在数学模型中,一个需要优化的函数通常称为目标函数(objective function),而称使目标函数达到最优值的可行解为最优解(optimal solution)。在过去几十年中,优化方法已经被广泛应用于交通、物流、供应链、金融、销售和商业领域的一些活动中,帮助管理者有效分配资源,做出更节省成本或获得更多利润的决策。优化是一个非常广阔和复杂的课题,在这一部分,我们将介绍几种典型的优化模型,包括线性规划模型、非线性规划模型、整数规划模型、随机规划模型和鲁棒优化模型。

构建优化模型的目的在于寻找最优解,而这在大多数情况下需要算法的帮助。算法(algorithm)是一种提供解决问题方案的系统过程。针对线性规划模型的求解,美国数学家George Dantzig 于 1947 年提出了单纯形法;针对非线性规划模型,20 世纪 30 年代起,Kuhn、Tucker、Karush 分别独立发现了最优解所满足的条件,被称为 Karush-Kuhn-Tucker条件;针对整数规划模型的求解,1958 年,IBM 的高级副总裁 Gomory 提出了割平面法;1960 年,Land 和 Doig 提出了分支定界法。此外,某些模型非常复杂,难以获得最优解,或者不可能在合理的计算时间内得到最优解。在这种情况下,学者们开发了启发式算法,能够在可接受的计算时间内给出一个优质解。针对复杂的优化模型,常用的启发式算法有遗传算法、粒子群算法、邻域搜索算法、模拟退火算法等。

本书的第一部分讲述如何针对决策问题构建并求解优化模型，主要目的在于帮助读者理解优化模型的数学性质、算法的基本原理，以及实际应用时的实现方式和注意事项。重点内容包括：

- 线性规划基本概念、基本模型及求解算法；
- 非线性规划的基本概念、基本模型及两类主要求解方法；
- 整数规划的一般形式及求解整数规划的分支定界法和割平面法；
- 随机规划的基本思想、建模方法及求解算法；
- 鲁棒优化模型的基本类型和数学性质；
- 遗传算法、粒子群算法、邻域搜索算法、模拟退火算法的基本原理、实现方式、应用案例。

第 1 章

线 性 规 划

线性规划(linear programming,LP)是研究目标函数和约束条件均为线性的最优化问题的数学理论和方法。它作为运筹学的一个重要分支,在军事作战、经济分析、运营管理和工程技术等领域得到了广泛的应用[1,2]。线性规划为合理地分配有限的人力、物力、财力等资源提供了科学依据。

线性规划的起源可以追溯到1939年,著名的苏联数学家Kantorovich受列宁格勒胶合板信托中心实验室委托,通过建立线性规划的数学模型成功完成了一项工业生产组织与计划任务。随后,他出版了著作《组织与计划生产的数学方法》,这为线性规划理论奠定了基础,尽管当时他的工作并未引起足够的关注,但奠定了线性规划的雏形。与此同时,线性规划理论在美国得到了飞速发展。1941年,Hitchcock提出运输问题[3],Stigler提出了营养问题[4],Koopmans提出了经济问题[5],而被誉为"线性规划之父"的George Dantzig则在1948年提出了经典的线性规划优化模型,即"在一组线性方程或不等式约束下,求某一线性形式极小值问题的数学模型",这一数学模型是"线性规划"的经典优化模型。同年夏天,Dantzig提出了单纯形算法,后来被评为20世纪最伟大算法之一。值得注意的是,在1948年,Dantzig和Koopmans共同提出了"线性规划"这一名词。

70多年来,单纯形法虽然发展出了多种变体,但其基本思想始终保持不变:如果线性规划问题存在最优解,那么必定可以在其可行区域的顶点中找到。基于此,单纯形法的基本思路是:先找出可行域的一个顶点,然后根据一定规则判断其是否最优;若否,则转换到与之相邻的另一顶点,并使目标函数值更优;如此反复,直到找到最优解。

单纯形法是解决线性规划问题的有效方法,但并非在所有情况下都高效可行。1971年,Klee和Minty构造出了一个"变量多、约束少"的例子,该案例下单纯形法的执行需要访问指数数量级的顶点,即单纯形法不能高效地解决该类线性规划问题。为解决这类问题,Dantzig和Koopmans于1960年提出了列生成算法(column generation algorithm,CGA)。随后,线性规划问题的理论研究不断深入,应用范围逐渐扩大,众多著名学者如Arrow、Samuelson、Simon和Dorfman等为线性规划领域做出了重要贡献,最终将其发展成为运筹学领域的一个重要分支——线性规划。

本章主要学习线性规划的基本概念、基本要素、基本模型以及解决线性规划模型的方法,包括图解法、单纯形法、人工变量法、列生成算法等。

1.1 线性规划问题及其数学模型

线性规划是运筹学中研究较早、发展较快、应用广泛的一个重要分支,它致力于解决线性约束条件下线性目标函数的极值问题[6]。在线性规划中,根据目标函数是取极大值还是

极小值,可以分成“极大化问题”与“极小化问题”。例如,在交通运输工作中,常常涉及以下两种类型的最优决策问题:

(1) 在给定车辆资源的限制下,如何确定运输方案以极大化运送的客流量。这种问题的目标是在满足资源约束的前提下,使目标函数(通常是客流量)达到极大值。例如,一个公交公司希望极大化每天的乘客数量,但受到车辆数量、线路容量等资源的限制。

(2) 在满足预期输送客流量的前提下,如何确定运输方案使所需的车辆数量最少。这种问题的目标是在满足一定客流量需求的前提下,使目标函数(通常是成本,如运营成本或车辆数量)达到极小值。例如,在设计一个公共交通系统时,需要确保满足旅客的出行需求,同时尽可能降低运营成本。

1.1.1 线性规划问题的提出

随着经济的高速发展,人们出行需求不断攀升,城市交通压力陡增,公共交通系统对于缓解城市交通压力始终发挥着无可替代的作用。由此引出一个研究问题:如何使用最少的公交车数量满足不同时间段内的运营需求?

例 1-1 节假日期间,北京郊区景点旅客众多,客流庞大,极易造成旅客滞留问题。为降低由旅客聚集带来的各类风险,北京公交集团需及时在某些热门景区路线临时加大运力,以便及时疏散旅客。如表 1-1 所示,现有 A、B 两种公交车型可供指派,其中 A 型为无人售票车,可容纳 30 位旅客,运营时需要 1 名驾驶员和 1 名安保员;B 型为有人售票车,可容纳 50 位旅客,运营时需要 1 名驾驶员、2 名安保员和 1 名乘务员。设公交集团在执行此项任务时只能调配到 12 名驾驶员、16 名安保员及 6 名乘务员到该临时线路,那么公交集团应该分别组织多少辆 A 型与 B 型公交车使得旅客的疏散量最大?

表 1-1

	A 型公交车(30 人)	B 型公交车(50 人)	可调配人力(人)
驾驶员	1	1	12
安保员	1	2	16
乘务员	0	1	6

用变量 x_1 和 x_2 分别表示 A 型公交车和 B 型公交车的数量,称为决策变量。该公交集团全天的疏散客流量为 $30x_1+50x_2$。令 $z=30x_1+50x_2$,则 z 为该公交集团能疏散的客流量,即公交集团所决策的目标,它是关于变量 x_1 和 x_2 的线性函数,称为目标函数。因问题中要求旅客的疏散量最大,因此为极大化问题,即 $\max z$。此外,x_1 和 x_2 的取值受到 A 型公交车和 B 型公交车的容量及可调配人力的限制和非负值的限制,可以用数学表达式描述限制条件,并称之为约束条件。由此,例 1-1 的数学模型可表示为

$$\begin{cases} \max \quad z=30x_1+50x_2 \\ \text{s.t.} \quad x_1+x_2 \leqslant 12 \\ \qquad x_1+2x_2 \leqslant 16 \\ \qquad x_2 \leqslant 6 \\ \qquad x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-1}$$

其中，约束条件 $x_1+x_2\leqslant 12$ 表示驾驶员的人力约束，$x_1+2x_2\leqslant 16$ 表示安保员的人力约束，$x_2\leqslant 6$ 表示乘务员的人力约束，$x_1,x_2\geqslant 0$ 称为变量的非负约束，表明 A 型公交车和 B 型公交车的数量不可能为负值。

随着人们出行需求日趋个性化和多元化，乘客除了公共交通之外还可以选择网约车出行。网约车作为巡游出租车形式的变种，是城市公共交通的补充，现如今已然成为“城市综合交通运输体系”的重要组成部分。

例 1-2　春节期间，各地返乡客流激增，同时，愿意出行的网约车司机反而减少。为解决此期间旅客在各交通枢纽打车排队时间长的问题，政府号召网约车平台完成部分旅客的疏散任务。已知网约车平台可以通过给司机补贴的方式调派拼车和专车两种网约车，其中调派一辆拼车需要给司机补贴 2 元，调派一辆专车需要补贴 3 元。经协商，网约车平台需要调派不少于 350 辆拼车和专车，其中拼车不少于 125 辆。设一辆拼车可以满足 2 位旅客的出行需求，一辆专车可以满足 1 位旅客的出行需求，某机场有 600 位旅客等候乘车。那么，网约车平台应该分别调派多少辆拼车和专车，使得平台补贴的费用最少？

用变量 y_1 和 y_2 分别表示网约车平台调派拼车和专车的数量，则该网约车平台的补贴费用为 $2y_1+3y_2$，令 $f=2y_1+3y_2$。该网约车平台希望平台补贴费用最少(极小化问题)，即 $\min f$，相应的数学模型为

$$\begin{cases}\min & f=2y_1+3y_2\\ \text{s.t.} & y_1+y_2\geqslant 350\\ & y_1\geqslant 125\\ & 2y_1+y_2\geqslant 600\\ & y_1\geqslant 0,y_2\geqslant 0\end{cases}\tag{1-2}$$

其中，约束条件 $y_1+y_2\geqslant 350$ 表示调派的总车辆数量要求，$y_1\geqslant 125$ 表示调派的拼车数量要求，$2y_1+y_2\geqslant 600$ 表示所需服务的旅客人数要求，$y_1,y_2\geqslant 0$ 称为变量的非负约束，表明拼车和专车的数量不可能为负值。

1.1.2　线性规划问题的数学模型

上一小节的两个例子清晰地展示了规划问题的一般结构。通常情况下，规划问题的数学模型由三个核心要素组成：(1)决策变量，通常表示问题中需要明确定义的未知量，用于表示规划中的数量或选择方案，通常由决策者来控制和调整；(2)目标函数，用于衡量问题的优化目标，它可以是寻找最大化效益(标记为“max”)，也可以是最小化成本/风险(标记为“min”)，目标函数的设定直接反映了问题的本质和求解的目标，指导算法或决策朝着最理想的方案前进；(3)约束条件，描述了决策变量的取值受到的各种资源条件限制，通常表示为包含决策变量的等式或不等式，它们确保问题的解在实际情况下是可行的。若一个规划问题的目标函数是决策变量的线性函数，约束条件是含决策变量的线性等式或不等式，则称该类规划问题的数学模型为线性规划的数学模型。

从例 1-1 中，可以总结出一般线性规划问题的数学建模过程如下。

(1) 定义决策变量：用一组变量 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示问题的决策方案，当这组变量取具体值时就表示一个具体的决策方案；

(2) 定义目标函数：用决策变量表示出线性目标函数，即决策者追求极大化或者极小化的目标；

(3) 定义约束条件：从问题的各类资源限制出发，用决策变量的线性等式或者不等式来表示决策变量必须满足的条件。

由此可见，线性规划模型的一般形式可表示为

$$\begin{cases}\max(\min) & z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n\\ \text{s. t.} & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_1\\ & a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_2\\ & \vdots\\ & a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_m\\ & x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0\end{cases}\tag{1-3}$$

其中，m 是约束方程的个数，n 是决策变量的个数。

由于目标函数和约束条件在内容和形式上的差别，线性规划问题可以有很多种表达式。为了便于讨论和制定统一的算法，当 m 个约束条件均为“$=$”且目标为“max”时，称其为线性规划问题的标准形式：

$$\begin{cases}\max & z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n\\ \text{s. t.} & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ & a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ & \vdots\\ & a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\\ & x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0\end{cases}\tag{1-4}$$

线性规划问题的标准形式(1-4)可以被表示为矩阵形式：

$$\begin{cases}\max & z=\boldsymbol{CX}\\ \text{s. t.} & \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}\\ & \boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}\tag{1-5}$$

其中，$\boldsymbol{A}$ 称为约束方程的系数矩阵，$\boldsymbol{X}$ 称为决策向量，$\boldsymbol{b}$ 称为资源向量，$\boldsymbol{C}$ 称为价值向量，分别表示如下：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$$

标准形式的线性规划模型中，目标函数为求极大值，约束条件全为等式，约束条件右端项 $b_i(i=1,2,\cdots,m)$ 全为非负值，变量 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的取值全为非负值。对于不符合标准形式的线性规划问题，可通过下列方法将其转换为标准形式。

(1) 若线性规划的目标函数为求极小值(min)，可将目标函数等式两端同时乘以“-1”转化为求极大值(max)。

（2）若线性规划约束条件的符号为“$\geqslant$”，可通过添加剩余变量将约束条件转化为“$=$”。例如：约束“$x_1+x_2\geqslant 3$”，可添加变量 x_3，系数为“-1”，将该约束转化为“$x_1+x_2-x_3=3$”，此时，x_3 即为剩余变量。

（3）若线性规划约束条件的符号为“$\leqslant$”，可通过添加松弛变量将约束条件转化为“$=$”。例如：约束“$x_1+x_2\leqslant 5$”，可添加变量 x_4，其系数为“1”，将此约束转化为“$x_1+x_2+x_4=5$”，此时，x_4 即为松弛变量。

（4）若约束条件的等式右端项 b_i 为负数，可将第 i 个约束的等式两边同时乘以“-1”。

（5）若线性规划的决策变量 x_i 为负数，可令 $x_i=-x_i'$，此时 $x_i'\geqslant 0$。

（6）若线性规划的决策变量 x_i 无约束，可令 $x_i=x_i'-x_i''$，此时 $x_i'\geqslant 0$，$x_i''\geqslant 0$。

例 1-3　请将例 1-2 中的线性规划问题(1-2)化为标准形式。

解　上述问题中令 $f'=-f$，并按标准化规则可将线性规划化为如下标准形式：

$$\begin{cases}\max & f'=-2y_1-3y_2+0y_3+0y_4+0y_5\\ \text{s.t.} & y_1+y_2-y_3=350\\ & y_1-y_4=125\\ & 2y_1+y_2-y_5=600\\ & y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\geqslant 0\end{cases}\tag{1-6}$$

1.2　图　解　法

图解法是一种用几何作图求解线性规划问题最优解的方法。这种方法简单直观，有助于深入理解线性规划问题求解的基本原理。通常情况下，图解法只适用于包含 2 个决策变量 x_1 和 x_2 的线性规划问题。通过在以 x_1 和 x_2 为坐标轴的直角坐标系中绘制图形，图上的任意一点的坐标代表了决策变量 x_1 和 x_2 的一组取值，同时也代表了问题的一个潜在解。图解法的主要目的有两个方面：一是判断线性规划问题解的可能性；二是在存在最优解的情况下，找到问题的最优解。

1.2.1　图解法的步骤

下面通过图 1-1 求解例 1-1 来详细介绍图解法的基本思想。在以 x_1 和 x_2 为坐标轴的直角坐标系中，每个线性约束条件都代表了一个半平面。例如，约束条件 $x_1+x_2\leqslant 12$ 表示以直线 $x_1+x_2=12$ 为边界的左下方的半平面，可以用集合表示为：$\{(x_1,x_2)\mid x_1+x_2\leqslant 12\}$。在这个半平面内的任一点都满足约束条件 $x_1+x_2\leqslant 12$，而在半平面以外的点都不满足这个约束条件。

当同时满足约束条件 $x_1+x_2\leqslant 12$，$x_1+2x_2\leqslant 16$，$x_2\leqslant 6$，$x_1\geqslant 0$ 和 $x_2\geqslant 0$ 时，这些点位于 5 个不同半平面的交集内（包括 5 条边界线）。这 5 个半平面分别如图 1-1 的(a)、(b)、(c)、(d)、(e)中的阴影部分所示，它们的交集如图 1-1 的(f)所示。交集（阴影部分）中的每一点（包括边界上的点）都是问题(1-1)的可行解，而这个交集被称为例 1-1 线性规划问题的可行域。

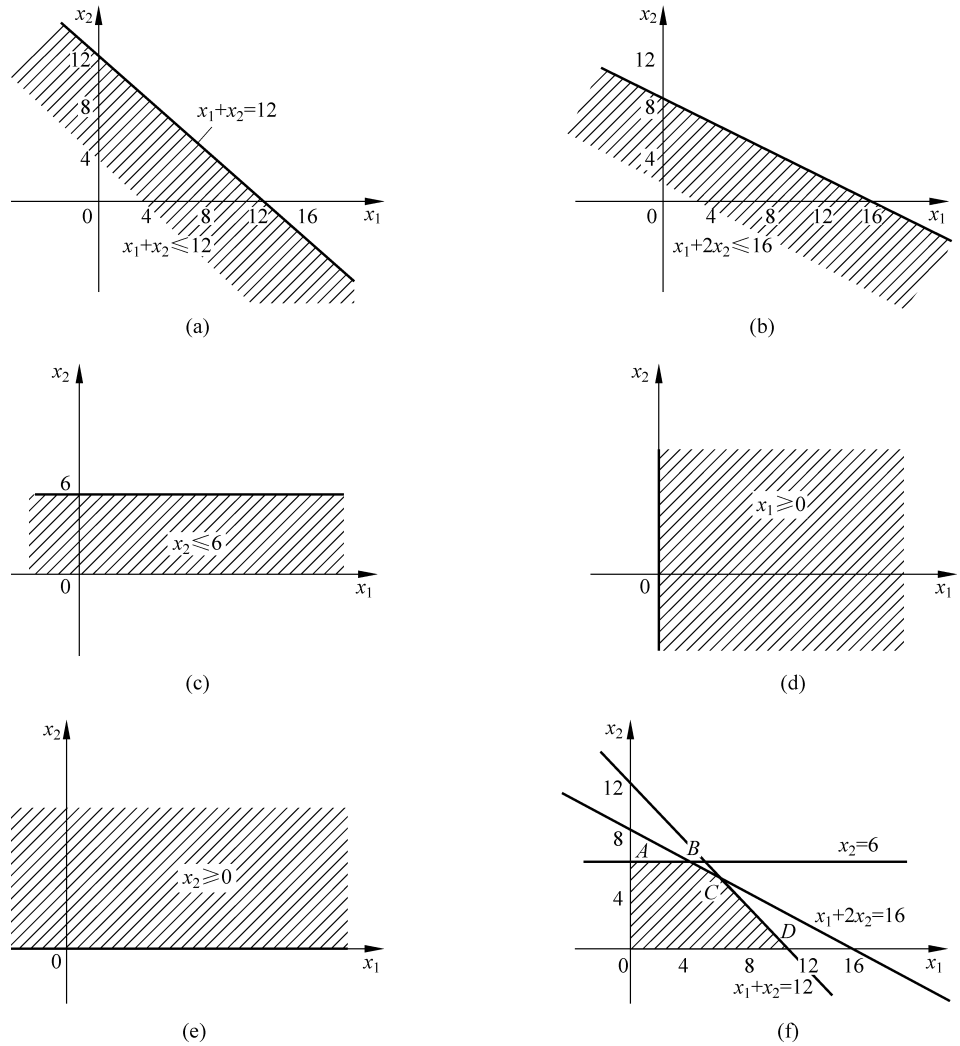

图 1-1 模型(1-1)的可行域

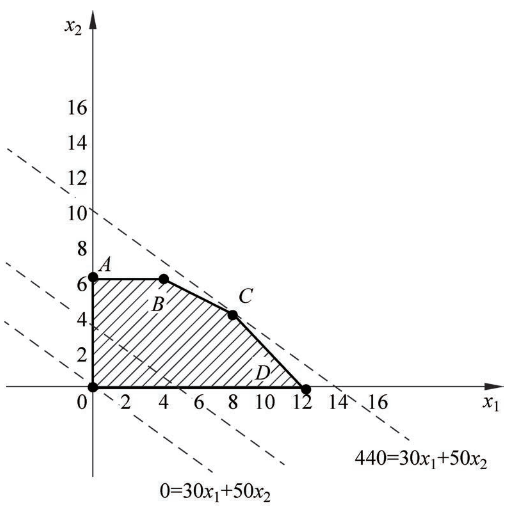

图 1-2 模型(1-1)的最优解

目标函数为 $z=30x_1+50x_2$，当 z 取某一固定值时，该函数就对应于平面上的一条直线。不同的 z 值对应于一系列相互平行的直线，因为同一条直线上的点都具有相同的目标函数值 z，故称该直线为“等值线”。

图解法的核心思想是通过平移目标函数的等值线，在可行域内寻找等值线与可行域的交点，确定目标函数取到极大或极小值的决策变量的取值，从而找到最优解。

如图 1-2 所示，当 z 的取值逐渐增大时，等值线（虚线）将沿其法线方向向右上方移动。同时，为了确保解的可行性，等值线与可行域一定要存在交点。因此，当等值线移动

到可行域的顶点 C 点时，目标函数值在可行域的边界取得了极大值。此时，C 点的坐标为(8,4)，即直线 $x_1+x_2=12$ 与 $x_1+2x_2=16$ 的交点。因此例 1-1 线性规划问题的最优解是 $x_1=8$ 和 $x_2=4$，最优值是 $z=440$。这说明公交集团的最优调度方案应该是调配 8 辆 A 型公交车和 4 辆 B 型公交车。这种情况下，公交集团能够疏散的景点旅客为 440 人。

下面计算最优解所对应的驾驶员、安保员和乘务员的调配情况。把最优解 $x_1=8$ 和 $x_2=4$ 分别代入例 1-1 线性规划问题的约束条件进行计算，可以得到需要驾驶员 $1\times8+1\times4=12$(人)，安保员 $1\times8+2\times4=16$(人)，乘务员 $0\times8+1\times4=4$(人)。因此，组织 8 辆 A 型公交车和 4 辆 B 型公交车的调配方案将占用所有可用的驾驶员和安保员，但只占用了 4 名乘务员，还有 $6-4=2$(名)乘务员没有参与。

在线性规划问题中，对应"$\leqslant$"约束中没有用尽的资源或能力称之为松弛量。因此，对例 1-1 组织 8 辆 A 型公交车和 4 辆 B 型公交车的最优方案中，驾驶员的松弛量为 0 人，安保员的松弛量也为 0 人，而乘务员的松弛量为 2 人。为了将线性规划模型标准化，需要对未全部使用的资源或能力的约束引入"松弛变量"。引入松弛变量不应该对目标函数产生影响，因此在目标函数中把松弛变量的系数设为零。引入松弛变量后，式(1-1)的数学模型如下：

$$\begin{cases}\max & z=30x_1+50x_2+0x_3+0x_4+0x_5\\ \text{s.t.} & x_1+x_2+x_3=12\\ & x_1+2x_2+x_4=16\\ & x_2+x_5=6\\ & x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0\end{cases}\tag{1-7}$$

关于松弛变量的信息也可以从图解法中获得。例如，从图 1-2 中可知例 1-1 的最优解位于直线 $x_1+2x_2=16$ 与直线 $x_1+x_2=12$ 的交点 C 处，故可知驾驶员和安保员的松弛量 x_3 和 x_4 都为零，而 C 点不在直线 $x_2=6$ 上，故可知 $x_5>0$。

1.2.2　线性规划问题解的几种情形

在图 1-2 中，A、B、C、D、O 都是可行域的顶点。对于可行域有界的线性规划模型来说，其可行域的顶点个数有限。从图解法的求解过程可以观察到以下现象：

(1) 如果线性规划模型有最优解，则最优值一定会在可行域的某个顶点上取到。

(2) 线性规划模型存在有无穷多个最优解的情形。例如，当 A 型公交车可容纳旅客 50 人，则例 1-1 中的目标函数将变为 $z=50x_1+50x_2$，等值线平移到最优位置后将与直线 $x_1+x_2=12$ 重合(如图 1-3 所示)。此时不仅顶点 C 和 D 是最优解，线段 CD 上的所有点也都是最优解，其最优值均为 600 人。

(3) 线性规划模型存在无界解的情形。试想在无人驾驶、无人售票、无安保员、车辆可以循环调配的情况下，线性规划问题(1-1)简化为

$$\begin{cases}\max & z=30x_1+50x_2\\ \text{s.t.} & x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\end{cases}\tag{1-8}$$

此时模型的可行域无界(如图 1-4 所示)，目标函数值可以通过将等值线向右上方移动

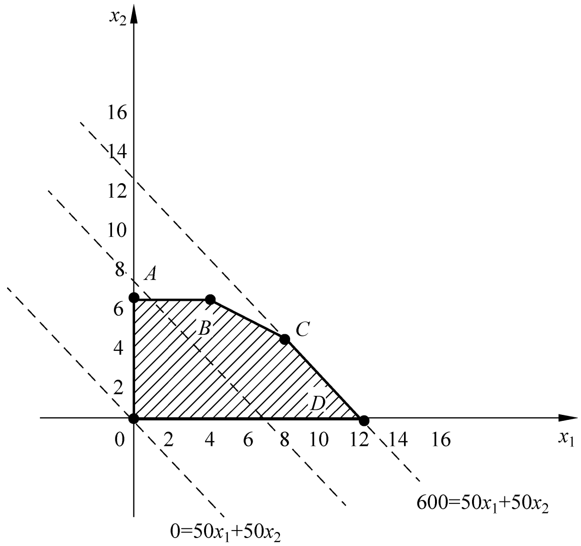

图 1-3　线性规划模型存在有无穷多个最优解的情形

而增大到无穷大，存在无界解。

(4) 线性规划问题存在无可行解的情况。例如，公交集团疏散旅客数量的目标为 1000 人，那么线性规划问题(1-1)中需要再增加一个约束条件 $30x_1+50x_2\geqslant 1000$，此时可行域为空集，即不存在满足所有约束条件的可行解。

一般情况下，我们将上述情况(3)和(4)统称为线性规划问题无最优解。

例 1-1 是求目标函数极大值的线性规划问题，下面我们采用图解法求解例 1-2，即用图解法求解模型(1-2)，该问题的可行域为图 1-5 中的阴影部分。

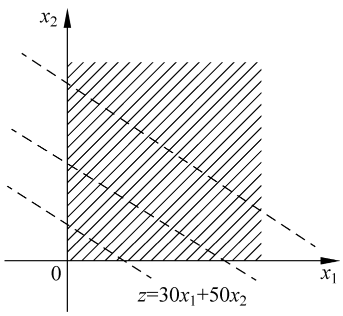

图 1-4　线性规划模型存在无界解的情形

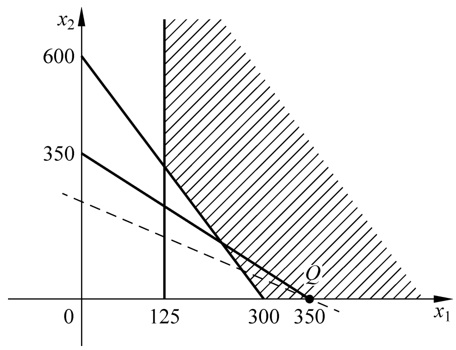

图 1-5　模型(1-2)的可行域

目标函数 $f=2y_1+3y_2$，在坐标平面上可表示为以 f 为参数，以 $-2/3$ 为斜率的一簇等值线。这些等值线随着 f 值的减少向左下方平移，当移动到 Q 点时，目标函数在可行域内取得极小值。如图 1-5 所示。Q 点的坐标可以通过求解线性方程 $y_1+y_2=350$ 得到，当 $y_2=0$ 时，$y_1=350$，此线性规划问题的最优解为分别调派 350 辆拼车和 0 辆专车，此时平台给司机的补贴为 $f=2\times350=700$(元)。对该线性规划问题的最优解进行分析可知：调派拼车和专车的总数量为 350 辆，达到了两种网约车需求(即第一个约束条件)的最低要求；疏散旅客的数量为 $2\times350=700$(位)，大于候车旅客数量。

1.3　单纯形法

单纯形法的理论基础源于线性规划问题的特性，即其可行域是 n 维向量空间 R^n 中的一个多面凸集。从 1.2 节可以看到，如果存在最优解，那么它必然位于这个凸集的某个顶点上，这意味着最优解在可行域的角落或顶点处实现。单纯形法运用这一理论，通过不断移动到可行域的不同顶点，逐步逼近最优解，从而实现对线性规划问题的求解。

1.3.1　线性规划问题解的相关概念

给定标准形式的线性规划问题如下：

$$\begin{cases} \max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & (1\text{-}9) \\ \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1,2,\cdots,m & (1\text{-}9\text{a}) \\ \qquad x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,n & (1\text{-}9\text{b}) \end{cases}$$

可行解　满足上述约束条件(1-9a)和(1-9b)的解 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，被称为线性规划问题的可行解，全部可行解的集合称为可行域。

最优解　使目标函数(1-9)达到极大值的可行解称为最优解。

基　设 $\boldsymbol{A}$ 为约束方程组(1-9a)的 $m\times n$ 阶系数矩阵(设 $n>m$)，其秩为 m，$\boldsymbol{B}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的一个 $m\times m$ 阶的满秩子矩阵，称 $\boldsymbol{B}$ 是线性规划问题的一个基。不失一般性，设

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_m)$$

$\boldsymbol{B}$ 中的每一个列向量 $\boldsymbol{P}_j$，$j=1,2,\cdots,m$ 称为基向量，与基向量对应的变量 x_j 称为基变量，除基变量以外的变量称为非基变量。

基解　在约束方程组(1-9a)中，令所有非基变量 $x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_n=0$，又由于 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$，根据克莱姆法则(Cramer's Rule)，由 m 个约束方程可解出 m 个基变量的唯一解 $\boldsymbol{X_B}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$。将该解结合非基变量取 0 有 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，称 $\boldsymbol{X}$ 为线性规划问题的基解。显然在基解中变量取非零值的个数不大于 m，故基解的总数不超过 C_n^m 个。

基可行解　满足变量非负约束条件(1-9b)的基解称为基可行解。

可行基　对应于基可行解的基称为可行基。

1.3.2　单纯形法及其迭代原理

通常情况下，一般线性规划问题的约束方程个数小于或等于决策变量的个数。因此，满足约束方程的解的个数通常不止一个，甚至可能是无穷多个。正如我们在 1.2 节中所分

析的，线性规划问题的基可行解是有限的，并且如果存在最优解，那么最优解必然可以在某个基可行解上实现。

例 1-4 本例演示如何用单纯形法求解线性规划模型。在例 1-1 中，模型(1-1)所对应的标准形式的目标函数为

$$\max z = 30x_1 + 50x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \tag{1-10}$$

约束方程为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 & = 16 \\ x_2 + x_5 & = 6 \end{cases} \tag{1-11}$$

非负约束为

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \cdots, 5$$

约束方程(1-11)的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_4, \boldsymbol{P}_5) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

从(1-11)式中可以看到 x_3, x_4, x_5 的系数列向量为

$$\boldsymbol{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

是线性独立的，这些向量构成一个基

$$\boldsymbol{B}_0 = (\boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_4, \boldsymbol{P}_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

对应于 $\boldsymbol{B}_0$ 的变量 x_3, x_4, x_5 为基变量，从(1-12)式中可以得到

$$\begin{cases} x_3 = 12 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 16 - x_1 - 2x_2 \\ x_5 = 6 - x_2 \end{cases} \tag{1-12}$$

将(1-12)式代入目标函数(1-10)式得到

$$z_0 = 0 + 30x_1 + 50x_2 \tag{1-13}$$

令非基变量 $x_1 = x_2 = 0$，得到 $x_3 = 12, x_4 = 16, x_5 = 6$，此时 $z_0 = 0$。因此，基矩阵 $\boldsymbol{B}_0$ 的基可行解为

$$\boldsymbol{X}^{(0)} = (0, 0, 12, 16, 6)^{\mathrm{T}}$$

该基可行解可以理解为公交公司没有指派任何 A 型公交车和 B 型公交车疏散旅客，所有的资源都没有被利用，因此能够疏散的旅客数量是 $z_0 = 0$。

从分析目标函数的表达式(1-13)可以看出非基变量 x_1 和 x_2 的系数都是正数，因此将非基变量变换为基变量，目标函数值就可能增大。在实践中，只要适当安排 A 型或者 B 型公交车参与服务，可以使疏散旅客的数量有所增加。在理论上，只要目标函数(1-13)的表达式中存在系数为正的非基变量，则表示目标函数值还有增大的空间，此时可以将非基变量与基变量进行置换。在求解过程中，如果有多个系数为正的非基变量，为了使目标函数值变得尽可能大，通常选择系数最大的那个非基变量(如当前阶段的 x_2)为换入变量，将它加

入基变量中。同时，为了确保基变量的个数等于 m，还要选择一个基变量作为换出变量，成为非基变量。当确定 x_2 为换入变量后，其值将由 0 变为正数。在逐渐增大 x_2 的过程中（此时 x_1 仍取值为 0），为了确保 x_3,x_4,x_5 均非负，将最先变为 0 的基变量作为换出变量。在(1-12)式中，当 $x_1=0$ 时，我们有

$$\begin{cases} x_3=12-x_2\geqslant 0 \\ x_4=16-2x_2\geqslant 0 \\ x_5=6-x_2\geqslant 0 \end{cases} \tag{1-14}$$

从(1-14)式可以看出，x_2 的最大可能取值是 $\min\{12,16/2,6\}=6$。此时 $x_5=0$，因此 x_5 由基变量置换为非基变量。在实践中，每组织一辆 B 型车，所需要的驾驶员、安保员和乘务员的数量是(1,2,1)。这表示人力资源中的薄弱环节确定了组织 B 型车的数量上限，此处由乘务员的数量确定了 B 型车的数量上限是 6 辆。

基于以上分析，此时得到一组新的基变量 x_3,x_4,x_2 及其对应的基矩阵：

$$\boldsymbol{B}_1=(\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_4,\boldsymbol{P}_2)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

为了得到以 x_3,x_4,x_2 为基变量的一个基可行解，将约束方程中含有基变量的项放在等式左边，同时将含有非基变量的项放在等式的右边，得到

$$\begin{cases} x_3+x_2=12-x_1 & ① \\ x_4+2x_2=16-x_1 & ② \\ x_2=6-x_5 & ③ \end{cases} \tag{1-15}$$

用高斯消去法，将(1-15)式中 x_2 的系数列向量变换为单位列向量。其运算步骤是：①′=①−③′；②′=②−2×③′；③′=③，并将结果仍按原顺序排列，得到

$$\begin{cases} x_3=6-x_1+x_5 & ①' \\ x_4=4-x_1+2x_5 & ②' \\ x_2=6-x_5 & ③' \end{cases} \tag{1-16}$$

再将(1-16)式代入目标函数(1-13)得到

$$z_1=300+30x_1-50x_5 \tag{1-17}$$

令非基变量 $x_1=x_5=0$，得到 $x_3=6,x_4=4,x_2=6$，此时 $z_1=300$。因此，对应于基矩阵 $\boldsymbol{B}_1$ 的基可行解为

$$\boldsymbol{X}^{(1)}=(0,6,6,4,0)^{\mathrm{T}}$$

由目标函数(1-17)可观察到非基变量 x_1 的系数是正的，说明目标函数值还可以继续增大。重复上述过程，确定 x_1 为换入变量，x_4 为换出变量，得到基可行解为

$$\boldsymbol{X}^{(2)}=(4,6,2,0,0)^{\mathrm{T}}$$

相应地得到

$$\begin{cases} x_3=2+x_4-x_5 \\ x_1=4-x_4+2x_5 \\ x_2=6-x_5 \end{cases}$$

代入目标函数后得到 $z_2=420-30x_4+10x_5$。此时非基变量 x_5 的系数为正，说明目标函数仍可以继续增大。再次重复上述过程，经过一次迭代，可以得到基可行解为

$$\boldsymbol{X}^{(3)}=(8,4,0,0,2)^{\mathrm{T}}$$

此时目标函数表达式为

$$z_3=440-10x_3-20x_4 \tag{1-18}$$

检查目标函数的表达式(1-18)，所有非基变量 x_3 和 x_4 的系数都是负数，这说明若要用剩余资源 x_3 或 x_4，势必降低疏散旅客的数量。因此当 $x_3=x_4=0$，即不再利用这些资源时，目标函数达到极大值。此时 $\boldsymbol{X}^{(3)}$ 是该问题的最优解，即当分别组织 8 辆 A 型公交车和 4 辆 B 型公交车的时候，公交公司疏散的旅客数达到极大值 440 人。

上例呈现了用单纯形法求解线性规划问题的基本思路，现将每次迭代得到的结果与图解法对比，理解其几何意义。原例 1-1 的线性规划问题是二维的，即两个决策变量 x_1 和 x_2；当加入松弛变量 x_3、x_4 和 x_5 后该问题变为高维。此时可以想象，满足所有约束条件的可行域是一个高维空间的凸多面体。该凸多面体的顶点就是线性规划模型的基可行解。以平面坐标为例，初始基可行解 $\boldsymbol{X}^{(0)}=(0,0,12,16,6)^{\mathrm{T}}$ 相当于图 1-2 中的 O 点(0,0)，$\boldsymbol{X}^{(1)}=(0,6,6,4,0)^{\mathrm{T}}$ 相当于图 1-2 中的 A 点(0,6)；$\boldsymbol{X}^{(2)}=(4,6,2,0,0)^{\mathrm{T}}$ 相当于图 1-2 中的 B 点(4,6)，最优解 $\boldsymbol{X}^{(3)}=(8,4,0,0,2)^{\mathrm{T}}$ 相当于图 1-2 中的 C 点(8,4)。从初始基可行解 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 开始迭代，依次得到 $\boldsymbol{X}^{(1)}$，$\boldsymbol{X}^{(2)}$，$\boldsymbol{X}^{(3)}$。这表示图 1-2 中的目标函数的等值线平移时，从 O 点开始，首先到达 A 点，然后到达 B 点，最后到达最优解对应的 C 点。

1.3.3 单纯形法计算步骤

单纯形法的基本思想可以概括为以下步骤：首先，初始化一个基可行解，也就是可行域的某个顶点。然后，通过检验数(稍后将详细介绍)来判断目标函数是否在该基可行解处达到极大值。如果是，那么这个基可行解就被确定为最优解。否则，就通过替换基变量来改进基可行解，以增加目标函数的值。这个过程一直重复，直到找到最优解为止。这种方法的本质是在可行域的各个顶点上进行迭代搜索，而可行域本身是一个凸多面体，通常被称为单纯形。因此，这个方法被称为单纯形法。

下面将详细讨论一般线性规划问题的求解步骤。

第 1 步：初始基可行解的确定

如果线性规划问题具有标准形式：

$$\begin{cases}\max z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n\\ \text{s.t. } \boldsymbol{P}_1x_1+\boldsymbol{P}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{P}_nx_n=\boldsymbol{b}\\ \qquad x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0\end{cases}$$

可以从 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n$ 中直接观察得到一个初始的可行基，即 m 个线性无关的列向量。若 m 较大，不容易直接观察到一个可行基，可以通过构造一个单位矩阵作为初始可行基。构造的方法是在每个约束方程的左边减去一个人工变量后再加上一个人工变量，此时正系数的人工变量便对应一个单位矩阵。

如果线性规划具有一般形式(1-3)，对于"≤"的约束条件，在每个约束方程的左侧加上一个松弛变量；对于"≥"或"="的约束条件，在每个约束方程的左侧先减去一个人工变量再加上一个人工变量，此时松弛变量与正系数的人工变量便对应一个单位矩阵。

通过以上过程可以得到一个基矩阵。不妨设 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 是基变量，利用高斯消去法求解方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m+a_{1,m+1}x_{m+1}+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m+a_{2,m+1}x_{m+1}+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mm}x_m+a_{m,m+1}x_{m+1}+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1-19}$$

设该方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=b'_1-a'_{1,m+1}x_{m+1}-\cdots-a'_{1n}x_n \\ x_2=b'_2-a'_{2,m+1}x_{m+1}-\cdots-a'_{2n}x_n \\ \qquad\vdots \\ x_m=b'_m-a'_{m,m+1}x_{m+1}-\cdots-a'_{mn}x_n \end{cases} \tag{1-20}$$

其中，$b'_i=(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})_i$，$a'_{ik}=(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_k)_i$，$1\leqslant i\leqslant m$，$m+1\leqslant k\leqslant n$。

令非基变量 $x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_n=0$，可得 $x_i=b'_i$，$i=1,2,\cdots,m$。如果 $b'_1,b'_2,\cdots,b'_m\geqslant 0$，此时得到了一个初始基可行解 $\boldsymbol{X}=(b'_1,b'_2,\cdots,b'_m,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-m个})^{\mathrm{T}}$；否则，重新选择一个基矩阵，直到找到一个基可行解。

第 2 步：最优性检验与解的判别

一般情况下，经迭代后，(1-20)式变成

$$x_i=b'_i-\sum_{j=m+1}^{n}a'_{ij}x_j,\ i=1,2,\cdots,m \tag{1-21}$$

将(1-21)式代入目标函数，整理后可得

$$z=\sum_{i=1}^{m}c_ib'_i+\sum_{j=m+1}^{n}\left(c_j-\sum_{i=1}^{m}c_ia'_{ij}\right)x_j \tag{1-22}$$

令 $z_0=\sum_{i=1}^{m}c_ib'_i$，$\sigma_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}c_ia'_{ij}$，$j=m+1,m+2,\cdots,n$，有

$$z=z_0+\sum_{j=m+1}^{n}\sigma_jx_j \tag{1-23}$$

这里 σ_j 称为非基变量 x_j 的检验数。

(1) 最优解的判别准则

若 $\boldsymbol{X}^{(0)}=(b'_1,b'_2,\cdots,b'_m,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 是一个基可行解，且对于所有 $j=m+1,m+2,\cdots,n$，有 $\sigma_j\leqslant 0$，则 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 是最优解。事实上，当所有检验数 $\sigma_k\leqslant 0$ 时，由(1-23)式可知不存在可以换入的非基变量使目标函数值继续增大。

(2) 无界解的判别准则

若 $\boldsymbol{X}^{(0)}=(b'_1,b'_2,\cdots,b'_m,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 是一个基可行解，存在某个 $m+1\leqslant k\leqslant n$，使得 $\sigma_k>0$，且 $a'_{ik}\leqslant 0$ 对于所有 $i=1,2,\cdots,m$ 成立，那么该线性规划问题具有无界解。事实上，此时可以将非基变量 x_k 的取值趋向正无穷。在此过程中，因为 $a'_{ik}\leqslant 0$，约束条件恒成立；而根据 $\sigma_k>0$，目标函数值也趋向正无穷。

此外，由 1.2.1 节的图解法可以了解到，线性规划问题还可能存在无穷多最优解的情形。若 $\boldsymbol{X}^{(0)}=(b'_1,b'_2,\cdots,b'_m,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 是一个基可行解，对于所有 $j=m+1,m+2,\cdots,n$，有 $\sigma_j\leqslant 0$，且存在某个 $m+1\leqslant k\leqslant n$，使得 $\sigma_k=0$，则根据最优性判别准则可知 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 是一个最优解。进一步，如果 $b'_1,b'_2,\cdots,b'_m>0$，可以将非基变量 x_k 换入基变量中，此时能够找到

一个新的基可行解 $\boldsymbol{X}^{(1)}$。又因为 $\sigma_k=0$，由(1-23)式可知目标函数值保持不变，此时 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 也是最优解。1.2.2 节中已经指出，当线性规划问题存在两个最优解 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 和 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 时，它们连线上的所有点也都是最优解(结合图解法中图 1-3 理解)，此时线性规划问题有无穷多最优解。

值得注意的是，以上讨论都是针对标准形式的线性规划模型，即极大化目标函数(max)的情形。对于极小化目标函数(min)的情形，可先将模型化为标准形式。

第 3 步：基变换

若当前基可行解 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 不是最优解也不满足无界解判别准则时，需要找到一个新的基可行解替换 $\boldsymbol{X}^{(0)}$。基变换的具体做法是：从 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 中选择一个入基变量和一个出基变量，得到一组新的基变量及其对应的基矩阵，再通过高斯消去法求解方程，得到一个新的基可行解。

(1) 确定入基变量

设对应于 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 的非基变量的检验数是 $\sigma_{m+1},\sigma_{m+2},\cdots,\sigma_n$。由(1-24)式看到，当 $\sigma_j>0$ 时，增加 x_j 可以使目标函数值增大。一般来说，为了使目标函数值增加得更快，通常选择最大非负检验数所对应的非基变量作为入基变量。不妨设 $\sigma_k=\max\{\sigma_j\mid\sigma_j>0\}$，此时 σ_k 对应的 x_k 为入基变量。

(2) 确定出基变量

在(1-24)式中，当确定 x_k 为入基变量后，令其他非基变量取值为零，可得

$$\begin{cases}x_1=b'_1-a'_{1k}x_k\\x_2=b'_2-a'_{2k}x_k\\\qquad\vdots\\x_m=b'_m-a'_{mk}x_k\end{cases}\tag{1-24}$$

为了尽可能增大目标函数值，x_k 应该选取满足非负性约束的最大值。不妨设

$$\theta=\min\left\{\frac{b'_i}{a'_{ik}}\middle|a'_{ik}>0\right\}=\frac{b'_l}{a'_{lk}}\tag{1-25}$$

因为在 x_k 逐渐增大的过程中 x_l 最先变为零，所以选取 x_l 为出基变量。令 x_k 为入基变量，x_l 为出基变量，便得到一组新的基变量。为方便起见，记为 $\boldsymbol{X}^{(1)}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$。

设 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 对应的基矩阵为 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_{l-1},\boldsymbol{P}_l,\boldsymbol{P}_{l+1},\cdots,\boldsymbol{P}_m)$，显然 $\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_{l-1},\boldsymbol{P}_l,\boldsymbol{P}_{l+1},\cdots,\boldsymbol{P}_m$ 线性独立。现用反证法证明 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 基变量所对应的系数列向量 $\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_{l-1},\boldsymbol{P}_k,\boldsymbol{P}_{l+1},\cdots,\boldsymbol{P}_m$ 仍线性独立。假设 $\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_{l-1},\boldsymbol{P}_k,\boldsymbol{P}_{l+1},\cdots,\boldsymbol{P}_m$ 线性相关，那么 $\boldsymbol{P}_k$ 一定可用 $\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_{l-1},\boldsymbol{P}_{l+1},\cdots,\boldsymbol{P}_m$ 线性表示，即存在一组不全为零的实数 λ_i，$i=1,2,\cdots,m$，$i\neq l$，使得

$$\boldsymbol{P}_k=\sum_{i=1,i\neq l}^{m}\lambda_i\boldsymbol{P}_i$$

成立。在上式两端同时乘以 $\boldsymbol{B}^{-1}$，可得

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_k=\sum_{i=1,i\neq l}^{m}\lambda_i\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_i$$

又因为

$$(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_{l-1},\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_l,\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_{l+1},\cdots,\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_m)=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$$

所以有

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\quad \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_m=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

此时可得

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_k=\sum_{i=1,i\neq l}^{m}\lambda_i\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_i=(\lambda_1,\cdots,\lambda_{l-1},0,\lambda_{l+1},\cdots,\lambda_m)^{\mathrm{T}}$$

这与$(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_k)_l=a'_{lk}>0$ 相矛盾，因此 $\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_{l-1},\boldsymbol{P}_k,\boldsymbol{P}_{l+1},\cdots,\boldsymbol{P}_m$ 线性独立。

第 4 步：迭代

通过在线性规划问题的约束方程组中加入松弛变量或人工变量，得到

$$\begin{cases}x_1+a_{1,m+1}x_{m+1}+\cdots+a_{1k}x_k+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\x_2+a_{2,m+1}x_{m+1}+\cdots+a_{2k}x_k+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\qquad\vdots\\x_l+a_{l,m+1}x_{m+1}+\cdots+a_{lk}x_k+\cdots+a_{ln}x_n=b_l\\\qquad\vdots\\x_m+a_{m,m+1}x_{m+1}+\cdots+a_{mk}x_k\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\tag{1-26}$$

已知 $\boldsymbol{x}_k$ 为入基变量，$\boldsymbol{x}_l$ 为出基变量，$\boldsymbol{x}_k$ 和 $\boldsymbol{x}_l$ 的系数列向量分别为

$$\boldsymbol{P}_k=\begin{pmatrix}a_{1k}\\\vdots\\a_{lk}\\\vdots\\a_{mk}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}_l=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}\leftarrow \text{第 } l \text{ 个分量}$$

为了计算新的基变量所对应的基解，通过高斯消去法把 $\boldsymbol{P}_k$ 变为单位向量，这可以通过系数矩阵的增广矩阵实施行初等变换来实现，这里的增广矩阵可表示为

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccccc}\boldsymbol{x}_1&\cdots&\boldsymbol{x}_l&\cdots&\boldsymbol{x}_m&\boldsymbol{x}_{m+1}&\cdots&\boldsymbol{x}_k&\cdots&\boldsymbol{x}_n&\boldsymbol{b}\end{array}\\\left(\begin{array}{ccccccccc|c}1&&&&&a_{1,m+1}&\cdots&a_{1k}&\cdots&a_{1n}&b_1\\&\ddots&&&&&&&&&\\&&1&&&a_{l,m+1}&\cdots&a_{lk}&\cdots&a_{ln}&b_l\\&&&\ddots&&&&&&&\\&&&&1&a_{m,m+1}&\cdots&a_{mk}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{array}\right)\end{array}\tag{1-27}$$

行初等变换的步骤如下：

(1) 将增广矩阵(1-27)中的第 l 行除以 a_{lk}，得到

$$\left(0,\cdots,0,\frac{1}{a_{lk}},0,\cdots,0,\frac{a_{l,m+1}}{a_{lk}},\cdots,1,\cdots,\frac{a_{ln}}{a_{lk}}\middle|\frac{b_l}{a_{lk}}\right)\tag{1-28}$$

(2) 通过行变换，将(1-27)式中第 k 列除 l 行以外的各元素都变换为零，变换后第 $i(i\neq l)$行的表达式为

$$\left(0,\cdots,0,-\frac{a_{ik}}{a_{lk}},0,\cdots,0,a_{i,m+1}-\frac{a_{l,m+1}}{a_{lk}}a_{ik},\cdots,0,\cdots,a_{in}-\frac{a_{ln}}{a_{lk}}a_{ik}\middle|b_i-\frac{b_l}{a_{lk}}a_{ik}\right)$$

此时可得到变换后系数矩阵各元素的变换关系式为

$$a'_{ij}=\begin{cases} a_{ij}-\dfrac{a_{lj}}{a_{lk}}a_{ik} & (i\neq l) \\ \dfrac{a_{lj}}{a_{lk}} & (i=l), \end{cases} \qquad b'_i=\begin{cases} b_i-\dfrac{a_{ik}}{b_{lk}}b_l & (i\neq l) \\ \dfrac{b_l}{a_{lk}} & (i=l) \end{cases}$$

其中 a'_{ij} 和 b'_i 是变换后的新元素。

（3）经过初等变换后的新增广矩阵为

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} \boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_l & \cdots & \boldsymbol{x}_m & \boldsymbol{x}_{m+1} & \cdots & \boldsymbol{x}_k & \cdots & \boldsymbol{x}_n & \boldsymbol{b} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccccccc|c} 1 & \cdots & -\dfrac{a_{1k}}{a_{lk}} & \cdots & 0 & a'_{1,m+1} & \cdots & 0 & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \dfrac{1}{a_{1k}} & \cdots & 0 & a'_{l,m+1} & \cdots & 1 & \cdots & a'_{ln} & b'_l \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\dfrac{a_{mk}}{a_{lk}} & \cdots & 1 & a'_{m,m+1} & \cdots & 0 & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right) \end{array} \tag{1-29}$$

（4）由(1-29)式中可以看到，$x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots, x_m$ 的系数列向量构成 $m\times m$ 单位矩阵。当非基变量 $x_m, \cdots, x_l, \cdots, x_n$ 为零时，就得到一个基可行解：

$$\boldsymbol{X}^{(1)}=(b'_1, \cdots, b'_{l-1}, 0, b'_{l+1}, \cdots, b'_m, 0, \cdots, b'_k, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$$

在基变换过程中，已经确保了 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 的非负性。

在上述系数矩阵的变换中，a_{lk} 称为主元素，变换后的取值为 1，它所在列称为主元列，所在行称为主元行。综上所述，单纯形法的计算步骤与流程总结如图 1-6 所示。

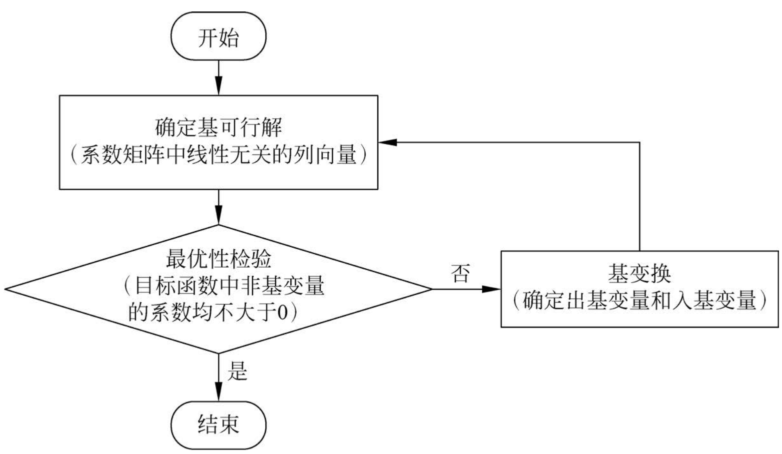

图 1-6 单纯形法的计算步骤与流程

1.3.4 单纯形表

由于直接用公式进行单纯形法的迭代计算很不方便，其中最复杂的是进行基变换。因

此，为了便于计算，我们可以将单纯形法的全部计算过程在一个类似增广矩阵的数表上进行，本节在单纯形法的基础上介绍一种基于单纯形表的计算方法。

首先，将所有约束条件与目标函数组成一个有 $n+1$ 个变量和 $m+1$ 个方程的方程组：

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad \vdots \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ -z + c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m + c_{m+1}x_{m+1} + \cdots + c_nx_n = 0 \end{cases}$$

并表示成如下增广矩阵形式：

$$\begin{array}{cccccccc} \boldsymbol{z} & \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_m & \boldsymbol{x}_{m+1} & \cdots & \boldsymbol{x}_n & \boldsymbol{b} \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} & b_m \\ 1 & c_1 & c_2 & \cdots & c_m & c_{m+1} & \cdots & c_n & 0 \end{pmatrix}$$

通过初等行变换将基变量系数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 变为 0，得到

$$\begin{array}{cccccccc} -\boldsymbol{z} & \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_m & \boldsymbol{x}_{m+1} & \cdots & \boldsymbol{x}_n & \boldsymbol{b} \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} & b_m \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{m+1} - \sum\limits_{i=1}^{m} c_i a_{i,m+1} & \cdots & c_n - \sum\limits_{i=1}^{m} c_i a_{in} & -\sum\limits_{i=1}^{m} c_i b_i \end{pmatrix}$$

根据上述增广矩阵可形成第一张单纯形表，见表 1-2。其中，$\boldsymbol{X_B}$ 列填入基变量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$；$\boldsymbol{C_B}$ 列填入基变量的系数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$；$\boldsymbol{b}$ 列填入约束方程组右端的常数；c_j 行填入变量系数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$；θ_i 列是在确定入基变量后，按 θ 规则（见式(1-26)）计算；最后一行对应目标函数值的相反数：$-z = -\sum\limits_{i=1}^{m} c_i b_i$，及各变量 x_j 的检验数：$\sigma_j = c_j - \sum\limits_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$，$j = 1, 2, \cdots, n$。

基于单纯形表的计算步骤如下：

步骤 1　确定初始可行基和初始基可行解，建立初始单纯形表；

步骤 2　若 $\sigma_j \leqslant 0$，$j = m+1, \cdots, n$，则已得到最优解，终止计算，并返回最优解 $x_j = b_j$，$j = 1, \cdots, m$；$x_j = 0$，$j = m+1, \cdots, n$。否则，转入下一步；

步骤 3　若存在 $\sigma_k > 0$ 且列向量 $\boldsymbol{P}_k \leqslant 0$，则无界解，终止计算。否则，转入下一步；

步骤 4　确定入基变量 x_k 与出基变量 x_l，以 a_{lk} 为主元素进行初等行变换，使得

$$\boldsymbol{P}_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{lk} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix} \overset{\text{变换为}}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{第 } l \text{ 行}$$

将 $\boldsymbol{X}_B$ 列中的 x_l 换为 x_k，得到一张新的单纯形表(表 1-2)。重复步骤 2-4，直到满足终止计算条件。

表 1-2

c_j			c_1	…	c_m	c_{m+1}	…	c_n	θ_i
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	…	x_m	x_{m+1}	…	x_n	
c_1	x_1	b_1	1	…	0	$a_{1,m+1}$	…	a_{1n}	θ_1
c_2	x_2	b_2	0	…	0	$a_{2,m+1}$	…	a_{2n}	θ_2
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮		⋮	⋮
c_m	x_m	b_m	0	…	1	$a_{m,m+1}$	…	a_{mn}	θ_m
$-z$	$-\sum_{i=1}^{m} c_i b_i$		0	…	0	$c_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i,m+1}$	…	$c_n - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{in}$	

现用例 1-1 的标准型(1-3)来说明上述计算步骤。取松弛变量 x_3, x_4, x_5 为基变量，得到初始基可行解 $\boldsymbol{X}^{(0)}=(0,0,12,16,6)^{\mathrm{T}}$，目标函数值是 $z=0$，建立初始单纯形表 1-3。

表 1-3

c_j			30	50	0	0	0	θ_i
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	12	1	1	1	0	0	12
0	x_4	16	1	2	0	1	0	8
0	x_5	6	0	[1]	0	0	1	6
$-z$		0	30	50	0	0	0	

非基变量的检验数 $\sigma_1=30$，$\sigma_2=50$，且 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$ 均有正分量存在，取对应最大检验数的 x_2 为入基变量，取对应最小 θ_i 的 x_5 为出基变量。以 $a_{32}=1$ 为主元素进行初等行变换，使 $\boldsymbol{P}_2$ 变换为$(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，在 $\boldsymbol{X}_B$ 列中用 x_2 替换 x_5，于是得到新的单纯形表 1-4。新的基可行解是 $\boldsymbol{X}^{(1)}=(0,6,4,6,0)^{\mathrm{T}}$，目标函数值是 $z=300$。

表 1-4

c_j			30	50	0	0	0	θ_i
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	6	1	0	1	0	−1	6
0	x_4	4	[1]	0	0	1	−2	4
50	x_2	6	0	1	0	0	1	—
$-z$		−300	30	0	0	0	−50	

非基变量的检验数 $\sigma_1=30$，且 P_1 有正分量存在，取 x_1 为入基变量，x_4 为出基变量。重

复步骤 4，得到单纯形表 1-5。新的基可行解是 $\boldsymbol{X}^{(2)}=(4,6,2,0,0)^{\mathrm{T}}$，目标函数值是 $z=420$。

表　1-5

	c_j		30	50	0	0	0	θ_i
$\boldsymbol{C_B}$	$\boldsymbol{X_B}$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	2	0	0	1	-1	[1]	2
30	x_1	4	1	0	0	1	-2	—
50	x_2	6	0	1	0	0	1	6
$-z$		-420	0	0	0	-30	10	

非基变量的检验数 $\sigma_5=10$，且系数列 P_5 有正分量存在，取 x_5 为入基变量，x_3 为出基变量。重复步骤 4，得到单纯形表 1-6。

表　1-6

	c_j		30	50	0	0	0	θ_i
$\boldsymbol{C_B}$	$\boldsymbol{X_B}$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_5	2	0	0	1	-1	1	—
30	x_1	8	1	0	2	-1	0	—
50	x_2	4	0	1	-1	1	0	—
$-z$		-440	0	0	-10	-20	0	

因为最后一行的检验数均为负数或零，说明此时目标函数值已不可能再继续增大，最优解是 $\boldsymbol{X}^{(3)}=(8,4,0,0,2)^{\mathrm{T}}$，最优值是 $z^*=440$。

1.4　单纯形法的进一步讨论

在使用上述单纯形法解决问题时，通常需要进行基变换的迭代步骤，这些步骤可能会变得复杂且容易出错。此外，当对模型进行标准化后，可能无法直接获得单位矩阵，即无法确定初始基向量。在这种情况下，我们需要在不具备单位列向量的等式约束中引入变量，以构建原线性规划问题的伴随问题，从而获得一个初始基。这些额外引入的变量称为人工变量，而使用它们来找到初始可行基的求解方法被称为人工变量法（artificial variable method）。因此，人工变量法是一种帮助寻找原始问题的初始可行基的方法。

1.4.1　人工变量法

人工变量法包括大 M 法和两阶段法，两者引入人工变量的目的和原则相同，不同之处在于处理人工变量的方法。1.3.2 节中曾提到，通过添加人工变量可以得到初始基可行解。设线性规划问题的约束条件是 $\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_j x_j=\boldsymbol{b}$，分别给每个方程加入一个人工变量 $x_{n+1},\cdots,x_{n+m}$，得到

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} & = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} & = b_m \\ x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m} \geqslant 0 \end{cases}$$

以人工变量 $x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}$ 为基变量，令非基变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 取值为零，得到一个初始基可行解 $\boldsymbol{X}^{(0)} = (0, \cdots, 0, b_1, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$。

以下介绍求解含有人工变量的线性规划问题的大 M 法和两阶段法。

(1) 大 M 法

对于一个极大化线性规划问题，若在约束条件中加进人工变量，需要在目标函数中将人工变量的系数取成 $-M$，其中 M 为充分大的正数。此时，目标函数要实现极大化，必须把人工变量从基变量中换出，否则目标函数永远不可能实现极大化。相反，对于极小化线性规划问题，人工变量在目标函数中的系数应取为 M。

例 1-5 用大 M 法求如下解线性规划问题：

$$\begin{cases} \min & z = -3x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} & x_1 - 2x_2 + x_3 \leqslant 11 \\ & -4x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 3 \\ & -2x_1 + x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

解：通过加入松弛变量 x_4 和剩余变量 x_5 将上述问题转化成标准形式，然后再加入人工变量 x_6 和 x_7 得到如下形式：

$$\begin{cases} \min & z = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7 \\ \text{s.t.} & x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ & -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ & -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

其中，M 是一个充分大的正数。

基于单纯形表对该问题进行求解，见表 1-7。从最后一张单纯形表可以看出最优解为 $(4,1,9,0,0,0,0)$，最优值为 $z^* = -2$。

(2) 两阶段法

第一阶段给原问题加入人工变量，构造仅含人工变量的目标函数，并要求实现极小化，如表 1-7 所示。

表 1-7

	c_j		-3	1	1	0	0	M	M	θ_i
$\boldsymbol{C_B}$	$\boldsymbol{X_B}$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	11
M	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	$3/2$
M	x_7	1	-2	0	$[1]$	0	0	0	1	1
$-z$		$-4M$	$-3+6M$	$1-M$	$1-3M$	0	M	0	0	

续表

c_j			-3	1	1	0	0	M	M	θ_i
$\boldsymbol{C_B}$	$\boldsymbol{X_B}$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	10	3	-2	0	1	0	0	-1	—
M	x_6	1	0	[1]	0	0	-1	1	-2	1
1	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	—
$-z$		$-1-M$	-1	$1-M$	0	0	M	0	$3M-1$	
0	x_4	12	[3]	0	0	1	-2	2	-5	4
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	1	-2	—
1	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	—
$-z$		-2	-1	0	0	0	1	$M-1$	$M+1$	
-3	x_1	4	1	0	0	1/3	$-2/3$	2/3	$-5/3$	—
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	1	-2	—
1	x_3	9	0	0	1	2/3	$-4/3$	4/3	$-7/3$	—
$-z$		2	0	0	0	1/3	1/3	$M-1/3$	$M-2/3$	

$$\begin{cases} \min & w = x_{n+1} + \cdots + x_{n+m} + 0x_1 + \cdots + 0x_n \\ \text{s. t.} & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ & a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ & \qquad\qquad \vdots \\ & a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ & x_1, x_2, \cdots, x_{n+m} \geqslant 0 \end{cases}$$

利用单纯形表求解上述模型，若得到 $w>0$，说明原问题无可行解，停止计算；否则，若得到 $w=0$，说明原问题存在基可行解。基于最后一张单纯形表，除去人工变量，将目标函数系数行换为原问题的目标函数系数，进行第二阶段的单纯形迭代，求原问题的最优解。

例 1-6　用两阶段法求解线性规划下述问题：

$$\begin{cases} \min & z = -3x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s. t.} & x_1 - 2x_2 + x_3 \leqslant 11 \\ & -4x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 11 \\ & -2x_1 + x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

解：先在上述线性规划问题的约束方程中加入人工变量，给出第一阶段模型：

$$\begin{cases} \min & w = x_6 + x_7 \\ \text{s. t.} & x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ & -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ & -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

其中 x_6 和 x_7 是人工变量，用单纯形法求解，见表 1-8。此时得到结果 $w=0$，最优解是 $x_1=0, x_2=1, x_3=1, x_4=12, x_5=x_6=x_7=0$。

表 1-8

c_j			0	0	0	0	0	1	1	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	11	1	−2	1	1	0	0	0	11
1	x_6	3	−4	1	2	0	−1	1	0	3/2
1	x_7	1	−2	0	[1]	0	0	0	1	1
$-w$		−4	6	−1	−3	0	1	0	0	
0	x_4	10	3	−2	0	1	0	0	−1	—
1	x_6	1	0	[1]	0	0	−1	1	−2	1
0	x_3	1	−2	0	1	0	0	0	1	—
$-w$		−1	0	−1	0	0	1	0	3	
0	x_4	12	3	0	0	1	−2	2	−5	—
0	x_2	1	0	1	0	0	−1	1	−2	—
0	x_3	1	−2	0	1	0	0	0	1	—
$-w$		0	0	0	0	0	0	1	1	

因为人工变量 $x_6=x_7=0$，所以该线性规划问题的基可行解为$(0,1,1,12,0)^T$。然后进行第二阶段的运算，此时将第一阶段的最终表中的人工变量 x_6 和 x_7 的列删除，并修改 c_j 行为原问题目标函数对应的系数，继续利用单纯形表进行计算，见表 1-9。

从表 1-9 中得到最优解为 $x_1=4,x_2=1,x_3=9$，最小目标函数值是 $z^*=-2$。

表 1-9

c_j			−3	1	1	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	12	[3]	0	0	1	−2	4
1	x_2	1	0	1	0	0	−1	—
1	x_3	1	−2	0	1	0	0	—
$-z$		−2	−1	0	0	0	1	
−3	x_1	4	1	0	0	1/3	−2/3	—
1	x_2	1	0	1	0	0	−1	—
1	x_3	9	0	0	1	2/3	−4/3	—
$-z$		2	0	0	0	1/3	1/3	

1.4.2 退化问题

单纯形法计算中用 θ 规则确定出基变量时，有时会存在两个以上相同的最小比值，这样在下一次迭代中就有一个或几个基变量同时等于零，此时会出现退化解。这时出基变量 $x_l=0$，迭代后的目标函数值不变，不同的基可行解表示同一顶点。有学者曾构造出一个特例，当出现退化时，进行多次迭代，而基从 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots$，又返回到 $\boldsymbol{B}_1$，即出现计算过程死循环，永远达不到最优解。

尽管计算过程死循环现象极少，但还是有可能出现，那么我们该如何解决这一问题？1977 年，Bland[7] 提出了一种简便的规则——Bland 规则：选取 $\sigma_j>0$ 中下标最小的非基变

量 x_k 为入基变量；按 θ 规则计算存在两个和两个以上最小比值时，选取下标最小的基变量为出基变量。按照 Bland 规则进行单纯形迭代时，一定能避免出现上述死循环情形。

1.4.3　常用处理方式汇总

将线性规划一般形式转化为标准形式时，几种常见的处理方式汇总于表 1-10。

表　1-10

决策变量	$x_j \geqslant 0$	不需要处理
	$x_j \leqslant 0$	令 $x_j' = -x_j, x_j' \geqslant 0$
	x_j 无约束	令 $x_j = x_j' - x_j'', x_j', x_j'' \geqslant 0$
约束条件	$b \geqslant 0$	不需要处理
	$b < 0$	约束条件两端同乘 -1
	$\leqslant$	加松弛变量，目标函数中松弛变量的系数取 0
	$=$	加人工变量，目标函数中人工变量的系数取 $-M$（极大化问题）或 M（极小化问题）
	$\geqslant$	减去剩余变量，再加人工变量
目标函数	$\max z$	不需要处理
	$\min z$	令 $z' = -z$，求 $\max z'$

1.5　线性规划的对偶理论

无论是从理论还是实践的角度来看，对偶理论都在线性规划中扮演着重要的角色。对偶理论的基本思想是：每个线性规划问题（称为原始问题）都有一个与之对应的对偶线性规划问题（称为对偶问题）。在解决一个问题的同时，也同时找到了另一个问题的解。这一理论最早由美籍匈牙利数学家 John von Neumann 于 1947 年提出。

1.5.1　对称形式下对偶问题的一般形式

对称形式定义　满足下列条件的线性规划问题称为具有对称形式：其变量均具有非负约束，其约束条件当目标函数求极大时均取“$\leqslant$”，当目标函数求极小时均取“$\geqslant$”号。

对称形式下线性规划原问题的一般形式为

$$
\begin{cases}
\max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.t.} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\
\qquad\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\
\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \\
\qquad\quad x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,n
\end{cases}
$$

用 $y_i, i=1,2,\cdots,m$ 代表第 i 种资源的估价，则其对偶问题的一般形式为

$$\begin{cases} \min & w = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_m y_m \\ \text{s. t.} & a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \cdots + a_{m1} y_m \geqslant c_1 \\ & a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \cdots + a_{m2} y_m \geqslant c_2 \\ & \quad \vdots \\ & a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \cdots + a_{mn} y_m \geqslant c_n \\ & y_i \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, m \end{cases}$$

用矩阵形式表示，对称形式的线性规划问题的原问题为

$$\begin{cases} \max & z = \boldsymbol{CX} \\ \text{s. t.} & \boldsymbol{AX} \leqslant \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{X} \geqslant 0 \end{cases}$$

其对偶问题为

$$\begin{cases} \min & w = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b} \\ \text{s. t.} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Y} \geqslant \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \\ & \boldsymbol{Y} \geqslant 0 \end{cases}$$

上述矩阵形式的对偶问题中令 $w' = -w'$，可改写为

$$\begin{cases} \max & w' = -\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b} \\ \text{s. t.} & -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Y} \leqslant -\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \\ & \boldsymbol{Y} \geqslant 0 \end{cases}$$

如将其作为原问题，并按对应关系写出它的对偶问题：

$$\begin{cases} \min & z' = -\boldsymbol{CX} \\ \text{s. t.} & -\boldsymbol{AX} \geqslant -\boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{X} \geqslant 0 \end{cases}$$

由此可见对偶问题的对偶即为原问题。

1.5.2 非对称形式的原——对偶问题关系

并非所有线性规划问题具有对称形式，故下面讨论如何写出一般形式下线性规划问题的对偶问题。

例 1-7 写出下述线性规划问题的对偶问题

$$\begin{cases} \max & z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 & (1\text{-}30) \\ \text{s. t.} & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \leqslant b_1 & (1\text{-}30\text{a}) \\ & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2 & (1\text{-}30\text{b}) \\ & a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \geqslant b_3 & (1\text{-}30\text{c}) \\ & x_1 \geqslant 0, x_2 \leqslant 0, x_3 \text{ 无约束} & (1\text{-}30\text{d}) \end{cases}$$

先将(1-30)式转换成对称形式，再写出其对偶问题。

(1) 将约束(1-30b)先转换成 $a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \leqslant b_2$ 和 $a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \geqslant b_2$，再变换为 $a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \leqslant b_2$ 和 $-a_{21} x_1 - a_{22} x_2 - a_{23} x_3 \leqslant -b_2$；

(2) 将约束(1-30c)两端乘“-1”，得 $-a_{31} x_1 - a_{32} x_2 - a_{33} x_3 \leqslant -b_3$；

(3) 在约束(1-30d)中令 $x_2=-x_2'$,由此 $x_2'\geqslant 0$；令 $x_3=x_3'-x_3''$,其中 $x_3',x_3''\geqslant 0$。

经过上述变换后例 1-6 可重新表达为

$$\begin{cases}\max\ z=c_1x_1-c_2x_2'+c_3x_3'-c_3x_3'' & \text{对偶变量}\\ \text{s.t.}\ a_{11}x_1-a_{12}x_2'+a_{13}x_3'-a_{13}x_3''\leqslant b_1 & y_1\\ a_{21}x_1-a_{22}x_2'+a_{23}x_3'-a_{23}x_3''\leqslant b_2 & y_2'\\ -a_{21}x_1+a_{22}x_2'-a_{23}x_3'+a_{23}x_3''\leqslant -b_2 & y_2''\\ -a_{31}x_1+a_{32}x_2'-a_{33}x_3'+a_{33}x_3''\leqslant -b_3 & y_3'\\ x_1\geqslant 0,x_2'\geqslant 0,x_3'\geqslant 0,x_3''\geqslant 0\end{cases}$$

令各约束对应的对偶变量分别为 y_1,y_2',y_2''和$-y_3$,写出其对偶问题为

$$\begin{cases}\min\ w=b_1y_1+b_2y_2'-b_2y_2''-b_3y_3' & (1\text{-}31)\\ \text{s.t.}\ a_{11}y_1+a_{21}y_2'-a_{21}y_2''-a_{31}y_3'\geqslant c_1 & (1\text{-}31\text{a})\\ -a_{12}y_1-a_{22}y_2'+a_{22}y_2''+a_{32}y_3'\geqslant -c_2 & (1\text{-}31\text{b})\\ a_{13}y_1+a_{23}y_2'-a_{23}y_2''-a_{33}y_3'\geqslant c_3 & (1\text{-}31\text{c})\\ -a_{13}y_1-a_{23}y_2'+a_{23}y_2''+a_{33}y_3'\geqslant -c_3 & (1\text{-}31\text{d})\\ y_1\geqslant 0,y_2'\geqslant 0,y_2''\geqslant 0,y_3'\geqslant 0\end{cases}$$

在(1-31)式中,令 $y_2=y_2'-y_2''$,$y_3=-y_3'$,将(1-31c)式和(1-31d)式转换为 $a_{13}y_1+a_{23}y_2'-a_{23}y_2''-a_{33}y_3'=c_3$,即有 $a_{13}y_1+a_{23}y_2+a_{33}y_3=c_3$,在(1-31b)式两端乘“$-1$”,由此得

$$\begin{cases}\min\quad w=b_1y_1+b_2y_2+b_3y_3\\ \text{s.t.}\quad a_{11}y_1+a_{21}y_2+a_{31}y_3\geqslant c_1\\ \qquad a_{12}y_1+a_{22}y_2-a_{32}y_3\leqslant c_2\\ \qquad a_{13}y_1+a_{23}y_2+a_{33}y_3=c_1\\ \qquad y_1\geqslant 0,y_2\text{无约束},y_3\leqslant 0\end{cases}$$

根据例 1-6 中约束和变量的对应关系,下面将对称或不对称线性规划原问题与对偶问题的对应关系归纳在表 1-11。

表　1-11

<table>
<tr><th>项　目</th><th>原问题(对偶问题)</th><th>对偶问题(原问题)</th></tr>
<tr><td>A
b
C</td><td>约束系数矩阵
约束条件右端项向量
目标函数中价格系数向量</td><td>约束系数矩阵的转置
目标函数中价格系数向量
约束条件右端项向量</td></tr>
<tr><td>目标函数</td><td>$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$</td><td>$\min w=\sum_{i=1}^{m}b_iy_i$</td></tr>
<tr><td colspan="2">n 个变量 x_j　$(j=1,2,\cdots,n)$：
$x_j\geqslant 0$；$x_j\leqslant 0$；x_j 无约束</td><td>n 个约束条件$(j=1,2,\cdots,n)$：
$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i\geqslant c_j$；$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i\leqslant c_j$；$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i=c_j$</td></tr>
<tr><td colspan="2">m 个约束条件$(i=1,2,\cdots,m)$：
$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i$；$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\geqslant b_i$；$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i$</td><td>$m$ 个变量 $y_i(i=1,2,\cdots,m)$：
$y_i\geqslant 0$；$y_i\leqslant 0$；$y_i=0$</td></tr>
</table>

1.5.3 对偶问题基本性质

(1) 对称性：对偶问题的对偶是原问题。

证 设原问题是

$$\max z = \boldsymbol{CX};\ \boldsymbol{AX} \leqslant \boldsymbol{b};\ \boldsymbol{X} \geqslant 0$$

根据对偶问题的对称变换关系，可以找到它的对偶问题是

$$\min w = \boldsymbol{Yb};\ \boldsymbol{YA} \geqslant \boldsymbol{C};\ \boldsymbol{Y} \geqslant 0$$

若将上式两边取负号，又因$-\min w = \max(-w)$可得到

$$\max(-w) = -\boldsymbol{Yb};\ -\boldsymbol{YA} \leqslant -\boldsymbol{C};\ \boldsymbol{Y} \geqslant 0$$

根据对称变换关系，得到上式的对偶问题为

$$\min(-w') = -\boldsymbol{CX};\ -\boldsymbol{AX} \geqslant -\boldsymbol{b};\ \boldsymbol{X} \geqslant 0$$

又因

$$\min(-w') = -\max w'$$

可得

$$\max w' = \max z = \boldsymbol{CX};\ \boldsymbol{AX} \leqslant \boldsymbol{b};\ \boldsymbol{X} \geqslant 0$$

由此可以看出，该问题这就是原问题。

(2) 弱对偶性：若 $\bar{\boldsymbol{X}}$ 是原问题的可行解，$\bar{\boldsymbol{Y}}$ 是对偶问题的可行解。则存在 $\boldsymbol{C}\bar{\boldsymbol{X}} \leqslant \bar{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{b}$。

证 设原问题是

$$\max z = \boldsymbol{CX};\ \boldsymbol{AX} \leqslant \boldsymbol{b};\ \boldsymbol{X} \geqslant 0$$

因 $\bar{\boldsymbol{X}}$ 是原问题的可行解，所以满足约束条件，即

$$\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{X}} \leqslant \boldsymbol{b}$$

若 $\bar{\boldsymbol{Y}}$ 是给定的一组值，设它是对偶问题的可行解，将 $\bar{\boldsymbol{Y}}$ 左乘上式，得到

$$\bar{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{X}} \leqslant \bar{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{b}$$

原问题的对偶问题是

$$\min w = \boldsymbol{Yb};\ \boldsymbol{YA} \geqslant \boldsymbol{C};\ \boldsymbol{Y} \geqslant 0$$

因为 $\bar{\boldsymbol{Y}}$ 是对偶问题的可行解，所以满足

$$\bar{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{A} \geqslant \boldsymbol{C}$$

将 $\bar{\boldsymbol{X}}$ 右乘上式，得到

$$\bar{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{X}} \leqslant \boldsymbol{C}\bar{\boldsymbol{X}}$$

于是得到

$$\boldsymbol{C}\bar{\boldsymbol{X}} \leqslant \bar{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{X}} \leqslant \bar{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{b}$$

(3) 无界性：若原问题(对偶问题)为无界解，则其对偶问题(原问题)无可行解。

证 由弱对偶性显然得。

注意这个问题的性质不存在逆。当原问题(对偶问题)无可行解时，其对偶问题(原问题)或具有无界解或无可行解。例如下述两个问题两者皆无可行解。

$$\begin{array}{ll}
\text{原问题(对偶问题)} & \text{对偶问题(原问题)} \\
\min w = -x_1 - x_2 & \max z = y_1 + y_2 \\
\begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant 1 \\ -x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ x_1, x_2 \geqslant 1 \end{cases} & \begin{cases} y_1 - y_2 \leqslant -1 \\ -y_1 + y_2 \leqslant -1 \\ y_1, y_2 \geqslant 0 \end{cases}
\end{array}$$

(4) 可行解是最优解：设 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 是原问题的可行解，$\hat{\boldsymbol{Y}}$ 是对偶问题的可行解，当 $\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{X}}=\hat{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{b}$ 时，$\hat{\boldsymbol{X}},\hat{\boldsymbol{Y}}$ 是最优解。

证　若 $\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{X}}=\hat{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{b}$，根据性质(2)可知：对偶问题的所有可行解 $\bar{\boldsymbol{Y}}$ 都存在 $\hat{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{b}\geqslant\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{X}}$，因 $\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{X}}=\hat{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{b}$，所以 $\bar{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{b}\geqslant\hat{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{b}$。可见 $\hat{\boldsymbol{Y}}$ 是使目标函数取值最小的可行解，因此是最优解。同样可证明：对于原问题的所有可行解 $\bar{\boldsymbol{X}}$，存在

$$\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{X}}=\hat{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{b}\geqslant\boldsymbol{C}\bar{\boldsymbol{X}}$$

所以 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 是最优解。

(5) 对偶定理：若原问题有最优解，那么对偶问题也有最优解；且目标函数值相等。

证　设 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 是原问题的最优解，它对应的基矩阵 $\boldsymbol{B}$ 必存在 $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\leqslant 0$。即得到 $\hat{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{b}\geqslant\boldsymbol{C}$，其中 $\hat{\boldsymbol{Y}}=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}$。

这时 $\hat{\boldsymbol{Y}}$ 是对偶问题的可行解，它使

$$w=\hat{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

因原问题的最优解是 $\hat{\boldsymbol{X}}$，使目标函数取值

$$z=\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

由此，得到

$$\hat{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{X}}$$

可见 $\hat{\boldsymbol{Y}}$ 是对偶问题的最优解。

(6) 互补松弛性：若 $\hat{\boldsymbol{X}},\hat{\boldsymbol{Y}}$ 分别是原问题和对偶问题的可行解。那么 $\hat{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{X}_S=0$ 和 $\boldsymbol{Y}_S\hat{\boldsymbol{X}}=0$，当且仅当 $\hat{\boldsymbol{X}},\hat{\boldsymbol{Y}}$ 为最优解。

证　设原问题和对偶问题的标准型是

$$\begin{array}{ll}
\text{原问题(对偶问题)} & \text{对偶问题(原问题)} \\
\max z = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X} & \min w = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{b} \\
\begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}_S=\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X},\boldsymbol{X}_S\geqslant 0 \end{cases} & \begin{cases} \boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Y}_S=\boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{Y},\boldsymbol{Y}_S\geqslant 0 \end{cases}
\end{array}$$

将原问题目标函数中的系数向量 $\boldsymbol{C}$ 用 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Y}_S$ 代替后，得到

$$z=(\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Y}_S)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}_S\boldsymbol{X} \tag{1-32}$$

将对偶问题的目标函数中系数列向量，用 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}_S$ 代替后，得到

$$w=\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}_S)=\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}_S \tag{1-33}$$

若 $\boldsymbol{Y}_S\hat{\boldsymbol{X}}=0,\hat{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{X}_S=0$；则 $\hat{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{b}=\hat{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{X}}$，由性质(4)可知 $\hat{\boldsymbol{X}},\hat{\boldsymbol{Y}}$ 为最优解。

又因为 $\hat{\boldsymbol{X}},\hat{\boldsymbol{Y}}$ 分别是原问题和对偶问题的最优解，根据性质(5)，则有

$$\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{X}}=\hat{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}=\hat{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{b}$$

由式(1-32)，式(1-33)可知，必有 $\hat{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{X}_S=0,\boldsymbol{Y}_S\hat{\boldsymbol{X}}=0$。

(6) 设原问题是

$$\max z=\boldsymbol{C}\boldsymbol{X};\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}_S=\boldsymbol{b};\ \boldsymbol{X},\boldsymbol{X}_S\geqslant 0$$

它的对偶问题是

$$\min w=\boldsymbol{Y}\boldsymbol{b};\ \boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Y}_S=\boldsymbol{c};\ \boldsymbol{Y},\boldsymbol{Y}_S\geqslant 0$$

则原问题单纯形表的检验数行对应其对偶问题的一个基解，其对应关系见表 1-12。

表 1-12

原问题 $\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{X}_N$	$\boldsymbol{X}_S$
检验数 θ 对偶问题 $\boldsymbol{Y}_{S_1}$	$\boldsymbol{C}_N-\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$ $-\boldsymbol{Y}_{S_2}$	$-\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}$ $-\boldsymbol{Y}$

这里 $\boldsymbol{Y}_{S_1}$ 是对应原问题中基变量 $\boldsymbol{X}_B$ 的剩余变量，$\boldsymbol{Y}_{S_2}$ 是对应原问题中非基变量 $\boldsymbol{X}_N$ 的剩余变量。

证 设 $\boldsymbol{B}$ 是原问题的一个可行基，于是 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{B},\boldsymbol{N})$；原问题可以改写为

$$\max z=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{X}_B+\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{X}_N$$
$$\begin{cases}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_B+\boldsymbol{N}\boldsymbol{X}_N+\boldsymbol{X}_S=\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{X}_B,\boldsymbol{X}_N,\boldsymbol{X}_S\geqslant 0\end{cases}$$

相应地对偶问题可表示为

$$\min w=\boldsymbol{Y}\boldsymbol{b}$$
$$\begin{cases}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{Y}_{S_1}=\boldsymbol{C}_B & (1\text{-}34)\\ \boldsymbol{Y}\boldsymbol{N}-\boldsymbol{Y}_{S_2}=\boldsymbol{C}_N & (1\text{-}35)\\ \boldsymbol{Y},\boldsymbol{Y}_{S_1},\boldsymbol{Y}_{S_2}\geqslant 0\end{cases}$$

这里 $\boldsymbol{Y}_S=(\boldsymbol{Y}_{S_1},\boldsymbol{Y}_{S_2})$。

当求得原问题的一个解 $\boldsymbol{X}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$，其相应的检验数为 $\boldsymbol{C}_N-\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$ 与 $-\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}$。现分析这些检验数与对偶问题的解之间的关系：令 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}$，将它代入式(1-34)和式(1-35)得

$$\boldsymbol{Y}_{S_1}=0$$
$$-\boldsymbol{Y}_{S_2}=\boldsymbol{C}_N-\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$$

这些对应关系可以在单纯形法计算表看到，在求解原问题时，隐含着同时也获得对偶变量的值。

1.5.4 对偶单纯形法

1.5.3 节讲到原问题与对偶问题的解之间的对应关系时指出：在单纯形表中进行迭代

时，在 $\boldsymbol{b}$ 列中得到的是原问题的基可行解，而在检验数行得到的是对偶问题的基解。通过逐步迭代，当在检验数行得到对偶问题的解也是基可行解时，根据性质(4)、(5)可知，已得到最优解，即原问题与对偶问题都是最优解。

根据对偶问题的对称性，也可以这样考虑：若保持对偶问题的解是基可行解，即 $c_j - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_j \leqslant 0$，而原问题在非可行解的基础上，通过逐步迭代达到基可行解，这样也得到了最优解。其优点是原问题的初始解不一定是基可行解，可从非基可行解开始迭代，方法如下。

设原问题

$$\max z = \boldsymbol{CX}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X} \geqslant 0 \end{cases}$$

又设 $\boldsymbol{B}$ 是一个基。不失一般性，令 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_m)$，它对应的变量为 $\boldsymbol{X}_B = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$。当非基变量都为零时，可以得到 $\boldsymbol{X}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$。若在 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ 中至少有一个负分量，设 $(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})_i < 0$，并且在单纯形表的检验数行中的检验数都为非正，即对偶问题保持可行解，它的各分量是

(1) 对应基变量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的检验数是

$$\sigma_i = c_i - z_i = c_i - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_j = 0, i = 1, 2, \cdots, m$$

(2) 对应非基变量 $x_{m+1}, \cdots, x_n$ 的检验数是

$$\sigma_j = c_j - z_j = c_i - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_j \leqslant 0, j = m + 1, \cdots, n$$

每次迭代是将基变量中的负分量 x_l 取出，去替换非基变量中的 x_k，经基变换，所有检验数仍保持非正。从原问题来看，经过每次迭代，原问题由非可行解往可行解靠近。当原问题得到可行解时，便得到了最优解。

对偶单纯形法的计算步骤如下：

(1) 对线性规划问题进行变换，使列出的初始单纯形表中所有检验数 $\sigma_j \leqslant 0$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$，即对偶问题为基可行解。

(2) 检查 $\boldsymbol{b}$ 列的数字，若都为非负，检验数都为非正，则已得到最优解。停止计算。若检查 $\boldsymbol{b}$ 列的数字时，至少还有一个负分量，检验数保持非正，那么进行以下计算。

(3) 确定换出变量。

按 $\min\limits_i [(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})_i \mid (\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})_i < 0] = (\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})_l$ 对应的基变量 x_l 为换出变量。

(4) 确定换入变量。

在单纯形表中检查 x_l 所在行的各系数 $\alpha_{lj}\,(j = 1, 2, \cdots, n)$，若所有 $\alpha_{lj} \geqslant 0$，则无可行解，停止计算。若存在 $\alpha_{lj} < 0\,(j = 1, 2, \cdots, n)$，计算 $\theta = \min\limits_j \left(\dfrac{c_j - z_j}{a_{lj}} \mid \alpha_{lj} < 0 \right) = \dfrac{c_k - z_k}{\alpha_{lk}}$，按 θ 规则所对应的列的非基变量 x_k 为换入变量，这样才能保持得到的对偶问题解仍为可行解。

(5) 以 α_{lk} 为主元素，按原单纯形法在表中进行迭代运算，得到新的计算表。

重复步骤(2)～(5)。

下面举例来说明具体算法。

例 1-8 用对偶单纯形法求解

$$\min w = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geqslant 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

解 先将此问题化成下列形式,以便得到对偶问题的初始可行基

$$\max w = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = -4 \\ x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, 5 \end{cases}$$

建立此问题的初始单纯形表,见表 1-13。

表 1-13

c_j			-2	-3	-4	0	θ
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-3	-1	-2	-1	1	0
0	x_5	-4	$[-2]$	1	-3	0	1
$-z$			-2	-3	-4	0	0

从表 1-13 看到,检验数行对应的对偶问题的解是可行解。因 $\boldsymbol{b}$ 列数字为负,故需进行迭代运算。

换出变量的确定:按上述对偶单纯形法计算步骤(3),计算 $\min(-3, -4) = -4$,故 x_5 为换出变量。

换入变量的确定:按上述对偶单纯形法计算步骤(4),计算

$$\theta = \min\left\{\frac{-2}{-2}, -, \frac{-4}{-3}\right\} = \frac{-2}{-2} = 1$$

故 x_1 为换入变量,换入换出变量的所在列、行的交叉处"-2"为主元素。按单纯形法计算步骤进行迭代,得表 1-14。

表 1-14

c_j			-2	-3	-4	0	θ
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-1	0	$[-5/2]$	$1/2$	1	$-1/2$
-2	x_1	2	1	$-1/2$	$3/2$	0	$-1/2$
$-z$			0	-4	-1	0	-1

由表 1-14 看出,对偶问题仍是可行解,而 $\boldsymbol{b}$ 列中仍有负分量,故重复上述迭代步骤,得表 1-15。

表　1-15

c_j			−2	−3	−4	0	0
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
−3	x_2	2/5	0	1	−1/5	−2/5	1/5
−2	x_1	11/5	1	0	7/5	−1/5	−2/5
$-z$			0	0	−9/5	−8/5	−1/5

表 1-15 中，$\boldsymbol{b}$ 列数字全为非负，检验数全为非正，故问题的最优解为

$$\boldsymbol{X}^* = (11/5, 2/5, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}。$$

若对应两个约束条件的对偶变量分别为 y_1 和 y_2，则对偶问题的最优解为

$$\boldsymbol{Y}^* = (y_1^*, y_2^*) = (8/5, 1/5)$$

从以上求解过程可以看到对偶单纯形法有以下优点：

(1) 初始解可以是非可行解，当检验数都为负数时，就可以进行基的变换，这时不需要加入人工变量，因此可以简化计算。

(2) 当变量多于约束条件，对这样的线性规划问题，用对偶单纯形法计算可以减少计算工作量，因此对变量较少，而约束条件很多的线性规划问题，可先将它变换成对偶问题，然后用对偶单纯形法求解。

(3) 在灵敏度分析及求解整数规划的割平面法中，有时需要用对偶单纯形法，这样可使问题的处理简化，对偶单纯形法的局限性主要是，对大多数线性规划问题，很难找到一个对偶问题的初始可行基，因而这种方法在求解线性规划问题时很少单独应用。

1.6　列生成算法

在某些线性规划问题的模型中，约束条件的数量相对较少，但决策变量的数量会随着问题规模的增加而迅速增加。这类问题被称为大规模线性规划问题。尽管单纯形法可以在进行数次迭代后找到最优解，但由于需要涉及大量决策变量的基变换，因此求解过程会变得非常烦琐。此外，当使用单纯形法解决大规模问题时，基变量的数量仅与约束条件的数量相关。每次迭代只会引入一个新的非基变量，换句话说，在整个求解过程中，实际上只有很少一部分变量被涉及。

为了应对这一挑战，Danzig 和 Wolfe 于 1960 年提出了列生成算法[8]。这种算法有效地解决了大规模线性规划问题，例如广义分配问题(generalized assignment problem)、切割问题(cutting stock problem)、车辆路径问题(vehicle routing problem)、机组人员调度问题(crew assignment problem)以及单资源工厂选址问题(the single facility location problem)等。列生成算法的优点在于它能够高效地处理大规模问题，减少计算的复杂性，从而为复杂问题的求解提供了有力工具。

1.6.1 列生成算法的基本思想

列生成算法的基本思想如图 1-7 所示，其在解决某些优化问题时，特别是大规模优化问题时，只考虑一部分变量（列），然后逐步生成（列生成）新的变量来逼近最优解。这样可以显著减少需要考虑的变量的数量，从而降低了计算的复杂性，提高了算法的效率。本节针对最大化问题，介绍列生成算法的基本步骤。

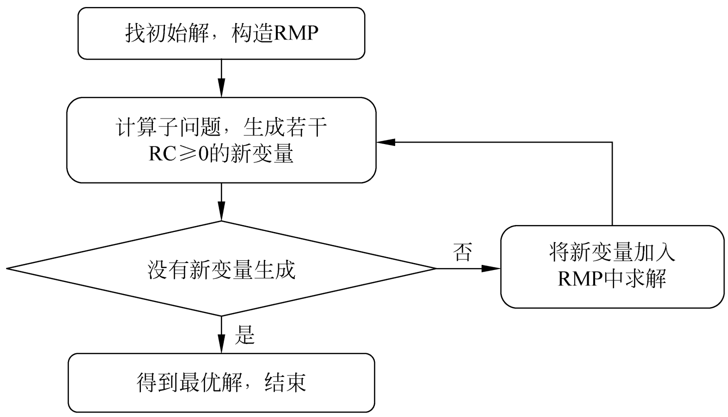

图 1-7 列生成算法流程图

（1）首先，将原问题（master problem，MP）限制到一个规模更小的问题，称之为原问题的限制主问题（restricted master problem，RMP），然后，使用单纯形法在 RMP 上求解最优解。需要注意的是，这个步骤仅得到了 RMP 的最优解，而不是 MP 的最优解；

（2）通过一个子问题去检测在那些未被考虑的变量中是否有使得检验数（reduced cost，RC）不小于零的情况，如果有，则将这个变量的相关系数列加入 RMP 的系数矩阵中，返回第 1 步，否则进入第 3 步。

（3）经过反复迭代，直到子问题中的 RC 小于等于零，则得到 MP 最优解。

1.6.2 应用案例

在资源管理和优化的实际应用中，常常需要对资源进行有效分配和利用。例如在生产调度问题中，需要将任务分配给设备或工人，分配不同任务到不同机器所带来的效益各不相同，且每项任务必须且只能由一台机器完成，其目标是最大化生产效率，同时不超出每台机器的负荷，这类问题被称为广义分配问题。以下以广义分配问题为例，介绍列生成算法的应用。

设定有 m 项任务需要分配给 n 台机器，$c_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 表示任务 i 被分配到机器 j 的效益系数，$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 表示任务 i 被分配到机器 j 上消耗的时间，$b_j(j=1,2,\cdots,n)$ 表示机器 j 的可利用时间。$x_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 是决策变量，当任务 i 被分配到机器 j 上时，$x_{ij}=1$，否则，$x_{ij}=0$。所以该广义分配问题

的一般模型如下：

$$
\begin{cases}
\max & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
\text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1, i=1,2,\cdots,m \\
& \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_{ij}\leqslant b_j, j=1,2,\cdots,n \\
& x_{ij}\in\{0,1\}, i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n
\end{cases}
$$

令 $\boldsymbol{K}_j=\{x_j^1,x_j^2,\cdots,x_j^{k_j}\}$表示 m 项任务分配给机器 j 的所有可能的分配方案集合，其中 $x_j^k=\{x_{1j}^k,x_{2j}^k,\cdots,x_{mj}^k\}$是背包问题，即下面问题的一个可行解：

$$
\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_{ij}^k\leqslant b_j,
$$

$$
x_{ij}^k\in\{0,1\}, i=1,2,\cdots,m
$$

对于 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$和 $k=1,2,\cdots,k_j$，设 y_j^k 为一个二进制变量，若机器 j 选择了可行的分配 x_j^k，则 $y_j^k=1$，否则，$y_j^k=0$，则这个广义分配问题能被重新表示为

$$
\begin{cases}
\max & \sum_{1\leqslant j\leqslant n,1\leqslant k\leqslant k_j}\left(\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}^k\right)y_j^k \\
\text{s.t.} & \sum_{1\leqslant j\leqslant n,1\leqslant k\leqslant k_j} x_{ij}^k y_j^k=1, i=1,2,\cdots,m \\
& \sum_{1\leqslant k\leqslant k_j} y_j^k\leqslant 1, j=1,2,\cdots,n \\
& y_j^k\in\{0,1\}, j=1,2,\cdots,n, k=1,2,\cdots,k_j
\end{cases}
$$

其中第一个约束强制每个任务被精确地分配给一个机器，而第二个约束则强制为每个机器最多选择一个可行的分配。考虑线性松弛后的广义分配问题的限制主问题为

$$
(\text{RMP})\begin{cases}
\max & \sum_{1\leqslant j\leqslant n,1\leqslant k\leqslant k_j}\left(\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}^k\right)y_j^k \\
\text{s.t.} & \sum_{1\leqslant j\leqslant n,1\leqslant k\leqslant k_j} x_{ij}^k y_j^k=1, i=1,2,\cdots,m \\
& \sum_{1\leqslant k\leqslant k_j} y_j^k\leqslant 1, j=1,2,\cdots,n \\
& y_j^k\geqslant 0, j=1,2,\cdots,n, k=1,2,\cdots,k_j
\end{cases}
$$

令 u_i 表示无约束的对偶变量，对应 RMP 问题的第一个约束；v_j 表示与机器 j 的约束相关的对偶变量，对应 RMP 问题的第二个约束。那么可通过式子 $Z=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\{Z(KP_j)-v_j\}\leqslant 0$ 判断 RMP 问题的最优性，其中 $Z(KP_j)$是以下背包问题(即子问题)的最优值：

$$
(\text{SP})\begin{cases}
\max & \sum_{1\leqslant i\leqslant m}(c_{ij}-u_i)x_{ij} \\
\text{s.t.} & \sum_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij}x_{ij}\leqslant b_j, \\
& x_{ij}\in\{0,1\}, i=1,2,\cdots,m
\end{cases}
$$

考虑某工厂现有 2 台机器，且有 3 个任务待分配。已知两台机器生产任务 1 所耗费的时间分别为 5 小时和 7 小时，产生的效益分别为 20 元和 16 元；生产任务 2 所耗费的时间分别为 3 小时和 8 小时，产生的效益分别为 15 元和 19 元；生产任务 3 所耗费的时间分别为 2 小时和 10 小时，产生的效益分别为 19 元和 14 元。两台机器的可工作时长分别为 6 小时和 21 小时。需要考虑如何分配任务既保证每台机器的能力时间不超过其上限，又使得总效益最大。首先我们简单思考下，该问题中可能的分配方案的有很多，可以先列出其中两种可能的分配方案，具体如表 1-16 所示。

表 1-16

(a) 方案 1(y_j^1)

任务 \ 机器	1	2	效益合计
1	1(x_{11}^1)	0(x_{12}^1)	20
2	0(x_{21}^1)	1(x_{22}^1)	19
3	0(x_{31}^1)	1(x_{32}^1)	14
时长合计	5	18	

(b) 方案 2(y_j^2)

任务 \ 机器	1	2	效益合计
1	0(x_{11}^2)	1(x_{12}^2)	16
2	1(x_{21}^2)	0(x_{22}^2)	15
3	0(x_{31}^2)	1(x_{32}^2)	14
时长合计	3	17	

其中 $\boldsymbol{K}_j=\{x_j^1,x_j^2\}$，$j=1,2$，表示上述两种分配方案，企业的目标是在保证每台机器的工作能力消耗不超过其上限时获得最大的效益，即每种方案与效益的乘积之和$(20x_{11}^1+15x_{21}^1+19x_{31}^1)y_1^1+(16x_{12}^1+19x_{22}^1+14x_{32}^1)y_2^1+(20x_{11}^2+15x_{21}^2+19x_{31}^2)y_1^2+(16x_{12}^2+19x_{22}^2+14x_{32}^2)y_2^2$，其约束条件是满足上述 RMP 的约束，即

$$
\begin{cases}
x_{11}^1y_1^1+x_{12}^1y_2^2+x_{11}^1y_1^2+x_{12}^2y_2^2=1\\
x_{21}^1y_1^1+x_{22}^1y_2^1+x_{21}^2y_1^2+x_{22}^2y_2^2=1\\
x_{31}^1y_1^1+x_{32}^1y_2^1+x_{31}^2y_1^2+x_{32}^2y_2^2=1\\
y_1^1+y_1^2\leqslant 1\\
y_2^1+y_2^2\leqslant 1\\
y_1^1,y_2^1,y_1^2,y_2^2\geqslant 0
\end{cases}
$$

迭代 1：将表 1-16 中 x_{ij}^k 的值代入上式可以得到限制主问题模型为

$$
\begin{cases}
\max & 20y_1^1+33y_2^1+15y_1^2+30y_2^2\\
\text{s.t.} & y_1^1+y_2^2=1\\
 & y_2^1+y_1^2=1\\
 & y_2^1+y_2^2=1\\
 & y_1^1+y_1^2\leqslant 1\\
 & y_2^1+y_2^2\leqslant 1\\
 & y_1^1,y_2^1,y_1^2,y_2^2\geqslant 0
\end{cases}
$$

求解可得其最优解为 $\boldsymbol{y}^*=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，最大的收益为 $Z^*=53$，对偶问题最优解为 $\boldsymbol{w}^*=(20,15,18,0,0)$，其中 $u_i=(20,15,18)$，$v_j=(0,0)$。

子问题 1：针对机器 1(即 $j=1$)，可建立模型

$$\begin{cases}\max & (20-20)x_{11}^3+(15-15)x_{21}^3+(19-18)x_{31}^3-0\\ \text{s.t.} & 5x_{11}^3+3x_{21}^3+2x_{31}^3\leqslant 6\\ & x_{i1}^3\in\{0,1\},i=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

子问题 2：针对机器 2(即 $j=2$)，可建立模型

$$\begin{cases}\max & (16-20)x_{11}^3+(19-15)x_{21}^3+(14-18)x_{31}^3-0\\ \text{s.t.} & 7x_{11}^3+8x_{21}^3+10x_{31}^3\leqslant 21\\ & x_{i1}^3\in\{0,1\},i=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

求解两个子问题，可得 $\boldsymbol{x}_{i1}^3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}_{i2}^3=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，对应的检验数分别为 $z_j-c_1=1$，$z_j-c_2=4$，均大于 0，因此，将 $\boldsymbol{x}_{ij}^3=(0,0;\ 0,1;\ 1,0)$，$y_1^3$，$y_2^4$，$c_3=(19,19)$加入到限制主问题中，继续迭代。

迭代 2：限制主问题模型变为

$$\begin{cases}\max & 20y_1^1+33y_2^1+15y_1^2+30y_2^2+19y_1^3+19y_2^3\\ \text{s.t.} & y_1^1+y_2^2=1\\ & y_2^1+y_1^2+y_2^3=1\\ & y_2^1+y_2^2+y_1^3=1\\ & y_1^1+y_1^2+y_1^3\leqslant 1\\ & y_2^1+y_2^2+y_2^3\leqslant 1\\ & y_1^1,y_2^1,y_1^2,y_2^2,y_1^3,y_2^3\geqslant 0\end{cases}$$

求解可得其最优解为 $\boldsymbol{y}^*=(1,1,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，最大的收益为 $Z^*=53$，对偶问题最优解为 $\boldsymbol{w}^*=(15,10,14,5,9)$，其中 $u_i=(15,10,14)$，$v_j=(5,9)$。

子问题 1：针对机器 1(即 $j=1$)，可建立模型

$$\begin{cases}\max & (20-15)x_{11}^4+(15-10)x_{21}^4+(19-14)x_{31}^4-5\\ \text{s.t.} & 5x_{11}^4+3x_{21}^4+2x_{31}^4\leqslant 6\\ & x_{i1}^4\in\{0,1\},i=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

子问题 2：针对机器 2(即 $j=2$)，可建立模型

$$\begin{cases}\max & (16-15)x_{12}^4+(19-10)x_{22}^4+(14-14)x_{32}^4-9\\ \text{s.t.} & 7x_{12}^4+8x_{22}^4+10x_{32}^4\leqslant 21\\ & x_{i2}^4\in\{0,1\},i=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

求解两个子问题，可得 $\boldsymbol{x}_{i1}^4=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}_{i2}^4=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，对应的检验数分别为 $z_j-c_1=5$，$z_j-c_2=1$，均大于 0，因此，将 $x_{ij}^4=(0,1;\ 1,1;\ 1,0)$，$y_1^4$，$y_2^3$，$c_4=(34,35)$加入到限制主问题中，继续迭代。

迭代 3：限制主问题模型变为

$$\begin{cases}\max & 20y_1^1+33y_2^1+15y_1^2+30y_2^2+19y_1^3+19y_2^3+34y_1^4+35y_2^4\\ \text{s.t.} & y_1^1+y_2^2+y_2^4=1\\ & y_2^1+y_1^2+y_2^3+y_1^4+y_2^4=1\\ & y_2^1+y_2^2+y_1^3+y_1^4=1\\ & y_1^1+y_1^2+y_1^3+y_1^4\leqslant 1\\ & y_2^1+y_2^2+y_2^3+y_2^4\leqslant 1\\ & y_1^1,y_2^1,y_1^2,y_2^2,y_1^3,y_2^3,y_1^4,y_2^4\geqslant 0\end{cases}$$

求解可得其最优解为 $\boldsymbol{y}^*=(0,0,0,0,1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，最大的收益为 $Z^*=54$，对偶问题最优解为 $\boldsymbol{w}^*=(15.5,19.5,14.5,4.5,0)^{\mathrm{T}}$，其中 $u_i=(15.5,19.5,14.5)$，$v_j=(4.5,0)$。

子问题 1：针对机器 1(即 $j=1$)，可建立模型

$$\begin{cases}\max & (20-15.5)x_{11}^5+(15-19.5)x_{21}^5+(19-14.5)x_{31}^5-4.5\\ \text{s.t.} & 5x_{11}^5+3x_{21}^5+2x_{31}^5\leqslant 6\\ & x_{i1}^5\in\{0,1\},i=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

子问题 2：针对机器 2(即 $j=2$)，可建立模型

$$\begin{cases}\max & (16-15.5)x_{12}^5+(19-19.5)x_{22}^5+(14-14.5)x_{32}^5-0\\ \text{s.t.} & 7x_{12}^5+8x_{22}^5+10x_{32}^5\leqslant 21\\ & x_{i2}^5\in\{0,1\},i=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

求解两个子问题，可得 $\boldsymbol{x}_{i1}^5=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}_{i2}^5=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，对应的检验数分别为 $z_j-c_1=0$，$z_j-c_2=0.5$，均不小于 0，因此，将 $\boldsymbol{x}_{ij}^5=(1,1;0,0;0,0)$，$y_1^5,y_2^5,c_5=(20,16)$加入到限制主问题中，继续迭代。

迭代 4：限制主问题模型变为

$$\begin{cases}\max & 20y_1^1+33y_2^1+15y_1^2+30y_2^2+19y_1^3+19y_2^3+34y_1^4+35y_2^4+20y_1^5+16y_2^5\\ \text{s.t.} & y_1^1+y_2^2+y_2^4+y_1^5+y_2^5=1\\ & y_2^1+y_1^2+y_2^3+y_1^4+y_2^4=1\\ & y_2^1+y_2^2+y_1^3+y_1^4=1\\ & y_1^1+y_1^2+y_1^3+y_1^4+y_1^5\leqslant 1\\ & y_2^1+y_2^2+y_2^3+y_2^4+y_2^5\leqslant 1\\ & y_1^1,y_2^1,y_1^2,y_2^2,y_1^3,y_2^3,y_1^4,y_2^4,y_1^5,y_2^5\geqslant 0\end{cases}$$

求解可得其最优解为 $\boldsymbol{y}^*=(0,0,0,0,1,0,0,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，最大的收益为 $Z^*=54$，对偶问题最优解为 $\boldsymbol{w}^*=(16,15,15,4,4)^{\mathrm{T}}$，其中 $u_i=(16,15,15)$，$v_j=(4,4)$。

子问题 1：针对机器 1(即 $j=1$)，可建立模型

$$\begin{cases}\max & (20-16)x_{11}^6+(15-15)x_{21}^6+(19-15)x_{31}^6-4\\ \text{s.t.} & 5x_{11}^6+3x_{21}^6+2x_{31}^6\leqslant 6\\ & x_{i1}^6\in\{0,1\},i=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

子问题 2：针对机器 2(即 $j=2$)，可建立模型

$$\begin{cases}\max & (16-16)x_{11}^{6}+(19-15)x_{21}^{6}+(14-15)x_{31}^{6}-4 \\ \text{s. t.} & 7x_{11}^{6}+8x_{21}^{6}+10x_{31}^{6}\leqslant 21 \\ & x_{i1}^{5}\in\{0,1\},i=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

求解两个子问题，可得 $\boldsymbol{x}_{i1}^{5}=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}_{i2}^{5}=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，对应的检验数分别为 $z_j-c_1=0$，$z_j-c_2=0$，均小于等于 0，因此获得该广义分配问题的最优解，迭代结束，且最优解为 $\boldsymbol{y}^*=(0,0,0,0,1,0,0,1,0,0)^{\mathrm{T}}$。从前面的迭代可以看出，选择方案 y_1^3（即机器 1 加工任务 3）和方案 y_2^4（即机器 2 加工任务 1 和 2），可以获得的最大效益为 54 元。

本 章 小 结

线性规划是目标函数和约束条件均为线性的最优化问题，其在交通运输、经济分析、运营管理和工程技术等领域得到了广泛的应用，是运筹学的一个重要分支[9]。本章主要介绍了线性规划问题及其数学模型、二元线性规划的图解法、单纯形法原理、线性规划的对偶理论以及列生成算法。同时，提供了例题，阐明各内容的具体计算以及求解过程。

习题

即练即测

习题 1-1　把下列线性规划问题化成标准形式：

(1) $$\begin{cases}\min & Z=5x_1-2x_2 \\ \text{s. t.} & x_1+\dfrac{8}{3}x_2\leqslant 4 \\ & -x_1+x_2\leqslant -2 \\ & 2x_2\leqslant 3 \\ & x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(2) $$\begin{cases}\min & Z=2x_1-x_2+2x_3 \\ \text{s. t.} & -x_1+x_2+x_3=4 \\ & -x_1+x_2-x_3\leqslant 6 \\ & x_1\leqslant 0,x_2\geqslant 0,x_3\ \text{无约束}\end{cases}$$

习题 1-2　按各题要求建立线性规划数学模型。

(1) 某工厂生产 A、B、C 三种产品，每种产品的原材料消耗、机械台时消耗量以及这些资源的限量，单位产品的利润如下表所示。

产品 单位消耗 资源	A	B	C	资源限量
原材料	1.0	1.5	4.0	2000
机械台时	2.0	1.2	1.0	1000
单位利润	10	14	12	

问：如何安排生产计划才能最大化利润？

(2) 某建筑工地有一批长度为 10 米的相同型号的钢筋，现要截成长度为 3 米的钢筋 90 根，长度为 4 米的钢筋 60 根，问怎样下料才能使所使用的原材料最省？

参 考 文 献

[1] 胡运权，郭耀煌. 运筹学教程[M]. 5 版. 北京：清华大学出版社，2018.

[2] Hillier F S，Lieberman G J. Introduction to Operations Research[M]. McGraw-Hill Publishing Company，2001.

[3] Hitchcock F L. The distribution of a product from several sources to numerous locations[J]. Journal of Mathematics and Physics，1941，20(4)：224-230.

[4] Stigler G J. The cost of subsistence[J]. Journal of Farm Economics，1945，27(2)：303-314.

[5] Koopmans T. Statistical estimation of simultaneous economic relations[J]. Journal of the American Statistical Association，1945，40(232)：448-466.

[6] 李想，徐小峰，张博文. 运筹学教程[M]. 北京：科学出版社，2022.

[7] Bland R G. New finite pivoting rules for the simplex method[J]. Mathematics of Operations Research，1977，2(2)：103-107.

[8] Dantzig G B. Linear programming[J]. Operations Research，2002，50(1)：42-47.

[9] Bertsimas D，Tsitsiklis J N. Introduction to Linear Optimization[M]. Belmont，MA：Athena scientific，1997.