



学习目标要求

本章介绍正弦量的基本概念、相量表示法、基尔霍夫定律的相量形式,以及电阻、电感、电容3种基本元件的交流分析法,并引入阻抗概念介绍RLC串、并联电路的分析方法,以及功率因数及提高措施。读者学习本章内容要做到以下几点。

(1) 了解阻抗三角形、电压三角形、功率三角形;了解串联谐振、并联谐振现象和谐振电路特点;了解提高功率因数的意义和办法。

(2) 理解瞬时值、幅值、周期、频率、角频率、相位、相位差、初相位等概念的物理意义;理解单一参数电路中的感抗、容抗的概念,功率、能量特征;理解RLC串、并联电路中的电抗、复阻抗的概念、功率、能量特征。

(3) 掌握正弦量的各种表示方法及相互转换,尤其是相量图表示方法;掌握相位差的计算方法;掌握利用阻抗分析单一参数正弦交流电路、RLC串、并联电路等简单交流电路的方法。

(4) 掌握实验室日光灯电路的接线方法。

(5) 掌握交流电流表、交流电压表和交流功率表的使用。

3.1 正弦交流电及其相量表示

大小和方向都随时间作周期性变化的电动势、电压和电流统称为交流电。获得交流电的方法有多种,但大多数交流电是由交流发电机产生的。交流电具有输配电容易、使用方便、价格便宜等优点,在电力工程中应用极为广泛。在交流电作用下的电路称为交流电路,电气设备及元器件电路模型与直流电路区别显著,必须充分重视。

3.1.1 正弦交流电的三要素

在日常生活和生产实践中,应用最多的是正弦交流电,简称交流电。正弦交流电是指大小、方向随时间按正弦规律变化的电压、电动势和电流等物理量,并统称为正弦量。在不加特殊说明时,今后人们所说的交流电都是指正弦交流电。

正弦交流电的表示方法有三角函数表示法、波形图表示法、相量表示法3种。正弦交流电的大小和方向均随时间按正弦规律作周期性变化,可以用正弦波表示,这种表示方法称为波形图表示法,它直观、形象地描述了各正弦量的变化规律,其波形如图3-1所示。由图3-1

可知,正弦交流电的取值时正时负。这实际上和直流电路一样,是先设定了参考方向的,取正值表示实际方向和参考方向一致,取负值则表示实际方向和参考方向相反。正弦交流电的三角函数表达式为

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (3-1)$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (3-2)$$

由式(3-1)和式(3-2)可以看出,对任一正弦量,当 U_m (或 I_m)、 ω 、 φ_u (或 φ_i) 确定后该正弦量就能唯一确定,常把这 3 个量称为三要素。下面分别介绍三要素的意义。

1. 最大值与有效值

正弦量是变化的量,它在任一瞬间的值称为瞬时值,用小写字母表示,如电压 u 。正弦量在变化过程中的最大瞬时值称为最大值,又称为幅值、振幅或峰值,用带有下标“m”的大写字母表示,如电压最大值 U_m 。它反映的是正弦交流电的大小,如图 3-2 所示。

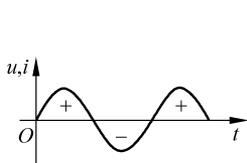


图 3-1 正弦交流电的波形图

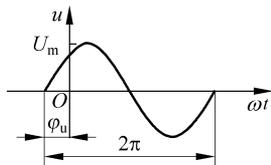


图 3-2 正弦量的三要素

通常一个正弦量的大小是用有效值表示的。正弦电流 i 在一个周期 T 内通过某一电阻 R 产生的热量若与一直流电流 I 在相同时间和相同的电阻上产生的热量相等,那么这个直流电流 I 就是正弦交流电流 i 的有效值。依上所述,应有

$$\int_0^T i^2 R dt = I^2 RT$$

由此可得正弦电流 i 的有效值

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (3-3)$$

可见,正弦电流 i 的有效值为其方均根值。并且这一结论适用于任意周期量。

把 $i = I_m \sin \omega t$ 代入式(3-3),可得正弦电流 i 的有效值 I 与最大值 I_m 的关系为

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707 I_m \quad (3-4)$$

同理可得出正弦交流电压、正弦电动势的有效值分别为

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad \text{或} \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \quad (3-5)$$

一般所讲的正弦交流电压或电流的大小,例如,交流电压 380V 或 220V,都是指它们的有效值,其最大值应为 $\sqrt{2} \times 380\text{V}$ 或 $\sqrt{2} \times 220\text{V}$ 。一般交流电压表和电流表的刻度也是根据有效值来定的。

2. 周期、频率和角频率

正弦交流电变化一次所需的时间称为周期,用 T 表示,单位是秒(s)。正弦交流电每秒内变化的次数称为频率,用 f 表示,单位是赫兹(Hz)。显然频率和周期互为倒数,即

$$f = \frac{1}{T} \quad (3-6)$$

正弦量每秒钟相位角的变化称为角频率 ω , 正弦交流电一个周期变化 360° , 即 2π 弧度, 人们把它在单位时间内变化的弧度数称为角频率, 用 ω 表示, 单位是弧度每秒 (rad/s)。它与频率、周期之间的关系为

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (3-7)$$

所以 ω 、 T 、 f 都是表示正弦量变化速度的, 三者只要知其一, 则其余皆可求得, 如图 3-2 所示。它们能够反映出正弦交流电变化的快慢。已知我国工频电源的频率为 $f=50\text{Hz}$, 则可求出其周期 $T=(1/50)\text{s}=0.02\text{s}$, $\omega=2\pi f=2\times 3.14\times 50\text{rad/s}=314\text{rad/s}$ 。

【例 3-1】 已知某交流电的频率 $f=60\text{Hz}$, 求它的周期 T 和角频率 ω 。

解:
$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{60} = 0.017(\text{s})$$

$$\omega = 2\pi f = 2 \times 3.14 \times 60 = 376.8(\text{rad/s})$$

3. 相位和初相位

由图 3-2 的正弦波可知, 正弦量的波形是随时间 t 变化的。电压 u 的波形起始于横坐标 φ_u 处, 对应的三角函数表达式为

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (3-8)$$

式中, $\omega t + \varphi_u$ 称为相位角, 简称相位。 $t=0$ 时的相位 φ_u 称为初相位, 简称初相, 它反映了正弦量计时起点初始值的大小。

初相为正弦曲线由负变正时所经过的零值点到坐标原点的弧度满足 $|\varphi_u| \leq \pi$ 。

在图 3-3 中, A 、 B 、 C 、 D 4 个点中只有 B 点是要找的零值点, 初相 φ_u 如图 3-3 所示。图 3-3(a) 中 $t=0$ 时, $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u) = U_m \sin \varphi_u > 0$ 。因为 $U_m > 0$, $|\varphi_u| \leq \pi$, 所以 $\varphi_u > 0$, 此时波形是从坐标原点左移 φ_u 得到的。

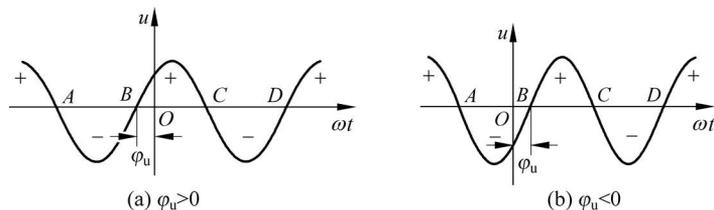


图 3-3 不同 φ_u 对应的不同波形

同理, 图 3-3(b) 中 $t=0$ 时, $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u) = U_m \sin \varphi_u < 0$, 所以 $\varphi_u < 0$, 此时波形是从坐标原点右移 φ_u 得到的; $\varphi_u = 0$ 时波形是从坐标原点出发的。

3.1.2 正弦交流电的相位差

在一个线性正弦交流电路中, 电压和电流的频率相同, 但它们的初相可能相同也可能不同, 两个同频率正弦量的相位之差称为相位差, 用 φ 表示。

设 $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$, $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$, 则 u 与 i 的相位差为

$$\varphi = (\omega t + \varphi_u) - (\omega t + \varphi_i) = \varphi_u - \varphi_i \quad (3-9)$$

由此可见, 同频率正弦量的相位差实际上就是初相之差。注意: 正弦量用正弦函数和余弦函数表示均可。为了统一, 本书一律采用正弦函数表示。

下面以两个同频率的正弦交流电流 $i_1 = I_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1)$, $i_2 = I_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2)$ 为例,说明 i_1 和 i_2 与相位差 φ 之间的关系,如图 3-4 所示。

- (1) 若 $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 > 0$, 则称 i_1 超前于 i_2 , 如图 3-4(a) 所示。
- (2) 若 $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 < 0$, 则称 i_1 滞后于 i_2 , 如图 3-4(b) 所示。
- (3) 若 $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$, 则称 i_1 和 i_2 同相位, 如图 3-4(c) 所示。
- (4) 若 $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \pm 180^\circ$, 则称 i_1 和 i_2 反相位, 如图 3-4(d) 所示。
- (5) 若 $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \pm 90^\circ$, 则称 i_1 和 i_2 正交, 如图 3-4(e) 所示。

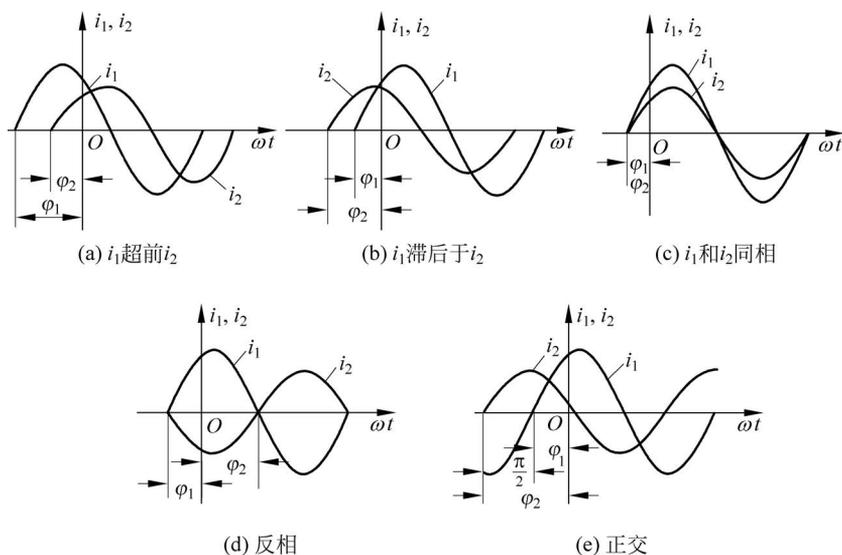


图 3-4 相位关系

通过以上的讨论可知,两个同频率的正弦量的计时起点($t=0$)不同时,它们的相位和初始相位不同,但它们的相位差不变,即两个同频率的正弦量的相位差与计时起点无关。

【例 3-2】 已知 $u = 311 \sin(314t + 60^\circ) \text{V}$, $i = 141 \cos(100\pi t - 60^\circ) \text{A}$ 。要求:

- (1) 在同一坐标下画出波形图;
- (2) 求最大值、有效值、频率、初相;
- (3) 比较它们的相位关系。

解: $u = 311 \sin(314t + 60^\circ) \text{V}$

$$i = 141 \cos(100\pi t - 60^\circ) \text{A} = 141 \sin(100\pi t + 30^\circ) \text{A}$$

(1) 波形图如图 3-5 所示。

$$(2) U_m = 311 \text{V}, U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{311}{\sqrt{2}} = 220 \text{(V)}$$

$$f_u = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{314}{2 \times 3.14} = 50 \text{(Hz)}, \varphi_u = 60^\circ$$

$$I_m = 141 \text{A}, I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{141}{\sqrt{2}} = 100 \text{(A)}$$

$$f_i = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{100\pi}{2\pi} = 50 \text{(Hz)}, \varphi_i = 30^\circ$$

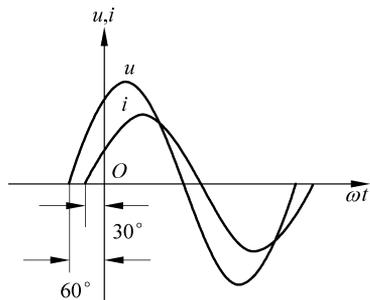


图 3-5 例 3-2 的波形图

(3) 因为相位差 $\varphi_u = \varphi_u - \varphi_i = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$, 所以它们的相位关系是 u 比 i 超前 30° 。

3.1.3 正弦交流电的相量表示法

正弦量的各种表示方法是分析与计算正弦交流电路的工具。用三角函数表达式进行运算,过程非常复杂;用正弦波形进行运算,不可能得到精确的结果。而同频率的正弦量可用有向线段(相量图)和复数(相量式)表示,这样就可把正弦电路的分析计算由烦琐的三角函数运算转化为平面几何代数运算问题。相量表示法以复数为基础,因此具有基本复数知识是必须的。

1. 复数及其运算

1) 复数的表示

一个复数是由实部和虚部组成的。复数有多种表达形式,常见的有代数形式、指数形式、三角函数形式和极坐标形式。设 A 为一复数, a 、 b 分别为实部和虚部,则

$$A = \underbrace{a + jb}_{\text{代数式}} = \underbrace{r e^{j\varphi}}_{\text{指数式}} = \underbrace{r(\cos\varphi + j\sin\varphi)}_{\text{三角函数式}} = \underbrace{r \angle \varphi}_{\text{极坐标式}} \quad (3-10)$$

式中, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ 称为复数 A 的模; $a = r \cos\varphi$, $b = r \sin\varphi$; $\varphi = \arctan(b/a)$ 称为辐角。

在电路分析中,为区别于电流的符号 i ,虚数单位常用 j 表示。复数也可以用由实轴与虚轴组成的复平面上的有向线段来表示,表示复数的矢量称为复数矢量。

2) 复数的运算

设有两个复数 $A_1 = a_1 + jb_1 = r_1 e^{j\varphi_1} = r_1 \angle \varphi_1$ 、 $A_2 = a_2 + jb_2 = r_2 e^{j\varphi_2} = r_2 \angle \varphi_2$,复数的加、减运算应用代数形式较为方便:

$$A_1 + A_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

$$A_1 - A_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$

复数的乘、除运算应用指数或极坐标形式较为方便:

$$A_1 \cdot A_2 = r_1 e^{j\varphi_1} \cdot r_2 e^{j\varphi_2} = r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} = r_1 r_2 \angle \varphi_1 + \varphi_2$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1 e^{j\varphi_1}}{r_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \angle \varphi_1 - \varphi_2$$

2. 正弦量的相量表示法

由数学分析可知,正弦量可用有向线段表示,而有向线段又可用复数表示,所以正弦量也可用复数表示,复数的模即为正弦量的最大值(或有效值),复数的辐角即为正弦量的初相。为了与一般的复数相区别,我们把表示正弦量的复数称为相量,字母上加点表示。

在复平面上用矢量表示的相量称为相量图,也就是按各个同频率正弦量的大小和相位关系,在同一坐标中用初始位置的有向线段画出的若干个相量的图形。这种表示正弦量的方法称为正弦量的相量表示法。为了简便,常省去坐标轴,只画出代表实轴正方向的虚线。

以正弦电流 $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_0)$ 为例,其对应的复数为 $\dot{I}_m = I_m \angle \varphi_0$ 或 $\dot{I} = I \angle \varphi_0$ 。若以最大值为模,则称为最大值的相量,如 \dot{I}_m ; 若以有效值为模,则称为有效值相量,如 \dot{I} 。由

由此可见,正弦量和相量是一一对应的关系。

值得注意的是:相量只能表示为正弦量,但并不等于正弦量,因为它只是具有正弦量的两个要素——最大值(或有效值)和初相,角频率则无法体现出来,但是在分析正弦交流电时,正弦电源、电压和电流等均为同频率的正弦量,频率是已知或特定的,可不考虑,只要用相量求出最大值(或有效值)和初相即可。

【例 3-3】 试画出 $u = 50\sqrt{2} \sin(314t + 60^\circ) \text{V}$, $i = 25\sqrt{2} \sin(314t + 30^\circ) \text{A}$ 的相量图。

解: 两个正弦量对应的相量分别为

$$\dot{U} = 50 \angle 60^\circ \text{V}, \quad \dot{I} = 25 \angle 30^\circ \text{A}$$

相量图如图 3-6 所示。

注意: ①只有正弦周期量才能用相量表示; ②只有同频率的正弦才能画在同一相量图上。

由上可知,表示正弦量的相量有两种形式:相量图和复数式(即相量式)。以相量图为基础进行正弦量计算的方法称为相量图法;用复数表示正弦量来进行计算的方法称为相量的复数运算法。在分析正弦交流电路时,这两种方法都可以用。

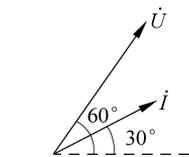


图 3-6 正弦量 u 与 i 的相量

【例 3-4】 已知 $u_1 = 8\sqrt{2} \sin(314t + 60^\circ) \text{V}$, $u_2 = 6\sqrt{2} \sin(314t - 30^\circ) \text{V}$, 画出相量图并求 $u_{12} = u_1 + u_2$ 。

解: (1) 用相量式求。

由已知条件可写出 u_1 和 u_2 的有效值相量:

$$\dot{U}_1 = 8 \angle 60^\circ \text{V} = (4 + j6.9) \text{V}$$

$$\dot{U}_2 = 6 \angle -30^\circ \text{V} = (5.2 - j3) \text{V}$$

$$\dot{U}_{12} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 4 + j6.9 + 5.2 - j3 = 9.2 + j3.9 = 10 \angle 23^\circ \text{V}$$

$$u_{12} = 10\sqrt{2} \sin(314t + 23^\circ) \text{V}$$

(2) 用相量图求。

在复平面上,复数用有向线段表示时,复数间的加、减运算满足平行四边形法则,那么正弦量的相量加、减运算就满足该法则,因此还可用作图的方法——相量图法求出 $\dot{U}_{12} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$, 其相量图如图 3-7 所示。根据总电压 \dot{U}_{12} 的长度 U 和它与实轴的夹角 φ_0 可写出 u 的瞬时值表达式:

$$u_{12} = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \varphi_0) = 10\sqrt{2} \sin(314t + 23^\circ) \text{V}$$

为了简便计算,以后在画相量图时,复平面上的“+1”和“+j”以及坐标轴均可省去不画。

应该指出,正弦量是时间的实函数,正弦量的复数形式和相量图表示只是一种数学手段,目的是简化运算,正弦量既不是复数又与空间矢量有本质的区别。

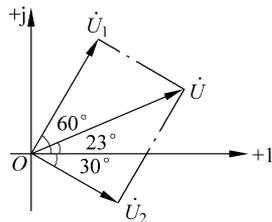


图 3-7 例 3-4 的相量图

3. 基尔霍夫定律的相量形式

(1) 基尔霍夫电流定律(KCL)的相量形式。由基尔霍夫节点电流定律可知,任一时刻,

对正弦电路中任一节点而言,流入(或流出)该节点各支路电流瞬时值的代数和为零,即 $\sum i=0$ 。在正弦电路中,由于各个电流都是同频率的正弦量,可以用相量表示。由正弦量的相量运算,可以推出:任一时刻,对正弦电路中任一节点,流入(或流出)该节点的各支路电流相量的代数和为零,即

$$\sum \dot{i} = 0 \quad (3-11)$$

式(3-11)称为基尔霍夫电流定律的相量形式。

(2) 基尔霍夫电压定律(KVL)的相量形式。根据基尔霍夫回路电压定律可知,对于电路中任一回路而言,沿该回路绕行一周,各段电路电压瞬时值的代数和为零,即 $\sum u=0$,同理可以得出基尔霍夫电压定律(KVL)的相量形式:对于正弦电路中任一回路而言,沿该回路绕行一周,各段电压相量的代数和为零,即

$$\sum \dot{U} = 0 \quad (3-12)$$

式(3-12)称为基尔霍夫电压定律的相量形式。

【思考题】

(1) 什么是正弦交流电的三要素? 某交流电电流为 $i=25\sqrt{2}\sin(314t+30^\circ)$ A, 分别指出三要素各是什么。

(2) 已知一正弦电动势的最大值为 380V, 频率是 50Hz, 初相位为 60° 。试写出该正弦电动势瞬时值的表达式, 画出波形图, 并求 $t=0.1$ s 时的瞬时值。

(3) 最大值为 5A 的交流电流和 4A 的直流电流分别通过阻值相等的两个电阻, 问: 在相同时间内, 哪个电阻发热更多? 为什么?

3.2 单一理想元件正弦交流电路的分析

电阻、电感或电容元件通过串联或并联等连接方式,可以构成不同的正弦交流电路。只有电阻或电感或电容元件组成的电路称为单一参数电路,其他还有电阻、电感、电容串联电路以及电阻、电感、电容并联电路等。

3.2.1 电阻元件及其交流特性

1. 伏安关系

若正弦交流电源中接入的负载为纯电阻元件形成的电路,则称为纯电阻电路,则电路如图 3-8(a)所示。对于电阻来说,若电压与电流的参考方向如图 3-8(a)所示,则电压和电流之间符合欧姆定律 $u=Ri$ 。设 $i=I_m\sin\omega t$, 则

$$u=Ri=RI_m\sin\omega t=U_m\sin\omega t \quad (3-13)$$

由此可见, u 与 i 的关系可表述如下。

(1) u 是与 i 同频同相的正弦电压。

(2) u 与 i 的幅值或有效值间是线性关系,其比值是线性电阻 R , 即

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = R \quad (3-14)$$

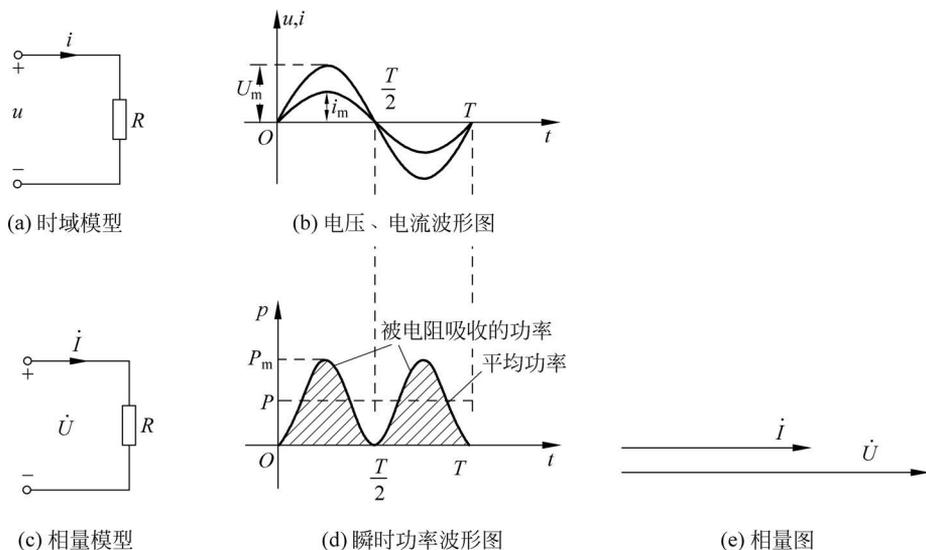


图 3-8 电阻元件的正弦交流电路

(3) u 与 i 的波形如图 3-8(b) 所示

(4) u 与 i 的伏安关系的相量形式

$$\dot{I} = I / 0^\circ \quad (3-15)$$

$$\dot{U} = U / 0^\circ = RI / 0^\circ = R\dot{I} \quad (3-16)$$

式(3-16)同时表示了电压和电流之间的数值与相位关系,称为欧姆定律的相量形式,图 3-8(a)的时域模型可用图 3-8(c)的相量模型来表示,即电压、电流用相量表示,而电阻不变。

(5) u 与 i 的相量图如图 3-8(e) 所示。

2. 功率和能量

(1) 瞬时功率。在任意时刻,电压的瞬时值 u 和电流的瞬时值 i 的乘积,称为该元件的瞬时功率,用小写字母 p 表示,则

$$\begin{aligned} p &= ui = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin \omega t = U_m I_m \sin^2 \omega t \\ &= \sqrt{2}U \cdot \sqrt{2}I \cdot \frac{1 - \cos^2 \omega t}{2} = UI(1 - \cos^2 \omega t) \end{aligned} \quad (3-17)$$

由式(3-17)可见, p 由两部分组成,因为 $-1 \leq \cos \omega t \leq 1$, 所以 $1 - \cos^2 \omega t \geq 0$, 故 $p \geq 0$ 。

说明电阻只要有电流就消耗能量,将电能转化为热能,它是耗能元件,其瞬时功率的波形如图 3-8(d) 所示。

(2) 平均功率。通常用瞬时功率 p 在一个周期内的平均值来衡量交流功率的大小,这个平均值用大写字母 P 表示,即

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T UI(1 - \cos^2 \omega t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R} \quad (3-18)$$

平均功率又称为有功功率,单位为瓦(W)或千瓦(kW)。

式(3-18)与直流电路中电阻功率的表达式相同,只不过式中的 U 、 I 是正弦交流电压和电流的有效值,而不是直流电压、电流。

(3) 电能。电阻从 0 到 t 时间内吸收的能量为

$$W = \int_0^t p \, dt = \int_0^t ui \, dt = \int_0^t Ri^2 \, dt$$

电阻一般把吸收的电能转换为热能消耗掉。

【例 3-5】 如图 3-8(a) 所示的纯电阻电路中, $R=10\Omega$, $u=20\sqrt{2}\sin(\omega t+45^\circ)\text{V}$, 求电流的瞬时值表达式 i 及相量 \dot{I} 和平均功率 P 。

解: 依题意可知 $\dot{U}=20\angle 45^\circ\text{V}$, $R=10\Omega$, 所以

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R} = \frac{20\angle 45^\circ}{10} = 2\angle 45^\circ\text{A}$$

故 $i=2\sqrt{2}\sin(\omega t+45^\circ)\text{A}$, $P=UI=20\times 2=40\text{W}$ 。

3.2.2 电感元件及其交流特性

1. 电压与电流的关系

若正弦交流电源中接入的负载为电感元件形成的电路, 称为纯电感电路, 如图 3-9(a) 所示。对于电感元件来说, 当电压与电流的参考方向如图 3-9(a) 所示, 根据电磁感应定律, 可知电压和电流之间的关系为

$$u = L \frac{di}{dt} \quad (3-19)$$

若设电流 $i = I_m \sin \omega t$ 为参考正弦量, 则

$$\begin{aligned} u &= L \frac{di}{dt} = L \cdot I_m \cdot \omega \cos \omega t = \omega L I_m \sin(\omega t + 90^\circ) \\ &= U_m \sin(\omega t + 90^\circ) \end{aligned} \quad (3-20)$$

由此可知:

- (1) u 是与 i 同频的正弦量。
- (2) 在相位上, u 超前 i 相位角 90° 。
- (3) 在数值的大小上, u 与 i 的有效值(或最大值)间受感抗 ωL 的约束, 表示为

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = \omega L = 2\pi fL \quad (3-21)$$

式(3-21)也称为电感元件的欧姆定律, 称 ωL 为感抗, 用 X_L 表示, 单位为欧姆(Ω)。它体现的是电感对交流电的阻碍作用。感抗 X_L 与电感量 L 和频率 f 成正比。 L 一定时, f 越高, X_L 越大; f 越低, X_L 越小; 当 f 减小为零即为直流时, X_L 等于零, 即电感对直流可视为短路。由此可见, 电感具有“通直流, 阻交流”和“通低频, 阻高频”的作用。

- (4) u 与 i 的波形如图 3-9(b) 所示。
- (5) u 与 i 的伏安关系的相量形式为

$$\begin{aligned} \dot{I} &= I\angle 0^\circ \\ \dot{U} &= U\angle 90^\circ = \omega L I\angle 0^\circ + 90^\circ = \omega L \cdot I\angle 0^\circ \cdot 1\angle 90^\circ = j\omega L \dot{I} = jX_L \dot{I} \end{aligned} \quad (3-22)$$

式(3-22)表示了电感元件欧姆定律的相量形式。

- (6) u 与 i 的相量图如图 3-9(e) 所示。图 3-9(c) 为电感元件的相量模型。

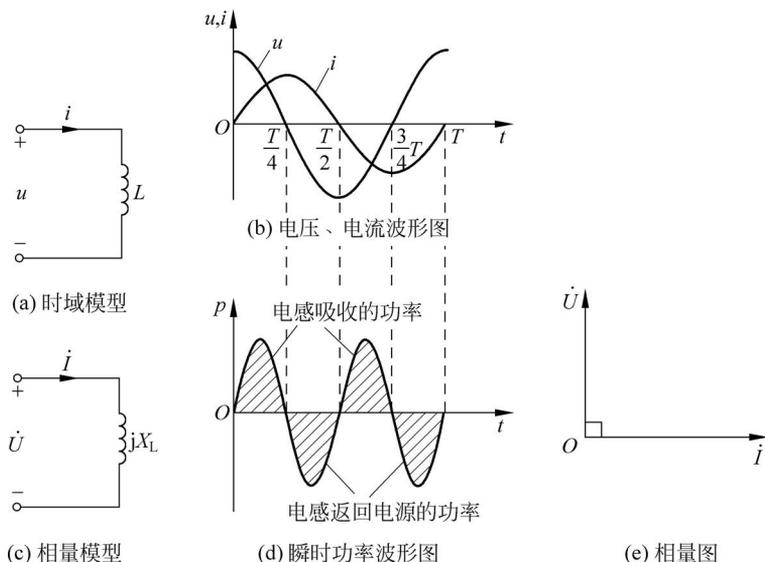


图 3-9 电感元件的正弦交流电路

2. 功率与能量

(1) 瞬时功率。由瞬时功率的定义可得

$$\begin{aligned} p &= ui = U_m \sin(\omega t + 90^\circ) \cdot I_m \sin \omega t = U_m I_m \cos \omega t \sin \omega t \\ &= \sqrt{2}U \cdot \sqrt{2}I \cdot \frac{1}{2} \sin 2\omega t = UI \sin 2\omega t \end{aligned} \quad (3-23)$$

由式(3-23)可见, p 是一个幅值为 UI , 并以 2ω 的角频率随时间而变化的交变量, 其波形如图 3-9(d)所示。

将电压 u 和电流 i 每个周期的变化过程分成 4 个 $1/4$ 周期: 在第一和第三个 $1/4$ 周期, 电感中的电流在增大, 磁场在增强, 电感从电源吸取能量, 并将之储存起来, p 为正。在第二和第四个 $1/4$ 周期, 电感中的电流在减小, 磁场在减弱, 电感将储存的磁场能量释放出来, 归还给电源, p 为负。可以看出理想电感 L 在正弦交流电源作用下, 不断地与电源进行能量交换, 但却不消耗能量。

(2) 平均功率。瞬时功率 p 在一周期内的平均值即为平均功率。

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin 2\omega t dt = 0 \quad (3-24)$$

说明纯电感元件在正弦交流电路中是不消耗电能。

(3) 无功功率。电感本身并未消耗能量, 但要和电源进行能量交换, 是储能元件。为了反映能量交换的规模, 用 u 与 i 的有效值乘积来衡量, 称为电感的无功功率, 用 Q_L 表示, 并记作

$$Q_L = UI = I^2 X_L = \frac{U^2}{X_L} \quad (3-25)$$

为了与有功功率区别, 无功功率的单位为乏(var)或千乏(kvar)。

(4) 电感元件中储存的磁场能量为

$$W_L = \int_0^i Li di = \frac{1}{2} Li^2 \quad (3-26)$$

式(3-26)说明电感元件在某时刻储存的磁场能量,只与该时刻流过的电流的平方成正比,与电压无关。电感元件不消耗能量,是储能元件。

【例 3-6】 把一个电感量 $L = 0.55\text{H}$ 的线圈接到 $u = 220\sqrt{2}\sin(200t + 60^\circ)\text{V}$ 的电源上,其电阻忽略不计,电路如图 3-9(a)所示。求线圈中的电流的瞬时值表达式和无功功率为 Q_L 。

解:依题意 $\dot{U} = 220\angle 60^\circ\text{V}, X_L = \omega L = 200 \times 0.55 = 110(\Omega)$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{jX_L} = \frac{220\angle 60^\circ}{j110} = \frac{220}{110} \frac{\angle 60^\circ}{\angle 90^\circ} = 2\angle -30^\circ(\text{A})$$

故 $i = 2\sqrt{2}\sin(200t - 30^\circ)\text{A}, Q_L = UI = 220 \times 2 = 440\text{var}$ 。

3.2.3 电容元件及其交流特性

1. 伏安关系

若正弦交流电源中接入的负载为纯电容元件形成的电路,则称为电容电路,如图 3-10(a)所示,电容上的电压与电流取关联参考方向,有

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} \quad (3-27)$$

式(3-27)表明,电容元件上通过的电流,与元件两端的电压相对时间的变化率成正比。电压变化越快,电流越大。当电容原件两端加恒定电压时,因 $du/dt = 0$,所以 $i = 0$,这时电容元件相当于开路,故电容元件有隔直流的作用。

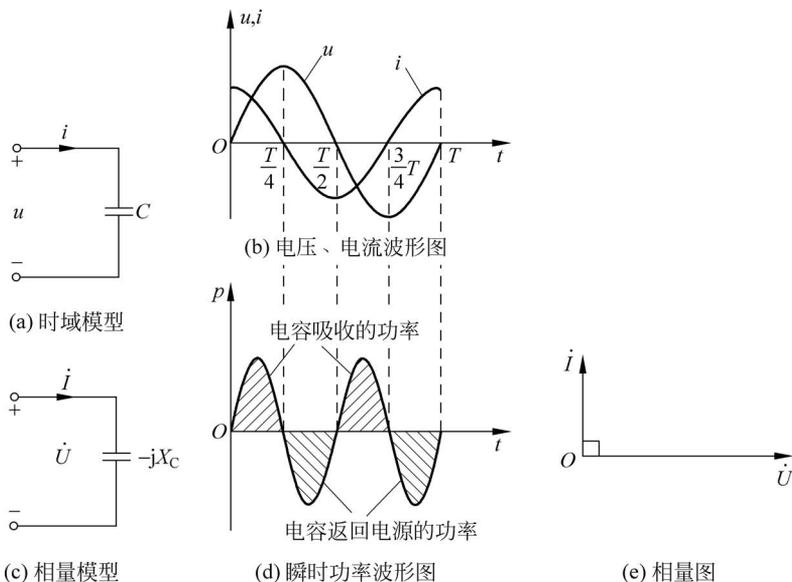


图 3-10 电容元件的正弦交流电路

若设电压 $u = U_m \sin \omega t$ 为参考正弦量,则

$$i = C \frac{du}{dt} = C \cdot U_m \cdot \omega \cos \omega t = \omega C U_m \sin(\omega t + 90^\circ) = I_m \sin(\omega t + 90^\circ) \quad (3-28)$$

由此可知:

- (1) u 是与 i 同频的正弦量。
 (2) 在相位上, i 超前 u 相位角 90° 。
 (3) 在数值的大小上, u 与 i 的有效值(或最大值)受容抗 $1/(\omega C)$ 的约束, 表示为

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \quad (3-29)$$

式(3-29)也称为电容元件的欧姆定律, 称 $1/(\omega C)$ 为容抗, 用 X_C 表示, 单位为欧姆(Ω)。它体现的是电容对交流电的阻碍作用。容抗 X_C 与电容量 C 和频率 f 成反比。 C 一定时, f 越高, X_C 越小; f 越低, X_C 越大; 当 f 减小为零即为直流时, X_C 趋于无穷大, 即电容对直流可视为断路。由此可见, 电容具有“通交流, 隔直流”和“通高频, 阻低频”的作用。

(4) u 与 i 的波形如图 3-10(b)所示。

(5) u 与 i 的伏安关系的相量形式为

$$\begin{aligned} \dot{I} &= I \angle 90^\circ \\ \dot{U} &= U \angle 0^\circ = \frac{1}{\omega C} I \angle 90^\circ - 90^\circ = \frac{1}{\omega C} \cdot I \angle 90^\circ \cdot 1 \angle -90^\circ = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I} = -j X_C \dot{I} \end{aligned} \quad (3-30)$$

(6) u 与 i 的相量图如图 3-10(e)所示。图 3-10(c)为电容元件的相量模型。

2. 功率和储能

(1) 瞬时功率。由瞬时功率的定义可得

$$p = ui = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin(\omega t + 90^\circ) = UI \sin 2\omega t \quad (3-31)$$

由式(3-31)可见, p 是一个幅值为 UI , 并以 2ω 的角频率随时间而变化的交变量, 其波形如图 3-10(d)所示。

将电压 u 和电流 i 每周期的变化过程分成 4 个 $1/4$ 周期: 在第一和第三个 $1/4$ 周期, 电容上的电压增大, 电场增强, 电容充电, 电容从电源吸收能量, p 为正; 在第二和第四个 $1/4$ 周期, 电容上的电压减小, 电场减弱, 电容放电, 将储存的能量归还给电源, p 为负。可以看出理想电容 C 在正弦交流电源作用下, 不断地与电源进行能量交换, 但却不消耗能量。

(2) 平均功率。瞬时功率 p 在一周期内的平均值即为平均功率

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin 2\omega t dt = 0 \quad (3-32)$$

电容本身并未消耗能量, 但要和电源进行能量交换, 是储能元件。

(3) 无功功率。为了反映能量交换的规模, 用 u 与 i 的有效值乘积来衡量, 称为电容的无功功率, 用 Q_C 表示, 并记作

$$Q_C = UI = I^2 X_C = \frac{U^2}{X_C} \quad (3-33)$$

其单位为乏(var)或千乏(kvar)。

(4) 储存的电场能量为

$$W_C = \int_0^u C u du = \frac{1}{2} C u^2 \quad (3-34)$$

式(3-34)说明, 电容元件在某时刻储存的电场能量与元件在该时刻所承受的电压的平方成正比, 与电流无关, 电容元件不消耗能量, 是储能元件。

储能元件(L 或 C), 虽本身不消耗能量, 但需占用电源容量并与之进行能量交换, 对电

源是一种负担。

【例 3-7】 把一个电容量 $C = 4.75\mu\text{F}$ 电容器接到交流电源上,电容器的端电压 $u = 220\sqrt{2}\sin 314t\text{V}$,电路如图 3-10(a)所示。试求:

- (1) 容抗 X_C ;
- (2) 电容通过的电流有效值 I_C ;
- (3) 电容中电流的瞬时值 i_C ;
- (4) 电容的有功功率 P_C 和无功功率 Q_C 。

解: (1) 容抗:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \times 4.75 \times 10^{-6}} = 670(\Omega)$$

(2) 电流有效值:

$$I_C = \frac{U}{X_C} = \frac{220}{670} = 0.328(\text{A})$$

(3) 电流瞬时值:

$$i_C = 0.328\sqrt{2}\sin(314t + 90^\circ)\text{A}$$

(4) 有功功率:

$$P_C = 0\text{W}$$

无功功率:

$$Q_C = UI_C = 220 \times 0.328 = 72.25(\text{var})$$

【思考题】

(1) 把一个 $R = 10\Omega$ 电阻元件接到 $f = 50\text{Hz}$, 电压有效值 $U = 10\text{V}$ 的交流电源上, 求电阻中电流的瞬时值 i 的表达式、相量式。

(2) 把一个 $L = 200\text{mH}$ 的电感元件接到 $u = 100\sqrt{2}\sin(314t + 45^\circ)\text{V}$ 的电源上, 求电感中的电流 i 的瞬时表达式、相量式。

(3) 流过 0.5F 电容器上的电流是 $i_C = \sqrt{2}\sin(100t - 30^\circ)\text{A}$, 求电容的端电压 u 的表达式、相量式。

3.3 RLC 串联交流电路和串联谐振

RLC 串联电路是指由电阻 R 、电感 L 和电容 C 串联而成的电路, 它是广泛应用的一种交流电路。本节探讨伏安关系、功率以及谐振等问题。

3.3.1 RLC 串联电路的伏安关系和阻抗

RLC 串联电路如图 3-11(a)所示。因为是串联电路, 所以通过各元件的电流相同, 设电流 $i = I_m \sin \omega t$ 。电流与各个电压的参考方向如图 3-11 所示。

1. RLC 串联电路的伏安关系

根据基尔霍夫电压定律可知

$$u = u_R + u_L + u_C = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \quad (3-35)$$

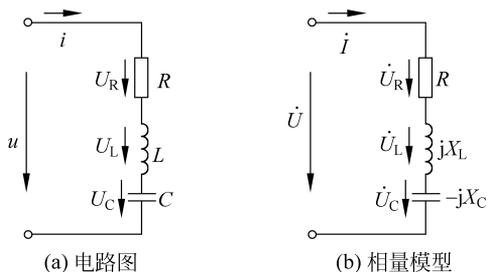


图 3-11 RLC 串联的正弦交流电路

式中,既有求导又有积分,比较复杂,用相量进行分析计算更为简便。

各元件上电压和电流之间的关系用相量表示分别为

$$\dot{U}_R = R\dot{I}, \quad \dot{U}_L = jX_L\dot{I}, \quad \dot{U}_C = -jX_C\dot{I}$$

原电路对应的相量模型如图 3-11(b)所示,总电压相量等于串联电路各元器件上电压相量之和,即

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = R\dot{I} + jX_L\dot{I} - jX_C\dot{I} = \dot{I}[R + j(X_L - X_C)] \quad (3-36)$$

令 $X = X_L - X_C$,称为电抗, $Z = R + j(X_L - X_C) = R + jX = |Z| \angle \varphi$,称为串联电路的复阻抗,单位为欧姆(Ω)。

由此可知, R 、 L 、 C 串联电路总的复阻抗应为

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R + j(X_L - X_C) = |Z| e^{j\varphi} = \frac{U}{I} \angle \varphi = \frac{U}{I} \angle \varphi_u - \varphi_i \quad (3-37)$$

复阻抗的模为

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \frac{U}{I} \quad (3-38a)$$

它体现了电压 u 和电流 i 的有效值之间的约束关系。

复阻抗的幅角为

$$\varphi = \arctan \frac{X}{R} = \arctan \frac{X_L - X_C}{R} = \varphi_u - \varphi_i \quad (3-38b)$$

表示了电压 u 和电流 i 的相位关系。

由此可知,复阻抗的模 $|Z|$ 、实部 R 、虚部电抗 X 三者构成一直角三角形,称为阻抗三角形。

- (1) 若 $X_L > X_C$,则 $\varphi = \varphi_u - \varphi_i > 0$,此时电压超前电流 φ 角,电路呈电感性;
- (2) 若 $X_L < X_C$,则 $\varphi = \varphi_u - \varphi_i < 0$,此时电压滞后电流 φ 角,电路呈电容性;
- (3) 若 $X_L = X_C$,则 $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0$,此时电压和电流同相,电路呈纯电阻性,这种情况表明电路发生了串联谐振。

可见,采用相量的复数运算法对 RLC 串联电路进行分析计算时,可同时确定电压和电流之间量值和相位上的关系并判断该电路的性质。

2. RLC 串联电路的相量图分析法

对于图 3-11 所示的 RLC 电路,以电流 \dot{I} 作为参考相量,电感上的电压 $\dot{U}_L = jX_L\dot{I}$,超

前于 \dot{i} 90° , 其长度为 $U_L = X_L I$; 电容上的电压 $\dot{U}_C = -jX_C \dot{i}$, 落后于 \dot{i} 90° , 其长度为 $U_C = X_C I$; 电阻上的电压 $\dot{U}_R = R\dot{i}$, 与 \dot{i} 同相, 其长度为 $U_R = RI$ 。总电压 $\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_C + \dot{U}_L$, 相量图如图 3-12 所示。

从相量图可以看出, RLC 串联电路总电压相量 \dot{U} 与串联电路各元件上电压相量 \dot{U}_R 和 $\dot{U}_X = \dot{U}_L + \dot{U}_C$ 构成一直角三角形, 称为电压三角形, 如图 3-12 所示。利用此三角形可知

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{U_R^2 + U_X^2} = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{(RI)^2 + (X_L I - X_C I)^2} \\ &= I \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = I |Z| \end{aligned} \quad (3-39)$$

这是电压和电流的大小关系。

$$\varphi = \arctan \frac{U_X}{U_R} = \arctan \frac{U_L - U_C}{U_R} = \arctan \frac{X_L - X_C}{R} \quad (3-40)$$

这是电压和电流的相位关系。显然, 电压三角形中电压和电流的相位差等于阻抗三角形中的阻抗角。由此可见, RLC 串联电路的电压和电流的关系完全取决于电路各元件的参数。

3. 阻抗的串联

工程实际中使用的电路模型有时是多个阻抗的串联电路, 对于多个阻抗的串联电路可以用一个等效阻抗来代替。依据基尔霍夫电压定律的相量形式可以得出: n 个阻抗 Z_1 到 Z_n 串联的等效阻抗 Z 等于各个串联阻抗之和, 即

$$Z = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n = \sum_{k=1}^n Z_k = |Z| \angle \varphi \quad (3-41)$$

注意: 一般情况下, $|Z| \neq |Z_1| + |Z_2| + \cdots + |Z_n|$ 。

* 3.3.2 RLC 串联电路的功率分析

设电流 $i = I_m \sin \omega t$, 且 u 比 i 超前 φ , 则电压 $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ 。

1. 瞬时功率

$$\begin{aligned} p &= ui = U_m \sin(\omega t + \varphi) \cdot I_m \sin \omega t = U_m I_m \sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t \\ &= \sqrt{2} U \cdot \sqrt{2} I \cdot \frac{1}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)] = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (3-42)$$

从式(3-42)可以看出, p 是一个常量与一个正弦量的叠加。 $UI \cos \varphi$ 是一个与时间无关的常量, 并且恒为正值; $UI \cos(2\omega t + \varphi)$ 为交流分量, 其频率为电源频率的两倍。

2. 平均功率

平均功率代表电路实际消耗的功率, 因此又称为有功功率, 它是指电阻消耗的功率。由平均功率定义有

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T [UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi)] dt = UI \cos \varphi \quad (3-43)$$

从式(3-43)可以看出, 有功功率不仅与电压、电流的有效值有关, 而且与 $\cos \varphi$ 有关, 这是交流电路和直流电路的显著差别, 这主要是由于存在储能元件产生了阻抗角。 $\cos \varphi$ 称为

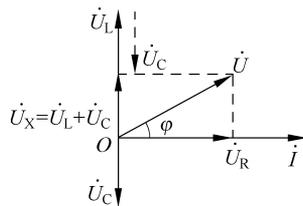


图 3-12 RLC 串联电路的相量图

功率因数。 φ 为功率因数角。一般情况下 $|\varphi| \leq 90^\circ$, 所以 $0 \leq \cos\varphi \leq 1$ 。平均功率的单位为瓦(W)或千瓦(kW)。

由图 3-12 所示的电压三角形可知

$$U_R = U \cos\varphi = RI$$

平均功率还可表示为

$$P = U_R I = I^2 R = UI \cos\varphi$$

对于纯电阻网络,电压和电流同相位, $\cos\varphi = 1$, $P = UI$, 即电阻元件是耗能元件。对于纯电感或纯电容网络,电压和电流的相位差为 $+90^\circ$ 或 -90° , $\cos\varphi = 0$, $P = 0$, 即电感和电容元件不消耗能量。

3. 无功功率

电路中电感和电容都要与电源之间进行能量交换,因此相应的无功功率为这两个元件共同作用形成的,考虑到 \dot{U}_L 和 \dot{U}_C 相位相反,则

$$Q = Q_L - Q_C = (U_L - U_C)I = (X_L - X_C)I^2 = UI \sin\varphi \quad (3-44)$$

无功功率是可正可负的代数量,在电压、电流关联参考方向下,对于电感性电路,由于 $\varphi > 0$, 因此由式(3-44)计算的无功功率为正值, $Q > 0$, 此时为电感性电路。对于电容性电路,由于 $\varphi < 0$, 因此由式(3-46)计算的无功功率为负值, $Q < 0$, 此时为电容性电路。无功功率表示的是电路交换能量的最大速率,单位为乏(var)。

4. 视在功率

电压的有效值 U 和电流的有效值 I 的乘积称为视在功率,用 S 表示,即

$$S = UI = I^2 |Z| = \frac{U^2}{|Z|} \quad (3-45)$$

视在功率单位是伏安(VA)或千伏安(kVA),以区别平均功率和无功功率。

视在功率具有实际意义,如一般电力变压器名牌上都会标出其视在功率,视在功率 $U_N I_N$ 表示了该变压器可能提供的最大有功功率,因此也称为该变压器的容量。

5. 功率三角形

由式 $P = UI \cos\varphi$ 、 $Q = UI \sin\varphi$ 、 $S = UI$ 可以看出,有功功率、无功功率与视在功率之间的关系可以用一个直角三角形表示,把此直角三角形称为功率三角形,有

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (3-46)$$

在 RLC 串联电路中,如果将电压三角形的 3 个边同乘以电流的有效值,便可以得到功率三角形。功率三角形与电压三角形和阻抗三角形为 3 个相似三角形。

6. 功率因数

功率因数 $\cos\varphi$, 其大小等于有功功率与视在功率的比值,在电工技术中,一般用 λ 表示,即

$$\lambda = \cos\varphi = \frac{P}{S} \quad (3-47)$$

【例 3-8】 在图 3-11 所示的 RLC 串联电路中,已知 $R = 30\Omega$, $X_L = 120\Omega$, $X_C = 80\Omega$, $u = 220\sqrt{2} \sin(314t + 30^\circ) \text{V}$, 试求:

- ① 电路的电流 i ;
- ② 各元件电压 u_R 、 u_L 、 u_C , 画出相量图;

③ P 、 Q 、 S 。

解：依题意 $\dot{U} = 220 \angle 30^\circ \text{ V}$

复阻抗 $Z = R + j(X_L - X_C) = 30 + j(120 - 80) = 50 \angle 53.1^\circ (\Omega)$

① 电流：

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = 4.4 \angle -23.1^\circ (\text{A})$$

所以瞬时表达式为

$$i = 4.4\sqrt{2} \sin(314t - 23.1^\circ) \text{ A}$$

② 电阻上的电压与流过的电流同相位，则

$$\dot{U}_R = \dot{I}R = 30 \times 4.4 \angle -23.1^\circ = 132 \angle -23.1^\circ (\text{V})$$

$$u_R = 132\sqrt{2} \sin(314t - 23.1^\circ) \text{ V}$$

电感上电压超前流过电流 90° ，则

$$\dot{U}_L = j\dot{I}X_L = 120 \times 4.4 \angle -23.1^\circ + 90^\circ = 528 \angle 66.9^\circ (\text{V})$$

$$u_L = 528\sqrt{2} \sin(314t + 66.9^\circ) \text{ V}$$

电容上电压落后流过电流 90° ，则

$$\dot{U}_C = -j\dot{I}X_C = 80 \times 4.4 \angle -23.1^\circ - 90^\circ = 352 \angle -113.1^\circ (\text{V})$$

$$u_C = 352\sqrt{2} \sin(314t - 113.1^\circ) \text{ V}$$

其相量图如图 3-13 所示。

③ 有功功率、无功功率、视在功率分别为

$$P = UI \cos \varphi = 220 \times 4.4 \cos 53^\circ = 580.8 (\text{W})$$

$$Q = UI \sin \varphi = 220 \times 4.4 \sin 53^\circ = 774.4 (\text{var})$$

$$S = UI = 220 \times 4.4 = 968 (\text{V} \cdot \text{A})$$

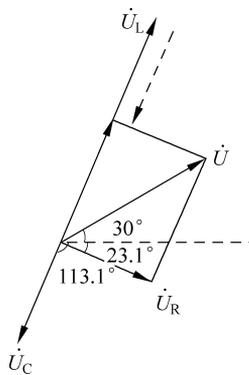


图 3-13 例 3-8 相量图

* 3.3.3 RLC 串联电路的谐振问题

在交流电路中，当电压和电流同相，即电路的性质为电阻性时，称此电路发生了谐振。谐振现象在工程上既有可利用的一面，又有造成危害的一面，因此要了解产生谐振的条件及谐振电路的特点。谐振电路有串联谐振、并联谐振以及耦合谐振等类型。下面首先介绍串联谐振。

1. 串联谐振条件和谐振频率

RLC 串联电路如图 3-11 所示，根据谐振的概念可知，谐振时该电路的复阻抗为

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

其虚部应为零，即

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad (3-48)$$

这就是 RLC 串联电路的谐振条件。由此式可得谐振时的谐振角频率 ω_0 和谐振频率 f_0 （串联谐振状态下的各量加注下标 0 表示）：

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3-49)$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (3-50)$$

2. 串联谐振电路的特点

(1) RLC 串联电路的阻抗最小,且为纯阻性:

$$|Z_0| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R \quad (3-51)$$

(2) 谐振电流最大:

$$I_0 = \frac{U}{|Z_0|} = \frac{U}{R} \quad (3-52)$$

(3) 谐振时,因 $X_{L_0} = X_{C_0}$,使 $\dot{U}_{L_0} = -\dot{U}_{C_0}$,即电感和电容上的电压相量等值反相;电路的总电压等于电阻上的电压,即 $\dot{U} = \dot{U}_R$,如图 3-14 所示。

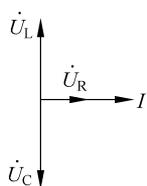


图 3-14 串联谐振相量图

串联谐振时,电感(或电容)上的电压与电阻上的电压的比值,通常用 Q 表示,即

$$Q = \frac{U_{L_0}}{U_R} = \frac{U_{C_0}}{U_R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (3-53)$$

Q 称为电路的品质因素,只和电路的参数 R 、 L 、 C 有关。一般 Q 远远大于 1,在电子线路中, Q 值一般在 $10 \sim 500$ 。因此,串联谐振时,电感(或电容)上的电压远大于电路的总电压(或电阻上的电压),即

$$U_{L_0} = U_{C_0} = QU \quad (3-54)$$

故串联谐振又称为电压谐振。串联谐振在无线电中应用十分广泛。如调谐选频电路,可以通过调节 C (或 L)的参数,使电路谐振于某一频率,使这一频率的信号被接收,其他信号被抑制。但电气工程上,一般要防止产生电压谐振,因为电压谐振时产生的高电压和大电流会损坏电气设备。

【例 3-9】 在 RLC 串联谐振电路中, $L = 2\text{mH}$, $C = 5\mu\text{F}$,品质因数 $Q = 100$,交流电压的有效值为 $U = 6\text{V}$ 。试求:(1) f_0 ; (2) I_0 ; (3) U_{L_0} 、 U_{C_0} 。

$$\text{解: (1) } f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2 \times 3.14 \times \sqrt{2 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^{-6}}} \approx 1.59(\text{kHz})$$

$$(2) Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-6}}} = \frac{20}{R} = 100$$

所以 $R = 0.2\Omega$

$$\text{故 } I_0 = \frac{U}{R} = \frac{6}{0.2} = 30(\text{A})$$

$$(3) U_{L_0} = U_{C_0} = QU = 100 \times 6 = 600(\text{V})$$

【思考题】

(1) 已知无源二端口网络的电压和电流分别为 $\dot{U} = 30/45^\circ \text{V}$, $\dot{I} = -3/-165^\circ \text{A}$,求该网络的复阻抗 Z 、该网络的性质、平均功率 P 、无功功率 Q 、视在功率 S 。

(2) 处于串联谐振状态的 RLC 串联电路中,若增加电容 C 的值,则电路将呈现什么性

质? 若增加电感元件的 L 值, 又将呈现什么性质?

* 3.4 RLC 并联交流电路和并联谐振

3.4.1 RLC 并联电路的伏安关系和导纳

1. RLC 并联电路的伏安关系

电阻 R 、电感 L 和电容 C 并联而成的电路就是 RLC 并联电路, 如图 3-15 所示。由于并联电路各并联支路的电压相同, 因此设电压为参考量, 即 $\dot{U} = U/0^\circ$, 则

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}}{R}; \quad \dot{I}_L = \frac{\dot{U}}{jX_L}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{-jX_C}$$

根据基尔霍夫电流定律, 有

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C = \frac{1}{R}\dot{U} + \frac{1}{jX_L}\dot{U} + \frac{1}{-jX_C}\dot{U} = \left[\frac{1}{R} + j\left(-\frac{1}{X_L} + \frac{1}{X_C}\right) \right] \dot{U} \quad (3-55)$$

相量图如图 3-16 所示。由相量图可知, \dot{I} 、 \dot{I}_R 、 $(\dot{I}_L + \dot{I}_C)$ 构成一直角三角形, 称为电流三角形。总电流的有效值为

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2} = \sqrt{\left(\frac{U}{R}\right)^2 + \left(\frac{U}{X_C} - \frac{U}{X_L}\right)^2} = U \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2} \quad (3-56)$$

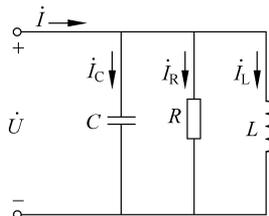


图 3-15 RLC 并联电路

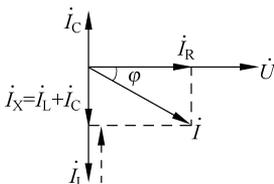


图 3-16 RLC 并联电路的相量图

总电流与电压的相位关系为

$$\varphi = \arctan \frac{I_C - I_L}{I_R} = \arctan \frac{\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}}{\frac{1}{R}} \quad (3-57)$$

通过以上分析, 可以得出 RLC 并联电路具有以下特点。

(1) 当 $\frac{1}{X_L} < \frac{1}{X_C}$ 即 $X_L > X_C$ 时, $I_L < I_C$, 则 $\varphi > 0$, 总电流超前于总电压, 电路呈电容性, 电路中的电容作用大于电感作用, 这种电路称为电容性电路。

(2) 当 $\frac{1}{X_L} > \frac{1}{X_C}$ 即 $X_L < X_C$ 时, $I_L > I_C$, 则 $\varphi < 0$, 总电流滞后于总电压, 电路呈电感性 (图 3-16 所示为此种情况), 电路中的电感作用大于电容作用, 这种电路称为电感性电路。

(3) 当 $\frac{1}{X_L} = \frac{1}{X_C}$ 即 $X_L = X_C$ 时, $I_L = I_C$, $\dot{I} = \dot{I}_R$, 则 $\varphi = 0$, 总电流与总电压同相, 电路呈电阻性, 产生并联谐振现象。

2. RLC 并联电路的导纳

为了分析方便,引入导纳概念,定义电导 $G=1/R$,感纳 $B_L=1/X_L$,容纳 $B_C=1/X_C$,则式(3-55)可以表示为式(3-58)

$$\dot{I}=\dot{I}_G+\dot{I}_L+\dot{I}_C=[G+j(B_C-B_L)]\dot{U}=(G+jB)\dot{U}=Y\dot{U} \quad (3-58)$$

式(3-58)中, $B=B_C-B_L$ 称为电纳, Y 称为导纳,电导、感纳、容纳、导纳的单位为西门子(S),同阻抗一样,导纳也是复数,但它不代表正弦量,不是相量。

由式(3-58)可得

$$|Y|=\sqrt{G^2+B^2}=\sqrt{G^2+(B_C-B_L)^2}$$

$$\varphi=\arctan\frac{B_C-B_L}{G}$$

式中, $|Y|$ 为导纳的模, φ 为导纳角,导纳角 φ 表示电流与电压的相位差。

导纳既表示电路中电压和总电流的有效值的关系,又表示电压和总电流的相位关系,因此RLC并联电路可用导纳 Y 来等效,与阻抗三角形一样,同样也可得到导纳三角形。导纳的模 $|Y|$ 、导纳角 φ 与电路参数及频率有关,而与电压、电流无关。

一般情况下各阻抗并联的电路,采用等效导纳方法比较方便。多个并联的导纳可以用一个等效导纳来替代,依据基尔霍夫电压定律的相量形式可以得出: n 个导纳($Y_1\sim Y_n$)并联的等效导纳等于各个导纳之和,即

$$Y=Y_1+Y_2+\cdots+Y_n$$

需要注意的是:一般情况下, $|Y|\neq|Y_1|+|Y_2|+\cdots+|Y_n|$ 。

导纳和阻抗互为倒数,利用复数知识很容易相互转换,分析实际电路采用方法以方便性确定。RLC并联电路的功率分析与RLC串联电路的功率分析完全相同,前面所讲功率分析普遍适应于交流电路。

3.4.2 RLC 并联电路的谐振问题

当电压和电流同相,即电路的性质为电阻性时,并联电路则发生谐振。

1. 谐振条件和谐振频率

在实际工程电路中,最常见的、应用最广泛的是由电感线圈和电容器并联而成的谐振电路,如图3-17所示。电路的等效阻抗 Z 为

$$Z=\frac{(R+j\omega L)\frac{1}{j\omega C}}{(R+j\omega L)+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{R+j\omega L}{1+j\omega RC-\omega^2 LC} \quad (3-59)$$

通常电感线圈的电阻很小,所以一般在谐振时 $\omega L\gg R$,则上式可表示为

$$Z\approx\frac{j\omega L}{1+j\omega RC-\omega^2 LC}=\frac{1}{\frac{RC}{L}+j\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)} \quad (3-60)$$

谐振的条件是端口的电压与电流同相位,即复阻抗 Z 的虚部为零,由此可得并联谐振的条件与谐振的频率。

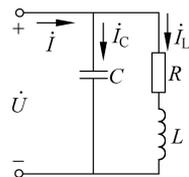


图 3-17 RLC 并联电路

谐振的条件为

$$\omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} \quad (3-61)$$

由此可得谐振频率(与串联谐振近似相等)

$$f_0 \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (3-62)$$

2. 并联谐振电路的特点

(1) 电路的阻抗达到最大值,且呈电阻性:

$$|Z_0| = \frac{L}{RC} \quad (3-63)$$

(2) 在电源电压一定的情况下,电流为最小值:

$$I_0 = \frac{U}{|Z_0|} = \frac{RC}{L}U \quad (3-64)$$

(3) 谐振时,支路电流为总电流的 Q 倍,即 $I_L = I_C = QI$ 。其中, Q 是品质因数, $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$, 所以各支路电流会超过总电流,因此并联谐振又称为电流谐振。

RLC 并联谐振电路在无线电技术中有着广泛的应用,是各种谐振器和滤波器的重要组成部分。

【思考题】

- (1) 并联谐振电路有什么特点?
- (2) 处于谐振状态的 RLC 并联电路中,若减小其电感 L 的值,则电路将呈现什么性质?
- (3) 举例说明并联谐振电路的应用。

3.5 功率因数的提高

3.5.1 功率因数的意义

功率因数 $\cos\varphi$ 是用电设备的一个重要技术指标,其大小等于有功功率与视在功率的比值,一般用 λ 表示。根据 $P = UI\cos\varphi$ 可知,在正弦交流电路中,平均功率 P 在一般情况下并不等于视在功率 UI ,除纯电阻性电路外,一般 P 小于 UI 。

电路的功率因数 $\cos\varphi$ 由负载中包含的电阻与电抗的相对大小决定:对纯电阻负载电路来说,电压和电流同相, $\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$; 纯电抗负载 $\varphi = \pm 90^\circ$, $\cos\varphi = 0$; 一般负载的电压和电流有相位差 φ , $\cos\varphi$ 在 $0 \sim 1$, 而且多为感性负载。例如,常用的交流电动机便是一个感性负载,满载时功率因数为 $0.7 \sim 0.9$, 而空载或轻载时功率因数较低。

$\cos\varphi$ 是反映电源供给负载的电能利用率高低的物理量,功率因数过低,会使电源的利用率降低,同时输电线路上的功率损失与电压损失增加,因此必须提高功率因数。下面简单说明。

1. 提高功率因数有利于充分发挥电源的潜力

交流电源设备(发电机、变压器等)一般是根据额定电压和额定电流来进行设计制造和使用的,其额定容量为 $S_N = U_N I_N$, 它表明电源可向负载提供的最大有功功率,而实际向负

载提供的有功功率 $P = S_N \cos\varphi$, 显然功率因数 $\cos\varphi$ 越大, 负载吸收的功率越多, 电源提供的有功功率也越多。例如, 额定容量为 $1000\text{kV} \cdot \text{A}$ 的电源, 若 $\cos\varphi = 0.3$, 则 $P = 300\text{kW}$; 若 $\cos\varphi = 0.96$, 则 $P = 960\text{kW}$ 。由此可见, 要充分发挥电源的潜力, 必须提高功率因数。因此, 提高负载的功率因数, 可以提高电源设备的利用率。

2. 提高功率因数有利于减小输电线路上的功率及电压损耗

发电设备和变电设备通过输电线以电流的形式把电能输送给负载时, 在输电线路必定有功功率损耗和电压损耗。功率损耗会使输电效率降低, 电压损耗严重时会使电器不能正常工作, 所以应尽量减小这两种损耗。在一定的电压下输送一定的功率时, 输电电流 I 与功率因数成反比 ($I = P / U \cos\varphi$), 可见 $\cos\varphi$ 越小, 则线路中电流 I 就越大, 在输电线路和设备上的功率损耗 $P_1 = I^2 R_1$ 和线路的压降 $U_1 = IR_1$ 就越大 (R_1 为实际输电线路的电阻), 反之, 提高功率因数会大降低线路损耗, 从而提高了供电质量。

因此, 提高功率因数一方面可以提高电源的利用率, 另一方面可以降低输电线路上的功率损失与电压损失, 或在相同损耗的情况下, 节约输电线材料, 具有很大的经济意义。我国供电规则中要求: 高压供电企业的功率因数不低于 0.95, 其他单位不低于 0.9。

3.5.2 提高功率因数的方法

提高功率因数应遵循两条原则:

(1) 不能影响用电设备正常工作, 即必须保证接在线路上的用电设备的端电压、电流及功率不变;

(2) 尽量不增加额外的电能损耗。

工业生产中的用电设备多为电感性负载, 感性负载是造成功率因数低下的根本原因。要提高功率因数, 最常用的方法是在电感性负载的两端并联合适的电容器。这种方法不会改变负载原有的工作状态, 但负载的无功功率从电容支路得到了补偿, 从而提高了功率因数。

感性负载和电容器的并联电路如图 3-18(a) 所示, 图中 R 、 L 支路表示电感性负载, C 是补偿电容, $\cos\varphi_1$ 为感性负载功率因数, $\cos\varphi_2$ 为并联电容后电路总的功率因数。

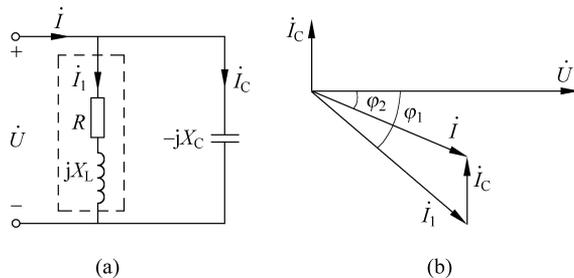


图 3-18 提高功率因数的措施

假设未并联电容时, 电感性负载两端的电压为 \dot{U} , 流经电感性负载的电流为 \dot{I}_1 , 电感性负载的功率因数为 $\cos\varphi_1$, 并联电容后总电流为 \dot{I} , 功率因数为 $\cos\varphi_2$, 电容支路的电流 \dot{I}_C , 则 $\dot{I}_C = \dot{I} - \dot{I}_1$, 相量图如图 3-18(b) 所示。从相量图可以看出 $\cos\varphi_2 > \cos\varphi_1$ 功率因数得到了提高。

下面对补偿电容进行计算。根据电流三角形得

$$I_C = I_1 \sin\varphi_1 - I \sin\varphi_2 \quad (3-65)$$

由于电容不消耗功率,因此并联前后有功功率相等, $P = UI_1 \cos\varphi_1 = UI \cos\varphi_2$, 则 $I_1 =$

$\frac{P}{U \cos\varphi_1}$, $I = \frac{P}{U \cos\varphi_2}$, 代入式(3-65)得

$$I_C = \frac{P}{U \cos\varphi_1} \sin\varphi_1 - \frac{P}{U \cos\varphi_2} \sin\varphi_2 = \frac{P}{U} (\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2) \quad (3-66)$$

根据电容的伏安关系

$$I_C = \frac{U}{X_C} = U\omega C \quad (3-67)$$

综合式(3-66)、式(3-67)可得所需补偿电容器的容量为

$$C = \frac{P}{\omega U^2} (\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2) \quad (3-68)$$

式中, P 是电感性负载的有功功率, U 是电感性负载的端电压, φ_1 和 φ_2 分别是并联电容前和并联后的功率因数角。

需要注意的是: 提高功率因数, 是指提高电源或整个电路的功率因数, 而不是指提高电感性负载的功率因数。电容的作用: 一方面补偿了一部分电感性负载所需要的无功功率, 从而使负载与电源间的能量交换减少, 提高了电源设备的利用率; 另一方面减小了线路总电流, 降低了功率消耗和压降。 $C \uparrow \rightarrow \varphi_2 \downarrow \rightarrow \cos\varphi_2 \uparrow \rightarrow I \downarrow$, C 越大, 补偿的效果越明显。一般功率因数补偿到接近 1 即可。

【例 3-10】 在 220V、50Hz 的线路上接有功率为 40W、电流为 0.364A 的日光灯, 现欲将电路的功率因数提高到 0.9, 应并联多大的电容器? 此时电路的总电流是多少?

解: 依题意 $P = 40\text{W}$, $U = 220\text{V}$, $I_1 = 0.364\text{A}$, 所以

$$\cos\varphi_1 = \frac{P}{UI_1} = \frac{40}{220 \times 0.364} = 0.5$$

$$\varphi_1 = \arccos 0.5 = 60^\circ, \quad \tan\varphi_1 = \tan 60^\circ = \sqrt{3} = 1.732$$

$$\cos\varphi_2 = 0.9, \quad \varphi_2 = \arccos 0.9 = 25.8^\circ, \quad \tan\varphi_2 = \tan 25.8^\circ = 0.483$$

$$\text{所以 } C = \frac{P}{\omega U^2} (\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2) = \frac{40}{2 \times 3.14 \times 50 \times 220^2} \times (1.732 - 0.483)$$

$$\approx 3.3 \times 10^{-6} (\text{F}) = 3.3 \mu\text{F}$$

$$I = \frac{P}{U \cos\varphi_2} = \frac{40}{220 \times 0.9} \approx 0.2 (\text{A})$$

【思考题】

(1) 已知某感性负载的阻抗 $|Z| = 7.07\Omega$, $R = 5\Omega$, 则其功率因数为多少? 当接入 $u = 311\sin 314t \text{V}$ 的电源中, 消耗的有功功率是多少?

(2) 当电路呈感性负载[即 $(X_L - X_C) > 0$]时, 如何提高功率因数? 当电路呈容性负载[即 $(X_L - X_C) < 0$]时, 如何提高功率因数?

习题

3-1 已知某正弦交流电流的最大值是 1A, 频率为 50Hz, 设初相位为 60° , 试求该电流的瞬时表达式 $i(t)$ 。

3-2 写出下列交流电的最大值、有效值、频率及初相, 并写出其相量式, 求出 u 和 i 之间的相位差: ① $u = 311\sin(314t + 45^\circ)\text{V}$; ② $i = 14.1\cos(314t + 60^\circ)\text{A}$ 。

3-3 已知相量 $\dot{I} = 110\angle 60^\circ\text{A}$, $\dot{U} = 8 + j6\text{V}$, 若它们均为工频交流电, 试分别用瞬时值表达式及相量图表示。

3-4 电源电压 $u = 311\sin(314t + 60^\circ)\text{V}$, 分别加到电阻、电感和电容两端, 此时 $R = 44\Omega$, $X_L = 88\Omega$, $X_C = 22\Omega$, 试求各元件电流的瞬时值表达式, 电阻的有功功率, 电感、电容的无功功率。若电压的有效值不变, 而频率变为 500Hz 时, 结果又如何?

3-5 有一具有内阻的电感线圈, 接在直流电源上时通过 8A 电流, 线圈端电压为 48V; 接在 50Hz、100V 交流电源上, 通过的电流为 10A, 求线圈的电阻和电感, 并画出相量图。

3-6 某 RC 串联电路, 已知 $R = 8\Omega$, $X_C = 6\Omega$, 总电压 $U = 10\text{V}$, 试求电流 \dot{I} 和电压 \dot{U}_R 、 \dot{U}_C , 并画出相量图。

3-7 RLC 串联电路中, 电阻 $R = 4\Omega$, 感抗 $X_L = 6\Omega$, 容抗 $X_C = 3\Omega$, 电源电压 $u = 70.7\sin(314t + 60^\circ)\text{V}$ 。求电路的复阻抗 Z , 电流 i , 电压 u_R 、 u_L 、 u_C , 功率因数 $\cos\varphi$, 功率 P 、 Q 、 S ; 画出相量图。

3-8 某复阻抗 Z 上通过的电流 $i = 7.07\sin 314t\text{A}$, 电压 $u = 311\sin(314t + 60^\circ)\text{V}$, 则该复阻抗 Z 和其功率因数 $\cos\varphi$ 为多少? 有功功率、无功功率和视在功率各为多大?

3-9 在图 3-17 所示的 RLC 并联电路中, 已知 $R = 22\Omega$, $X_L = 22\Omega$, $X_C = 11\Omega$, $I_C = 20\text{A}$ 。试求电流 I_R 、 I_L 、 I 、电路的功率 P 及功率因数 $\cos\varphi$ 。

3-10 有两个阻抗分别为 $Z_1 = (2 + j2)\Omega$ 、 $Z_2 = (1 + j3)\Omega$, 当它们串联接入 $u = 311\sin(314t + 60^\circ)\text{V}$ 电源中, 求电流 i ; 当它们并联接入同样的电源中, 分别求 i_1 、 i_2 。

3-11 一感性负载的复阻抗 $Z = (6 + j8)\Omega$, 接于 50Hz、220V 电源上, 求:

(1) 电路的总电流 I_1 、有功功率 P 和功率因数 $\cos\varphi_1$ 为多少?

(2) 欲将功率因数提高到 $\cos\varphi_2 = 0.95$, 需并联多大的电容?

(3) 并联电容后电路的总电流 I_2 降为多少?