第3章

汇交力系的平衡

3.1 汇交力系

若某力系中各力的作用线汇交于一点，则该力系称为汇交力系。根据力的可传性，各力作用线的汇交点可以看作各力的公共作用点，所以汇交力系也称为**共点力系**。显然，如果考察的是质点，则作用于其上的力系必是汇交力系。

如果一汇交力系的各力的作用线都位于同一平面内，则该汇交力系称为**平面汇交力系**，否则称为**空间汇交力系**。

在实际工程中，有不少汇交力系的实例，以下进行说明。起重机起吊重物时如图 3-1(a)所示，作用于吊钩 C 的力有：钢绳拉力 $\boldsymbol{F}_3$ 及绳 AC 和 BC 的拉力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$，如图 3-1(b)所示，它们都在同一铅直平面内并汇交于 C 点，组成一平面汇交力系。图 3-2(b)为图 3-2(a)所示屋架的一部分，其中 O 点处各杆所受的力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$、$\boldsymbol{F}_4$ 在同一平面内并汇交于 O 点，也组成一平面汇交力系。图 3-3 所示铅直立柱受球铰 O 及钢绳 AB、AC 约束，柱顶受荷载 $\boldsymbol{F}$ 作用。作用于立柱的荷载 $\boldsymbol{F}$，重力 $\boldsymbol{W}$，以及约束力 $\boldsymbol{F}_O$、$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 组成一空间汇交力系，力系作用线的汇交点为 A。

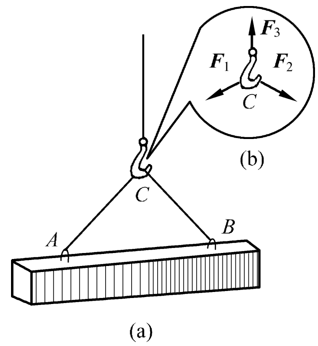


图 3-1 吊钩受力图

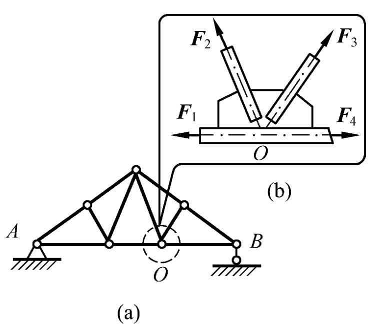


图 3-2 节点 O 受力图

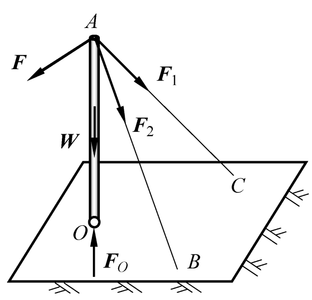


图 3-3 立柱受力图

3.2　汇交力系的简化

1. 汇交力系合成的几何法

设有汇交力系 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$、$\boldsymbol{F}_4$ 作用于刚体上的 A 点，如图 3-4(a)所示，下面说明其合成过程。前面介绍过，共点的两个力可以利用平行四边形法则或三角形法则合成为一个合力，合力等于两个分力的矢量和，并作用于两分力的公共作用点。所以，对此汇交力系只需连续应用三角形法则将各力依次合成。图 3-4(a)中的虚线箭头为合成的结果：先将力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 合成为力 $\boldsymbol{F}_{R1}$，然后将力 $\boldsymbol{F}_{R1}$ 与 $\boldsymbol{F}_3$ 合成为力 $\boldsymbol{F}_{R2}$，最后将力 $\boldsymbol{F}_{R2}$ 与 $\boldsymbol{F}_4$ 合成为力 $\boldsymbol{F}_R$。力 $\boldsymbol{F}_R$ 就是 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$、$\boldsymbol{F}_4$ 四个力的合力，合力 $\boldsymbol{F}_R$ 的作用线通过 A 点。实际上，作图时力 $\boldsymbol{F}_{R1}$ 和 $\boldsymbol{F}_{R2}$ 可不必画出，同样能够得到合力 $\boldsymbol{F}_R$，所得多边形 $Aabcd$ 称为力多边形，如图 3-4(b)所示。用力多边形求合力的方法称为**力多边形法则**。

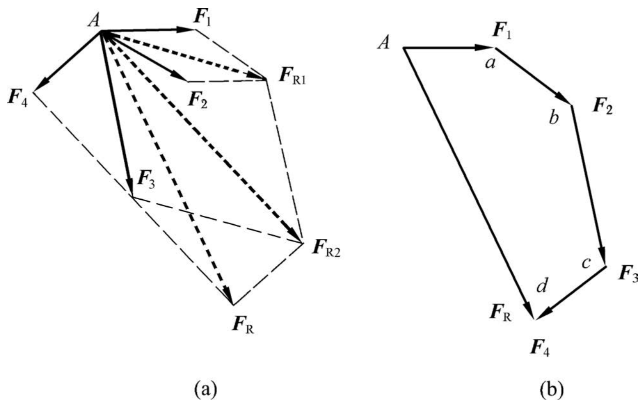


图 3-4　汇交力系合成的几何法

上述方法可以推广到汇交力系有 n 个力的情况，则可得结论：**汇交力系合成的结果是一个合力**，它等于原力系各力的矢量和，合力的作用线通过力系汇交点。以 $\boldsymbol{F}_R$ 表示汇交力系的合力，则

$$\boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_n = \sum \boldsymbol{F}_i \tag{3-1}$$

对平面汇交力系，有时用几何法求合力较为方便；而对空间汇交力系则不然，常用解析法求其合力。

2. 汇交力系合成的解析法计算

任取一直角坐标系 $Oxyz$(常把坐标原点 O 放在汇交点)，将各力用解析式表示：

$$\boldsymbol{F}_i = F_{ix}\boldsymbol{i} + F_{iy}\boldsymbol{j} + F_{iz}\boldsymbol{k}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

代入式(3-1)可得

$$\boldsymbol{F}_R = \left(\sum F_{ix}\right)\boldsymbol{i} + \left(\sum F_{iy}\right)\boldsymbol{j} + \left(\sum F_{iz}\right)\boldsymbol{k} \tag{3-2}$$

单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 前面的系数是合力 $\boldsymbol{F}_R$ 在三个坐标轴上的投影，即

$$\begin{cases}F_{Rx}=\sum F_{ix}\\F_{Ry}=\sum F_{iy}\\F_{Rz}=\sum F_{iz}\end{cases}\tag{3-3}$$

这表明,合力 $\boldsymbol{F}_R$ 在任一轴上的投影等于各分力在同一轴上投影的代数和。这一关系对任何矢量都成立,称为**矢量投影定理**。**即合矢量在任一轴上的投影,等于各分矢量在同一轴上投影的代数和**。由合力的投影可求其大小和方向余弦:

$$\begin{cases}F_R=\sqrt{F_{Rx}^2+F_{Ry}^2+F_{Rz}^2}\\\cos(\boldsymbol{F}_R,x)=\dfrac{F_{Rx}}{F_R},\quad\cos(\boldsymbol{F}_R,y)=\dfrac{F_{Ry}}{F_R},\quad\cos(\boldsymbol{F}_R,z)=\dfrac{F_{Rz}}{F_R}\end{cases}\tag{3-4}$$

如果所研究的力系是平面汇交力系,设力系所在平面为 xy 平面,则该力系的合力的大小和方向只需将 $F_{Rz}=\sum F_{iz}\equiv 0$ 代入式(3-3)和式(3-4)中便可求得。

例 3-1 用解析法求图 3-5 所示平面汇交力系的合力。已知 $F_1=500\text{N}, F_2=1000\text{N}, F_3=600\text{N}, F_4=2000\text{N}$。

解 合力 $\boldsymbol{F}_R$ 在 x、y 轴上的投影分别为

$$F_{Rx}=\sum F_{ix}=(0-1000\cos45^\circ-600+2000\cos30^\circ)\text{N}=424.94\text{N}$$

$$F_{Ry}=\sum F_{iy}=(-500-1000\sin45^\circ+0+2000\sin30^\circ)\text{N}=-207.11\text{N}$$

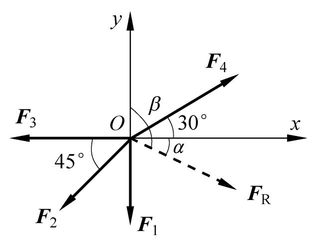


图 3-5 例 3-1 附图

再求合力 $\boldsymbol{F}_R$ 的大小及方向余弦(图 3-5 中合力用虚箭头表示):

$$F_R=\sqrt{F_{Rx}^2+F_{Ry}^2}=\sqrt{424.94^2+(-207.11)^2}\text{N}=472.72\text{N}$$

$$\cos(\boldsymbol{F}_R,x)=\cos\alpha=\frac{424.94}{472.72}=0.9$$

$$\cos(\boldsymbol{F}_R,y)=\cos\beta=\frac{-207.11}{472.72}=-0.438$$

可得 $\alpha=26^\circ, \beta=116^\circ$。

3.3 汇交力系的平衡条件

由于汇交力系可以简化为一合力,所以当一汇交力系(平面汇交力系或空间汇交力系)的合力等于零时,则该力系为平衡力系。反之,如果一个汇交力系平衡,其合力必为零。所以,汇交力系平衡的充要条件是:**力系的合力等于零,即 $\boldsymbol{F}_R=\boldsymbol{0}$**。亦即

$$\boldsymbol{F}_R=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots+\boldsymbol{F}_n=\sum\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{0}\tag{3-5}$$

合力 $\boldsymbol{F}_R$ 等于零,必须且只需 $F_{Rx}=0$, $F_{Ry}=0$, $F_{Rz}=0$,所以根据式(3-2)可知,$\boldsymbol{F}_R=\boldsymbol{0}$ 等价于三个代数方程:

$$\sum F_{ix}=0,\quad\sum F_{iy}=0,\quad\sum F_{iz}=0\tag{3-6}$$

即力系中各力在 x、y、z 三轴中的每一轴上的投影代数和均等于零。式(3-6)称为汇交力系

的**平衡方程**。如果所研究的力系是平面汇交力系，设力系所在的平面为 xy 面，则各力在 z 轴上的投影 F_{iz} 均等于零，于是平衡方程退化为

$$\sum F_{ix}=0,\quad \sum F_{iy}=0 \tag{3-7}$$

可见，对于空间汇交力系，有三个独立平衡方程，对某给定的力系可求解三个未知数；而平面汇交力系只有两个独立平衡方程，可以求解两个未知数。

需说明的是，方程式(3-6)虽然是由直角坐标系导出的，但在实际应用中并不一定取直角坐标，只需取互不平行且不都在同一平面内的三轴为投影轴即可。根据具体情况，适当选取投影轴，往往可以简化计算。(为什么可以按上述规定任取投影轴？请读者思考，并证明：无论怎样选取投影轴，独立平衡方程的数目不会超过三个。对于平面汇交力系，利用方程式(3-7)时，投影轴有何限制？请读者思考。)

解答平衡问题时，未知力的指向可以任意假设，如求解结果为正值，表示假设的指向就是实际的指向；如结果为负值，表示实际的指向与假设的指向相反。

方程(3-1)表明，对于平衡的汇交力系，如用作图法将 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n$ 相加，得到的将是闭合的力多边形(各力矢首尾相接)，即汇交力系平衡的几何条件是**力多边形闭合**。对于有些简单的平面汇交力系平衡问题，利用此条件很容易得到所需要的结果，而无须建立平衡方程。

对于共面不平行的三个力成平衡的情况，有如下结论：若共面不平行的三个力成平衡，则三力作用线必汇交于一点，且三力矢量组成闭合的三角形。这就是所谓的**三力平衡定理**，利用平行四边形法则及二力平衡原理很容易证明，请读者试证明。其实三力共面的条件并非必需的，只需不平行就可以得到上述结论了，但须利用任意力系的平衡条件才能得以证明。

例 3-2　梁 AB 支承和受力情况如图 3-6(a)所示，求支座 A、B 的反力。

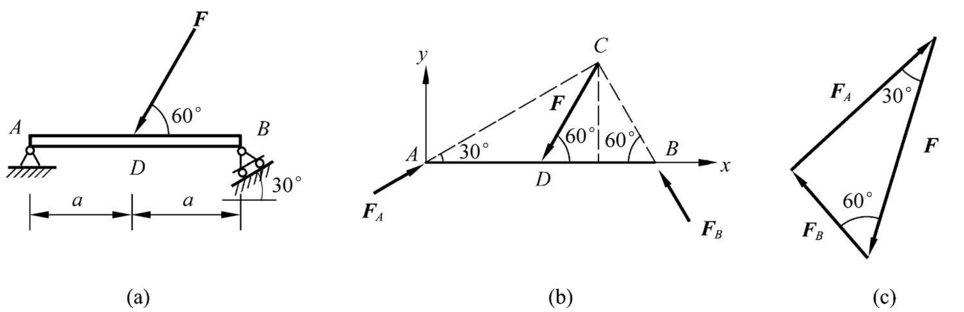


图 3-6　例 3-2 附图

解　考虑梁的平衡，作示力图如图 3-6(b)所示。根据铰支座的性质，$\boldsymbol{F}_A$ 的方向本属未定，但因梁只受三个力，而 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{F}_B$ 交于 C，故 $\boldsymbol{F}_A$ 必沿 AC 作用，并由几何关系知 $\boldsymbol{F}_A$ 与水平线成 30°。假设 $\boldsymbol{F}_A$ 与 $\boldsymbol{F}_B$ 的指向如图所示。取 x、y 轴如图 3-6(b)所示，建立平衡方程：

$$\sum F_{ix}=0:\ F_A\cos30^\circ-F_B\cos60^\circ-F\cos60^\circ=0$$

$$\sum F_{iy}=0:\ F_A\sin30^\circ+F_B\sin60^\circ-F\sin60^\circ=0$$

联立解得 $F_A=\sqrt{3}F/2$，$F_B=F/2$。结果为正值，表明假设的 $\boldsymbol{F}_A$ 与 $\boldsymbol{F}_B$ 的指向与实际情况

一致。前面讲过建立平衡方程时可以任意选取投影轴,在本题中,若取 AC 方向为投影轴,则在平衡方程中未知力 $\boldsymbol{F}_B$ 不再出现,从而可以直接求出 $\boldsymbol{F}_A$;同样若取 BC 方向为投影轴可以直接求出 $\boldsymbol{F}_B$。可见,适当选取投影轴可以避免解联立方程,从而可以简化计算过程。

如用平衡的几何条件来分析,以 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}_A$、$\boldsymbol{F}_B$ 为边作闭合多边形,如图 3-6(c)所示,即可确定 $\boldsymbol{F}_A$、$\boldsymbol{F}_B$ 的指向如图中所示,而它们的大小可由三角形之边的几何关系来确定,即 $F:F_A:F_B=2:\sqrt{3}:1$,同样可以得到上述结果。

例 3-3
讲解

例 3-3 图 3-7(a)表示一简单的压榨设备,当在 A 点加力 $\boldsymbol{F}$ 时,物体 M 将受到比 F 大若干倍的力挤压。假设 $F=200\text{N}$,求当 $\alpha=10°$时物体 M 所受的压力。

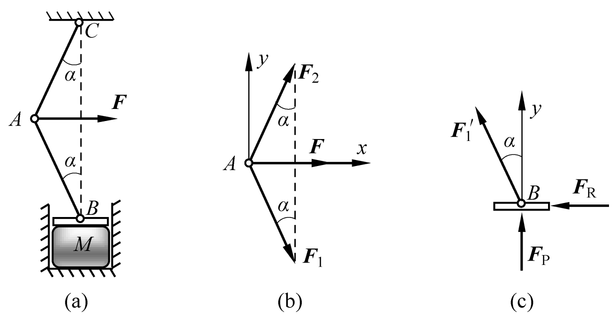


图 3-7 例 3-3 附图

解 物体 M 所受的压力是由连杆 AB 传来的。因此,首先需要根据 A 点(销钉)的平衡求出连杆 AB 所受的力。对铰 A 进行受力分析,作示力图如图 3-7(b)所示,建立平衡方程求解。

$$\sum F_{iy}=0:-F_1\cos\alpha+F_2\cos\alpha=0$$

解得 $F_1=F_2$。再由

$$\sum F_{ix}=0:F+F_1\sin\alpha+F_2\sin\alpha=0$$

解得

$$F_1=F_2=\frac{-F}{2\sin\alpha}=\frac{-200}{2\sin10°}\text{N}=-575.88\text{N}$$

再取压板为研究对象,进行受力分析,作示力图如图 3-7(c)所示。图中 $\boldsymbol{F}_{\text{R}}$ 为导槽壁对压板的作用力;$\boldsymbol{F}_{\text{P}}$ 为压板与物块之间的作用力,即物块所受的压力;$\boldsymbol{F}_1'$为连杆 AB 对压板的作用力,由于 AB 是二力杆,故有 $F_1'=F_1=-575.88\text{N}$。建立如下平衡方程求解:

$$\sum F_{iy}=0:F_1'\cos\alpha+F_{\text{P}}=0$$

解得

$$F_{\text{P}}=-F_1'\cos\alpha=575.88\text{N}\cos10°=567.13\text{N}$$

由上面的计算可见,将 M 逐渐压缩而 α 越来越小时,压力将越来越大。

例 3-4 用三根不计重量的连杆 AB、AC 和 AD 支承一重量为 W 的物体,几何关系及尺寸如图 3-8(a)所示,A、B、C、D 处都为球铰链接。试求各连杆所受的力。

解 由于三杆自重不计,两端都为铰约束,故都是二力杆。设三连杆作用于节点 A(铰 A)的力分别为 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 及 $\boldsymbol{F}_3$(假设杆均受拉,它们的反作用力即是连杆所受的力);作用于

节点 A 的力还有绳索的拉力，其大小就是悬挂物体的重量 W。如取节点 A、绳索和悬挂物体组成的系统为研究对象，则此时系统所受的力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$ 和 $\boldsymbol{W}$ 组成一空间平衡汇交力系，示力图如图 3-8(b)所示。

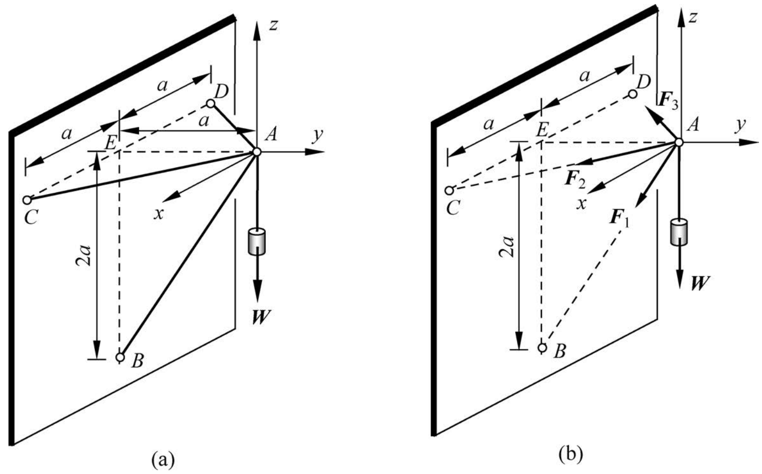


图 3-8　例 3-4 附图

建立坐标系如图所示，除 $\boldsymbol{W}$ 外，其余各力与坐标轴之间的夹角都未给定，可以直接根据有关的长度来计算力的投影，而无须计算角度。为此，先根据几何关系计算出几个必需的长度：$AD=AC=\sqrt{2}a$，$AB=\sqrt{5}a$。建立平衡方程并求解

$$\sum F_{iz}=0:-F_1\times\frac{2}{\sqrt{5}}-W=0，得\ F_1=-\frac{\sqrt{5}}{2}W。$$

$$\sum F_{ix}=0:F_2\times\frac{1}{\sqrt{2}}-F_3\times\frac{1}{\sqrt{2}}=0，得\ F_2=F_3。$$

$$\sum F_{iy}=0:-F_1\times\frac{1}{\sqrt{5}}-F_2\times\frac{1}{\sqrt{2}}-F_3\times\frac{1}{\sqrt{2}}=0，求得\ F_2=F_3=\frac{W}{2\sqrt{2}}。$$

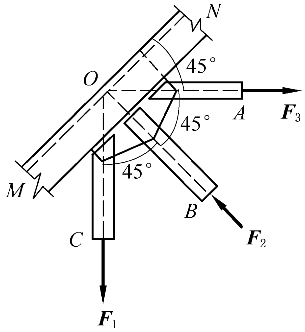
$\boldsymbol{F}_1$ 为负值，即 AB 杆受压；$\boldsymbol{F}_2$ 和 $\boldsymbol{F}_3$ 为正值，即 AC 和 AD 杆受拉。

从本章中几个平衡问题的求解过程中可以看出：求解平衡问题时，总是首先确定考察对象，把它同其他物体或所受约束脱离开来，然后分析其受力情况，正确地画出示力图。示力图上的力应包括所有作用于该考察对象的主动力和约束力。为了正确表示出约束力，必须熟悉各种约束的约束力特征，不可主观臆断来决定约束力。画好示力图后，再建立平衡方程或用几何法进行求解。建立平衡方程时，要选取适当的投影轴，以简化计算。上述这些解题步骤和原则实际上是求解静力学问题的一般规则，望初学者细心体察。

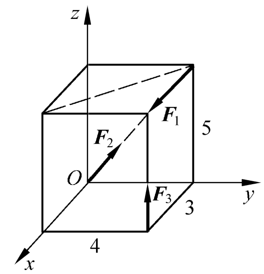
习题

3-1　如图所示，一钢结构节点在沿 OC、OB、OA 方向受到三个力的作用，已知 $F_1=1\text{kN}$，$F_2=1.414\text{kN}$，$F_3=2\text{kN}$。试求此力系的合力。

3-2　计算图中 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$ 三个力的合力。已知 $F_1=2\text{kN}$，$F_2=1\text{kN}$，$F_3=3\text{kN}$。



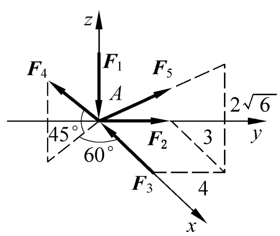
习题 3-1 附图



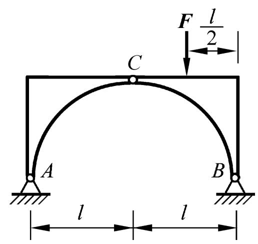
习题 3-2 附图

3-3　如图所示,已知 $F_1=2\sqrt{6}\,\mathrm{N}$,$F_2=2\sqrt{3}\,\mathrm{N}$,$F_3=1\mathrm{N}$,$F_4=4\sqrt{2}\,\mathrm{N}$,$F_5=7\mathrm{N}$。求这5个力合成的结果(提示:不必求开根号值,可使计算简化)。

3-4　如图所示,三铰拱受铅直力 $\boldsymbol{F}$ 作用。如拱的重量不计,求 A、B 处支座反力。



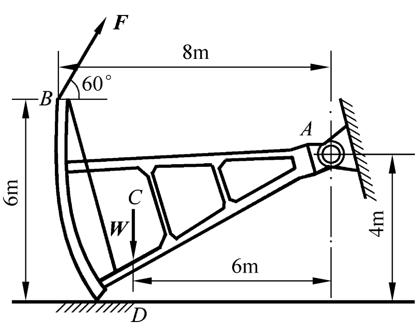
习题 3-3 附图



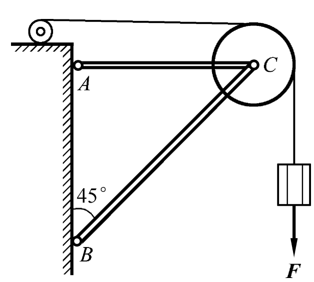
习题 3-4 附图

3-5　弧形闸门自重 $W=150\mathrm{kN}$。试求提起闸门所需的拉力 $\boldsymbol{F}$ 和铰支座 A 处的反力。

3-6　已知 $F=10\mathrm{kN}$,杆 AC、BC 及滑轮重均不计。试用几何法求杆 AC、BC 对轮的约束力。



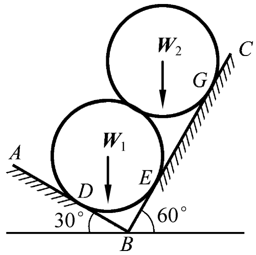
习题 3-5 附图



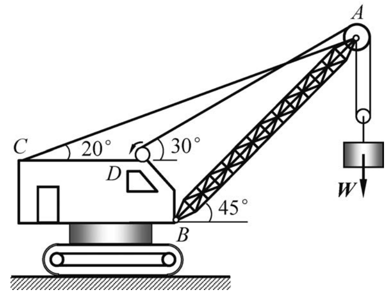
习题 3-6 附图

3-7　直径相等的两均质混凝土圆柱放在斜面 AB 与 BC 之间,柱重 $W_1=W_2=40\mathrm{kN}$。设圆柱与斜面接触处光滑,试求圆柱对斜面 D、E、G 处的压力。

3-8　图示一履带式起重机,起吊重量 $W=100\mathrm{kN}$,在图示位置平衡。如不计吊臂 AB 自重及滑轮半径和摩擦,求吊臂 AB 及缆绳 AC 所受的力。



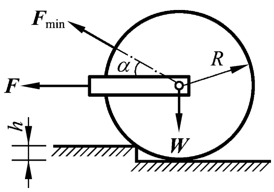
习题 3-7 附图



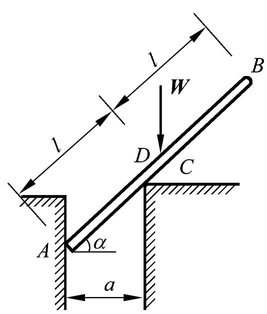
习题 3-8 附图

3-9　压路机碾子自重 $W=20\text{kN}$，半径 $R=0.4\text{m}$，若用水平力 $\boldsymbol{F}$ 拉碾子越过高 $h=80\text{mm}$ 的石坎，问 F 应多大？若要使 F 为最小，力 $\boldsymbol{F}$ 与水平线的夹角 α 应为多大？此时 F 为多少？

3-10　长 $2l$ 的杆 AB 自重为 W，搁置在宽为 a 的槽内，A、D 接触处都是光滑的。试求平衡时杆 AB 与水平线所夹的角 α（设 $l>a$）。



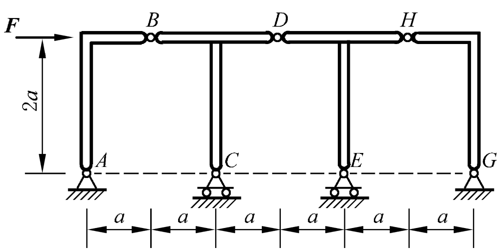
习题 3-9 附图



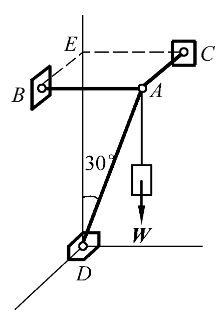
习题 3-10 附图

3-11　图示结构上作用一水平力 $\boldsymbol{F}$，结构自重不计。试求 A、C、E 三处的支座反力。

3-12　AB、AC、AD 三连杆支承一重物，如图所示。已知 $W=10\text{kN}$，$AB=4\text{m}$，$AC=3\text{m}$，且 $ABEC$ 在同一水平面内。试求三连杆所受的力。



习题 3-11 附图



习题 3-12 附图

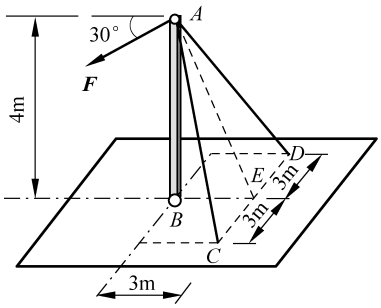
习题 3-11
讲解

3-13　铅直立柱 AB 用三根绳索固定，已知一根绳索在铅直平面 ABE 内，其张力 $F=100\text{kN}$，立柱自重 $W=20\text{kN}$。求另外两根绳索 AC、AD 的张力及立柱在 B 处受到的约

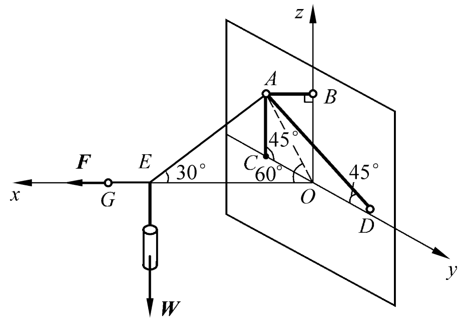
束力。

3-14　连杆 AB、AC、AD 铰连如图所示。杆 AB 水平。绳 AEG 上悬挂重物 $W=10\text{kN}$。在图示位置系统保持平衡,求 G 处绳的张力 $\boldsymbol{F}$ 及 AB、AC、AD 三杆的约束力。已知 xy 平面为水平面。

习题 3-14
讲解



习题 3-13 附图



习题 3-14 附图

本章习题参考解答

第4章

力矩　力偶理论　力偶系的平衡

4.1　力矩

4.1.1　平面内力对一点的矩

力对物体不仅有移动效应,而且有转动效应。图 4-1(a)中,作用于扳手上的力 $\boldsymbol{F}$ 可以使螺栓转动。力的转动效应是用**力矩**来量度的。

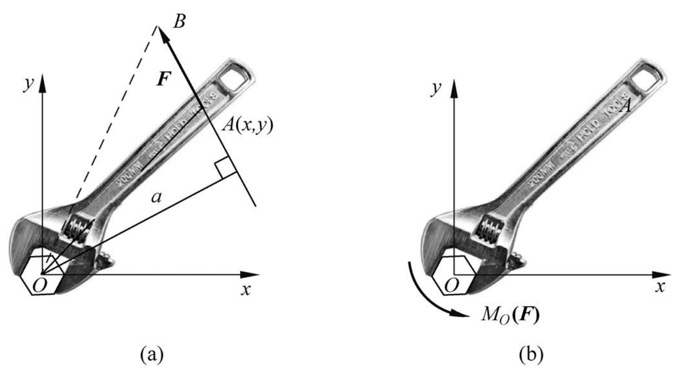


图 4-1　平面内力对一点的矩

在图示平面内,假设螺栓中心 O 到 $\boldsymbol{F}$ 作用线的垂直距离为 a,实践表明,力 $\boldsymbol{F}$ 使螺栓转动的效应与 F 和 a 的乘积有关。如用 $M_O(\boldsymbol{F})$代表力 $\boldsymbol{F}$ 对 O 点的矩,则其大小为

$$|M_O(\boldsymbol{F})| = Fa \tag{4-1}$$

其中,O 点称为**力矩中心**,简称**矩心**;a 称为力 $\boldsymbol{F}$ 对 O 点求矩时的**力臂**。力矩的单位是牛米(N·m)。力矩的大小在几何上还等于图中$\triangle OAB$ 面积的 2 倍。显然力矩具有方向,即转向(力使螺栓转动的方向),在图示平面内可能有两种转向:逆时针转和顺时针转。此两种转向可以用正负加以区别,我们规定力矩为逆时针转向时取正值;反之,取负值。如力 $\boldsymbol{F}$ 作用点 A 的坐标为(x,y),在 x、y 轴上的投影分别为 F_x 和 F_y,则力矩 $M_O(\boldsymbol{F})$的代数表达式为

$$M_O(\boldsymbol{F}) = xF_y - yF_x \tag{4-2}$$

矩心 O 与力 $\boldsymbol{F}$ 作用线所确定的平面称为**力矩作用面**,在几何上,力矩 $M_O(\boldsymbol{F})$常在力矩作用面内用一带箭头的弧线来表示,箭头所指方向就是力矩转动的方向,如图 4-1(b)所示。由于力矩大小与矩心位置有关,所以弧线箭头须绕矩心画。