

第三章 复变函数的积分

复变函数的积分是实积分在复数域的推广,是复变函数论的重要内容之一。复变函数的积分是研究解析函数的重要工具,也是解决许多理论及实际问题的重要工具。本章首先介绍复变函数积分的概念、性质和计算方法,然后重点介绍关于解析函数积分的柯西-古萨基本定理及其推广——复合闭路定理、柯西积分公式和高阶导数公式,最后利用高阶导数的解析性推出解析函数与调和函数的关系。

第一节 复变函数积分的概念

一、积分的定义

设 C 为复平面上给定的一条光滑或按段光滑曲线, A 与 B 为曲线 C 的两个端点,如果把从 A 到 B 的方向作为曲线 C 的正方向,那么从 B 到 A 的方向就是曲线 C 的负方向,记作 C^- 。我们把带有方向的曲线称为有向曲线。曲线的两个端点分别记作起点和终点,如无特殊说明,正方向总是指从起点到终点的方向。简单闭曲线 C 的正方向是指当曲线 C 上的点 P 顺着该方向沿曲线前进时,邻近 P 点的曲线内部始终位于 P 点的左边,相反的方向规定为 C 的负方向。

定义 3.1 设函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内有定义, C 为 D 内的一条以 A 为起点、 B 为终点的光滑的有向曲线,把曲线 C 任意分成 n 个弧段,设分点为

$$A=z_0, z_1, z_2, \dots, z_{k-1}, z_k, \dots, z_n=B$$

在每个弧段 $\widehat{z_{k-1}z_k}$ ($k=1, 2, \dots, n$) 上任意取一点 ζ_k (图 3.1), 并作和式

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)\Delta z_k$$

其中 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, 记 Δs_k 为 $\widehat{z_{k-1}z_k}$ 的长度, $\delta = \max_{1 \leq k \leq n} \{\Delta s_k\}$ 。当 n 无限增加, 且 δ 趋于零时, 如果不论对 C 的分法及 ζ_k 的取法如何, S_n 有唯一极限, 那么称该极限值为函数 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分, 记作

$$\int_C f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \quad (3.1)$$

注 1: 如果 $\int_C f(z) dz$ 存在, 一般不能写成定积分的形式, 但当 C 是 x 轴上的区间 $a \leq x \leq b$, $f(z) = R(x)$ 时, 上述积分定义就是一元实变函数定积分的定义。

注 2: 如果 C 为闭曲线, 那么沿此闭曲线的积分记作 $\oint_C f(z) dz$ 。

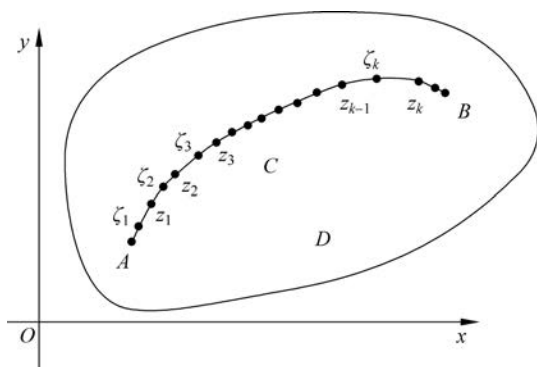


图 3.1

复变函数的积分定义主要分为以下三部分。

(1) 分割: 把曲线 C 任意分割成 n 个小弧段, 记分点为

$$A = z_0, z_1, z_2, \dots, z_{k-1}, z_k, \dots, z_n = B$$

其中 $z_k = x_k + iy_k$ 。

(2) 求和: 在每个小弧段上, 任取一点 ζ_k , 记 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, 作和式 $\sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k$ 。

(3) 取极限: 令 δ 为所有小弧段的弧长的最大值, 如果当 $\delta \rightarrow 0$ 时, 上面和式 $\sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k$ 的极限存在, 且此极限值不依赖 ζ_k 的选取和对曲线 C 的分法, 那么此极限值即为 $f(z)$ 沿曲线 C 的复积分。

例 3.1 求 $\int_C dz$, 其中 C 是连接起点 α 和终点 β 的任意一条按段光滑曲线。

解: 把曲线 C 任意分成 n 个弧段, 设分点为

$$\alpha = z_0, z_1, z_2, \dots, z_{k-1}, z_k, \dots, z_n = \beta$$

因为 $f(z) \equiv 1$, 所以有

$$\sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k = \sum_{k=1}^n \Delta z_k = z_n - z_0 = \beta - \alpha$$

故

$$\int_C dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k = \beta - \alpha$$

二、积分存在的条件及其计算方法

在实积分中, 我们知道并非所有的函数都可积, 函数可积需满足一定的条件。复变函数的积分与实变函数的积分类似, 函数 $f(z)$ 及曲线 C 需满足一定的条件, 积分 $\int_C f(z) dz$ 才存在, 那么, 积分 $\int_C f(z) dz$ 存在的条件是什么呢? 复变函数积分的存在性由下面的定理给出。

定理 3.1 设函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在光滑曲线 C 上连续, 则 $f(z)$ 沿曲线 C

的积分存在,且有

$$\int_C f(z) dz = \int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy \quad (3.2)$$

证: 设

$$z_k = x_k + iy_k \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1} = \Delta x_k + i\Delta y_k \quad \zeta_k = \xi_k + i\eta_k$$

则有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k &= \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)] (\Delta x_k + i\Delta y_k) \\ &= \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k] + i \sum_{k=1}^n [v(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k] \end{aligned}$$

由 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 C 上连续, 可知 $u(x, y), v(x, y)$ 在 C 上连续, 根据线积分的存在定理, 当 n 无限增大而弧段长度的最大值趋于零时, 不论对 C 的分法如何, 点 (ξ_k, η_k) 的取法如何, 上式右端的两个和式的极限都存在, 因此 $\int_C f(z) dz$ 必存在, 且有

$$\int_C f(z) dz = \int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy$$

公式(3.2)说明: 当 $f(z)$ 是连续函数, 且 C 为光滑曲线时, 积分 $\int_C f(z) dz$ 一定存在;

$\int_C f(z) dz$ 可通过两个二元实变函数的曲线积分来计算。

公式(3.2)在形式上可以看作函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 与 $dz = dx + idy$ 相乘后求积分得到的结果, 即

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C [u(x, y) + iv(x, y)] (dx + idy) \\ &= \int_C [u(x, y) dx - v(x, y) dy] + i \int_C [u(x, y) dy + v(x, y) dx] \\ &= \int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy \end{aligned}$$

设光滑曲线 C 的参数方程为

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

其中, 参数 α, β 分别对应曲线的起点和终点, 正方向为参数增加的方向, 且 $z'(t) \neq 0 (\alpha < t < \beta)$ 。

根据线积分的计算方法, 有

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_a^\beta \{u[x(t), y(t)]x'(t) - v[x(t), y(t)]y'(t)\} dt + \\ &\quad i \int_a^\beta \{v[x(t), y(t)]x'(t) + u[x(t), y(t)]y'(t)\} dt \\ &= \int_a^\beta \{u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)]\} [x'(t) + iy'(t)] dt \\ &= \int_a^\beta f[z(t)] z'(t) dt \end{aligned}$$

如果曲线 C 是按段光滑曲线, C 由 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 等光滑曲线段依次连接组成, 那么

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz$$

本书中所讨论的积分, 如无特别声明, 总假定被积函数是连续的, 曲线 C 是光滑的或按段光滑的。

例 3.2 计算积分 $\int_C (\bar{z})^2 dz$, 其中 C 为

- (1) 从 $A=i$ 到 $B=1+2i$ 的抛物线 $y=x^2+1$ (图 3.2(a));
- (2) 从 $A=i$ 到 $Q=1+i$ 再到 $B=1+2i$ 的折线段 (图 3.2(b))。

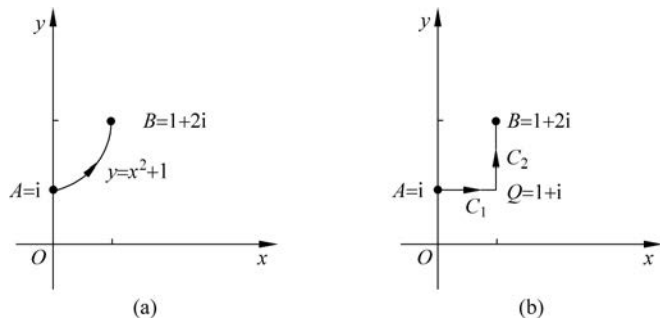


图 3.2

解: (1) 抛物线 $y=x^2+1$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=t \\ y=t^2+1 \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

或

$$z = t + i(t^2 + 1) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

在抛物线上, 有

$$\bar{z} = t - i(t^2 + 1) \quad dz = (1 + 2ti) dt$$

于是

$$\begin{aligned} \int_C (\bar{z})^2 dz &= \int_0^1 [t - i(t^2 + 1)]^2 (1 + 2ti) dt \\ &= \int_0^1 (3t^4 + 3t^2 - 1) dt + i \int_0^1 (-2t^5 - 4t^3 - 4t) dt \\ &= \frac{3}{5} - \frac{10}{3}i \end{aligned}$$

(2) 如图 3.2(b) 所示, C_1 的参数方程为

$$\begin{cases} x=t \\ y=1 \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

或

$$z = t + i \quad (0 \leq t \leq 1)$$

在 C_1 上, 有

$$\bar{z} = t - i \quad dz = dt$$

C_2 的参数方程为

$$\begin{cases} x=1 \\ y=t \end{cases} \quad (1 \leq t \leq 2)$$

或

$$z = 1 + it \quad (1 \leq t \leq 2)$$

在 C_2 上,有

$$\bar{z} = 1 - it \quad dz = i dt$$

所以

$$\begin{aligned} \int_C (\bar{z})^2 dz &= \int_{C_1} (\bar{z})^2 dz + \int_{C_2} (\bar{z})^2 dz \\ &= \int_0^1 (t^2 - 1 - 2ti) dt + \int_1^2 [2t + (1 - t^2)i] dt \\ &= \frac{7}{3} - \frac{7}{3}i \end{aligned}$$

例 3.3 计算积分 $\int_C |z| dz$, 其中 C 为

- (1) 从 $A = -i$ 到 $B = i$ 的直线段(图 3.3(a));
- (2) 从 $A = -i$ 到 $B = i$ 的、以原点为中心的左半单位圆(图 3.3(b));
- (3) 从 $A = -i$ 到 $B = i$ 的、以原点为中心的右半单位圆(图 3.3(c)).

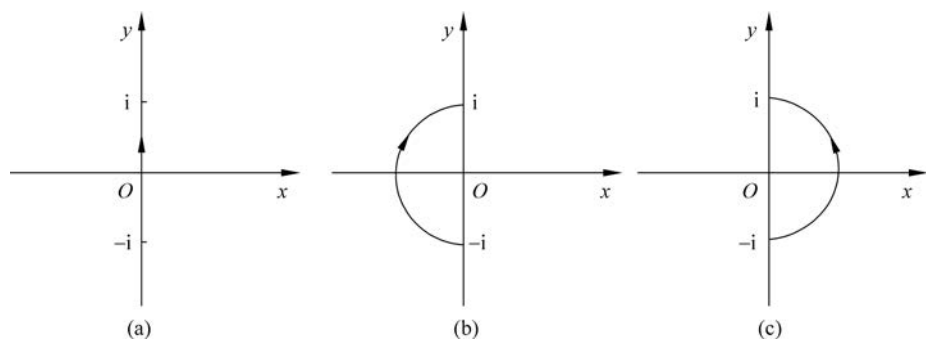


图 3.3

解: (1) C 的参数方程为

$$z = it \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

于是

$$|z| = |it| = |t| \quad dz = i dt$$

所以

$$\int_C |z| dz = \int_{-1}^1 |t| i dt = 2i \int_0^1 t dt = it^2 \Big|_0^1 = i$$

(2) C 的参数方程为

$$z = e^{-it} \quad \left(\frac{1}{2}\pi \leq t \leq \frac{3}{2}\pi \right)$$

于是

$$|z| = |e^{-it}| = 1 \quad dz = -ie^{-it} dt$$

所以

$$\begin{aligned} \int_C |z| dz &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -ie^{-it} dt = -i \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\cos t - i \sin t) dt \\ &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin t dt - i \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos t dt = 2i \end{aligned}$$

(3) C 的参数方程为

$$z = e^{it} \quad \left(-\frac{1}{2}\pi \leq t \leq \frac{1}{2}\pi\right)$$

于是

$$|z| = |e^{it}| = 1 \quad dz = ie^{it} dt$$

所以

$$\begin{aligned} \int_C |z| dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ie^{it} dt = i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + i \sin t) dt \\ &= - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt + i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 2i \end{aligned}$$

例 3.4 计算 $\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^n}$, 其中 C 为以 z_0 为中心、 r 为半径的正向圆周(图 3.4), n 为整数。

解: C 为正向圆周, 其参数方程为

$$z = z_0 + re^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

显然有

$$dz = ire^{i\theta} d\theta$$

于是

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^n} &= \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{r^n e^{in\theta}} d\theta = \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)\theta} d\theta \\ &= \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} [\cos(n-1)\theta - i \sin(n-1)\theta] d\theta \\ &= \begin{cases} 2\pi i & (n=1) \\ 0 & (n \neq 1) \end{cases} \end{aligned}$$

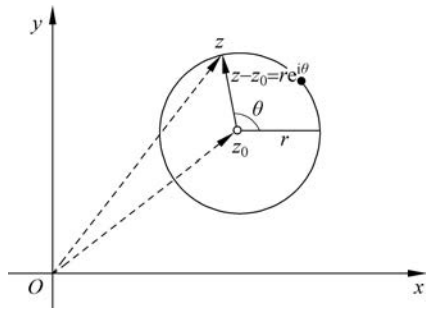


图 3.4

本例的特点是, 积分结果与积分路径圆周的中心和半径无关。此结果应熟记, 以后会经常用到。

三、积分的性质

由复变函数积分的定义可以推出复积分的一些简单性质, 这些性质与一元实函数定积分的性质类似。

$$(1) \int_C f(z) dz = - \int_{C^{-}} f(z) dz$$

$$(2) \int_C k f(z) dz = k \int_C f(z) dz (k \text{ 为常数})$$

$$(3) \int_C [f(z) \pm g(z)] dz = \int_C f(z) dz \pm \int_C g(z) dz$$

$$(4) \int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \cdots + \int_{C_n} f(z) dz$$

其中, $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ 。

(5) 设曲线 C 的长度为 L , 函数 $f(z)$ 在 C 上满足 $|f(z)| \leq M$, 则有

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| ds \leq ML$$

利用复积分的定义或曲线积分的有关性质, 容易证得性质(1)~(4), 下面来证明性质(5)。

证: 因为

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| |\Delta z_k| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| \Delta s_k$$

其中, $|\Delta z_k|$ 和 Δs_k 分别表示曲线 C 上弧段 $\widehat{z_{k-1} z_k}$ 对应的弦长和弧长。

将上述不等式两边取极限, 得

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| ds$$

特别地, 若在曲线 C 上 $|f(z)| \leq M$, L 为曲线 C 的长度时, 有

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| ds \leq ML$$

例 3.5 证明:

(1) $\left| \int_C (x^2 + iy^2) dz \right| \leq 2$, 其中 C 为连接 $-i$ 到 i 的线段;

(2) $\left| \int_C \frac{1}{z^2} dz \right| \leq 1$, 其中 C 为连接 i 到 $i+1$ 的线段。

证: (1) 由题意易知, 如图 3.3(a) 所示, 曲线 C 的长度 $L=2$ 。

曲线 C 的参数方程为

$$\begin{cases} x=0 \\ y=t \end{cases} \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

在 C 上, 有

$$f(z) = x^2 + iy^2 = it^2 \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

$$|f(z)| = |it^2| = t^2 \leq 1$$

故

$$M=1$$

由性质(5), 有

$$\left| \int_C (x^2 + iy^2) dz \right| \leq ML = 2$$

(2) 由题意易知, 如图 3.5 所示, 曲线 C 的长度 $L=1$ 。

曲线 C 的参数方程为

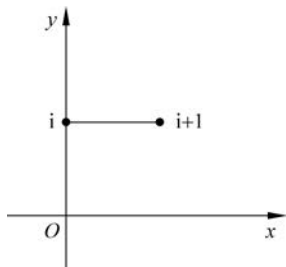


图 3.5

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

在 C 上,有

$$f(z) = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{(x+iy)^2} = \frac{1}{(t+i)^2} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{(t+i)^2} \right| = \frac{1}{|t+i|^2} = \frac{1}{t^2+1} \leq 1$$

故

$$M = 1$$

由性质(5),有

$$\left| \int_C \frac{1}{z^2} dz \right| \leq ML = 1$$

第二节 柯西-古萨基本定理及其推广

一、柯西-古萨基本定理

在实变函数中,若 D 是一个单连通区域, $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 内具有一阶连续偏导数,则曲线积分 $\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 在 D 内与路径无关的充要条件是 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 内恒成立。

由公式(3.2)知,复变函数积分可以通过两个二元实变函数的曲线积分来计算:

$$\int_C f(z) dz = \int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy$$

因此,复变函数积分与积分路径关系问题的研究,可以转化为实变函数曲线积分与路径关系问题的研究。那么,在什么条件下,积分 $\int_C f(z) dz$ 与路径无关? 定理 3.2 回答了这一问题。

定理 3.2 如果函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析,且 $f'(z)$ 在 D 内连续,则 $f(z)$ 沿 D 内任意一条简单闭曲线 C 的积分为零,即

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

古萨于 1900 年指出,定理 3.2 中的假设“ $f'(z)$ 在 D 内连续”这一条件是多余的。于是就得到了下述的柯西-古萨基本定理。

定理 3.3(柯西-古萨基本定理) 如果函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析,则 $f(z)$ 沿 D 内任意一条封闭曲线 C 的积分为零,即

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

定理 3.3 又称为柯西积分定理。它的证明比较复杂,感兴趣的读者可以自学,此处不再展开。

柯西-古萨基本定理的条件之一是 $f(z)$ 在 C 上解析,事实上这个条件可以用较弱的条件来代替。

定理 3.4 如果曲线 C 是单连通区域 D 的边界,函数 $f(z)$ 在 D 内与 C 上解析,那么

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

定理 3.5 如果曲线 C 是单连通区域 D 的边界,函数 $f(z)$ 在 D 内解析,在闭区域 $\bar{D}$ 连续,那么

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

例 3.6 计算 $\oint_{|z|=1} \sin z dz$ 。

解: 因为 $\sin z$ 在整个复平面上都解析, $|z|=1$ 是复平面上的一条简单闭曲线,所以由柯西-古萨基本定理知

$$\oint_{|z|=1} \sin z dz = 0$$

例 3.7 计算 $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z-3i} dz$ 。

解: 因为 $\frac{1}{z-3i}$ 在曲线 $|z|=1$ 的内部及曲线上都解析 ($\frac{1}{z-3i}$ 的奇点 $z=3i$ 在曲线 $|z|=1$ 的外部),所以由柯西-古萨基本定理知

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z-3i} dz = 0$$

二、基本定理的推广——复合闭路定理

将柯西-古萨基本定理推广到多连通域的情形,得到下面的定理。

定理 3.6(复合闭路定理) 设 C 为多连通域 D 内的一条简单闭曲线, $C_1, C_2, \dots, C_n$ 是在 C 内部的简单闭曲线,它们互不包含也互不相交,并且以 $C, C_1, C_2, \dots, C_n$ 为边界的区域全含于 D (图 3.6),如果 $f(z)$ 在 D 内解析,那么

$$(1) \oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz, \text{ 其中 } C \text{ 及 } C_k$$

均取正方向;

$$(2) \oint_{\Gamma} f(z) dz = 0. \text{ 其中 } \Gamma \text{ 为由 } C \text{ 及 } C_k (k=1,$$

$2, \dots, n$) 所组成的复合闭路(其方向是 C 按逆时针进行, C_k 按顺时针进行)。

证: 先证较简单的情形。假设 C 及 C_1 为 D 内的任意两条简单闭曲线, C_1 在 C 的内部,且以 C 及 C_1 为边界的区域 D_1 全含于 D 。

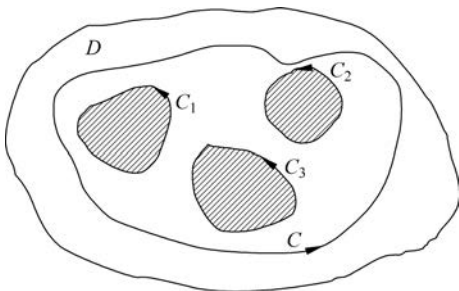


图 3.6

如图 3.7 所示,作弧段 $\widehat{AA'}$ 及 $\widehat{BB'}$, $\widehat{AA'}$ 连接 C 上某一点 A 与 C_1 上某一点 A' , $\widehat{BB'}$ 连接 C 上某一点 B 与 C_1 上某一点 B' , 两弧段不相交, 且除去端点外全含于 D_1 。因此, $AEBB'E'A'A$ 及 $AA'F'B'BFA$ 为两条全在 D 内的简单闭曲线, 它们的内部全含于 D 。由柯西-古萨基本定理可知

$$\oint_{AEBB'E'A'A} f(z) dz = 0 \quad (3.3)$$

$$\oint_{AA'F'B'BFA} f(z) dz = 0 \quad (3.4)$$

将式(3.3)与式(3.4)相加,得

$$\oint_C f(z) dz + \oint_{C_1} f(z) dz = 0 \quad (3.5)$$

或

$$\oint_C f(z) dz = -\oint_{C_1} f(z) dz \quad (3.6)$$

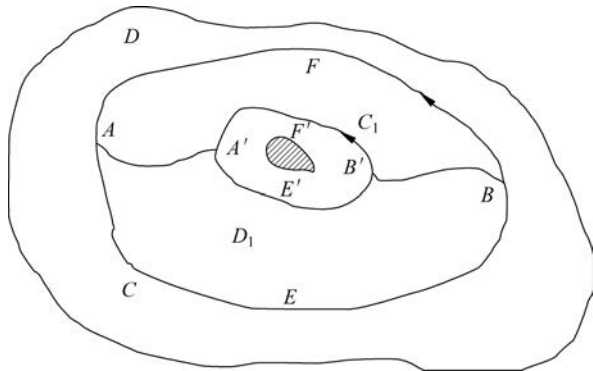


图 3.7

用同样的方法,可以证明复合闭路定理的其他情形。

式(3.6)中曲线 C_1 可以看成曲线 C 经过连续变形(不离开区域 D)而得到的, 我们由此得到解析函数积分的一个重要性质。

定理 3.7 (闭路变形原理) 在区域 D 内的一个解析函数 $f(z)$ 沿闭曲线的积分, 不因闭曲线在区域内作连续变形而改变它的值, 只需在变形过程中曲线不经过函数 $f(z)$ 不解析的点。

例 3.8 计算 $\oint_C \frac{z+1}{2(z^2-z)} dz$, 其中 $C: |z|=2$ 。

解: 显然, 函数 $f(z) = \frac{z+1}{2(z^2-z)}$ 在复平面内除 $z=0, z=1$ 两个奇点外是处处解析的。如图 3.8 所示, 在 C 内作两个互不包含也不相交的正向圆周 C_1, C_2 , C_1 只包含奇点 $z=0$, C_2 只包含奇点 $z=1$ 。

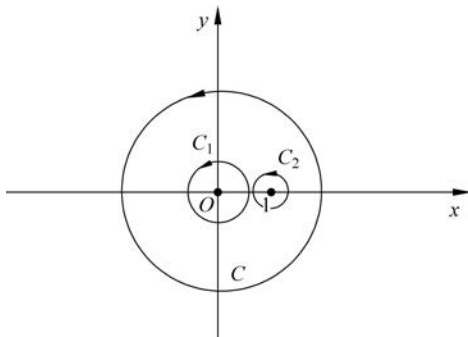


图 3.8