大学生数学竞赛辅导教程

|基础与进阶|

段利霞　孔新雷　主编
钱　盛　钟　昱　王智慧　副主编

清華大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书主要围绕近十年全国大学生数学竞赛初赛试题的考核侧重范围，将微积分的经典内容进行划分重组，最终以专题的形式呈现出来. 全书共包括九个专题，几乎覆盖了高等数学课程的所有经典内容. 每个专题又包括了知识框架、基础训练和能力进阶三个模块. 本书不仅对各专题涉及的知识点进行了简单梳理，而且总结了常见的题目类型和计算方法. 特别之处，能力进阶模块对近十年竞赛真题做了详细的思路分析并且给出了细致的求解过程. 储备知识，夯实基础，竞赛检验，能力进阶，这既是贯穿本书编写过程的主线，也是编者对本书读者的真挚祝愿.

本书可以作为参加全国大学生数学竞赛的辅导用书，也可以作为高等院校高等数学课程的参考用书.

图书在版编目（CIP）数据

大学生数学竞赛辅导教程 : 基础与进阶 / 段利霞，孔新雷主编.—北京：清华大学出版社，2023.8

ISBN 978-7-302-63871-1

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①段… ②孔… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国国家版本馆 CIP 数据核字（2023）第 111896 号

责任编辑：刘　颖
封面设计：傅瑞学
责任校对：王淑云
责任印制：沈　露

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　邮　　编：100084
社 总 机：010-83470000　　邮　　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：艺通印刷（天津）有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170mm×240mm　　印　张：13　　字　　数：239 千字
版　　次：2023 年 8 月第 1 版　　印　　次：2023 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：39.00 元

产品编号：100984-01

前 言

PREFACE

全国大学生数学竞赛 (CMC) 自 2009 年首次举办, 至今已经走过了 14 个寒暑. 该竞赛为热爱数学的青年学子们提供了一个展示自己数学功底的平台, 为高校发现和选拔具有良好数学基础的后备人才提供了参考与借鉴, 此外还为高等学校数学课程建设的改革和发展积累了素材.

我校 (北方工业大学) 很早就认识到了数学竞赛对于高等数学教育的重大意义, 学校高度重视、老师倾心投入、学生积极参与, 这在北方工业大学已经成为优良的传统, 根深而蒂固. 我校为激发学生的参赛热情, 帮助那些优秀学子在竞赛中取得理想的成绩, 投入了大量的人力物力, 采取了一系列积极有力的措施, 比如在春季学期和秋季学期分别开设 “高等数学提高 I”“高等数学提高 Ⅱ” 等课程对学生进行系统的培训, 在每年 6 月份举办校内数学竞赛作为全国大学生数学竞赛的热身. 此外老师们还经常利用课余时间对优秀学生进行一对一式的针对性辅导. 经过数年如一日的努力, 我们的竞赛培训工作积累了不少经验, 同时也取得了令人欣慰的成绩, 比如最近几年我校在竞赛中的获奖总人数始终位于市属高校前列. 同时有不少工科学生通过参与竞赛提升了自己的数学能力, 从而有效地推动了专业课的学习, 有很多学生在升学深造中取得了优异的成绩, 被北大、清华、北航、浙大等知名高校录取.

成绩的取得促使我们产生了分享成功经验的想法, 我们想把这些年的培训资料、具体做法总结成书, 以便与程度相当的普通高校进行交流, 并为普通高校中有志于参加竞赛的学子提供一份可供参考的资料.

本书的结构是这样的：全书包括九个专题, 每章内容由知识框架、基础训练、能力进阶三个模块构成. 其中知识框架提纲挈领地罗列了本章的主要知识点. 考虑到这本教辅书的读者都有着比较扎实的数学基础, 所以框架部分的写法较为简洁, 我们追求的是线索清晰, 而非面面俱到. 基础训练模块, 我们选取的是一些与考研真题难度相当或者略低于考研难度的题目, 这部分题目在竞赛中属于中低难度的题型. 设置这个模块的目的是让青年读者对于数学竞赛中的常用方法和基本题型有初步的认识. 最后是能力进阶模块, 这个模块主要搜罗数学竞赛当中有一定难度的题目, 设置它的目的是使青年读者的解题能力得到有效的提升. 这部分题目均选自近些年的竞赛真题, 我们在每个题的题号之后都标注了真题的年份.

为了确保内容的时效性, 我们选取真题的时间下限为 2012 年. 当然为了与我校教学特点相适应, 同时也为了保证参赛选手的积极性, 有些难度过大的真题我们没有选入, 而且对于每个题的解法, 我们也是有所选择. 有些题目的解法不止一种, 我们尽可能地选取思路自然、步骤简明的解法呈现给读者, 同时在每个题的求解之前, 我们均简要地给出了该题的求解思路.

本书是由北方工业大学公共数学团队的段利霞、孔新雷、钱盛、钟昱、王智慧五位老师共同编写. 我们水平有限, 但是常年主讲高等数学提高系列课程, 积极参与校内竞赛的组织与全国大学生数学竞赛的培训工作, 在此过程中积累了一些教学经验, 本书可以算是我们这个团队近几年工作的一个总结. 本书是在北方工业大学公共数学团队的带头人邹杰涛教授的悉心指导和大力推动下完成的, 邹老师从教三十余年, 经验丰富, 在本书编写过程中为我们提出了非常多而且细致入微的宝贵建议. 此外本书在出版过程中得到了各级领导在政策、经济方面的支持. 在此, 对曾给予过我们大力支持和无私帮助的领导、校内外专家、同事表示衷心的感谢. 北方工业大学非常重视本科生教学工作, 在学校的支持下, 我们公共数学团队近年来与清华大学出版社合作出版了多部教材和教辅图书, 每一部书的出版都凝聚了出版社刘颖老师的心血. 刘颖老师为这些教材的编写工作提出了很多宝贵意见, 大幅提升了这些教材的质量. 本书编者代表北方工业大学公共数学团队对刘老师表示衷心的感谢.

本书编者是五位青年教师, 水平有限, 疏漏之处在所难免, 恳切希望读者指正. 如果读者发现错误, 可以通过企业微信和我们联系.

编　者

2023 年 2 月于北方工业大学

目 录

CONTENTS

专题一　函数、极限与连续

模块一　知识框架

一、函数

1. 函数的定义
2. 函数的典型特性：有界性、单调性、奇偶性、周期性
3. 反函数, 基本初等函数, 复合函数, 初等函数

二、极限

1. 极限的定义：数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 函数极限 $\lim\limits_{x\to\square} f(x) = A$
2. 极限的性质：收敛数列的性质、函数极限的性质
3. 计算极限的常用方法：

(1) 函数的连续性：代入法

(2) 极限的运算法则：四则运算法则、复合函数的极限运算法则

(3) 极限存在准则：夹逼准则、单调有界收敛准则

(4) 重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1, \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$

(5) 等价无穷小替换：无穷小量, 常用等价无穷小关系

(6) 洛必达法则：$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

(7) 泰勒公式或麦克劳林公式：常用初等函数的麦克劳林公式

(8) 导数的定义：增量比值的极限

(9) 定积分的定义：无穷和式的极限

(10) 数项级数收敛的必要条件：如果数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(11) 幂级数的相关理论

三、连续

1. 连续函数的定义：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$
2. 函数的间断点及其分类
3. 连续函数的运算性质：四则运算, 反函数和复合函数的连续性
4. 基本初等函数和初等函数的连续性
5. 闭区间上连续函数的性质：有界性定理、最值定理、零点存在定理、介值定理

模块二 基础训练

一、数列极限的计算

1. 利用运算法则

注 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$ (a, b 为确定的数), 则

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b,\qquad \lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=a\cdot b,$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}\ (b\neq 0),\qquad \lim_{n\to\infty}a_n^{b_n}=a^b\ (a>0).$$

例 1 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 存在, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$, 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=A$, 则根据极限的四则运算法则, 得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(b_n\cdot\frac{a_n}{b_n}\right)=\lim_{n\to\infty}b_n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0\cdot A=0.$$

注 函数极限也满足类似结论, 即若 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在, $\lim\limits_{x\to\square} g(x)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=0$.

例 2 求极限 $L=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-n^2+5n}{3n^3+n-1}$.

解 根据极限的四则运算法则, 得

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{1-1/n+5/n^2}{3+1/n^2-1/n^3}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1-1/n+5/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}(3+1/n^2-1/n^3)}=\frac{1}{3}.$$

例 3 求极限 $L=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n}$.

解 将表达式运算、变形, 得

$$L=\lim_{n\to\infty}(3^n+5^n)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}5\left[1+\left(\frac{3}{5}\right)^n\right]^{1/n},$$

其中

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\left(\frac{3}{5}\right)^n\right]=1,$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}1/n=0$. 因此, $L=5\times 1^0=5$.

2. 利用夹逼准则

通常, 表达式比较复杂时可能用夹逼准则.

例 4 设数列通项

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}},$$

求极限 $L=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解 易知

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant a_n\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1.$$

因此, 由夹逼准则可得 $L=1$.

例 5 求极限 $L=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n}$.

解 显然

$$5<\sqrt[n]{3^n+5^n}<\sqrt[n]{5^n+5^n}=5\sqrt[n]{2},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}5\sqrt[n]{2}=5$, 因此, $L=5$.

练 1 求极限 $L=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}}$.

解 易知

$$1 < \sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}} < \sqrt[n]{n},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, 因此, 由夹逼准则可得 $L=1$.

3. 利用单调有界性

此类极限问题往往需要先证明极限存在, 然后通过解方程求极限.

例 6 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l<1$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解 因 $l<1$, 故 $\exists N\in\mathbf{Z}^+$, 使得当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1,\quad \text{即 } |a_{n+1}|<|a_n|.$$

于是自第 N 项后数列 $\{|a_n|\}$ 单调递减且有下界 0, 故收敛.

假设 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=a>0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1\neq l,$$

显然与已知条件矛盾. 因此, $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

例 7 求极限 $L=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^5}{3^n}$ 和 $K=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!\,2^n}{n^n}$.

解 不妨记 $a_n=\frac{n^5}{3^n}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5}{3^{n+1}}\frac{3^n}{n^5}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^5=\frac{1}{3}<1.$$

由例 6 结论可知 $L=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 类似的办法可求得 $K=0$.

注 除上述方法外, 还可以利用函数极限、微分和积分中值定理、定积分等求数列极限, 这些将在后面陆续介绍.

二、证明数列极限存在

主要思路: 1. 利用单调有界收敛准则 2. 证奇偶子列收敛于同一极限

例 8 设 $0<a_1<1,\ a_{n+1}=a_n(2-a_n), n=1,2,\cdots$. 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛并求其极限.

解 已知 $0<a_1<1$, 设 $0<a_k<1$, 则

$$0<a_{k+1}=a_k\,(2-a_k)<\left[\frac{a_k+(2-a_k)}{2}\right]^2=1.$$

由归纳法可知 $0<a_n<1\ (n\geqslant 1)$, 即 $\{a_n\}$ 有界. 又因为

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2-a_n>1,$$

所以 $\{a_n\}$ 单调递增. 因此, 根据单调有界收敛准则可知 $\{a_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 由 $a_{n+1}=a_n\,(2-a_n)$ 两边取极限得 $a=a\,(2-a)$. 进一步根据极限的保序性得 $a\geqslant a_1>0$, 由此可知, $a=1$.

练 2 设 $0<x_1<\dfrac{\pi}{2}$, $x_{n+1}=\sin x_n\ (n\geqslant 1)$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证明 当 $n>2$ 时, 易知

$$0<x_n=\sin x_{n-1}\leqslant 1.$$

因此, 数列 $\{x_n\}$ 有界. 又因为 $x_{n+1}=\sin x_n<x_n$, 所以 $\{x_n\}$ 单调递减. 因此, 根据单调有界收敛准则可知 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 对 $x_{n+1}=\sin x_n$ 两边取极限得 $a=\sin a$, 解得 $a=0$.

例 9 设 $0<a_0<b_0$, $a_n=\sqrt{a_{n-1}\,b_{n-1}}$, $b_n=\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$. 证明：数列

$$a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\cdots,\ a_n,\ b_n,\ \cdots$$

收敛.

证明 由 $0<a_0<b_0$ 和均值不等式可得 $a_0<a_1<b_1<b_0$. 同理, 利用归纳法可知对一切 $n\in\mathbb{Z}^+$ 有

$$a_{n-1}<a_n<b_n<b_{n-1},$$

即数列 $\{a_n\}$ 单调递增有上界 b_0, 数列 $\{b_n\}$ 单调递减有下界 a_0. 因此, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 均收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, 则由 $b_n=\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ 两边取极限可解得 $a=b$. 若记待证明数列为 $\{x_n\}$, 则 $x_{2k-1}=a_k$, $x_{2k}=b_k$. 因 $\{x_{2k-1}\}$ 与 $\{x_{2k}\}$ 收敛于同一极限, 故 $\{x_n\}$ 收敛.

三、无穷小的比较

当 $x \to 0$ 时, 常用的等价无穷小:

$$\sin x \sim x, \qquad \arcsin x \sim x, \qquad \tan x \sim x, \qquad \arctan x \sim x,$$

$$\mathrm{e}^x - 1 \sim x, \qquad \ln(1+x) \sim x, \qquad 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}, \qquad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x.$$

事实上, 若将上面等价关系中的 x 换成表达式 $\square$, 则等价关系仍成立, 只要 $\square \to 0$. 例如

$$\mathrm{e}^{\sin x} - 1 \sim \sin x,\ x \to 0,$$

$$\mathrm{e}^{2x-1} - 1 \sim 2x-1,\ x \to 1/2.$$

四、求函数极限

1. 利用等价无穷小替换

⋆ $\dfrac{0}{0}$ 型极限

例 10 求极限 $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ \ln(1+x)}{\sqrt{1-x^2}-1}$.

解 根据常用的等价无穷小可知, 当 $x \to 0$ 时, 有

$$\ln(1+x) \sim x, \quad \sqrt{1-x^2} - 1 = (1-x^2)^{1/2} - 1 \sim -\frac{x^2}{2}.$$

因此

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{-x^2/2} = -2.$$

注 分子、分母或其因子项可用其任意等价无穷小去替换. 非因子项不能随意替换. 例如下面的例子, 可以验证, $\tan x \sim x + 2x^3$, $\sin x \sim x - x^3$, 但若用这组等价无穷小分别替换分子中的 $\tan x$ 和 $\sin x$, 则会得到错误的结果.

例 11 求极限 $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

解 $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x\,(1-\cos x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \cdot x^2/2}{x^3} = \dfrac{1}{2}$.

注 分子分母中含和差项时可提公因式将其变为乘积.

练 3 求极限 $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$.

解 利用等价无穷小替换, 得

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\cos x}\left(\mathrm{e}^{1-\cos x}-1\right)}{x^2/3}=\mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2/3}=\frac{3\,\mathrm{e}}{2}.$$

例 12 求极限 $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\sin x)^x-1}{\tan^2 x}$.

解 将极限变形后利用等价无穷小替换可得

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\,\ln(1-\sin x)}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\,\ln(1-\sin x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x}=-1.$$

练 4 求极限 $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^{x^2}-2^{x^2}}{\arctan^2 x}$.

解 利用等价无穷小替换, 得

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{2^{x^2}\left(3^{x^2}-1\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2^{x^2}\left(\mathrm{e}^{x^2\,\ln 3}-1\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\,\ln 3}{x^2}=\ln 3.$$

例 13 设 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)+g(x)}{h(x)}$ 为 $\dfrac{0}{0}$ 型极限, 如果用 $f_1(x)$ 替换 $f(x)$, 使得

$$\lim_{x\to\square}\frac{f_1(x)+g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to\square}\frac{f(x)+g(x)}{h(x)},$$

那么 $f_1(x)$ 需满足什么条件?

解 由

$$\lim_{x\to\square}\frac{f(x)+g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to\square}\frac{f_1(x)+g(x)}{h(x)}$$

可知

$$\lim_{x\to\square}\left[\frac{f(x)+g(x)}{h(x)}-\frac{f_1(x)+g(x)}{h(x)}\right]=\lim_{x\to\square}\frac{f(x)-f_1(x)}{h(x)}=0.$$

因此

$$f(x)-f_1(x)=o[h(x)],\quad x\to\square.$$

例 14 求极限 $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\mathrm{e}^{x^2}-1\right)-\ln(1+x^2)}{x^4}$.

解 根据麦克劳林公式得

$$e^{x^2}-1=x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4),\quad \ln(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4),$$

那么, 由例 13 的讨论可知

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+\dfrac{x^4}{2}\right)-\left(x^2-\dfrac{x^4}{2}\right)}{x^4}=1.$$

练 5 求极限 $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\ln(1+x)}{x^2}$.

解 根据麦克劳林公式得

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)=x+o(x^2),\quad \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2),$$

那么, 由例 13 的讨论可知

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\dfrac{x^2}{2}\right)}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

$\star$ $f(x)^{g(x)}$ 型极限

基本解法是: $\lim\limits_{x\to\square}f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\square}g(x)\ln[f(x)]}$.

例 15 求极限 $L=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

解 令 $t=1/x$, 则

$$L=\lim_{t\to 0}(\sin t+\cos t)^{1/t}=\lim_{t\to 0}e^{\frac{1}{t}\ln(\sin t+\cos t)}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\ln[1+(\sin t+\cos t-1)]},$$

而

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln[1+(\sin t+\cos t-1)]}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t+\cos t-1}{t}=1,$$

因此, $L=e^1=e$.

练 6 求极限 $L=\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\frac{1}{x-\pi/2}}$.

解 令 $t=x-\pi/2$, 则

$$L=\lim_{t\to 0}(\cos t)^{\frac{1}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\ln(\cos t)}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t}}=e^0=1.$$

⋆ $\infty-\infty$ 型极限

基本解法是: 通分, 将其化成 $\dfrac{0}{0}$ 型极限.

例 16 求极限 $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$.

解 通分后可得

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x\left(\mathrm{e}^x-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x^2}.$$

进一步利用洛必达法则得

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{2x}=\frac{1}{2}.$$

2. 利用四则运算法则

例 17 求极限 $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\,x^7-x^5+x^4}{x^7-x^6+\sin^4 x}$.

解 根据极限的四则运算法则, 有

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sin^4 x}{x^7}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sin^4 x}{x^7}\right)}=3.$$

练 7 求极限 $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x+1)^2(x+2)^5}{(x+1)^3(x-2)^4}$.

解 根据极限的四则运算法则, 可得

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2+1/x)^2(1+2/x)^5}{(1+1/x)^3(1-2/x)^4}=4.$$

3. 利用夹逼准则

例 18 求极限 $L=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin x+2\arctan x)^{\frac{1}{x}}$.

解 当 $x>\dfrac{\pi}{4}$ 时, 有 $1\leqslant\sin x+2\arctan x\leqslant\pi+1$, 进一步可知

$$1\leqslant(\sin x+2\arctan x)^{\frac{1}{x}}\leqslant(\pi+1)^{\frac{1}{x}}.$$

显然

$$\lim_{x\to+\infty}(\pi+1)^{\frac{1}{x}}=(\pi+1)^0=1,$$

因此, 根据夹逼准则, $L=1$.

练 8 求极限 $L=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^3\cdot\left[\dfrac{1}{x}\right]}{\ln(1+x^2)}$.

解 当 $x>0$ 时, 有

$$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]<\frac{1}{x},$$

因此

$$x^2-x^3<x^3\cdot\left[\frac{1}{x}\right]<x^2,$$

$$\frac{x^2-x^3}{\ln(1+x^2)}<\frac{x^3\cdot\left[\dfrac{1}{x}\right]}{\ln(1+x^2)}<\frac{x^2}{\ln(1+x^2)}.$$

由于

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-x^3}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{\ln(1+x^2)}=1,$$

因此, $L=1$.

五、利用函数极限求数列极限

例 19 求极限 $L=\lim\limits_{n\to\infty}n\,(\sqrt[n]{2}-1)$.

解 $L=\lim\limits_{x\to+\infty}x\,(2^{1/x}-1)=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{2^{\,t}-1}{t}=\ln 2$.

例 20 求极限 $L=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln n}(\sqrt[n]{n}-1)$.

解 当 $n\to\infty$ 时, 有

$$\sqrt[n]{n}-1=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n}-1\sim\frac{\ln n}{n},$$

因此

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\ln n}\cdot\frac{\ln n}{n}\right)=1.$$

练 9 求极限 $L=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n+1)-\ln(n-1)}{\sqrt[n]{\mathrm{e}}-1}$.

解　当 $n \to \infty$ 时, 有

$$\ln(n+1)-\ln(n-1)=\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)\sim\frac{2}{n-1},$$

而 $\sqrt[n]{\mathrm{e}}-1=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}$, 所以

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{2/(n-1)}{1/n}=2.$$

模块三　能力进阶

例 1 (2013)　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right)\right]^n$.

【思路解析】　所求极限属于 1^∞ 型极限. 当然, 为了更加明确 $\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right)\to 0$, 可以利用正弦函数的周期性对表达式进行变形. 计算幂指型极限, 通常利用等式 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)^{g(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\square}(g(x)\ln[f(x)])}$ 转化为计算乘积的极限, 而对于本题转化之后的极限而言, 根据表达式比较容易找到对应的计算方法.

解　由于

$$\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right)=\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}-2n\pi\right)=\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n},$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right)\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right]^n.$$

先考虑求过对数之后的极限

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)&=\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\\&=\lim_{n\to\infty}n\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right)\right]^n=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}.$$

例 2 (2014) 设 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【思路解析】 所求极限属于无穷和式的极限. 通常, 计算无穷和式的极限有以下几种方法:

(1) 尝试将和式的和求出来, 进而转化为数列极限;

(2) 无法直接求和时, 尝试将和式做适度放缩后再求和, 结合夹逼准则确定极限;

(3) 将和式理解为积分和 (必要时也需进行适度放缩), 进而将极限表示成定积分;

(4) 利用幂级数的相关理论和方法.

方法 (1) 的适用范围非常有限, 只能处理比较特殊的和式极限, 例如, 等差数列或等比数列的前 n 项和. 当然, 本题中的求和式也是非常典型的情况, 借助一定的变换技巧, 和式的和也能够非常容易地求出来.

解 对 x_n 变形可得

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1-1}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)=1-\frac{1}{(n+1)!}.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{(n+1)!}\right]=1.$$

例 3 (2014) 已知 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$, 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}$.

【思路解析】 计算所求极限首先需要明确 $\frac{f(x)}{x^2}$ 或 $\frac{f(x)}{x}$ 的表达式, 很明显要由已知条件解出, 因为条件中刚好包含 $\frac{f(x)}{x}$. 试想, 如果已知等式中没有极限运算, 那么, 通过简单的代数运算就可以从中解出 $\frac{f(x)}{x}$. 而根据熟知的结论, 去掉极限运算后, 左右两侧的表达式相差一个无穷小量 $o(1)$, 此时仍然可以得到一个严格的等式关系, 并且从中也能够解出 $\frac{f(x)}{x}$ 的表达式, 只不过其中包含着引入的无穷小量. 明确了 $\frac{f(x)}{x^2}$ 的表达式之后, 接下来就可以利用常规的方法计算所求极限, 而且会发现之前引入的无穷小量并没有给极限计算带来多大的挑战.

解　利用已知等式可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=3,$$

那么, 当 $x\to 0$ 时, 有

$$\frac{1}{x}\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=3+o(1),\qquad 即\ \ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=3x+o(x).$$

由上式可得

$$\frac{f(x)}{x}=\mathrm{e}^{3x+o(x)}-x-1,$$

因此,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{3x+o(x)}-x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{3x+o(x)}-1}{x}-1\\&=\lim_{x\to 0}\frac{3x+o(x)}{x}-1=2.\end{aligned}$$

例 4 (2015)　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n^2+n}\right]$.

【思路解析】　本题与例 2 类似, 也属于计算无穷和式的极限. 根据例 2 中总结的方法, 首先可以尝试直接或者经适度放缩后将和式的和求出来, 显然这都无法实现. 另外, 注意到和式中每一项的分子刚好对应于函数 $\sin x$ 在闭区间 $[0,\pi]$ 的 n 等分点处的函数值, 这会使我们联想到定积分的定义. 当然, 为了能够凑出积分和的形式, 还需要进一步统一和式中每一项的分母, 这就涉及对和式进行适度放缩. 事实上, 分母的表达式也为放缩求和式提供了可行的思路和方法.

解　根据表达式分母的大小关系, 可以将表达式分别放缩为

$$\begin{aligned}n\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n^2+2}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n^2+n}\right]&\leqslant n\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n^2}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n^2}\right]\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n},\end{aligned}$$

$$n\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n^2+2}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n^2+n}\right]\geqslant n\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+n}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n^2+n}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n^2+n}\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}.$$

利用定积分的定义可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n} = 1\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

因此, 由夹逼准则可得

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n^2+1}+\frac{\sin\dfrac{2\pi}{n}}{n^2+2}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n^2+n}\right] = \frac{2}{\pi}.$$

例 5 (2016) 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 且 $f(a)\neq 0$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$.

【思路解析】 所求极限属于 1^∞ 型极限. 对于该幂指型极限, 如果也仿照例 1 进行变形处理, 那么会涉及复合函数 $\ln f(x)$ 有无定义的问题. 因此, 不宜再选用例 1 中的计算方法. 对于 1^∞ 型极限, 还可以利用第二类重要极限来求, 那么就需要将 $f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)$ 表示成 $f(a)$ 加上一个无穷小量的形式. 对照这一目标, 再结合 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导这一条件, 自然应当利用带皮亚诺余项的泰勒公式.

解 利用泰勒公式有

$$f\left(a+\frac{1}{n}\right) = f(a)+f'(a)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

那么

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{f'(a)\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{f'(a)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^{\frac{f(a)}{f'(a)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{n\left[f'(a)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]}{f(a)}}$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

例 6 (2016) 若 $f(1)=0$, $f'(1)$ 存在, 求极限 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)\tan 3x}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)\sin x}$.

【思路解析】 很明显极限表达式中的部分因子可以根据熟知的结论进行等价无穷小替换, $\tan 3x\sim 3x$, $\mathrm{e}^{x^2}-1\sim x^2$, $\sin x\sim x$, 替换之后就演变为计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2}$. 当 $x\to 0$ 时, $f(\sin^2 x+\cos x)\to f(1)=0$, 而已知条件中又明确了 $f'(1)$ 存在, 这些信息都提示要将所求极限与导数 $f'(1)$ 的定义建立起联系.

解 等价无穷小替换后可得

$$I=3\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2}.$$

利用 $f(1)=0$, 进一步可以将极限转化为

$$\begin{aligned}I&=3\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin^2 x+\cos x-1)-f(1)}{x^2}\\&=3\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin^2 x+\cos x-1)-f(1)}{\sin^2 x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2},\end{aligned}$$

其中

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin^2 x+\cos x-1)-f(1)}{\sin^2 x+\cos x-1}=f'(1),$$

而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x-\sin x}{2x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(2\cos x-1)}{2x}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

因此, 原极限 $I=\dfrac{3}{2}f'(1)$.

例 7 (2017) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.

【思路解析】 本题的求解技巧与例 1 类似. 停留在给出的表达式上, 不易分析明确数列通项的变化趋势, 因而需要将其进行恒等变形. 注意到 $\sin^2 x$ 是以 $n\pi$ 为周期的周期函数, 因此, $\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi)$, 进一步分子有理化之后便能够直观地确定出极限值.

解 $\sin x$ 是以 $2n\pi$ 为周期的周期函数, 易证 $\sin^2 x$ 是以 $n\pi$ 为周期的周期函数. 因此

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\right) = 1.\end{aligned}$$

例 8 (2017) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f(0)=f'(0)=0$, $f''(0)=6$, 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}.$$

【思路解析】 所求极限为 0/0 型, 且分子、分母均有二阶连续导数. 因此, 可以尝试利用洛必达法则计算极限. 除此之外, 已知条件给出了 $f(0)=f'(0)=0$ 以及 $f''(0)=6$, 这些信息提示也可以利用麦克劳林公式先将 $f(\sin^2 x)$ 展开再计算极限.

解法 1 根据洛必达法则, 有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4} &= \lim_{x\to 0}\frac{f'(\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cdot\cos x}{4x^3}\\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(\sin^2 x)}{x^2}\\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f''(\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cdot\cos x}{2x}\\ &= \frac{1}{2}f''(0) = 3.\end{aligned}$$

解法 2 由麦克劳林公式有

$$f(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2 \quad (\xi_1 \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

再由已知条件 $f(0)=f'(0)=0$ 可得

$$f(\sin^2 x) = \frac{1}{2}f''(\xi_2)\sin^4 x, \qquad \text{其中 } \xi_2\in(0,\sin^2 x).$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(\xi_2)}{2}\frac{\sin^4 x}{x^4}=\lim_{\xi_2\to 0}\frac{f''(\xi_2)}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^4 x}{x^4}=3.$$

例 9 (2017) 设 $\{a_n\}$ 为一个数列, p 为固定的正整数, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$.

【思路解析】 本题具有一定的难度, 完整的证明过程需要用到数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义以及数列极限和数列子列极限之间的逻辑关系等深入细致的理论内容, 而这些内容在某种程度上似乎已经超出了高等数学的范畴. 另外, 本题在 2011 年大学生数学竞赛中就考核过, 而且略带提示地被设置成了两小问. 第一小问证明结论: 如果数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$

第二小问就是证明本题的结论, 当然, 其证明过程需要利用到第一小问的结论.

证明 令

$$b_n^i=a_{(n+1)p+i}-a_{np+i},\quad i=0,1,\cdots,p-1,$$

则由已知条件可得 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n^i=\lambda$. 利用思路解析中的结论进一步可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_1^i+b_2^i+\cdots+b_n^i}{n}=\lambda,$$

而其中

$$\begin{aligned}b_1^i+b_2^i+\cdots+b_n^i&=a_{2p+i}-a_{p+i}+a_{3p+i}-a_{2p+i}+\cdots+a_{(n+1)p+i}-a_{np+i}\\&=a_{(n+1)p+i}-a_{p+i},\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\lambda&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}\cdot\frac{(n+1)p+i}{n}=p\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}.\end{aligned}$$

由上式可得, 对于任意的 $i=0,1,\cdots,p-1$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\frac{\lambda}{p},$$

即根据 i 的取值从数列 $\{a_m\}$ 中选取的所有 p 个子列极限都等于 λ/p. 因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{m\to\infty}\frac{a_m}{m}=\frac{\lambda}{p}.$$

例 10 (2018) 设 $\alpha\in(0,1)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha-n^\alpha]$.

【思路解析】 本题在竞赛真题中实际上是一个填空题, 显然如果只是写出正确答案的话, 有一个取巧的方法, 那就是特殊地选取 $\alpha=1/2$. 对于一般的 $\alpha\in(0,1)$, $\dfrac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^\alpha<1+\dfrac{1}{n}$, 因此, $(n+1)^\alpha<n^\alpha+n^{\alpha-1}$. 另外, 显然 $(n+1)^\alpha-n^\alpha>0$. 两组不等式结合在一起就是对原数列通项的一种合理放缩, 再根据夹逼准则就可以确定出极限.

解 当 $\alpha\in(0,1)$ 时, 有

$$\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha<1+\frac{1}{n},$$

因此

$$(n+1)^\alpha<n^\alpha+n^{\alpha-1},$$

即

$$0<(n+1)^\alpha-n^\alpha<n^{\alpha-1}.$$

当 $\alpha\in(0,1)$ 时, 易知 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha-1}=0$, 那么根据夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha-n^\alpha]=0$.

例 11 (2018) 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$.

【思路解析】 所求极限虽然属于 0/0 型, 但是显然利用洛必达法则计算极限不太现实, 因为对分子中三个函数的乘积求导过于复杂. 当然, 这也提示我们为了求出极限需要将 $\cos x$, $\sqrt{\cos 2x}$ 和 $\sqrt[3]{\cos 3x}$ 这三个函数实现分离. 根据熟知的结论, 当 $x\to0$ 时, $1-\cos x\sim x^2/2$, 那么在分子中减去一个 $\cos x$ 再加上一个 $\cos x$, 就可以利用极限的四则运算法则将所求极限进行拆分计算进而实现化简. 化简后的极限就不再包含函数 $\cos x$, 而是分子演变成了 $1-\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}$. 利用类似的方法可以进一步实现 $\sqrt{\cos 2x}$ 和 $\sqrt[3]{\cos 3x}$ 分离. 对于拆分后的每一个极限, 常规的计算方法就可以应对.

解 根据极限运算满足的四则运算法则, 有

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$$

$$
\begin{aligned}
&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\left(1-\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}\right)}{x^2}\\
&=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2},
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos 2x}(1-\sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x\sqrt{\cos 2x}}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x\sqrt[3]{\cos^2 3x}}\qquad\text{(洛必达法则)}\\
=&1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}.
\end{aligned}
$$

因此, 原极限

$$
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=3.
$$

例 12 (2019) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x}\right)-\sin x}{\arctan\left(4\sqrt[3]{1-\cos x}\right)}$.

【思路解析】 首先, 分母中有明显的等价无穷小替换 $\arctan x\sim x$. 其次, 分子中为减法运算, 而相减的两项中又分别包含了 $\ln\mathrm{e}^{\sin x}$ 和 $\sin x$. 显然, 如果将后面的 $\sin x$ 等价地变形为 $\ln\mathrm{e}^{\sin x}$, 那么分子中的减法运算就可以演变为乘法运算, 而且刚好凑成了 $\ln(1+x)$ 的形式, 因而可以进一步进行等价无穷小替换. 事实上, 当不满足极限四则运算法则时, 尽可能地将表达式中的加减法运算转化为乘除法运算是计算极限的一个通用且有效的做法. 这一点在其他题目中也有所体现.

解 利用等价无穷小替换, 可得

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x}\right)-\sin x}{\arctan\left(4\sqrt[3]{1-\cos x}\right)}&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x}\right)-\ln\mathrm{e}^{\sin x}}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{\sqrt[3]{1-\cos x}}{\mathrm{e}^{\sin x}}\right)}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}
\end{aligned}
$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-\cos x}}{4\mathrm{e}^{\sin x}\sqrt[3]{1-\cos x}}=\frac{1}{4}.$$

例 13 (2020) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)\mathrm{e}^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1}$.

【思路解析】 显然, 当 $x\to 0$ 时, $\mathrm{e}^{-x^2}\to 1$, 而 $\sqrt{1-x^3}-1\sim -\dfrac{1}{2}x^3$, 那么将这两项代入或替换后, 计算所求极限就简化为计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$, 这样就演变成了一个常规性的基础题目, 接下来无论是利用洛必达法则还是利用泰勒公式都非常容易求得结果.

解 根据极限运算满足的四则运算法则, 得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)\mathrm{e}^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1}&=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\sqrt{1-x^3}-1}=-2\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\\&=-2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2}=-\frac{1}{3},\end{aligned}$$

其中后面的计算过程用到了洛必达法则和等价无穷小替换等方法.

例 14 (2020) 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域 U 内有定义, 对任意 $x\in U$, $f(x)\neq g(x)$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=a>0$, 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{[f(x)]^{g(x)}-[g(x)]^{g(x)}}{f(x)-g(x)}.$$

【思路解析】 所求极限虽然是 0/0 型, 但是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的可导性未知, 所以无法利用洛必达法则. 毫无疑问, 求解的关键应该是合理地处理分子. 按照例 12 思路解析中总结的原则, 分子 $[f(x)]^{g(x)}-[g(x)]^{g(x)}$ 应尽可能转化为乘除法, 最直接的方式就是提取出一个因子 $[g(x)]^{g(x)}$. 进一步将幂指型函数等价地变为指数函数之后, 分子就可以进行等价无穷小替换. 再往下计算思路和方法都会比较明晰.

解 由于 $a>0$, 因此, 根据极限的保号性, 在 $x=0$ 的某一去心邻域内 $f(x)>0$, $g(x)>0$. 基于此, 可将原极限做如下变形:

$$\lim_{x\to 0}\frac{[f(x)]^{g(x)}-[g(x)]^{g(x)}}{f(x)-g(x)}=\lim_{x\to 0}\left([g(x)]^{g(x)}\cdot\frac{\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]^{g(x)}-1}{f(x)-g(x)}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to0}[g(x)]^{g(x)}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{g(x)\ln\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]}-1}{f(x)-g(x)}\\
&= a^a\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{g(x)\ln\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]}-1}{f(x)-g(x)}.
\end{aligned}
$$

利用等价无穷小替换, 可得

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{g(x)\ln\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]}-1}{f(x)-g(x)} &= \lim_{x\to0}\frac{g(x)\ln\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]}{f(x)-g(x)}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{g(x)}-1\right]}{\dfrac{f(x)}{g(x)}-1}=1.
\end{aligned}
$$

因此, 原极限

$$
\lim_{x\to0}\frac{[f(x)]^{g(x)}-[g(x)]^{g(x)}}{f(x)-g(x)}=a^a.
$$

例 15 (2020) 设数列 $\{a_n\}$ 满足

$$
a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{a_n}{(n+1)(a_n+1)},\ n\geqslant1,
$$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n!a_n$.

【思路解析】 要想计算所求极限首先需要明确通项 a_n 的确切表达式, 这自然应当从已知的递推公式求得. 但是, 在给定的递推公式中, a_{n+1} 关于 a_n 并不是一个线性函数, 因而通过迭代的方式不易求得 a_{n+1} 的确切表达式. 换个角度细致分析, 不难发现 $1/a_{n+1}$ 关于 $1/a_n$ 刚好是一个简单一次函数, 这样循环代入后就可以比较容易地求得 a_{n+1} 以及 a_n 的确切表达式.

解 根据 a_n 的表达式可知

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a_n}&=n+n\frac{1}{a_{n-1}}\\
&=n+n\left[n-1+(n-1)\frac{1}{a_{n-2}}\right]\\
&=n+n(n-1)+n(n-1)\left[n-2+(n-2)\frac{1}{a_{n-3}}\right]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}&\vdots\\&= n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \cdots + n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1.\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}n!a_n &= n!\frac{1}{n!\left[\dfrac{1}{(n-1)!}+\dfrac{1}{(n-2)!}+\cdots+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{1!}\right]}\\&=\frac{1}{\dfrac{1}{(n-1)!}+\dfrac{1}{(n-2)!}+\cdots+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{1!}},\end{aligned}$$

因此, 根据指数函数 e^x 的幂级数展开式易知, $\lim\limits_{n\to\infty} n!a_n = \mathrm{e}^{-1}$.

例 16 (2021) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}\cdot\dfrac{x-\ln(\mathrm{e}^x+x)}{x}\right]$.

【思路解析】 注意到本题中自变量的变化过程为 $x\to+\infty$, 易知 $\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}\to 1$, 因此, 根据极限的四则运算法则所求极限就转化为 $\lim\limits_{x\to+\infty}[x-\ln(\mathrm{e}^x+x)]$. 例 12 思路解析曾总结到, 计算极限应尽可能将加减法运算转化为乘除法运算, 只要留意到 $x=\ln\mathrm{e}^x$, 这一加减法向乘除法的转化不难实现.

解 将极限式进行运算变形可得

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{x-\ln(\mathrm{e}^x+x)}{x}\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}\left\{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\cdot[\ln\mathrm{e}^x-\ln(\mathrm{e}^x+x)]\right\}\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\cdot\ln\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+x}\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1}{1+\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}}.\end{aligned}$$

易知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}=0$, 对应地, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}}=0$. 因此

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{x-\ln(\mathrm{e}^x+x)}{x}\right]=0.$$

例 17 (2021) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\displaystyle\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}.$$

【思路解析】 所求极限为 0/0 型, 且分子、分母也均为可导函数, 因此, 最容易想到的方法就是利用洛必达法则. 分子求导主要涉及变上限积分求导, 相对比较容易, 而分母求导则需要先将被积函数中的变量 x 从积分中剥离出来, 这通过常规性的变量替换即可实现. 原极限经过一次洛必达法则简化之后, 继续往下计算时需注意选取正确方法, 特别要留意函数 $f(x)$ 只满足连续性.

解 令 $x-t=u$, 则分母中的定积分

$$\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t = -\int_x^0 f(u)\mathrm{d}u = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

因此, 原极限可以转化为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\displaystyle\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t} &= 2\lim_{x\to 0}\frac{x\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}\\ &= 2\left(1-\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}\right).\end{aligned}$$

利用洛必达法则和积分中值定理, 得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t} &= \lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{xf(\xi)+xf(x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{f(\xi)+f(x)} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

其中 ξ 介于 0 和 x 之间. 因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\displaystyle\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t} = 1.$$

例 18 (2021) 设 $x_1 = 2021$,

$$x_n^2 - 2(x_n+1)x_{n+1} + 2021 = 0 \quad (n \geqslant 1).$$

证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

【思路解析】 证明一个数列收敛并进一步求出数列极限, 这类题目最常用的方法就是利用单调有界收敛准则, 只不过我们通常碰到的、感觉习惯的数列往往是以递推公式 $x_{n+1} = f(x_n)$ 的形式给出的. 事实上, 本题所给出的等式也是由 x_n 到 x_{n+1} 的递推公式, 只是它不是我们所习惯的显式形式而已.

解 将已知等式进行变形可得

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2+2021}{2(x_n+1)} = \frac{(x_n+1)^2-2(x_n+1)+2022}{2(x_n+1)} = \frac{x_n+1}{2} - 1 + \frac{1011}{x_n+1}.$$

令 $y_n = x_n + 1$, 则 $y_n > 0$ 且满足递推公式

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{2} + \frac{1011}{y_n}.$$

显然, 对于任意的 n, 有

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{2} + \frac{1011}{y_n} > \sqrt{2022}, \quad \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1}{2} + \frac{1011}{y_n^2} < 1,$$

即数列 $\{y_n\}$ 单调递减有下界. 因此, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 均存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$, 则在递推公式两侧同时取极限可得

$$A = \frac{A}{2} + \frac{1011}{A}.$$

进一步结合数列极限的保号性可知, $A = \sqrt{2022}$. 对应地, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2022} - 1$.

例 19 (2022) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}\cos x}{1+x^2-\cos^2 x}$.

【思路解析】 所求极限为 $0/0$ 型, 并且表达式的分子、分母均为可导函数, 因而, 可以尝试利用洛必达法则计算极限, 只不过求导的过程稍显复杂. 除此之外, 也不难联想到利用泰勒公式展开这一方法. 事实上, $\sqrt{1-x^2}$ 和 $\cos x$ 按照麦克劳林公式展开到比较低的阶数就可以确定出极限.